Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

О.М.Калиева, А.И. Буреш

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Рекомендовано Учёным советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки
080100.62 Экономика, 230700.62 Прикладная информатика,
100800.62 Товароведение

Оренбург
2012

УДК 330.4:517.9(075.8)
ББК 65в631я7+22.16я7
К 17

Рецензент
доктор экономических наук, профессор кафедры математических методов анализа экономики Московского Государственного Открытого Университета Б.А.Лагоша

Калиева, О.М.
К 17 Основы математического анализа. Приложения в экономике: учебное пособие / О.М.Калиева, А.И. Буреш; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2012. – 209 с.

ISBN

В данном учебном пособии рассматривается применение основных разделов математического анализа: «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной» для исследования и решения экономических задач. Помимо теоретического материала в пособии содержатся примеры и задания для самостоятельной работы по каждой теме. Рассмотрены решения типовых задач, отражающих специфику экономических расчётов. Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной формы обучения по направлению подготовки 080100.62 Экономика, 230700.62 Прикладная информатика, 100800.62 Товароведение.

УДК 330.4:517.9(075.8)

ББК 65в631я7+22.16я7

ISBN

Содержание

Введение

Математика зародилась в глубокой древности и к настоящему времени проникла в той или иной степени во многие сферы человеческой деятельности. Математические методы давно и успешно использовались в таких точных науках, как механика, физика, астрономия, находили широкое применение в технике.

В последнее время существенно расширилось приложение математики к экономике, химии, биологии, медицине, психологии, лингвистике, социологии и другим гуманитарным наукам. Чем же обьяснить такую большую роль, которую играет в жизни человеческого общества столь абстрактная и, казалась бы оторванная от реальности наука?

Развитие интеллектуальной составляющей человечествав любой конкретной области обычно связано не только с рассмотрением качественных особенностей различных объектов, явлений и процессов, но и с анализом их пространственных и количественных характеристик, для описания которых необходим общий метод. Именно такой метод, который пригоден для самых различных приложений, даёт математика.

Суть общего метода математики состоит в том, что для конкретного изучаемого объекта строят или используют готовую математическую модель, представленную в виде формул, уравнений, геометрических образов или логических соотношений, а затем средствами математического аппарата анализируют её. Результаты такого анализа проверяют сопоставлением с реальностью и в случае расхождения уточнюят математическую модель или отказываются от неё и строят новую. Отвечающая реальности (адекватная) математическая модель – большое научное достижение.

Одним из условий успешного развития современной экономики и ведущих отраслей промышленности является математизация научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ в перспективных экономических направлениях. Основными проявлениями этой матемизации становится широкое использование методов математического моделирования и вычислительного эксперимента. Они состоят в адекватной замене реального экономического объекта или процесса соответствующей математической моделью и в её последующем изучении на ЭВМ с помощбю вычислительно-логических алгоритмов. Для решения таких задач необходимы специалисты высокой квалификации, профессионально владеющие как экономическими знаниями и навыками, так и математическими методами и их реализацией средствами современной вычислительной техники.

Подготовка таких специалистов должна стать, по-видимому, одной из основных задач университетов. Отмеченные особенности подготовки специалистов в университетах выдвигают ряд специфических требований к курсу математики как к основе непрерывного и углубленного образования экономиста.

Учебное пособие построено по принципу: рассмотрен теоретический материал (определения, теоремы с доказательствами) по темам: «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции», продемонстрированы практические примеры, рассмотрены и решены прикладные экономические задачи по указанным выше темам. После каждого раздела даны задания для самостоятельного решения.

Изложение учебного пособия именно в такой последовательности связано с тем, что хотелось бы студентам экономических специальностей показать на практике «связь математики и экономики», интеграцию этих двух направлений, что невозможно из-за малого количества отведённых на предмет «математика» аудиторных часов.

Учебное пособие написано в соответствии с требованиями стандарта в области математики для студентов очной и заочной формы обучения по направлению бакалавриата ВПО «Экономика», «Прикладная информатика», «Товароведение».

§1 Числовые последовательности и арифметические действия над ними

Изучение числовых последовательностей начинают в средней школе. Примерами таких последовательностей могут служить:

1) натуральный ряд N;

2) последовательность всех членов арифметической и геометрической прогрессии;

3) последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность;

4) последовательность $x_1=1$, $x_2=1.4$, $x_3=1.41,\ldots$ приближенных значений $\sqrt{2}$.

Уточним понятие числовой последовательности.

Определение**:** Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1,2,3,\ldots,\ldots n$ поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел

$$x_1,\, x_2,\, x_{3,\ldots,} x_n, \ldots \tag{1}$$

называется *числовой* последовательностью или просто п*оследовательностью*.

Числа x_1, x_2, $x_{3,\ \ldots,}$ x_n, ... называются *элементами* (или *членами*) последовательности (1), символ x_n - *общим* элементом (или членом) последовательности, а число n – его *номером*. Сокращенно последовательность (1) обозначается символом $\{x_n\}$. Так, например, символ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ обозначает последовательность 1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого её элемента. Например, формула $x_n = 1 + (-1)^n$ задает последовательность: 0,2, 0,2,… Обращая дробь $\frac{1}{3}$ в десятичную и оставляя один, два, три и т.д. знака после запятой, получаем последовательность

$$x_1 = 0{,}3;\ x_2 = 0{,}33;\ \ x_3 = 0{,}333{,}..;\ x_n = 0{,}333\ldots3{,}\ldots$$

По определению последовательность содержит бесконечное число элементов: любые два её элемента отличаются, по крайней мере, своими номерами.

Пример 1.

Написать пять первых элементов каждой из последовательностей, заданных их общими элементами: а) $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$; б) $x_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$; в) $x_n = \dfrac{\sin(\pi n/2)}{n}$.

Р е ш е н и е. а) $\{x_n\}: \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{7}; \dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{11}; \ldots$

б) $\{x_n\}: \dfrac{1}{4}; \dfrac{2}{8}; \dfrac{3}{16}; \dfrac{4}{32}; \dfrac{5}{64}; \ldots$

в) $\{x_n\}: 1;\ 0;\ \dfrac{-1}{3};\ 0;\ \dfrac{1}{5};\ \ldots$

Пример 2.

Зная несколько первых элементов последовательности, написать формулу ее общего элемента:

а) $1;\quad \dfrac{1}{3^2};\quad \dfrac{1}{5^2};\quad \dfrac{1}{7^2};\ldots .$

б) $1;\quad \dfrac{1}{1\cdot 2};\quad \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3};\quad \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ldots .$

в) $-1;\quad 1;\quad -1;\quad 1;\quad -1;\ldots .$

Р е ш е н и е. а) $\{x_n\} = \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

б) $\{x_n\} = \dfrac{1}{n!}$.

в) $\{x_n\} = (-1)^n$ *или* $\{x_n\} = \cos \pi n.$

Геометрически последовательность изображается на координатной прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности. На рисунке 1 (*а* и *б)* изображены соответственно последовательности $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$.

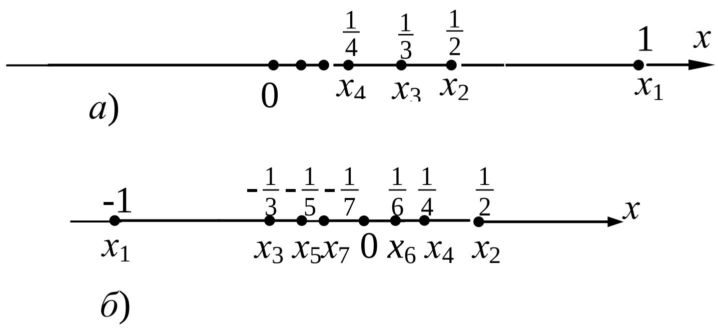


Рисунок 1

Введем арифметические действия над числовыми последовательностями. Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число m назовем последовательность $mx_1, mx_2, \ldots, mx_n, \ldots$;

суммой данных последовательностей назовем последовательность $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots$;

разностью – последовательность $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n, \ldots$;

частным – последовательность $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots$, если все члены последовательности $\{y_n\}$ отличны от нуля.

Указанные действия над последовательностями символически записываются так:

$$m\{x_n\} = \{mx_n\}, \{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}, \{x_n\} - \{y_n\} =$$
$$= \{x_n - y_n\}, \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\}, \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, \forall y_n \neq 0, n \in N.$$

$\forall y_n \neq 0$ означает, что значения y_n отличны от нуля при любом n.

§2 Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует число M (число m) такое, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $x_n \le M(x_n \ge m)$.

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу, т.е. существуют числа m и M такие, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам $m \le x_n \le M$.

Пусть $A = \max\{|m|,|M|\}$. Тогда условие ограниченности последовательности можно записать в виде $|x_n| \le A$.

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого положительного числа A существует элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$ (т.е. либо $x_n>A$, либо $x_n<-A$).

Из данных определений следует, что если последовательность ограничена сверху, то все её элементы принадлежат промежутку $(-\infty, M]$; если она ограничена снизу – промежутку $[m,+\infty)$, а если ограничена и сверху и снизу – промежутку $[m, M]$. Неограниченная последовательность может быть ограничена сверху (снизу).

Примеры ограниченных и неограниченных последовательностей:

а) последовательность 1, 2, 3,…,n,… ограничена снизу, но не ограничена сверху;

б) последовательность -1, -2, -3,…,-n,… ограничена сверху, но не ограничена снизу;

в) последовательность 1, 1/2, 1/3,…,1/n,… ограничена, так как любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам $0 \le x_n \le 1 (m = 0, M = 1)$;

г) последовательность -1, 2, -3, 4, -5,…,$(-1)^n n$,… – неограниченная. В самом деле, каково бы ни было число A, среди элементов x_n этой последовательности, найдутся элементы, для которых будет выполняться неравенство $|x_n| > A$.

С помощью логических символов данные выше определения можно записать следующим образом:

последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, если $(\exists M)(\forall x_n): x_n \le M$;

последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, если $(\exists m)(\forall x_n): x_n \ge m$;

последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если $(\exists A > 0)(\forall x_n): |x_n| \le A$;

последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, если $(\forall A > 0)(\exists x_n): |x_n| > A$.

Сравнивая запись с помощью логических символов двух последних определений, видим, что при построении отрицаний символы $\exists$ и $\forall$ заменяют друг друга.

Пример 3.

Какие из последовательностей являются ограниченными:

а) $-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ldots;\frac{(-1)^n}{n};\ldots;$

б) $2; 4; 6; 8; 10; 12;\ldots;2n;\ldots;$

в) $\sin 1; \sin 2; \sin 3; \sin 4;\ldots;\sin n;\ldots;$

г) $1; -2;\ 3; -4;\ 5; -6; 7;\ldots;(-1)^{n+1}n;\ldots$.

Р е ш е н и е. а) Ограничена $(-1 \le x_n \le 1/2)$. б) Не ограничена.

в) Ограничена $(|\sin n| \le 1)$. г) Не ограничена.

§3 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

***Определение*:** Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа A существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n| > A$.

«При $n>N$» означает: «для всех элементов последовательности с номерами $n>N$».

Символическая запись определения бесконечно большой последовательности имеет вид:

$$(\forall A>0)(\exists N)(\forall n>N):|x_n|>A.$$

Замечание. Очевидно, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Однако неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой. Например, неограниченная последовательность 1, 2, 1, 3,..,1, n, 1, n+1,…не является бесконечно большой, поскольку при A>1 неравенство $|x_n|>A$ выполняется не для всех элементов x_n с нечетными номерами.

Примеры бесконечно больших последовательностей:

а) $\{x_n\}=\{-n\}:-1,-2,-3,-4,-5,\ldots,-n,\ldots$; б) $\{x_n\}=\{n^2\}:1, 4, 9, 16, 25,\ldots,n^2,\ldots$;

в) $\{x_n\}=\{(-1)^{n+1}\cdot n\}:1,-2,\ 3,-4,5,\ldots.$

Пример 4. Используя определение, докажем, что последовательность $\{n\}$ является бесконечно большой.

Возьмем любое число A>0. Из неравенства $|x_n|=|n|>A$ получаем $n>A$. Если взять $N\ge A$, то для всех $n>N$ будет выполняться неравенство $|x_n|>A$, т.е. согласно определению последовательность $\{n\}$ – бесконечно большая.

Пример 5. Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\{n^2\}$ является бесконечно большой.

Р е ш е н и е. Возьмём любое число $A>0$. Из неравенства $|x_n|=|n^2|>A,$ получаем $n^2>A,$ т. е. $n>\sqrt{A}.$ Если взять $N=[\sqrt{A}],$ то для всех $n>N$ будет выполняться неравенство $|x_n|>A,$ т.е. $n^2>A,$ т.е. согласно определению бесконечно большой последовательности $\{x_n\}=\{n^2\}-$бесконечно большая.

Замечание: Символ $[1/\varepsilon]$ означает целую часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Пример 6. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \{3^n\}$ является бесконечно большой.

Р е ш е н и е. Возьмём любое число $A > 0$. Для того, чтобы найти номер N, необходимо решить неравенство $|x_n| = |3^n| = 3^n > A$. Логарифмируем обе его части, получаем $n \lg 3 > \lg A$, откуда $n > \dfrac{\lg A}{\lg 3}$. Если взять $N = \left[\dfrac{\lg A}{\lg 3}\right]$, то для всех $n > N$, выполняется неравенство $|x_n| > A$, т.е. последовательность $\{3^n\}$ является бесконечно большой последовательностью.

***Определение*:** Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Символическая запись определения бесконечно малой последовательности имеет вид:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) : |\alpha_n| < \varepsilon$$

Примеры бесконечно малых последовательностей:

а) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} : -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \ldots;$

б) $\left\{\dfrac{1}{n^k}\right\} (k > 0).$

Например,

$k = 2 : \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\} : 1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \ldots;$

$k = \dfrac{3}{2} : \left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right\} : 1, \dfrac{1}{\sqrt{8}}, \dfrac{1}{\sqrt{27}}, \dfrac{1}{\sqrt{64}}, \ldots.$

в) $\left\{\dfrac{2n}{n^2 + 1}\right\} : \dfrac{2}{2}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{10}, \dfrac{8}{26}, \ldots.$

Пример 7. Используя определение бесконечно малой последовательности, докажем, что последовательность $\{1/n\}$ является бесконечно малой.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Из неравенства $|\alpha_n| = |1/n| < \varepsilon$ получаем $n>1/\varepsilon$. Если взять $N = [1/\varepsilon]$, то для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $n \geq [1/\varepsilon]+1 > 1/\varepsilon$, откуда $1/n = |\alpha_n| < \varepsilon$. Таким образом, согласно определению 2 последовательность $\{1/n\}$ является бесконечно малой.

Между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями существует связь. Она выражается в следующем.

Теорема 1. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, и все её члены отличны от нуля, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая, и, обратно, если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ - бесконечно большая.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Согласно определению бесконечно большой последовательности для этого A существует номер N такой, что при $n > N$ будет $|x_n| > A$. Отсюда получаем, что $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon$ для всех $n > N$. А это значит, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая.

Доказательство второй части теоремы проводится аналогично.

§4 Основные свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема 2. Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малые последовательности.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$

– бесконечно малая. Пусть ε – произвольное положительное число, N_1 – номер, начиная с которого $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, а N_2 – номер, начиная с которого $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. (Такие номера N_1 и N_2 найдутся по определению бесконечно малой последовательности.) Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$; тогда при $n > N$ будут одновременно выполняться два неравенства: $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, при $n > N$

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Это значит, что последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая.

Следствие. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 3. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – бесконечно малая. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_1 такой, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ при $n > N_1$, а так как $\{\beta_n\}$ – также бесконечно малая последовательность, то для $\varepsilon = 1$ существует номер N_2 такой, что $|\beta_n| < 1$ при $n > N_2$. Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$; тогда при $n > N$ будут выполняться оба неравенства. Следовательно, при $n > N$

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

Это означает, что последовательность $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ бесконечно малая.

Следствие. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Замечание: Частное двух бесконечно малых последовательностей может не быть бесконечно малой последовательностью и может даже не иметь смысла.

Например, если $\alpha_n=1/n$, $\beta_n=1/n$, то все элементы $\{\alpha_n/\beta_n\}$ равны единице и данная последовательность является ограниченной. Если $\alpha_n=1/n$, $\beta_n=1/n^2$, то последовательность $\{\alpha_n/\beta_n\}$ бесконечно большая, а если $\alpha_n=1/n^2$, $\beta_n=1/n$, то – бесконечно малая. Если, начиная с некоторого номера, элементы $\{\beta_n\}$ равны нулю, то $\{\alpha_n/\beta_n\}$ не имеет смысла.

Теорема 4. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность.

Д о к а з а т е ль с т в о: Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная, а $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{x_n\cdot\alpha_n\}$ бесконечно малая. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существует число $A>0$ такое, что любой элемент x_n удовлетворяет неравенству $|x_n|\le A$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Поскольку последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, для положительного числа $\frac{\varepsilon}{A}$ существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{A}$. Следовательно, при $n>N$

$$|x_n\cdot\alpha_n|=|x_n|\cdot|\alpha_n|<A\cdot\frac{\varepsilon}{A}=\varepsilon$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\cdot\alpha_n\}$ бесконечно малая.

Следствие. Произведение бесконечно малой последовательности на число есть бесконечно малая последовательность.

§5 Сходящиеся последовательности

Понятие сходящейся последовательности

***Определение*:** Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство

$$|x_n-a|<\varepsilon. \tag{2}$$

С помощью логических символов это определение можно записать в виде

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists N\right)\left(\forall n>N\right):\left|x_n-a\right|<\varepsilon.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и имеет своим пределом число a, то символически это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ или } x_n \to a \text{ при } n\to\infty \qquad (3)$$

(limes (лат.) – предел).

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется *расходящейся.*

Пример 8.

Используя определение предела последовательности, докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Возьмем любое число ε > 0. Так как $\left|x_n-1\right|=\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\dfrac{1}{n+1}$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих неравенству $\left|x_n-1\right|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $1/(n+1)<\varepsilon$, откуда получаем $n>(1-\varepsilon)/\varepsilon$. Следовательно, в качестве N можно взять целую часть числа $(1-\varepsilon)/\varepsilon$, т.е. $N=\left[(1-\varepsilon)/\varepsilon\right]$. Тогда неравенство $\left|x_n-1\right|<\varepsilon$ будет выполняться при всех $n>N$. Этим и доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Пример 9. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+1}=2$. Найти номер N, начиная с которого выполняется неравенство $\left|\dfrac{2n+3}{n+1}-2\right|<\varepsilon$, где $\varepsilon = 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001.$

Р е ш е н и е.

Решим неравенство $\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|<\varepsilon$; $\left|\frac{2n+3-2(n+1)}{n+1}\right|=\left|\frac{1}{n+1}\right|<\varepsilon$. Данное неравенство выполняется при $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$. При $\varepsilon=0{,}1$ неравенство выполняется, начиная с $N=10$. При $\varepsilon=0{,}01$ – начиная с $N=100$. При $\varepsilon=0{,}001$ – начиная с $N=1000$.

Пример 10. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}$.

Р е ш е н и е. Возьмём любое число $\varepsilon>0$. Найдём номер N, начиная с которого при $n>N$ $\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$. Необходимо решить последнее неравенство:

$$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3(n^2-n+2)-(3n^2+2n-4)}{3(3n^2+2n-4)}\right|=\left|\frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}\right|<\frac{5n}{3(3n^2-4)}$$
$$<\frac{5n}{3n^2}<\frac{2}{n}.$$

Поэтому если уже $(2/n)<\varepsilon$, то и подавно будет выполняться неравенство $\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$. Следовательно, для нахождения значений n, удовлетворяющих неравенству $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$, достаточно решить неравенство $\frac{2}{n}<\varepsilon$, откуда $n>\frac{2}{\varepsilon}$. Если взять $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, то для всех $n>N$ будет выполняться $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}$.

Замечание 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a. Тогда $\{\alpha_n\}=\{x_n-a\}$ является бесконечно малой последовательностью, так как для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство

$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$. Следовательно, любой элемент x_n последовательности, имеющей пределом число a, можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{4}$$

где α_n – элемент бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$. Очевидно, справедливо и обратное: если x_n можно представить в виде $x_n=a+\alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Представление (4) используется при доказательствах теорем о пределах последовательностей.

Пример 11. Представим последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ в виде $x_n = a + \alpha_n$.

Р е ш е н и е. Любой элемент последовательности $\{x_n\}$ можно представить следующим образом:

$x_n = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = a + \alpha_n$, где a=1 - предел последовательности x_n, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; $\{\alpha_n\} = \left\{-\frac{1}{n+1}\right\}$- бесконечно малая последовательность.

Замечание 2. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которые означают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a (рисунок 2). Поэтому определение предела последовательности можно сформулировать следующим образом: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a существует номер N такой, что все элементы x_n с номерами $n > N$ находятся в этой ε-окрестности.

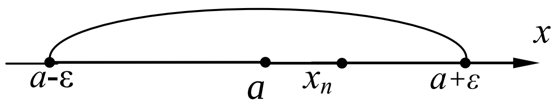


Рисунок 2

Замечание 3. Очевидно, что бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела. Иногда говорят, что она имеет бесконечный предел, и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty .$$

Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \right).$$

Предел последовательности, как он был определен ранее, будем называть иногда в отличие от бесконечного предела *конечным* пределом.

Пример 12.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2) = +\infty$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n = \pm\infty$;

Замечание 4. Очевидно, всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся и имеет своим пределом число a=0.

Пример 13.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k} = 0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n^2+1}\right) = 0$;

Основные свойства сходящихся последовательностей

Докажем лемму, которая понадобится при доказательстве теоремы 5.

Лемма 1. Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу c, то c=0.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\alpha_n = c, \forall_n \in N, \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Предположим, что $c \neq 0$. Положим $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Тогда по определению бесконечно малой последовательности существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Так как $\alpha_n = c$, а $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$, то последнее неравенство можно переписать в виде $|c| < \frac{|c|}{2}$, откуда $1 < \frac{1}{2}$. Полученное противоречие доказывает, что неравенство $c \neq 0$ не может иметь места, и, значит, c=0.

Теорема 5. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Предположим противное, т.е. что сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела $a \neq b$. Тогда по формуле (3) для элементов x_n получаем

$$x_n = a + \alpha_n \text{ и } x_n = b + \beta_n,$$

где α_n и β_n – элементы бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Приравнивая правые части этих соотношений, найдем, что $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Так как все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n - \beta_n\}$ равны одному и тому же числу $b - a$, то по лемме 1 $b - a = 0$, т.е. $b = a$, следовательно сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 6. Сходящаяся последовательность ограничена.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\{x_n\}$- сходящаяся последовательность, и число a – её предел. Пусть, далее, ε – произвольно положительное число и N – номер, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon$$

для всех $n > N$. Пусть $A = \max\{|a| + \varepsilon,\ |x_1|,\ |x_2|,\ \ldots, |x_N|\}$. Очевидно, $|x_n| \le A$ для всех номеров n, что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

Замечание. Ограниченная последовательность может и не быть сходящейся. Например, последовательность –1, 1, -1,…, $(-1)^n$,…, очевидно, ограничена, но не сходится. Докажем это. Предположим, что данная последовательность имеет предел–число a. Тогда для $\varepsilon=1/2$ существует номер N такой, что при $n > N$ будет $|x_n - a| < 1/2$. Так как x_n принимает попеременно значения 1 и –1, то $|1-a| < 1/2$ и $|(-1)-a| < 1/2$. Используя эти неравенства, получаем

$$2 = |1-a+a-(-1)| \le |1-a| + |a-(-1)| < 1/2 + 1/2 = 1,$$

т.е. 2<1. Полученное противоречие доказывает расходимость данной последовательности.

Теорема 7. Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказательство: Пусть a и b – соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда по формуле (4):

$$x_n = a + \alpha_n,\ \ y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n,$$

По теореме 2 последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая. Таким образом, последовательность $\{(x_n \pm y_n) - (a \pm b)\}$ также бесконечно малая, и поэтому последовательность $\{x_n \pm y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число $a \pm b$.

Теорема 8. Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть a и b – соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда по формуле (4):

$$x_n = a + \alpha_n, \;\; y_n = b + \beta_n$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$x_n y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n .$$

Согласно теоремам 2 – 4 последовательность $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$бесконечно малая. Таким образом, последовательность $\{x_n y_n - ab\}$ также бесконечно малая, и поэтому последовательность $\{x_n\, y_n\}$ сходится и имеет свои пределом число ab.

Теорема 9. Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, при условии, что предел $\{y_n\}$ отличен от нуля, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. (Без доказательства).

Пример 14. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + n + 1}{3n^2 - 1}$.

Р е ш е н и е. При $n \to \infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, следовательно, применить теорему о пределе частного нельзя, так как в условии этой теоремы предполагается существование конечных пределов. Поэтому сначала преобразуем формулу общего члена данной последовательности, разделив числитель и знаменатель на n^2. Затем, применяя теоремы о пределе частного и о пределе суммы, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n+1/n^2}{3-1/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+1/n+1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3-1/n^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^2)}=\frac{2+0+0}{3-0}=\frac{2}{3}.$$

Пример 15. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+4}{n^2+5}$.

Р е ш е н и е. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, следовательно, в этом примере также применить теорему о пределе частного нельзя. Преобразовываем данное выражение: делим числитель и знаменатель на n^2. Затем применяем теоремы о пределе частного и суммы, принимаем во внимание то, что $\lim\limits_{n\to\infty}2n=\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4/n^2}{1+5/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2n+\lim\limits_{n\to\infty}4/n^2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}5/n^2}=\frac{\infty+0}{1+0}=\infty.$$

Пример 16. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n^2+1}$.

Р е ш е н и е. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, следовательно, применить теорему о пределе частного нельзя. Преобразовываем данное выражение: делим числитель и знаменатель на n. Затем применяем теоремы о пределе частного и суммы. Следует иметь в виду, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}n=\infty.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n}{n+1/n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}3/n}{\lim\limits_{n\to\infty}n+\lim\limits_{n\to\infty}1/n}=\frac{2-0}{\infty+0}=0.$$

Пример 17. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n!}{(n^2+1)}$.

Р е ш е н и е. Применяем теорему о пределе произведения: предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению пределов. Первый сомножитель является бесконечно малой последовательностью, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0,$ второй – ограниченной последовательностью $|\sin n!|\le 1.$ Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой последовательностью.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin n!\le 0\cdot 1=0.$$

Пример 18. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$

Р е ш е н и е. Применим имеющиеся теоремы о пределах, а именно: предел разности равен разности пределов. При $n\to\infty$ и вычитаемое и уменьшаемое стремятся к бесконечности, следовательно, применить теорему о пределе разности нельзя, т.к. по условию теоремы предполагается существование конечных пределов. Поэтому сначала преобразуем выражение $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\infty+\infty}=0$$

Пример 19. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\sin n}{n}\right).$

Р е ш е н и е. Применяем имеющиеся теоремы о пределах, а именно: предел суммы двух сходящихся последовательностей равен сумме пределов. Рассмотрим каждый предел отдельно. Первый предел находим, поделив числитель и знаменатель на *n*, второй предел представляет произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую, т.е. он является пределом бесконечно малой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\sin n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n:n}{(n+1):n}+\lim_{n\to\infty}\sin n\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$$
$$=\frac{5}{1+0}+1\cdot 0=5.$$

Предельный переход в неравенствах

Теорема 10. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \ge b$ $(x_n \le b)$, то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \ge b$ $(a \le b)$.

Доказательство: Пусть все элементы x_n, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \ge b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Требуется доказать неравенство $a \ge b$. Предположим противное, т.е. что $a < b$.

Так как a - предел $\{x_n\}$, то для $\varepsilon = b - a$ существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < b - a,$ которое равносильно следующим двум неравенствам: $-(b-a) < x_n - a < b - a.$ Из правого неравенства получаем: $x_n < b$ при $n>N$, а это противоречит условию теоремы. Следовательно, $a \ge b.$ Случай $x_n \le b$ рассматривается аналогично.

Следствие 1. Если элементы сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \le y_n$, то их пределы удовлетворяют неравенству $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

В самом деле, начиная с некоторого номера, элементы последовательности $\{y_n - x_n\}$ неотрицательны, а поэтому неотрицателен и ее предел: $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge 0.$ Откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Следствие 2. Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ принадлежат отрезку $[a,b]$, то и ее предел c также принадлежит этому отрезку.

В самом деле, так как $a \le x_n \le b,$ то $a \le c \le b.$

Теорема 11. Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, причем $\{x_n\} \le \{y_n\} \le \{z_n\}$ для всех $n \in N$, и пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют один и тот же предел a. Тогда последовательность $\{y_n\}$ также имеет предел a.

Доказательство: Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Для последовательности $\{x_n\}$ найдется номер N_1 такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n>N_1$, т.е.

$$\underline{a - \varepsilon < x_n} < a + \varepsilon.. \tag{5}$$

По этому же ε для последовательности $\{z_n\}$ найдется номер N_2 такой, что $|z_n - a| < \varepsilon$ при $n>N_2$, т.е.

$$a - \varepsilon < \underline{z_n < a + \varepsilon}. \tag{6}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$.. Тогда при $n>N$ будут выполняться одновременно неравенства (5) и (6). Используя подчеркнутые неравенства, а также неравенства, данные в условии теоремы, получаем

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon \text{ при } n>N.$$

Отсюда

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \text{ или } |y_n - a| < \varepsilon \text{ при } n>N.$$

Это значит, что предел последовательности $\{y_n\}$ равен a.

Определение и признак сходимости монотонных последовательностей

***Определение*:** Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in N$; *неубывающей*, если $x_n \le x_{n+1}$ для всех $n \in N$; *убывающей*, если $x_n > x_{n+1}$ для всех $n \in N$; *не возрастающей*, если $x_n \ge x_{n+1}$ для всех $n \in N$.

Все такие последовательности объединяются общим названием: *монотонные последовательности.* Возрастающие и убывающие последовательности называются также *строго монотонными*.

Пример монотонных последовательностей:

а) последовательность 1,1/2,1/3,…,1/n,…– убывающая и ограниченная;

б) последовательность 1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3…, 1/*n*, 1/*n*,…– невозрастающая и ограниченная;

в) последовательность 1, 2, 3, …n, … – возрастающая и неограниченная;

г) последовательность 1, 1, 2, 2, 3, 3, …*n*, *n*, … – неубывающая и неограниченная;

д) последовательность 1/2, 2/3, 3/4,…, *n*/(*n*+1), … – возрастающая и ограниченная.

Отметим, что монотонные последовательности ограничены, по крайней мере, с одной стороны например, неубывающие последовательности - снизу ($x_n \geq x_1$ для всех $n \in N$). Оказывается, что если монотонная последовательность ограничена с обеих сторон, т. е. просто ограничена, то она сходится. Немонотонные последовательности этим свойством не обладают. Так, немонотонная последовательность $\{(-1)^n\}$ограничена, но не сходится.

Теорема 12. Монотонная ограниченная последовательность сходится.

Пример 20. Доказать, что последовательность с общим элементом $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ монотонно возрастающей.

Р е ш е н и е. Найдём $x_{n+1} : \dfrac{n+1}{2(n+1)+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$. Найдём разность

$$x_{n+1} - x_n : \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{(2n+1)(n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Так как $1>0,\quad (2n+3)>0,\quad (2n+1)>0,\quad n\in N$, то $\left(x_{n+1}-x_n>0\right)$

Следовательно, $x_{n+1}>x_n$ для всех $n\in N$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая.

Пример 21. Доказать, что последовательность с общим элементом $x_n=\dfrac{n}{5^n}$ – монотонно убывающая.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отношение последующего элемента x_{n+1} к предыдущему x_n: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{n+1}{5^{n+1}}:\dfrac{n}{5^n}=\dfrac{(n+1)5^n}{5^n5n}=\dfrac{n+1}{n}\dfrac{1}{5}=\dfrac{1+1/n}{5}\le\dfrac{1+1}{5}=\dfrac{2}{5}<1;$

Следовательно, $x_n>x_{n+1}$ для любого $n\in N$, что и требовалось доказать.

Пример 22. Доказать, что последовательность с общим элементом $x_n=n^2$ – монотонно возрастающая.

Р е ш е н и е. Действительно, $x_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1>n^2=x_n$, что выполняется при любом $n\in N$. Следовательно, $\left\{n^2\right\}$ – монотонно возрастающая последовательность.

§ 6 Понятие функции. Определение функции. Способы задания и классификация функций

Определение функции

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Так, например, при изучении движения пройденный путь рассматривается как переменная, изменяющая в зависимости от изменения времени. Здесь пройденный путь есть *функция* времени.

Рассмотрим другой пример. Известно, что площадь круга выражается через радиус так: $Q=\pi R^2$. Если радиус R будет принимать различные числовые значения, то площадь Q также будет принимать различные числовые значения. Таким образом, изменение одной переменной влечет изменение другой. Здесь площадь круга Q есть функция радиуса R. Сформулируем определение понятия «функция».

***Определение*:** Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y, то y есть функция от x или, в символической записи, $y = f(x), y = \varphi(x)$ и т.п.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Зависимость переменных x, и y называется функциональной зависимостью. Буква f в символической записи функциональной зависимости $y = f(x)$ указывает, что над значением x нужно произвести какие-то операции, чтобы получить значение y. Вместо записи $y = f(x), u = \varphi(x)$ и т.д. иногда пишут $y = y(x), u = u(x)$ и т.д., т.е буквы y, u и т.д. обозначают и зависимую переменную, и символ совокупности операций над x.

Запись $y = C$, где C – постоянная, обозначает функцию, значение которой при любом значении x одно и тоже и равно C.

***Определение*:** Совокупность значений x, для которых определяются значения y в силу правила $f(x)$, называется областью определения функции (или областью существования функции).

Пример 23. Функция $y = \sin x$ определена при всех x. Следовательно, ее областью определения будет бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$.

Замечание. Иногда в определении понятия функции допускают, что каждому значению x, принадлежащему некоторой области, соответствует не одно, а несколько значений y или даже бесконечное множество значений y. В этом случае функцию называют многозначной в отличие от определенной выше функции, которую называют однозначной. В дальнейшем, говоря о функции, мы будем иметь в виду только однозначные функции. Если в силу необходимости придется иногда иметь дело с многозначными функциями, то мы будем делать специальные оговорки.

Наряду с термином «функция» употребляют равнозначный термин «отображение», а вместо записи $y=f(x)$ пишут $f : x \mapsto y$ и говорят, что отображение *f* отображает число x в число y, или, что тоже самое, число y является образом числа x при отображении *f*.

При вычислениях запись $y = f(x)$ обычно удобнее записи вида $f: x \mapsto y$. Например, запись $f(x) = x^2$ значительно удобнее и проще использовать при аналитических преобразованиях, чем запись $f: x \mapsto x^2$.

***Определение*:** Про функцию $f(x)$, определенную на некотором множестве X, говорят, что она *ограничена сверху (снизу)* на этом множестве, если существует число M (m) такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le M (f(x)) \ge m)$. Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве X, называется *ограниченной* на этом множестве.

Условие ограниченности функции $f(x)$ можно записать в виде: существует число $M \ge 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Например, функция $f(x)=\sin x$ ограничена на всей числовой прямой, так как $|\sin x| \le 1$ при любом x, а функция $f(x)=1/x$ не является ограниченной сверху на интервале (0,1),так как не существует числа M такого, что для любого $x \in (0;1)$ выполняется неравенство $1/x \le M$.График функции может представлять собой некоторую «сплошную» линию (кривую или прямую), а может состоять из отдельных точек (x, y), координаты которых связаны соотношением $y=f(x)$, например график функции $y=n!$ (рисунок 3).

Не всякая линия является графиком какой-либо функции. Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ не является графиком функции, так как каждому $x \in (-1,1)$ соответствуют два различных значениям y: $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$, что противоречит требованию однозначности в определении функции (рис.4). Однако часть окружности, лежащая в нижней полуплоскости, является графиком функции

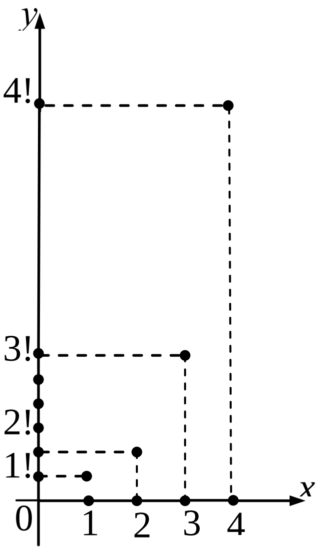


Рисунок 3

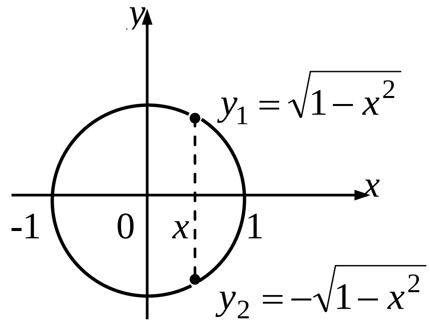


Рисунок 4

$y = -\sqrt{1-x^2}$, а другая ее часть, лежащая в верхней полуплоскости, - графиком функции $y = \sqrt{1-x^2}$.

Способы задания функций

Задать функцию f - значит указать, как по каждому значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции $f(x)$. Существуют три основных способа задания функции: *аналитический, табличный и графический.*

1 А н а л и т и ч е с к и й   с п о с о б.

Этот способ состоит в том, что зависимость между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Пример 24.

а) Формула $y = x^2$ задаёт функцию, область определения которой – числовая прямая $(-\infty; +\infty)$, а множество значений – полупрямая $[0,+\infty)$ (рисунок 5а)

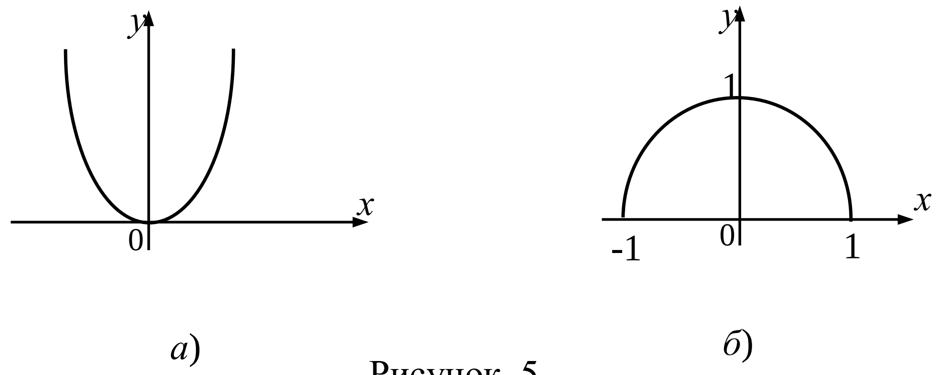


Рисунок 5

б) Формула $y = \sqrt{1 - x^2}$ задаёт функцию, областью определения которой является отрезок $[-1,1]$, а множеством значений отрезок - $[0,1]$ (рисунок 5б).

в) Формула *y*=*n*! ставит в соответствие каждому натуральному числу (т.е. целому положительному числу) n число $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Таким образом, формула *y*=*n!* задаёт функцию, область определения которой $\{1, 2, 3, \ldots n, \ldots\}$, а множество значений - $\{1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots\}$ (рисунок 3) .

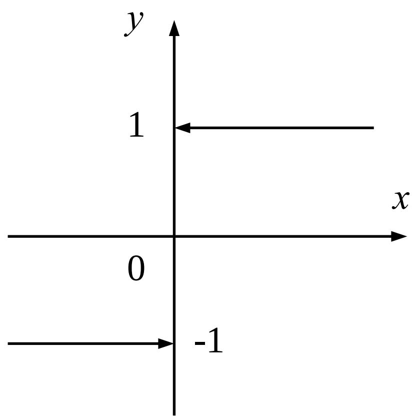


Рисунок 6

г) $y = sgn\ x = \begin{cases} +1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

(Термин sgn происходит от латинского слова signum-знак.)

Данная функция задана с помощью нескольких формул. Она определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а множество её значений состоит из трёх чисел: -1, 0, +1 (рисунок 6).

д) Функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 1\text{, если } x - \text{рациональное число,} \\ 0\text{, если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а множество её значений состоит из двух чисел: 0 и 1.

Функцию Дирихле изобразить графически не представляется возможным.

2 Т а б л и ч н ы й с п о с о б.

Приведём следующую таблицу:

Таблица 1

x	0	0,1	0,2	3	0,6	4	0,8	1,5	2
y	-1	10	1	-2	-8	0,5	-2	5	7

Поставим в соответствие каждому x, записанному в первой строке таблицы, число y, стоящее во второй строке под этим числом x, и будем говорить, что полученная функция задана таблицей. Областью определения данной функции является множество, состоящее из девяти чисел x, перечисленных в первой строке таблицы, а множеством значений – множество, состоящее из девяти чисел y, перечисленных во второй её строке.

С помощью таблицы можно задать функцию только при конечном числе значений аргумента. Таблицы часто используют для задания функций. Так, хорошо известны, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и многие другие. Примером табличного способа задания функции может служить расписание движения поезда, которое определяет местоположение поезда в отдельные моменты времени.

3 Г р а ф и ч е с к и й с п о с о б. Графический способ задания функции обычно используют в практике физических измерений, когда соответствие между

переменными x и y задаётся с помощью графика. Во многих случаях такие графики чертятся с помощью самопипишущих приборов.

Классификация функций

***Определение*:** Постоянная функция $f(x)=C$, C=const, степенная функция x^{α} (α – любое число), показательная функция a^x $(0<a\neq 1)$, логарифмическая функция $\log_a x$ $(0<a\neq 1)$, тригонометрические функции: sin x, cos x, tg x, ctg x и обратные тригонометрические функции: arcsin x, arcos x, arctg x, arcctg x называются *простейшими элементарными функциями.*

***Определение*:** Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют класс *элементарных функций.* Примерами элементарных функций являются:

$$f(x)=|x| \quad (|x|=\sqrt{x^2});\ f(x)=\lg^3 arctg\ 2^x+\sin 3x;\ f(x)=\lg|\sin 3x|-e^{arctg\sqrt{x}}$$

и т. д.

Классификация элементарных функций.

***Определение*:** Функция вида

$$P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$

где $m\geq 0$ – целое число; $a_0, a_1, \ldots, a_m$ - любые числа – коэффициенты $(a_0\neq 0)$, называется *целой рациональной функцией* или *алгебраическим многочленом степени m.* Многочлен первой степени называется также *линейной функцией.*

***Определение*:** Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

$$R(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n},$$

называется *дробно-рациональной функцией.*

***Определение*:** Функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырёх арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями и не являющаяся рациональной, называется *иррациональной функцией.*

Например, $f(x)=\sqrt{x},\ f(x)=x+\sqrt{x},\ f(x)=\sqrt{(5x^2+4x-7)/(3x^2-8x+4)}+(\sqrt[5]{x}+x)^3$ и т. д. – иррациональные функции.

***Определение*:** Всякая функция, не являющаяся рациональной или иррациональной, называется *трансцендентной функцией.* Это, например, функции $f(x)=\sin x,\ f(x)=\sin x+x$ и т. д.

§7 Предел функции

Предел функции при $x\to x_0$

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть точка $x_0\in X$. Возьмём из X последовательность точек, отличных от x_0:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_n,\ldots, \tag{7}$$

сходящихся к x_0. Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность

$$f(x_1),\ f(x_2), f(x_3),\ldots, f(x_n),\ldots, \tag{8}$$

и можно ставить вопрос о существовании её предела.

***Определение*:** Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности (7) значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность (8) значений функции сходиться к числу A.

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$

Функция $f(x)$ может иметь в точке x_0 только один предел. Это следует из того, что последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет только один предел.

Пример 25.

а) Функция $f(x) = C,\ C = const$, имеет предел в каждой точке x_0 числовой прямой. В самом деле, если (7) – любая последовательность, сходящаяся к x_0, то последовательность (8) имеет вид $C,\ C,\ C,\ \ldots,\ C,\ \ldots$, т. е. $f(x_n) = C.$ Отсюда заключаем, что $f(x_n) \to C$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C.$

б) Функция $f(x) = x$ имеет в любой точке x_0 числовой прямой предел, равный x_0. В этом случае последовательности (7) и (8) тождественны, т.е. $f(x_n)=x_n$. Следовательно, если $x_n \to x_0$, то $f(x_n) \to x_0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = f(x_0) = x_0.$

в) Функция $f(x) = \sin(1/x)$, определённая для всех $x \neq 0$, в точке $x = 0$ не имеет предела. Действительно, возьмём две последовательности значений аргумента $x:\ 1/\pi,\ 1/(2\pi),\ 1/(3\pi),\ \ldots,\ 1/(n\pi),\ \ldots$, и $x:\ 2/\pi,\ 2/(5\pi),\ 2/(9\pi),\ \ldots,\ 2/[(4n-3)\pi],\ \ldots$, сходящиеся к нулю. Для них соответствующими последовательностями значений функции являются: $f\left(\dfrac{1}{\pi}\right),\ f\left(\dfrac{1}{2\pi}\right),\ f\left(\dfrac{1}{3\pi}\right),\ \ldots,\ f\left(\dfrac{1}{n\pi}\right),\ldots$. Так как при любом n $f\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = \sin n\pi = 0,$ а $f\left(\dfrac{2}{(4n-3)\pi}\right) = \sin\dfrac{(4n-3)\pi}{2} = 1,$ то для первой последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \sin n\pi = 0,$ а для второй последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \sin\dfrac{(4n-3)\pi}{2} = 1.$ Таким образом, для двух сходящихся к нулю последовательностей значений аргумента x соответствующие последовательности значений функции имеют разные пределы. А это по определению предела функции и означает, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

г) Функция $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ имеет в точке x=0 предел, равный 1. Действительно, возьмём любую последовательность значений аргумента x, сходящуюся к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, и\ x_n \neq 0$ тогда в силу теорем 7 - 9 имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2{}_n+x_n-1}{x_n-1}=\frac{(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2+\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}=1.$$

Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1,$ и так как он не зависит от выбора последовательности $\{x_n\},$ сходящейся к нулю, то на основании определения предела функции заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1,$ сходящейся к нулю, то на основании определения предела функции заключаем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$

д) Функция Дирихле, значения которой в рациональных точках равны единице, а в иррациональных – нулю, не имеет предела ни в одной точке x_0 числовой прямой. Действительно, для сходящейся к точке x_0 последовательности рациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен единице, а для сходящейся к точке x_0 последовательности иррациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен нулю.

Существует другое определение предела функции.

***Определение*:** Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x=x_0$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех $x\in X, x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Первое определение основано на понятии предела числовой последовательности, поэтому его часто называют определением «на языке последовательностей». Второе определение называют определением «на языке $\varepsilon-\delta$».

Теорема 13. Первое и второе определения предела функции эквивалентны.

§ 8 Предел функции при $x \to x_0 -$ и при $x \to x_0 +$, $x \to\infty$, при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$.

***Определение*:** Число A называется *правым* (*левым*) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой сходящейся к x_0 последовательности (7), элементы x_n которой больше (меньше) x_0, соответствующая последовательность (8) сходится к A.

Символическая запись: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$, ($\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$).

В качестве примера можно рассмотреть функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Она имеет в точке x=0 правый и левый пределы: $\lim\limits_{x\to x_0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0-} \operatorname{sgn} x = -1$. Действительно, если (7) –любая сходящаяся к нулю последовательность значений аргумента этой функции, элементы x_n которой больше нуля (x_n>0), то $\operatorname{sgn} x_n$=1 и $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$. Аналогично устанавливается, что $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$.

Теорема 14. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы, и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.

***Определение*:** Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to \infty$**,** если для любой бесконечно большой последовательности (7) значений аргумента соответствующая последовательность значений функции (8) сходится к A.

Символическая запись: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

***Определение*:** Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$**,** если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы x_n которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность значений функции сходится к A.

Символическая запись: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\right)$.

Пример 26. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеет предел при $x\to\infty$, равный нулю. Действительно, если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность значений аргумента, то соответствующая последовательность значений функции: $1/x_1, 1/x_2, \ldots 1/x_n, \ldots$ является бесконечно малой и поэтому имеет предел, равный нулю, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)=0$ (рисунок 7) .

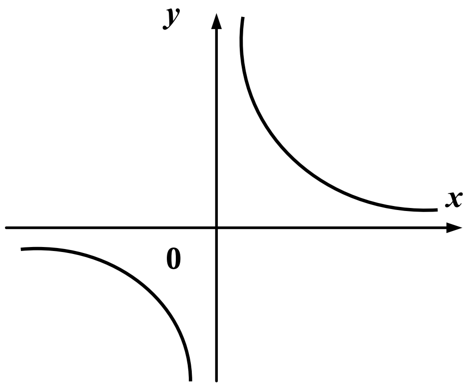


Рисунок 7

§9 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Бесконечно малые функции

***Определение*:** Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* функцией (или просто бесконечно малой) в точке $x=x_0$ (или при $x\to x_0$), если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0-$, $x\to x_0+$.

Можно дать равносильное определение бесконечно малой функции «на языке $\varepsilon-\delta$».

***Определение*:** Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке $x=x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in X,\ x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$; или с помощью логических символов:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall x\in X,\ x\neq x_0,\ |x-x_0|<\delta\right):|f(x)|<\varepsilon;$$

Можно определить бесконечно малую функцию и «на языке последовательностей»:

***Определение*:** Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке $x=x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности (7) значений аргумента x_n отличных от x_0, соответствующая последовательность (8) является бесконечно малой.

***Определение*:** Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$ или при $x\to\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, т.е. бесконечно малая функция – это функция, предел которой в данной точке равен нулю.

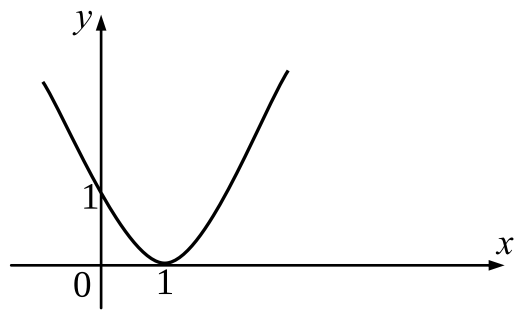


Рисунок 8

Пример 27.

а) Функция $f(x)=(x–1)^2$ является бесконечно малой при $x\to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ (см. рисунок 8)

б) Функция $f(x)=tgx$ – бесконечно малая при $x\to 0$.

в) $f(x)=\ln(1+x)$ - бесконечно малая при $x\to 0$.

г) $f(x)=1/x$ – бесконечно малая при $x\to\infty$.

Теорема 15. Если функция $y=f(x)$ представима при $x \to a$ в виде суммы постоянного числа b и бесконечно малой величины $\alpha(x): f(x)=b+\alpha(x)$ то $\lim\limits_{x \to a} f(x)=b$.

Обратно, если $\lim\limits_{x \to a} f(x)=b$, то $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

1. Докажем первую часть утверждения. Из равенства $f(x)=b+\alpha(x)$ следует $|f(x)-b|=|\alpha(x)|$. Но т.к. $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то при произвольном ε найдется δ – окрестность точки a, при всех x из которой значения $\alpha(x)$ удовлетворяют соотношению $|\alpha(x)|<\varepsilon$. Тогда $|f(x)-b|<\varepsilon$. А это и значит, что $\lim\limits_{x \to a} f(x)=b$.

2. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x)=b$, то при любом $\varepsilon>0$ для всех x из некоторой δ – окрестности точки a будет $|f(x)-b|<\varepsilon$. Но если обозначим $f(x)-b=a$, то $|\alpha(x)|<\varepsilon$, а это значит, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая.

Свойства бесконечно малых функций

Теорема 16. Алгебраическая сумма двух, трех и вообще любого конечного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Приведем доказательство для двух слагаемых. Пусть $f(x) = \alpha(x)+\beta(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x \to a} \beta(x)=0$. Нам нужно доказать, что при произвольном, как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, выполняется $|f(x)| < \varepsilon$.

Итак, зафиксируем произвольное число $\varepsilon < 0$. Так как по условию теоремы $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то найдется такое $\delta_1 > 0$, что при $|x-a|<\delta_1$ имеем $|\alpha (x)| < \varepsilon/2$. Аналогично, так как $\beta(x)$ – бесконечно малая, то найдется такое $\delta_2 > 0$, что при $|x-a| < \delta_2$ имеем $|\beta(x)| < \varepsilon/2$.

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда в окрестности точки a радиуса δ будет выполняться каждое из неравенств $|\alpha(x)| < \varepsilon/2$ *и* $|\beta(x)| < \varepsilon/2$. Следовательно, в этой окрестности будет $|f(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, т.е. $|f(x)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 17. Произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на ограниченную функцию $f(x)$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) есть бесконечно малая функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Так как функция $f(x)$ ограничена, то существует число M такое, что при всех значениях x из некоторой окрестности точки a $|f(x)| \le M$. Кроме того, так как $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется окрестность точки a, в которой будет выполнятся неравенство $|a(x)| < \varepsilon/M$. Тогда в меньшей из этих окрестностей имеем $|\alpha(x) \cdot f(x)| < \varepsilon/M = \varepsilon$. А это и значит, что $\alpha(x) \cdot f(x)$ – бесконечно малая. Для случая $x \to \infty$ доказательство проводится аналогично.

Из доказанной теоремы вытекают:

Следствие 1. Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \alpha\beta = 0$.

Следствие 2**.** Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и c = const, то $\lim\limits_{x\to a} c\alpha(x) = 0$.

Теорема 18. Отношение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ к функции $f(x)$, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно малая функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \ne 0$.

Тогда $\dfrac{1}{f(x)}$ есть ограниченная функция. Поэтому дробь $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x)\dfrac{1}{f(x)}$ есть произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную, т.е. функция бесконечно малая.

Теорема 19. Для выполнения равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Рассмотрим разность $f(x) - A = \alpha(x)$ и покажем, что $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при

$x \to x_0$. Действительно, пределы $f(x)$ и A при $x \to x_0$ равны A, и поэтому в силу теоремы 1 (пункт 5)

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0.$$

Достаточность. Пусть $f(x) - A = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Покажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Так как $f(x) = A + \alpha(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

Из данной теоремы получаем специальное представление для функции, имеющей в точке $x=x_0$ предел, равный A:

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{где } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

При этом обычно говорят, что функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 отличается от A на бесконечно малую функцию.

Теорема 20. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

Всё сказанное о бесконечно малых функциях при $x \to x_0$ справедливо и для бесконечно малых функций при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0-$, $x \to x_0+$.

Бесконечно большие функции

***Определение*:** Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (или просто бесконечно большой) в точке $x=x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ и говорят, что функция стремится к бесконечности при $x\to x_0$, или что она имеет бесконечный предел в точке $x=x_0$.

Если же выполняется неравенство $f(x)>\varepsilon$ ($f(x)<-\varepsilon$), то пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$) и говорят, что функция имеет в точке x_0 бесконечный предел, равный $+\infty$ $(-\infty)$.

Используя логические символы, определение можно записать в виде

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall x\in X,\, x\neq x_0,\, |x-x_0|<\delta\right):|f(x)|>\varepsilon.$$

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и бесконечные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0-} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0-} f(x)=-\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Определение: Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in X$, удовлетворяющих неравенству $|x|>\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>\varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

Символическая запись определения бесконечно большой функции при $x\to\infty$:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall x\in X,\, |x|>\delta\right):|f(x)|>\varepsilon.$$

В заключении скажем, что между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует такая же связь, как и между соответствующими последовательностями, т. е. функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и наоборот.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Было показано, что сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются бесконечно малыми функциями. Этого, вообще говоря нельзя сказать о частном: деление одной бесконечно малой на другую может привести к различным результатам. Так, например, если $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=2x$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

Если же $\alpha(x)=x, \beta(x)=x^2$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

Рассмотрим правила сравнения бесконечно малых функций.

Пусть при $x\to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (говорят также, что $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$; при $x\to x_0$);

2) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$ (A – число), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые одного порядка;

3) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - эквивалентные бесконечно малые. Эквивалентность обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

4) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)-$бесконечно малая $n-$го порядка относительно $\beta(x)$.

Существуют аналогичные правила для сравнения бесконечно малых функций при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, а также при $x\to x_0$ справа и слева.

Соотношение между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями

Теорема 21. Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$ то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Доказательство: Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что при некотором $\delta > 0$ (зависящим от ε) при всех x, для которых $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$, а это и будет означать, что функция $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция. Действительно, так как $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, то найдется $\delta > 0$ такое, что как только $|x-a| < \varepsilon$, так $|f(x)| > 1/\varepsilon$. Но тогда для тех же x $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$.

Пример 28.

а) Ясно, что при $x \to +\infty$ функция $y = x^2+1$ является бесконечно большой. Но тогда согласно сформулированной выше теореме функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ - бесконечно малая при $x \to +\infty$, т.е. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$.

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Теорема 22. Если функция $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ (или $x \to \infty$) и не обращается в нуль, то $y = \frac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой функцией.

Пример 29.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \sin x \frac{1}{x} = 0$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=5$, так как функции $-\dfrac{6}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ являются произведением постоянного числа и бесконечно малой функции. Следовательно, по теореме 21 для бесконечно малых функций получаем нужное равенство.

Таким образом, простейшие свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций можно записать с помощью следующих условных соотношений:

$$A\neq 0:\ A\cdot\infty=\infty,\ \frac{A}{0}=\infty,\ \infty+A=\infty,\ +\infty+\infty=\infty,\ \frac{A}{\infty}=0.$$

§10 Теоремы о пределах функции

Теорема 23. Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно производится также. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=c$. Тогда $f(x)=b+\alpha(x)$ и $g(x)=c+\beta(x)$, где α и β – бесконечно малые функции. Следовательно,

$$f(x)+g(x)=(b+c)+(\alpha(x)+\beta(x)).$$

Так как $b+c$ есть постоянная величина, а $\alpha(x)+\beta(x)$ – функция бесконечно малая, то

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=b+c=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x).$$

Пример 30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=1+0=1.$

Теорема 24. Предел произведения двух, трех и вообще конечного числа функций равен произведению пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b, \lim\limits_{x\to a} g(x)=c$. Следовательно, $f(x)=b+\alpha(x)$ и $g(x)=c+\beta(x)$ и $fg=(b+\alpha)(c+\beta)=bc+(b\beta+c\alpha+\alpha\beta)$. Произведение bc есть величина постоянная. Функция $b\beta+c\alpha+\alpha\beta$ на основании свойств бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая. Поэтому $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=b\cdot c=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Следствие 1**.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x)=c\cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Следствие 2. Предел степени равен степени предела:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$$

Пример 31. $\lim\limits_{x\to 2} 5x^3=5\lim\limits_{x\to 2} x^3=5\cdot 8=40$.

Теорема 25. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля, т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \text{если}\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b, \lim\limits_{x\to a} g(x)=c\neq 0$.

Следовательно, $f(x)=b+\alpha(x)$ и $g(x)=c+\beta(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые. Рассмотрим частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)}=\dfrac{b}{c}+\left(\dfrac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)}-\dfrac{b}{c}\right)=\dfrac{b}{c}+\dfrac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c(c+\beta(x))}$. Дробь $\dfrac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c(c+\beta(x))}$ является бесконечно малой функцией, так как числитель есть бесконечно малая функция, а знаменатель имеет предел $c^2\neq 0$.

Пример 32.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+5}{4x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 1}x+5}{4\lim\limits_{x\to 1}x-2}=\dfrac{3\cdot 1+5}{4\cdot 1-2}=\dfrac{8}{2}=4$.

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2+x}}=0$.

в) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$. При $x\to 1$ числитель дроби стремится к 1, а знаменатель стремится к 0. Но так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=0$, т.е. $\dfrac{x-1}{x}$ есть бесконечно малая функция при $x\to 1$, то $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$.

Теорема 26. Пусть даны три функции $f(x)$, $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяющие неравенствам $u(x)\le f(x)\le v(x)$. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют один и тот же предел при $x\to a$ (или $x\to\infty$), то и функция $f(x)$ стремится к тому же пределу, т.е. если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=\lim\limits_{x\to a}v(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. Смысл этой теоремы понятен из рисунка 9.

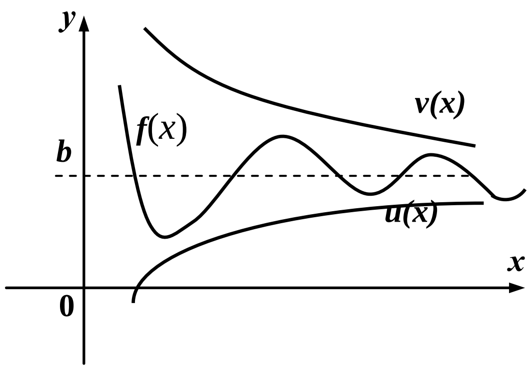


Рисунок 9

Теорема 27. Если при при $x\to a$ (или $x\to\infty$) функция $y = f(x)$ принимает неотрицательные значения $y\ge 0$ и при этом стремится к пределу b, то этот предел не может быть отрицательным: $b\ge 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $b < 0$, тогда $|y-b| \geq |b|$, и следовательно, модуль разности не стремится к нулю при $x \to a$. Но тогда y не стремится к пределу b при $x \to a$, что противоречит условию теоремы.

Теорема 28. Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ при всех значениях аргумента x удовлетворяют неравенству $f(x) \geq g(x)$ и имеют пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то имеет место неравенство $b \geq c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: По условию теоремы $f(x) - g(x) \geq 0$, следовательно, по теореме 5 $\lim\limits_{x \to a}\left(f(x) - g(x)\right) \geq 0$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) \geq 0$.

Односторонние пределы

До сих пор мы рассматривали определение предела функции, когда $x \to a$ произвольным образом, т.е. предел функции не зависел от того, как располагались значения x по отношению к a – слева или справа. Однако, довольно часто можно встретить функции, которые не имеют предела при этом условии, но они имеют предел, если $x \to a$, оставаясь с одной стороны от a, слева или справа. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

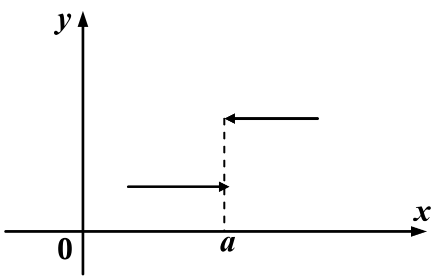


Рисунок 10

***Определение*:** Если $f(x)$ стремится к пределу b при x, стремящимся к некоторому числу a, так, что x принимает только значения, меньшие a, то пишут $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ и называют b *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a *слева*.

Таким образом, число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$ слева, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число δ (меньшее a), что для всех $x\in(\delta, a)$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

***Определение*:** Если $x\to a$ и принимает значения, большие a, то пишут $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ и называют b *пределом функции в точке а справа*. Т.е. число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$ справа, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число δ (большее a), что для всех $x\in(a,\delta)$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Заметим, что если пределы слева и справа в точке a, для функции $f(x)$ не совпадают, то функция не имеет предела (двустороннего) в точке a.

Пример 33.

а) Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на отрезке [0,1] следующим образом $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{при } 0\le x<3, \\ 3-x, & \text{при } 3\le x\le 4. \end{cases}$ (см. рисунок 11.)

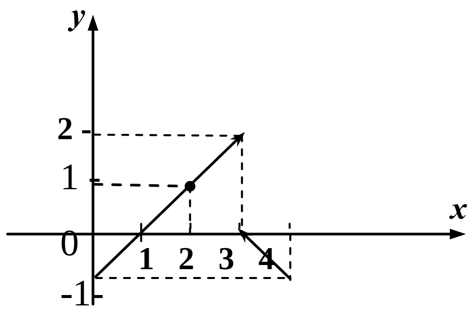


Рисунок 11

Найдем пределы функции $f(x)$ при $x\to 3$. Очевидно, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}(x-1)=2,\quad \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}(3-x)=0$.

б) $\lim\limits_{x\to 0-0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)=\left[x\to 0-0\Rightarrow \dfrac{1}{x}\to-\infty\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\to 0\right]=1,$

$$\lim_{x\to 0+0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)=\left[x\to 0+0\Rightarrow \frac{1}{x}\to+\infty\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\to+\infty\right]=+\infty.$$

в) $\lim\limits_{x\to 5-0} 8^{\frac{1}{5-x}} = \left[x \to 5-0\ (x<5) \Rightarrow 5-x \to 0+0 \Rightarrow \dfrac{1}{5-x} \to +\infty \right] = +\infty .$

г) $\lim\limits_{x\to -2-0} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-4}} = \left[\begin{array}{c} x \to -2-0\,(x<-2) \Rightarrow x^2 \to 4+0\,(x^2>4) \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2-4 \to 0+0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2-4} \to +\infty \end{array} \right] = 0 .$

§11 Два замечательных предела

Первый замечательный предел

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Рассмотрим дугу окружности радиуса R=1 с центральным углом, радианная мера которого равна x (0<x<$\pi/2$) (рисунок 12) .

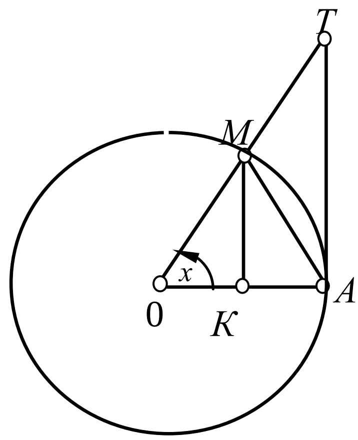


Рисунок 12

Тогда

$$OA=1,\ \sin x = MK,\ tgx = AT. \qquad (9)$$

Очевидно, что площадь треугольника OAM меньше площади сектора OAM, которая меньше площади треугольника OAT, или, что то же самое, (1/2)

$OA \cdot MK$<(1/2) $OA \cdot \overset{\smile}{AM}$ <(1/2)$OA \cdot AT$. Принимая во внимание равенства (9), последнее соотношение можно записать в виде (1/2) sin x<(1/2) x <(1/2) tg x, откуда получаем

$$\sin x < x < tg\, x . \qquad (10)$$

Разделив эти неравенства на sin x,получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ – чётные, то полученные неравенства справедливы и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Переходя к пределу при $x \to 0$, получим $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. На основании признака существования предела промежуточной функции $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена при x=0, так как числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. График функции изображен на рисунке.

Пример 34.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$.

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{x}{2} = 0$.

г) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\sin(x - 2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{\sin(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{(1+\sqrt{1-x})\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{(1+\sqrt{1-x})\sin 4x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}\frac{1}{4(1+\sqrt{1-x})}=\frac{1}{4(1+1)}=\frac{1}{8}.$

Второй замечательный предел

***Определение*:** Числом e (вторым замечательным пределом) называется *предел числовой последовательности*

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$e\approx 2{,}718281....$, т.е. число e - иррациональное число.

Можно показать, что функция $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, где *x,* в отличие от натурального числа *n,* «пробегает» все значения числовой оси (не только целые) имеет предел, равный числу e:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Число *e (число Эйлера, неперово число*) играет весьма важную роль в математическом анализе. График функции $y=e^x$ получил название *экспоненты.* Широко используются логарифмы по основанию *e*, называемые *натуральными:* $\log_e x=\ln x$.

К числу *e* приводят решения многих прикладных задач статистики, физики, биологии, химии и др., анализ таких процессов, как рост народонаселения, распад радия, размножение бактерий и т. п.

Рассмотрим задачу о непрерывном начислении процентов. Первоначальный вклад в банк составил Q_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно p% годовых. Необходимо найти размер вклада Q_t через t лет.

При использовании *простых процентов* размер вклада будет ежегодно увеличиваться на одну и ту же величину $\frac{p}{100}Q_0$, т.е. $Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$, $Q_2 = Q_0\left(1+\frac{2p}{100}\right)$, ...,$Q_t = Q_0\left(1+\frac{pt}{100}\right)$. На практике значительно чаще применяются *сложные проценты*. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз, т. е.

$$Q_1 = Q_0(1+\frac{p}{100}),\ Q_2 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ \ldots, Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном приросте p% процент начисления за $\frac{1}{n}$ - ю часть года составит $\frac{p}{n}$%, а размер вклада за t лет при nt начислениях составит

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие $(n=2)$, ежеквартально $(n=4)$, ежемесячно $(n=12)$, каждый день $(n=365)$, каждый час $(n=8760)$ и т.д., непрерывно $(n\to\infty)$. Тогда размер вклада за t лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty} Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} = Q_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}}$$

или с учётом при $x=\frac{100n}{p}\to\infty$

$$Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

Последняя формула выражает *показательный (экспоненциальный*) закон роста (при $p>0$) или убывания (при $p<0$). Она может быть использована при непрерывном начислении процентов.

Чтобы почувствовать результаты расчетов в зависимости от способа начисления процентов, в таблице в качестве примера приводятся размеры вкладов Q_t, вычисленные при $Q_0=1$ ден.ед., p=5%, t=20 лет.

Таблица 2

	Формула простых процентов	Формула сложных процентов					Формула непрерывного начисления процентов
		n=1	n=2	n=4	n=12	n=365	
Размер вклада, ден. ед	2,0000	2,6355	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Пример 35.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5} = \left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5} = e\cdot 1 = e.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{3} = e^{3}.$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x} = \left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2} = e^{2}.$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{3}{x}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}}.$

д) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{x-2}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 2}(1+2x-4)^{\frac{1}{2x-4}\cdot\frac{2x-4}{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2} e^{\frac{2(x-2)}{x-2}} = e^{2}.$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{4(x+3)}{x-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{4x+12}{x-1}} = e^4.$

§12 Типы неопределенностей и способы их раскрытия

Часто при вычислении пределов какой-либо функции непосредственное применение теорем о пределах не приводит к желаемой цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто прежде, чем применить эти теоремы, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем.

Условные выражения $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$ характеризуют типы неопределенностей и применяются для обозначения переменных величин, при вычислении предела которых нельзя сразу применять общие свойства пределов.

Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

1 Неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Пример 36.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{2x^2-x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{2x+1} = \frac{3}{3} = 1.$$

Пример 37.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x\to1}(x-3) = -2.$$

При разложении числителя на множители воспользовались правилом деления многочлена на многочлен «углом». Так как число x=1 является корнем многочлена x^3-6x^2+11x-6, то при делении получим

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\
\cline{2-2}
-\; x^3-x^2 \qquad\qquad & x^2-5x+6 \\
\cline{1-1}
-5x^2+11x-6 & \\
-\; -5x^2+5x \qquad & \\
\cline{1-1}
6x-6 & \\
-\; 6x-6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Пример 38.

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt{2+x}-3\right)\left(\sqrt{2+x}+3\right)}{(x-7)\left(\sqrt{2+x}+3\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{2+x-9}{(x-7)\left(\sqrt{2+x}+3\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{2+x}+3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 39.

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^2-64}{8\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 8}\frac{\left(x^2-64\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{8\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(x+8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{8(x-8)}=\frac{16\cdot 12}{8}=24.$$

Пример 40.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(3x/2\right)}{2\sin\left(3x/2\right)\cos\left(3x/2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(3x/2\right)}{\cos\left(3x/2\right)}=0.$$

2 Неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 41.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x}{x^4+x^2-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^4}}=\frac{3-0}{1+0-0}=3.$$

При вычислении предела числитель и знаменатель данной дроби разделили на x в старшей степени.

Пример 42.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^3+x}{x^5+3x^3-2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^5}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^4}}=\frac{0-0+0}{1+0-0}=0.$$

Пример 43.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\left[\frac{1-0+0}{0+0}\right]=\infty.$$

Пример 44.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{5}{x}}=\left[\frac{0+\sqrt{2-0}}{1-0}\right]=-\sqrt{2}.$$

При вычислении предела воспользовались равенством $\sqrt{x^2}=-x$, если x<0.

Следующие виды неопределенностей с помощью алгебраических преобразований функции, стоящей под знаком предела, сводят к одному из рассмотренных выше случаев $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

3 Неопределенность $0\cdot\infty$.

Пример 45.

$$\lim_{x\to\pi}\sin 2x\cdot ctgx=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\pi}2\cos^2 x=2.$$

4 Неопределенность $\infty-\infty$.

Пример 46.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=\frac{-5}{1+1}=-2{,}5.$$

Пример 47. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$.

Р е ш е н и е.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\cdot\frac{(\sqrt{x^2+4x}+x)}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-x^2}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}\right)=\frac{4}{\sqrt{1+0}+1}=2$$

Пример 48. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)$.

Р е ш е н и е.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x-4}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x-4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-3x-4}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x-4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+3x+1)-(x^2-3x-4)}{\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x-4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x-4}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x+5):x}{\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x-4}\right):x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(6+\frac{5}{x}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^2+3x+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-3x+4}{x^2}}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)}=$$

$$\frac{6+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{6}{2}=3.$$

Пример 49.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{3-1-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)}{1+x+x^2}=1$$

Пример 50.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[\infty+\infty]=\infty.$$

§13 Понятие непрерывности функции

Определение**:** Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если предел функции и её значение в этой точке равны, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (11)$$

Другими словами:

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она удовлетворяет следующим трём условиям:

1) определена в точке x_0 (т. е. существует $f(x_0)$);
2) имеет конечный предел при $x\to x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$, то соотношение (11) можно записать в виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

т.е. для непрерывной функции можно переставить знак функции и знак предела.

Можно привести равносильное определение непрерывности функции «на языке последовательностей»: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности значений аргумента x: x_1, x_2, x_3, …, x_n, …, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_n)$, … сходится к $f(x_0)$.

Сформулируем определение непрерывности функции «на языке $\varepsilon - \delta$».

***Определение*:** Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Данные определения эквивалентны следующей записи, использующие логические символы:

$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta > 0)\ (\forall x \in X, |x - x_0| < \delta): |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Если $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) \left(\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) \right)$, то функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке x_0 справа* (*слева*). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и слева и справа, то она непрерывна в этой точке.

Можно привести еще одно определение непрерывности функции, которое является перефразировкой первого определения. Так как условия $x \to x_0$ и $x - x_0 \to 0$ равносильны, то получаем

$$\lim_{x - x_0 \to 0} \left[f(x) - f(x_0) \right] = 0 \qquad (12)$$

***Определение*:** Разность x-x_0 называется *приращением аргумента x* в точке x_0 и обозначается, как правило, Δx, а разность $f(x)$ - $f(x_0)$ – *приращением функции в точке* x_0, вызванным приращением аргумента Δx, и обозначается Δy. Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = f(x) - f(x_0).$$

При фиксированной точке x_0 Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений ясен из рисунке13. Равенство (12) в новых обозначениях принимает вид

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (13)$$

Соотношение (13) является ещё одним определением непрерывности функции, которое можно сформулировать так.

***Определение*:** Функция называется непрерывной в точке x_0, если её приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$.

Последнее определение для практического использования бывает иногда более удобным, и им довольно часто пользуются.

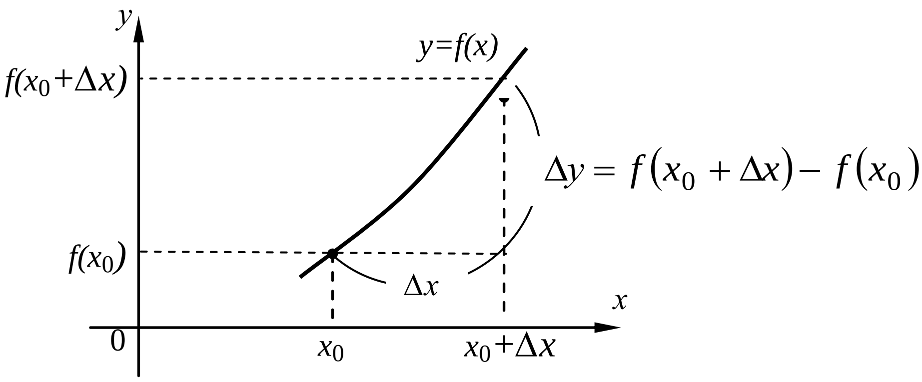


Рисунок 13

Теорема 29. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0.. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны в этой точке (последняя при $g(x) \neq 0$). (Без доказательства)

§14 Непрерывность некоторых элементарных функций

Непрерывность рациональных функций

Простейшим примером функции, непрерывной в любой точке x_0 числовой прямой, может служить постоянная функция $f(x) = C$. Действительно, в этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C = f(x_0)$, т.е. постоянная функция непрерывна в каждой точке числовой прямой.

Непрерывна также в каждой точке x_0 числовой прямой функция $f(x) = x$, так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0)$, т.е. предел функции в точке x_0 равен её значению в этой точке. Из сказанного и теоремы следует, что в любой точке x_0 функции $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, $x^4 = x^3 \cdot x$, ..., $x^n = x^{n-1} \cdot x$ (n –натуральное число) непрерывны. Как известно, функция $f(x) = x^n$ называется степенной, а функция вида

$$P(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

где $n \geq 0$ - целое число; C_0, C_1, C_2, ..., C_n – любые числа, - алгебраическим многочленом.

Каждое из слагаемых

$$C_0 x^n, \quad C_1 x^{n-1}, \quad C_2 x^{n-2}, \ldots, \quad C_{n-1} x, \quad C_n$$

есть произведение двух непрерывных функций (постоянной и степенной). По теореме (п. 8) оно непрерывно в любой точке x. Многочлен $P(x)$ является, таким образом, суммой функций, непрерывных в любой точке x, и, следовательно, непрерывен в любой точке $x \in R$.

Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где *P(x)* и *Q(x)* - алгебраические многочлены, непрерывна во всех таких точках *x*, в которых её знаменатель не равен нулю (т. е. во всех точках, за исключением корней знаменателя), как частное непрерывных функций.

Например, функция $R(x) = (3x^2 + 7x - 1)/(x^2 - 1)$ непрерывна во всех точках x, отличных от - 1 и +1.

Непрерывность тригонометрических функций

Рассмотрим тригонометрические функции sin *x*, cos *x*, *tg x*, *ctg x*, *sec x*, cosec *x*. Покажем, что функция sin x непрерывна в любой точке *x*. Воспользуемся последним определением непрерывности функции. Задав аргументу *x* приращение Δx, получим приращение функции

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

или

$$\Delta y = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Переходя к пределу в левой части равенства при $\Delta x \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \to 0}\left[\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}\right] = 0 \;,$$

так как $\left|\cos(x + \Delta x/2)\right| \le 1,$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0\,,$$

а произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая. Таким образом, функция sin *x* непрерывна в любой точке *x*.

Непрерывность функции cos *x* в любой точке *x* доказывается аналогично.

Из непрерывности функций cos *x* и sin *x* по теореме 29 следует непрерывность функций *tg x*=sin*x* /cos*x* и *sec x*=1/cos *x* во всех точках, где $\cos x \neq 0,$ т. е. во всех точках, кроме $x = \pi / 2 + \pi n$, и функций ctg$x$= cos$x$/sin$x$ и cosec x=1/sin x во всех точках, кроме $x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Непрерывность функции $f(x) = |x|$.

Функция $f(x) = |x|$, график которой изображён на рисунке 14, определена и непрерывна во всех точках числовой прямой. Действительно, в точках интервала $(0, +\infty)$ она непрерывна, так как при $x > 0$ $f(x) = x$ (см. п. 9.1). В точках интервала $(-\infty, 0)$ функция $f(x)$ также непрерывна, так как при $x < 0$ $f(x) = -x$, её можно представить как произведение двух непрерывных функций (-1) и x и применить теорему 4.7 о непрерывности произведения. Чтобы установить непрерывность функции $|x|$ в точке x=0, вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \to 0-} |x| = \lim_{x \to 0-} (-x) = -\lim_{x \to 0-} x = 0; \quad \lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0.$$

Пределы функции в точке $x = 0$ слева и справа совпадают и равны значению функции в этой точке. Отсюда следует, что функция $|x|$ непрерывна в точке $x = 0$ и, следовательно, непрерывна во всех точках числовой прямой.

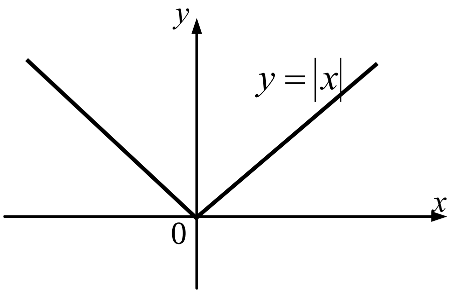


Рисунок 14

§15 Основные свойства непрерывных функций

Теорема 30. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0.$ Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ имеет тот же знак, что $f(x_0)$.

Рассмотрим некоторые свойства функций, непрерывных на отрезке. Эти свойства приведем без доказательства.

Определение: Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого отрезка, а на его концах, т.е. в точках a и b, непрерывна соответственно справа и слева.

Теорема 31. Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, хотя бы в одной точке этого отрезка принимает наибольшее значение и хотя бы в одной – наименьшее.

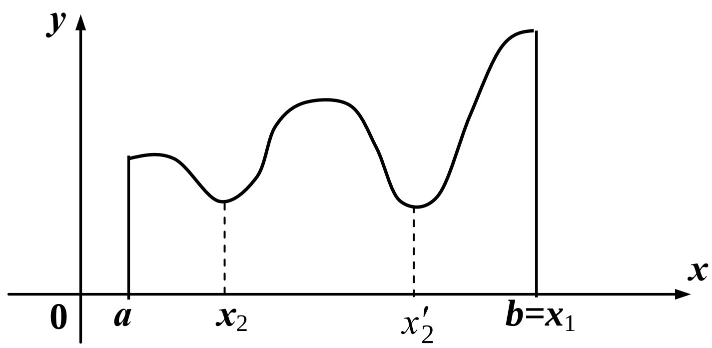


Рисунок 15

Теорема утверждает, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдется хотя бы одна точка $x_1 \in [a,b]$ такая, что значение функции $f(x)$ в этой точке будет самым большим из всех ее значений на этом отрезке: $f(x_1) \geq f(x)$ для $\forall x \in [a;b]$. Аналогично найдется такая точка x_2, в которой значение функции будет самым маленьким из всех значений на отрезке: $f(x_2) \leq f(x)$ $\forall x \in [a;b]$. Ясно, что таких точек может быть и несколько, например, на рисунке 15 показано, что функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в двух точках x_2 и x_2'.

Замечание: Утверждение теоремы можно стать неверным, если рассмотреть значение функции на интервале (a,b). Действительно, если рассмотреть функцию y

$= x$ на (0,2) , то она непрерывна на этом интервале, но не достигает в нем ни наибольшего, ни наименьшего значений: она достигает этих значений на концах интервала, но концы не принадлежат нашей области. Также теорема перестает быть верной для разрывных функций.

Теорема 32. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда внутри отрезка $[a,b]$ найдется, по крайней мере, одна точка $x=c$, в которой функция обращается в ноль: $f(c)=0$ где $a<c<b$.

Эта теорема имеет простой геометрический смысл: если точки графика непрерывной функции $y=f(x)$, соответствующие концам отрезка $[a,b]$ лежат по разные стороны от оси Ox, то этот график хотя бы в одной точке отрезка пересекает ось Ox. Разрывные функции этим свойством могут не обладать, рисунок 16.

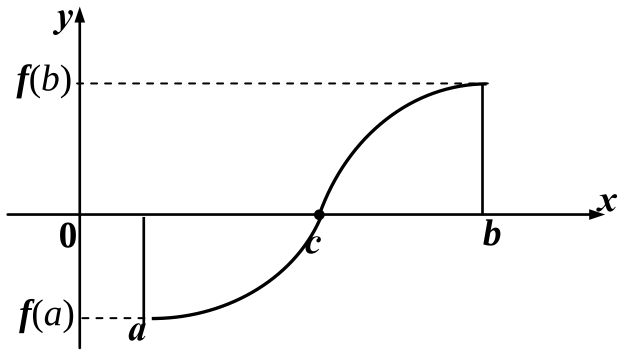


Рисунок 16

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 33 (теорема о промежуточных значениях). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа С, заключенного между A и B, найдется внутри этого отрезка такая точка $c\in [a,b]$, что $f(c) = C$.

Эта теорема геометрически (рисунок 17) очевидна. Рассмотрим график функции $y=f(x)$. Пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда любая прямая $y = C$, где C – любое число, заключенное между А и В, пересечет график функции, по крайней мере, в одной точке. Абсцисса точки пересечения и будет тем значением $x = C$, при котором $f(c) = C$.

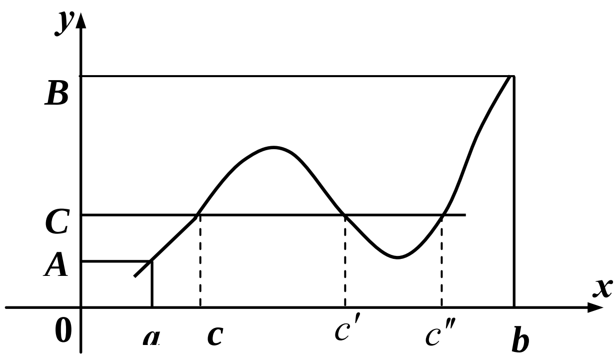


Рисунок 17

Таким образом, непрерывная функция, переходя от одного своего значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения. В частности:

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором интервале и принимает наибольшее и наименьшее значения, то на этом интервале она принимает, по крайней мере, один раз любое значение, заключенное между ее наименьшим и наибольшим значениями.

Теорема 34 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 35 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своих точных граней, т. е. существуют точки $x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что

$$f(x_1) = M = \sup_{[a,b]} f(x), \qquad f(x_2) = m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

§16 Классификация точек разрыва функции

Определение и классификация точек разрыва функции

***Определение*:** Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной.

Разрывы функций классифицируются следующим образом.

Р а з р ы в 1-го р о д а. Точка x_0 называется *точкой разрыва* 1-*го рода* функции $f(x)$, если в этой точке $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Пример 51.

Для функции $f(x)=\operatorname{sgn} x$ точка $x=0$ является точкой разрыва 1-го рода, так как $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} = -1$.

Р а з р ы в 2-го р о д а. Точка x_0 называется *точкой разрыва* 2-го рода функции $f(x)$, если в этой точке функция не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Пример 52.

Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ точка $x=0$ является точкой разрыва 2-го рода, так как $\lim\limits_{x \to 0+0} (1/x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} (1/x) = -\infty$.

Пример 53.

Исследовать непрерывность в точке $x=0$ заданных функций:

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \begin{cases} x+1 \text{ при } x \geq 0, \\ x-1 \text{ при } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \neq 0, \\ 1 \text{ при } x = 0; \end{cases}$ г) $y = x^2$.

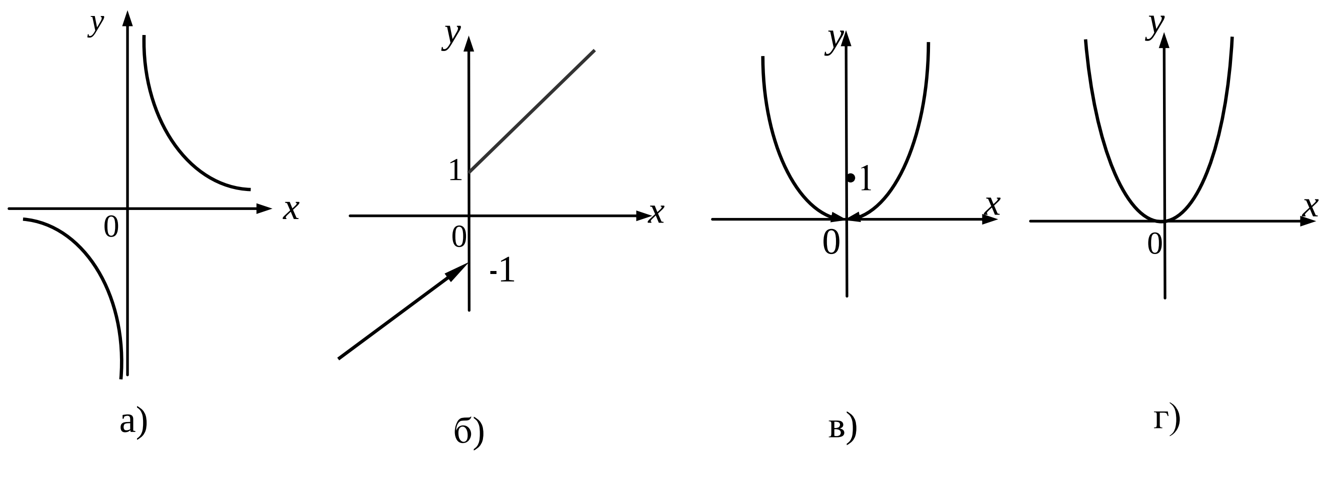


Рисунок 18

Р е ш е н и е . а) В точке x=0 функция $y = f(x)$ не является непрерывной, так как нарушено первое условие непрерывности –существование $f(0)$.

б) В точке x=0 функция $y = f(x)$ (рисунок 18б) не является непрерывной – первое условие непрерывности выполнено, ($f(0) = 1$), но нарушено второе условие – отсутствует $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (точнее говоря, здесь существуют односторонние пределы функции слева $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$ и справа $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$, но общего предела при $x \to 0$ не существует).

в) В точке x=0 функция $y = f(x)$ (рисунок 18в) не является непрерывной – первые два условия непрерывности выполнены –существуют $f(0) = 1$ и конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, но нарушено третье основное условие: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

г) В точке x=0 функция $y = f(x)$ (рисунок 18г) непрерывна, так как выполнены все три условия непрерывности - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Кусочно–непрерывные функции

***Определение*:** Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезке $[a,b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых имеет разрыв 1-го рода и, кроме того, имеет односторонние пределы в точках a и b.

Пример 54.

Функция $f(x) = [x]$ кусочно-непрерывна как на любом отрезке, так и на всей числовой прямой. График функции $f(x) = [x]$ изображен на рисунке 19, функция $[x]$в точках x=n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)непрерывна справа и разрывна слева. Во всех других точках она непрерывна как справа, так и слева (рисунок 19).

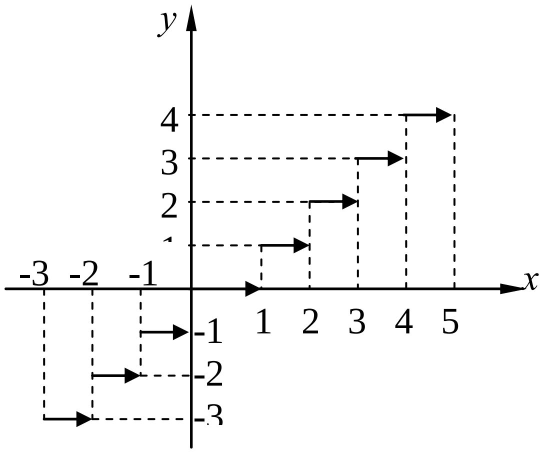


Рисунок 19

§17 Понятие сложной функции

Определение: Если на некотором промежутке X определена функция $z=\varphi(x)$ с множеством значений Z, а на множестве Z определена функция $y=f(z)$, то функция $y=f[\varphi(x)]$ называется сложной функцией от x, а переменная z - промежуточной переменной сложной функции.

Пример 55.

Функция $y=\sin x^2$ - сложная функция, определённая на всей числовой прямой, так как $y=f(z)=\sin z$, $z=\varphi(x)=x^2$.

Теорема 36. Пусть функция $z=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(z)$ непрерывна в точке $z_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $z=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмём из X любую последовательность точек

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, сходящуюся к точке x_0. Тогда в силу непрерывности функции $z=\varphi(x)$ в точке x_0 имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(x_n)=z_0$, т. е. соответствующая последовательность точек $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ сходится к точке z_0. В силу же непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 получаем

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0), \text{ т. е. } \lim_{n\to\infty} f[\varphi(x_n)] = f[\varphi(x_0)].$$

Следовательно, предел функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0 равен её значению в этой точке, что и доказывает непрерывность сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0.

Пример 56.

Доказать непрерывность функции $y = \sin x^2$ в точке $x = 0$.

Р е ш е н и е. Функция $z = x^2$ непрерывна в точке $x = 0$, а функция $y = \sin z$ непрерывна в точке $z = 0$, поэтому по доказанной теореме сложная функция $y = \sin x^2$ непрерывна в точке $x = 0$.

§18 Однофакторные производственные функции

Возможности любого производства отражаются характером зависимости между объемом выпускаемой продукции и соответствующими ему затратами сырья, полуфабрикатов, энергии, капиталовложений, труда и т.д. Всевозможные виды затрат называются факторами производства или ресурсами. Факторы производства имеют различные измерения (тонны, метры, киловатт-часы и др.). Общей единицей измерения всех ресурсов может служить рубль или другая денежная единица. Поэтому удобно иметь дело со стоимостным выражением как факторов производства, так и выпускаемой в результате их использования продукции.[4,7]

***Определение*:** Функцию, выражающую зависимость между стоимостью выпускаемой продукции и стоимостью суммарных затрат на ее производство, называют *однофакторной производственной функцией.*

***Определение*:** Функция, в которой роль независимой переменной играют затраты, а зависимая переменна определяет уровень выпуска, называется функцией выпуска. В функции затрат, наоборот, независимая переменная - выпуск, а зависимая - затраты.

Пример 57. Если затраты y прямо пропорциональны объему выпуска x, то функция затрат имеет вид

$$y = a_0 + a_1 x, \ (a_0 > 0, a_1 > 0, x \geq 0).$$

С помощью однофакторных производственных функций описывается также зависимость объема выпускаемой продукции от затрат некоторого специфического вида ресурса (трудовые ресурсы, основные производственные фонды, объем капиталовложений, различные виды сырья и др.). При этом затраты всех других участвующих в производстве ресурсов считаются постоянными.

Пример 58. С помощью функции вида

$$y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2,\ (a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, x \geq 0)$$

можно охарактеризовать зависимость урожайности y некоторой сельскохозяйственной культуры от количества x внесенных удобрений.

Иначе, при отсутствии удобрений урожайность составляет a_0 единиц. С увеличением объема используемых удобрений урожай сначала возрастает и достигает наибольшего значения при $x = x_0$.

Дальнейшее наращивание затрат удобрений, приводит к снижению урожая и даже полной его потере при $x = x_1$ (рисунок 20).

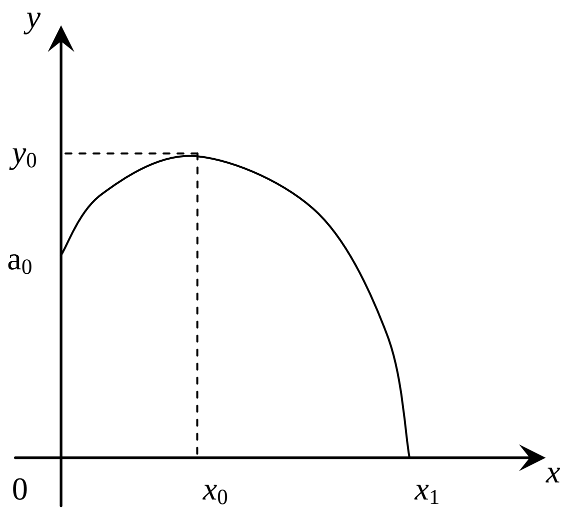


Рисунок 20 - График функции $y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2$

Пример 59. Гиперболическая зависимость

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x},\ (a_0 > 0, a_1 > 0, x > 0)$$

При помощи её можно моделировать зависимость затрат y на единицу выпускаемой продукции от объема производства x (рисунок 2). Величина $\frac{a_1}{x}$ уменьшается с увеличением x. Это означает, что с увеличением объема производства доля затрат неограниченно убывает. При большом объеме производства ($x \to \infty$) удельные затраты лишь незначительно отличаются от a_0 ($y \to a_0$).

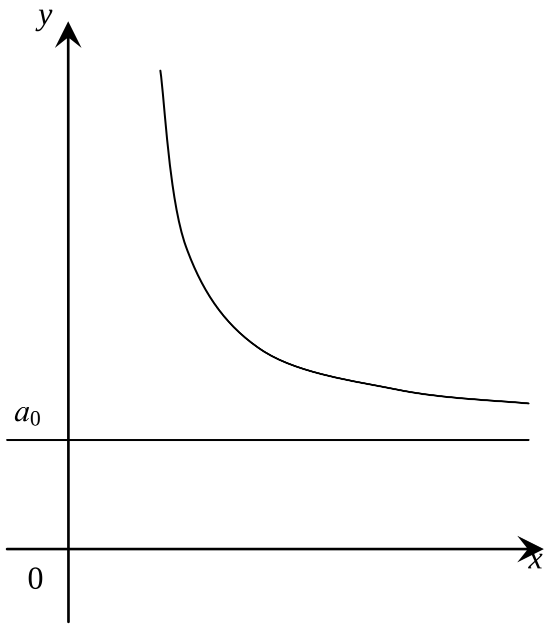


Рисунок 21 - График функции $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$

Пример 60. Экспоненциальная производственная функция

$$y = a_0 + a_1 e^{a_1 x}, \ (a_0 > 0, a_1 > 0, x \geq 0)$$

- возможно использовать, для исследования динамики изменения объема производств y с течением времени x (рисунок 22).

В начальный момент времени $x = 0$ объем производства $y = a_0$. Крутизна кривой на рисунке 22 зависит от коэффициентов a_0, a_1.

Зависимость $y = a_0 + a_1 e^{a_1 x}$, $(a_0 > 0, a_1 > 0, x \geq 0)$ имеет место и в следующей ситуации. Если на банковский счет кладется сумма a_0, то через x лет на счете будет сумма y, если банк выплачивает $a_1\%$ годовых.

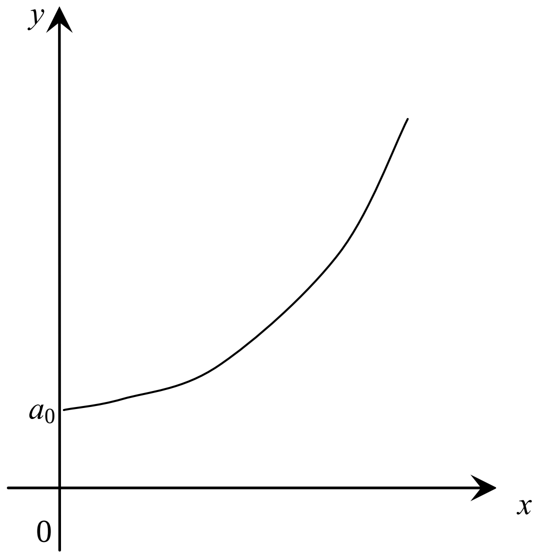


Рисунок 22 - График функции $y = a_0 + a_1 e^{a_1 x}$

Пример 61. Показательная функция

$$y = a_0 - k a_1^{x}, \ (a_0 > 0, 1 > a_1 > 0, k > 0, x \geq 0)$$

может моделировать влияние затрат переменного ресурса R на выпуск y продукции, если уровень выпуска не может быть больше некоторой предельной величины a_0. Так как $a_1 < 1$, то с ростом x - a_1^{x} неограниченно убывает, а y возрастает. Если $x \to \infty$, то $y \to a_0$. При $x = 0$ выпуск равен $a_0 - k$ (рисунок 23).

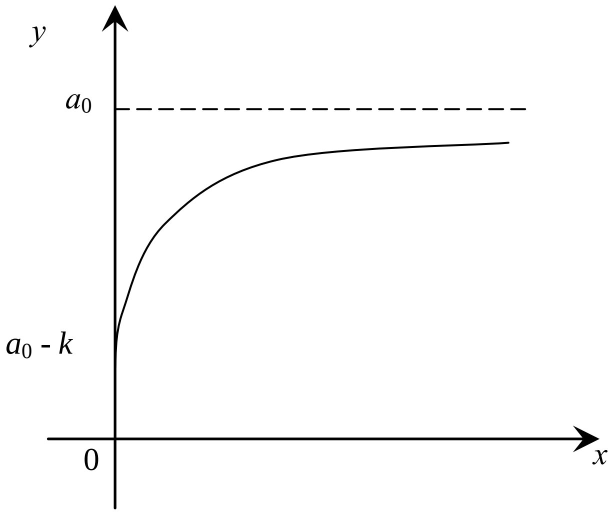


Рисунок 23 - График функции $y = a_0 - ka_1^x$

Пример 62. Степенная производственная функция

$$y = a_0 x^{a_1}, \ (a_0 > 0, a_1 > 0, x \geq 0)$$

обычно описывает ситуации, в которых рост затрат x некоторого ресурса R ведет к неограниченному увеличению выпуска y. Насколько быстро растет y зависит от величины параметров a_0, a_1 (рисунок 24).

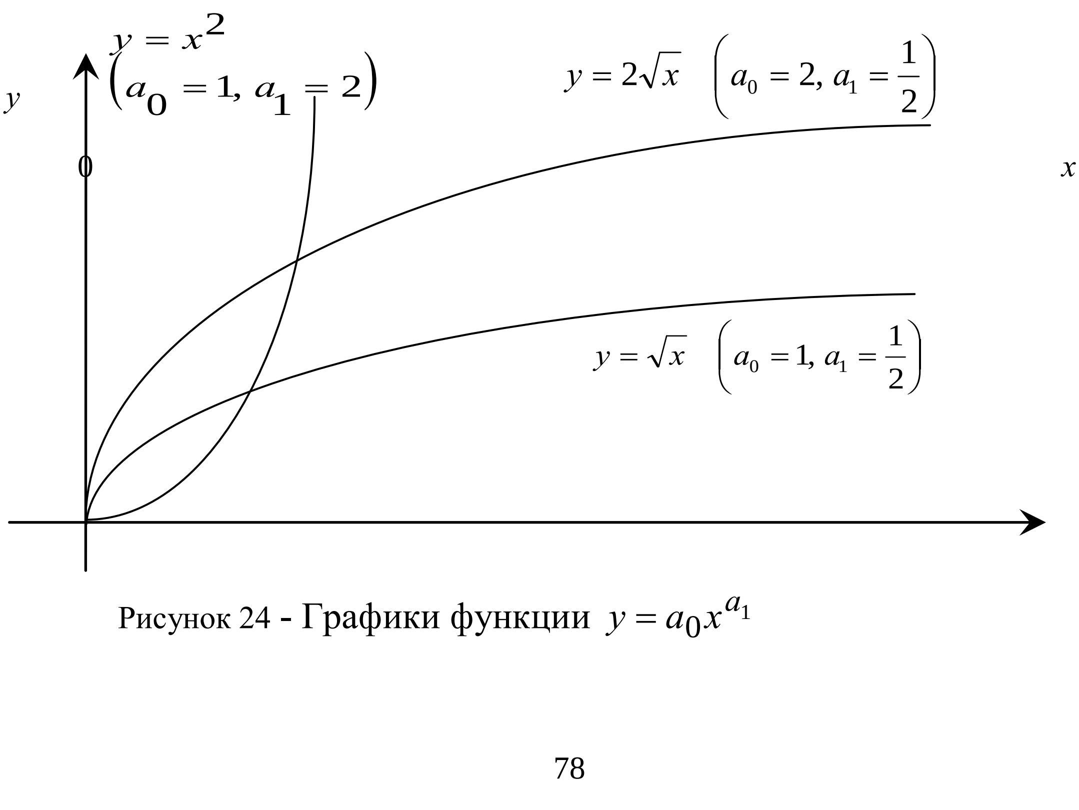


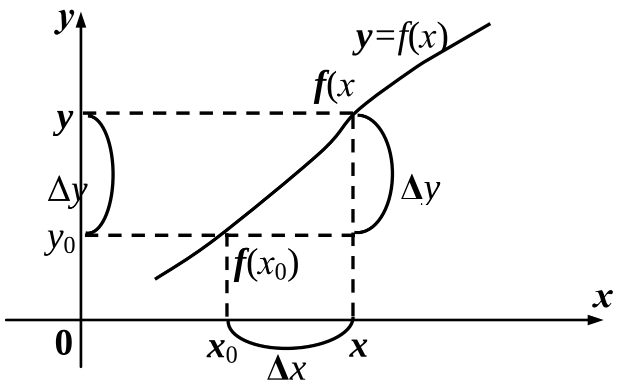
Рисунок 24 - Графики функции $y = a_0 x^{a_1}$

§19 Понятие производной

Определение производной

Пусть имеем некоторую функцию $y = f(x)$, определенную на некотором промежутке. Для каждого значения аргумента x из этого промежутка функция $y = f(x)$ имеет определенное значение.

Рассмотрим два значения аргумента: исходное x_0 и новое x. Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается Δx.



Таким образом, $\Delta x = x - x_0$ (приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным). Из этого равенства следует, что $x = x_0 + \Delta x$, т.е. первоначальное значение переменной получило некоторое приращение. Тогда, если в точке x_0 значение функции было $f(x_0)$, то в новой точке x функция будет принимать значение $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$. Разность $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается символом Δy. Таким образом,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x) \qquad (14)$$

Обычно исходное значение аргумента x_0 считается фиксированным, а новое значение x – переменным. Тогда $y_0 = f(x_0)$ оказывается постоянной, а $y = f(x)$

- переменной. Приращение Δy и Δx также будут переменными и формула (14) показывает, что Δy является функцией переменной Δx.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$. Если этот предел существует, то его называют *производной данной функции* $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$. Итак,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначается:

$$f'(x_0),\ y'(x_0).$$

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty\,(\text{или }\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty),$$

то говорят, что в точке x_0 функция имеет *бесконечную производную* знака плюс (или знака минус). В отличие от бесконечной производной определённую выше производную функции иногда называют *конечной производной*. Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке $x\in X$, то производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от x, также определённую на X. Из определения производной вытекает и способ её вычисления.

Пример 63.

1. Найти производную функции $y = x^2$

а) в произвольной точке;

б) в точке $x = 2$.

а) 1. $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

2. $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta\, x)^2$

3. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

б) $f'(2) = 4$

2. Используя определение, найти производную функции $y = \sqrt{1+2x}$ в произвольной точке.

1. $f(x+\Delta x) = \sqrt{1+2(x+\Delta x)}$

2. $\Delta y = \sqrt{1+2(x+\Delta x)} - \sqrt{1+2x}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x+2\Delta x} - \sqrt{1+2x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{1+2x+2\Delta x} + \sqrt{1+2x}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

Геометрический смысл производной

Введем сначала определение касательной к кривой в данной точке. Пусть имеем кривую и на ней фиксированную точку M_0 (см. рисунок 20). Рассмотрим другую точку M этой кривой и проведем секущую M_0M. Если точка M начинает перемешаться по кривой, а точка M_0 остается неподвижной, то секущая меняет свое положение. Если при неограниченном приближении точки M по кривой к точке M_0 с любой стороны секущая стремится занять положение определенной прямой M_0T, то прямая M_0T называется касательной к кривой в данной точке M_0 (рисунок 25).

Таким образом, *касательной к кривой в данной точке* M_0 называется предельное положение секущей $M_0\,M$, когда точка M стремится вдоль кривой к точке M_0.

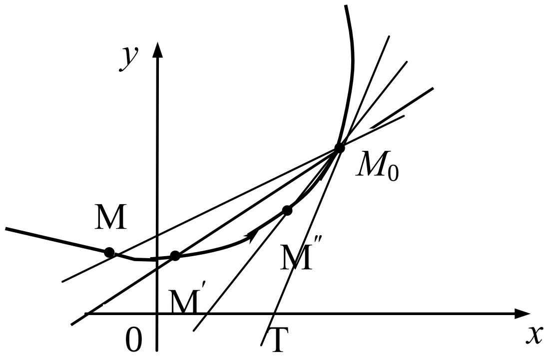


Рисунок 25

Рассмотрим теперь непрерывную функцию $y = f(x)$ и соответствующую этой функции кривую (рисунок 26). При некотором значении x_0 функция принимает значение $y_0 = f(x_0)$. Этим значениям x_0 и y_0 на кривой соответствует точка $M_0(x_0;y_0)$. Дадим аргументу x_0 приращение Δx. Новому значению аргумента соответствует значение функции $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$. Получаем точку $M(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$. Проведем секущую $M_0\ M$ и обозначим через φ угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ox. Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и заметим, что $tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

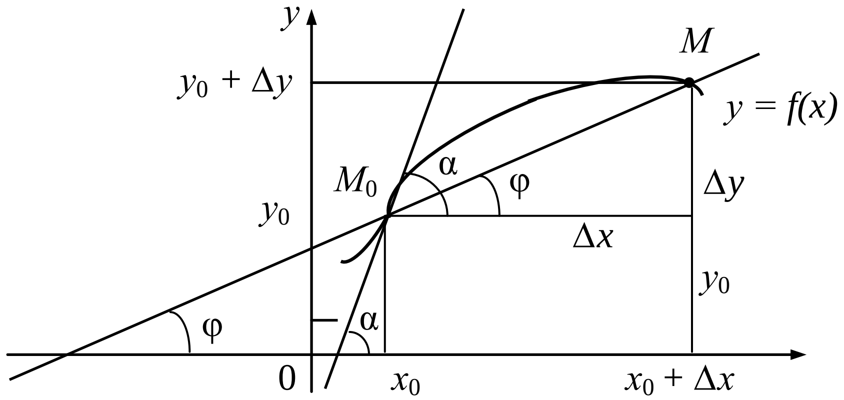


Рисунок 26

Если теперь $\Delta x \to 0$, то в силу непрерывности функции $\Delta y \to 0$, и поэтому точка М, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается в точке M_0. Тогда секущая $M_0 M$ будет стремиться занять положение касательной к кривой к точке M_0, а угол $\varphi \to \alpha$ при $\Delta x \to 0$, где через α обозначали угол между касательной и положительным направлением оси Ox. Поскольку функция $tg\varphi$ непрерывно зависит от φ при $\varphi \neq \pi/2$ то при $\varphi \to \alpha$ $tg\varphi \to tg\alpha$ и, следовательно, угловой коэффициент касательной будет:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \qquad (15)$$

т.е. $f'(x) = tg\alpha.$

Таким образом, геометрически $y'(x_0)$ представляет угловой коэффициент касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке x_0, т.е. при данном значении аргумента x производная равна тангенсу угла, образованного касательной к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке $M_0(x;y)$ с положительным направлением оси Ox. В этом и состоит *геометрический смысл производной*.

Пример 64.

Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^2$ в точке $M(-1;1)$. Ранее мы уже видели, что $(x^2)'=2x$. Но угловой коэффициент касательной к кривой есть $tg\,\alpha = y'|_{x=-1} = -2$.

Механический смысл производной

Из физики известно, что закон равномерного движения имеет вид $s = v \cdot t$, где s – путь, пройденный к моменту времени t, v – скорость равномерного движения.

Однако большинство движений, происходящих в природе, неравномерно, поэтому в общем случае скорость, а, следовательно, и расстояние s будет зависеть от времени t, т.е. будет функцией времени.

Итак, пусть материальная точка движется по прямой в одном направлении по закону $s = s(t)$.

Отметим некоторый момент времени t_0. К этому моменту точка прошла путь $s = s(t_0)$. Определим скорость v материальной точки в момент времени t_0.

Для этого рассмотрим какой-нибудь другой момент времени $t_0 + \Delta t$. Ему соответствует пройденный путь $s = s(t_0 + \Delta t)$. Тогда за промежуток времени Δt точка прошла путь $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t)$.

Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v_{cp}$. Оно называется *средней скоростью* в промежутке времени Δt. Средняя скорость не может точно охарактеризовать быстроту перемещения точки в момент t_0 (т.к. движение неравномерное). Для того, чтобы точнее выразить эту истинную скорость с помощью средней скорости, нужно взять меньший промежуток времени Δt.

Скоростью движения в данный момент времени t_0 (*мгновенной скоростью*) называется предел средней скорости в промежутке от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t),$$

т.е. скорость неравномерного движения – это производная от пройденного пути по времени. В этом состоит *механический смысл производной*

Экономический смысл производной

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени равна $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что *производительность труда в момент времени* t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е. равна $u' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$.

Экономический смысл производной: производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Определение: Производная логарифмической функции $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$ называется логарифмической производной, а так же *относительной скоростью изменения функции или темпом изменения функции.*[4,10]

Пример 65. Объем продукции u, произведенной бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, $1 \le t \le 8$, где t - рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Р е ш е н и е. Производительность труда выражается производной

$$u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 = z(t),$$

а скорость и темп изменения производительности – соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z = [\ln z(t)]'$:

$$z'(t) = -5t + 15\ (\text{ед./ч}^2),$$

$$T_z = [\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}\ (ед./ч).$$

В заданные моменты времени $t_1 = 1$ *и* $t_2 = 8$, $t_2 - t_1 = 8 - 1 = 7$. Соответственно получим: $z(1) = 112{,}5\ (ед./ч)$, $z'(1) = 10\ (ед./ч^2)$, $T_z(1) = 0{,}09\ (ед./ч)$ *и* $z(7) = 82{,}5\ (ед./ч)$, $z'(7) = -20\ (ед.ч^2)$, $T_z(7) = -0{,}24\ (ед.ч)$.

В ы в о д. К концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и логарифмической производной с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется её снижением в последние часы.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее экономический смысл производной.

Обозначим через x объем производства некоторой продукции, через K - суммарные затраты или издержки производства. Производственная функция (функция затрат) описывает зависимость издержек производства K от объема x выпускаемой продукции: $K = f(x)$.

Если объем производства увеличится на Δx единиц, то затраты возрастут на $\Delta K = f(x + \Delta x) - f(x)$ единиц.

Среднее приращение издержек выражается отношением $\frac{\Delta K}{\Delta x}$.[6,10]

***Определение*:** Под *предельными издержками* производства понимают предел среднего приращения издержек при безграничном уменьшении Δx, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (16)$$

Предел (16) выражает дополнительные затраты на производство продукции при увеличении объема производства на малую единицу, если исходный объем производства составляет x единиц.

Экономический смысл производной в данной точке: производная выражает предельные издержки производства при данном объеме и характеризует приблизительно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Пример 66. Допустим, функция затрат имеет вид:

$K = 2x + \ln(x + 1)$.

Определим предельные издержки производства при данном объеме выпуска $x_1 = 2, x_2 = 9$.

Р е ш е н и е. $K^{'}(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$, тогда $K^{'}(2) = 2\frac{1}{3}, K^{'}(9) = 2{,}1$.

Сравним $K^{'}(9) u K^{'}(2)$, $K^{'}(9) < K^{'}(2)$. То есть, $K^{'}(x_2) < K^{'}(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

В ы в о д. С увеличением объема производства предельные издержки (дополнительные затраты на следующую за x малую единицу выпуска) убывают. Увеличение выпуска на малую единицу требует все меньших дополнительных затрат.

Пример 67. Пусть зависимость спроса на товар от цены на него выражается формулой $d = \dfrac{100}{p+1}$. Определим скорость изменения спроса, когда цена на товар составляет 1 денежная единица, 4 денежных единиц.

Р е ш е н и е. Скорость изменения любой функции равна ее производной. В данном случае

$$d'(p) = -\frac{100}{(p+1)^2}.$$

Найдём $d'(1) = -25, d'(4) = -4$.

В ы в о д. Знак “минус” показывает, что с увеличением цены спрос на товар падает.

§20 Дифференцируемость функций. Непрерывность дифференцируемой функции

Понятие дифференцируемости функции в данной точке

***Определение*:** Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если её приращение Δy в данной точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \qquad (17)$$

где A- некоторое число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ - функция аргумента Δx, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Установим связь между дифференцируемостью функции в данной точке и существованием производной в той же точке.

Теорема 37. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Доказательство: *Необходимость.* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т. е. её приращение в этой точке можно представить в виде (17): $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x$. Поделим это равенство на Δx (при $\Delta x \neq 0$), получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

отсюда следует, что производная в точке x_0 существует и равна A: $f'(x_0) = A$.

Достаточность. Пусть существует конечная производная $f'(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Пусть $f'(x_0) = A$; тогда функция $\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - A$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$. Из последнего равенства имеем

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Получено представление (17), тем самым доказано, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0.

Таким образом, для функций одной переменной дифференцируемость и существование производной – понятия равносильные. Именно поэтому операцию нахождения производной часто называют дифференцированием.

Рассмотрим на рисунке 27 точки *a, b, c*. В точке *a* при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела (т.к. односторонние пределы различны при $\Delta x \to 0\text{-}0$ и $\Delta x \to 0+0$). В точке *A* графика нет определенной касательной, но есть две различные односторонние касательные с угловыми коэффициентами κ_1 и κ_2. Такой тип точек называют угловыми точками. В точке *B* при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является знакопостоянной бесконечно большой величиной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$.

Функция имеет бесконечную производную. В этой точке график имеет вертикальную касательную. Тип точки – "точка перегиба" вертикальной касательной.

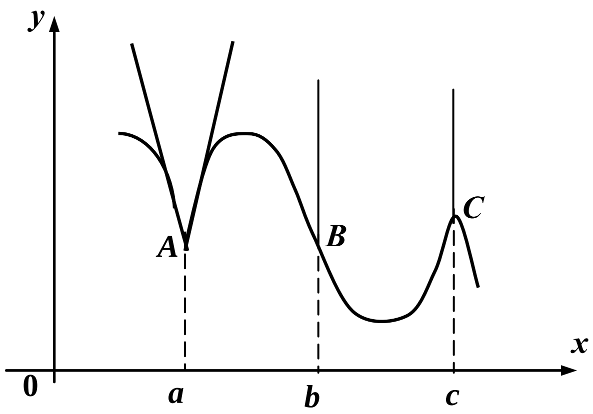


Рисунок 27

В точке *C* односторонние производные являются бесконечно большими величинами разных знаков. В этой точке график имеет две слившиеся вертикальные касательные. Тип - "точка возврата" с вертикальной касательной – частный случай угловой точки.

Пример 68.

1. Рассмотрим функцию $y = |x|$(рисунок 28). Эта функция непрерывна в точке $x = 0$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$. Покажем, что она не имеет производной в этой точке. $f(0 + \Delta x) = f(\Delta x) = |\Delta x|$.

2. Следовательно, $\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = |\Delta x|$. Но тогда при $\Delta x<0$ (т.е. при Δx стремящемся к 0 слева). $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1.$

а при $\Delta x>0$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

Таким образом, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ справа и слева имеет различные пределы, а это значит, что отношение предела не имеет, т.е. производная функции $y=|x|$ в точке $x=0$ не существует. Геометрически это значит, что в точке $x=0$ данная "кривая" не имеет определенной касательной (в этой точке их две).

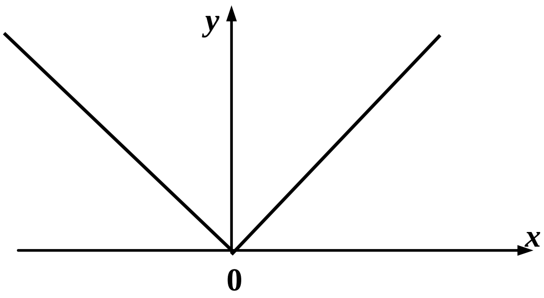


Рисунок 28

2. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ (рисунок 29) определена и непрерывна на всей числовой прямой. Выясним, имеет ли эта функция производную при $x=0$.

$$f(x + \Delta x) = f(\Delta x) = \sqrt[3]{\Delta x}$$

$$\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

Следовательно, рассматриваемая функция не дифференцируема в точке $x = 0$. Касательная к кривой в этой точке образует с осью абсцисс угол $\pi/2$, т.е. совпадает с осью Oy.

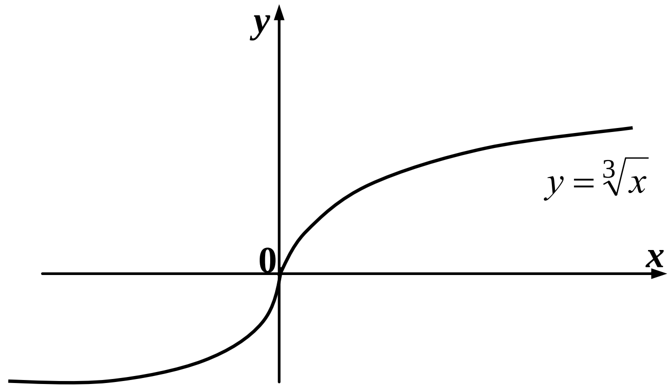


Рисунок 29

Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности

Теорема 38. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то её приращение в этой точке может быть представлено соотношением (16) . Тогда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0,$ получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = A\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0,$$

что и означает непрерывность функции $y=f(x)$ в точке x_0 согласно третьему определению непрерывности функции в точке.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой, т. е. не иметь производной в этой точке. (Примером такой функции является $y=|x|$, непрерывна, но не дифференцируемая в точке x=0).

§21 Понятие дифференциала

Определение и геометрический смысл дифференциала

***Определение*:** Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в некоторой точке x_0, если она имеет в этой точке определенную производную, т.е. если предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует и конечен.

***Определение*:** Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого отрезка $[a;b]$ или интервала $(a;b)$, то говорят, что она дифференцируема на отрезке $[a;b]$ или соответственно в интервале в интервале $(a;b)$.

Напомним, что если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то её приращение Δy в этой точке можно записать в виде двух слагаемых:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Слагаемое $A\Delta x$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой одного порядка с Δx (при $A\neq 0$), оно линейно относительно Δx. Слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx $\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=0\right)$.

Таким образом, первое слагаемое (при $A\neq 0$) является главной частью приращения функции $y=f(x)$.

***Определение*:** *Дифференциалом функции* $y=f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции в этой точке:

$$dy = A\Delta x. \qquad (18)$$

Если $A=0$, то $A\Delta x=0$, и поэтому слагаемое $A\Delta x$ уже не является главной частью приращения Δy, так как слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$, вообще говоря, отлично от нуля. Однако и в этом случае по определению полагаем дифференциал функции в точке x_0 равным $A\Delta x$, т.е. здесь $dy=0$.

Принимая во внимание теорему 37, т. е. учитывая, что $A = f'(x_0)$, формулу (18) можно записать в виде

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{19}$$

Пусть $f(x) = x$. Тогда по формуле (19)

$$dy = dx = (x_0)'\Delta x = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x}\right)\Delta x = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}\right)\Delta x = 1\Delta x = \Delta x.$$

Дифференциалом независимой переменной x назовём приращение этой переменной $dx = \Delta x$. Соотношение (19) принимает теперь вид

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{20}$$

Заметим, что с помощью равенства (20) производную $f'(x_0)$ можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу dx независимой переменной, т. е.

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции имеет следующий геометрический смысл: дифференциал dy для функции $y=f(x)$ в точке x_0 численно равен приращению «ординаты касательной» MS к графику этой функции в точке $M(x_0, f(x_0))$, а приращение функции Δy есть приращение «ординаты самой функции» $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента, равному Δx (рисунок 30).

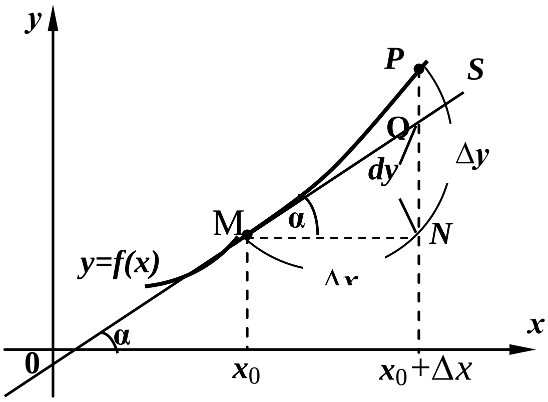


Рисунок 30

Приближённые вычисления с помощью дифференциала

Из определения дифференциала следует, что он зависит линейно от Δx и является главной частью приращения функции Δy. Само же Δy зависит от Δx более сложно. Например, если $f(x)=x^3$, то $\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3=3x_0{}^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$, в то время как

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}\right)\Delta x = 3x_0{}^2\Delta x.$$

Во многих задачах приращение функции заменяют дифференциалом функции в этой точке:

$$\Delta y \approx dy\,.$$

Тогда

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \qquad (21)$$

Абсолютная погрешность при такой замене равна $|\Delta y - dy|$ и является при $\Delta x\to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Пример 69.

Найти дифференциал dy и приращение Δy функции $y = x^2$:

1) при произвольных значениях x и Δx;

2) при $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Р е ш е н и е.

1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$,

$dy = (x^2)' = 2x\Delta x.$

2) Если $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$,

$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4{,}00.$

Погрешность при замене Δy на dy равна 0,01. Во многих случаях её можно считать малой по сравнению с $\Delta y = 4{,}01$ и ею пренебречь. Рассмотренная задача наглядно иллюстрируется на рисунке 26.

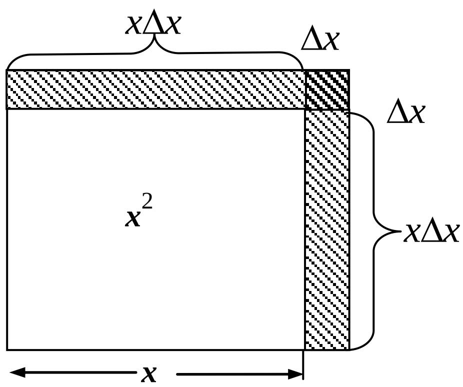


Рисунок 31

Пример 70. Вычислить приближённое значение $\sin 46°$.

Р е ш е н и е. Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $f'(x) = \cos x$. В этом случае приближённое равенство примет вид:

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x. \qquad (21(а))$$

Вычислим приближённое значение $\sin 46°$. Положим $x = \frac{\pi}{4}$ (что соответствует углу в 45^0), $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ (соответствует углу в 1^0), $x + \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$.Подставляя в (21(а)), будем иметь:

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4}$$

или

$$\sin 46^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{180} = 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot 0{,}0175 = 0{,}7191.$$

Пример 71. Если $f(x) = \sqrt{x},$ то формула (20) даёт:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Полагая $x = 1, \quad \Delta x = \alpha,$ получаем приближённое равенство:

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha.$$

В частности, $\sqrt{1{,}0003} \approx 1{,}00015$ при $\alpha = 0{,}0003.$

§22 Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций

Теорема 39. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное – при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие формулы:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', (u \cdot v)' = u'v + uv', \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (22)$$

Доказательство: Для вывода формул (22) воспользуемся определением производной, равенством $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$ и теоремой (23, 24, 25) . Тогда получим:

$$(u+v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'+v';$$

$$(uv)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x)+\Delta u][v(x)+\Delta v]-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)v(x)+\Delta uv(x)+u(x)\Delta v+\Delta u\Delta v-u(x)v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] =$$

$$= v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = vu'+uv'+0\cdot u' = u'v+uv',$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0,$ а множители u и v не зависят от Δx;

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x v(x+\Delta x)v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x)+\Delta u]v(x)-u(x)[v(x)+\Delta v]}{\Delta x v(x)[v(x)+\Delta v]} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{uv+\Delta uv-uv-u\Delta v}{\Delta x v(v+\Delta v)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v} = \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v} = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Пример 72.

1. $y = 3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, то $y' = \left(3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3\left(x^{-1/2}\right)' = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{3}{2x\sqrt{x}}$.

2. $y = x^3-3x^2+5x+2$. Найдем $y'(-1)$. $y' = 3x^2-6x+5$. Следовательно, $y'(-1)=14$.

3. y = ln$x$·cos$x$, то $y' = (\ln x)'\cos x+\ln x(\cos x)' = 1/x\cdot\cos x-\ln x\cdot\sin x.$

4. $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$, $y' = \dfrac{\left(x^3\right)'\cos x-x^3(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{3x^2\cos x+x^3\sin x}{\cos^2 x}$

§23 Вычисление производных основных элементарных функций

Производная постоянной функции

Производная функции $y = C,$ где C – постоянное число, выражается формулой

$$y' = 0 \tag{23}$$

Доказательство: Для любых x и Δx имеем $f(x+\Delta x) = C$ и $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0$. Отсюда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ при любом $\Delta x \neq 0$ и, следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Производная степенной функции

Производная функции $y = x^n$, показатель n которой является целым положительным числом, выражается формулой

$$y' = n \cdot x^{n-1}.$$

Доказательство: Хорошо известные формулы

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$ можно записать так:

$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2,$

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 b^2 a + C_3^3 b^3.$

Аналогичные формулы будут справедливы для четвёртой, пятой и вообще любой натуральной степени бинома. Например,

$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4.$

Теорема 40. Для произвольных чисел a и b и произвольного натурального числа n справедлива формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n.$$

Формула носит имя великого английского физика и математика И. Ньютона. Правая её часть называется *разложением натуральной степени бинома.* Коэффициенты C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Отметим некоторые характерные особенности формулы Ньютона.

а) Правая часть формулы Ньютона содержит (n+1) слагаемых.

б) Каждое слагаемое имеет вид $C_n^k a^{n-k} b^k$.

Запись C_n^k означает число сочетаний из n элементов по k элементов и определяется следующей формулой:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

в) Показатели степени при a в каждом следующем члене разложения на единицу меньше, чем в предыдущем, показатели степени при b – на единицу больше. Сумма показателей степени при a и b в каждом члене разложения равна n.

г) Коэффициенты разложения, одинаково удалённые от нулевого и от $n-$го члена разложения, равны, так как $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Используя формулу бинома Ньютона, можно записать:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = [x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n] - x^n =$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$ имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta x = 0,\ \lim\limits_{\Delta x\to 0} (\Delta x)^2 = 0,\ \ldots,\ \lim\limits_{\Delta x\to 0} (\Delta x)^{n-1} = 0,$ то

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Производные тригонометрических функций

Производная функции $y=\sin x$ выражается формулой

$$y'=\cos x. \tag{24}$$

Доказательство: Имеем

$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2).$

Таким образом, при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cos(x+\Delta x/2).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=1$ (первый замечательный предел), а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x$ в силу непрерывности функции $\cos x$, то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x.$$

Производная функции $y=\cos x$ выражается формулой

$$y'=-\sin x. \tag{25}$$

Доказательство: Имеем

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin(\Delta x/2)\sin(x+\Delta x/2).$$

Таким образом, при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2\sin(\Delta x/2)\sin(x+\Delta x/2)}{\Delta x}=-\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\sin(x+\Delta x/2).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin(x+\Delta x/2)=\sin x$ в силу непрерывности функции $\sin x$, то

3) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin x.$

Производная функции $y = tg\ x$ выражается формулой

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}\left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right). \qquad (26)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Так как $tg\ x = \sin x / \cos x,$ то по теореме (39 получим

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

следовательно,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Производная функции $y = ctg\ x$ выражается формулой

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}(x \neq n\pi). \qquad (27)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Так как $ctg\ x = \cos x / \sin x,$ то аналогично предыдущему имеем

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x},$$

следовательно,

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

***Таблица производных основных элементарных функций*.**

1. $(C)' = 0.$

8. $(ctg\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

2. $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha - 1}, \alpha \in R..$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

3. $(a^x)' = a^x \ln a$

$\left(\text{\textit{в частности,}} \left(e^x\right)' = e^x \right).$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\text{\textit{в частности,}} \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}).$

5. $(\sin x)' = \cos x.$

6. $(\cos x)' = -\sin x.$

7. $(tg\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11. $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

12. $(arcctg\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

§24 Правило дифференцирования сложной функции

Напомним что называется сложной функцией.

Пусть $y = f(u)$, а $u = u(x)$. Получаем функцию y, зависящую от аргумента $x: y = f\left(u(x)\right)$. Последняя функция называется функцией от функции или *сложной функцией*.

Областью определения функции $y = f\left(u(x)\right)$ является либо вся область определения функции $u = u(x)$ либо та её часть, в которой определяются значения u, не выходящие из области определения функции $y = f(u)$.

Операция «функция от функции» может проводиться неоднократно, а любое число раз.

Установим правило дифференцирования сложной функции.

Теорема 41. Если функция $u = u(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную $u'_x = u'(x_0)$ и принимает в этой точке значение $u_0 = u(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в точке u_0 производную $y'_u = f'(u_0)$, то сложная функция $y = f\left(u(x)\right)$ в указанной точке x_0 тоже имеет производную, которая равна

$$y'_x = f'(u_0)\cdot u'(x_0), \tag{28}$$

где вместо *u* должно быть подставлено выражение $u = u(x)$.

Таким образом, производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу *u* на производную промежуточного аргумента по *x*.

Д о к а з а т е л ь с т в о: При фиксированном значении x_0 будем иметь $u_0 = u(x_0)$, $y_0 = f(u_0)$. Для нового значения аргумента $x_0+\Delta x$:

$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$, $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)$.

Так как *u* – дифференцируема в точке x_0, то *u* непрерывна в этой точке. Поэтому при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$. Аналогично при $\Delta u \to 0$ $\Delta y \to 0$.

По условию $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u(u_0)$. Из этого соотношения, пользуясь определением предела, получаем (при $\Delta u \to 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$, а следовательно, и при $\Delta x \to 0$.

Перепишем это равенство в виде:

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

Полученное равенство справедливо и при $\Delta u = 0$ при произвольном α,так как оно превращается в тождество $0 = 0$. При $\Delta u = 0$ будем полагать $\alpha = 0$. Разделим все члены полученного равенства на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

По условию $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$. Поэтому, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Итак, чтобы продифференцировать сложную функцию $y=f\left(u(x)\right)$, нужно взять производную от «внешней» функции *f*, рассматривая её аргумент просто как переменную, и умножить на производную от «внутренней» функции по независимой переменной.

Если функцию $y=f(x)$ можно представить в виде $y=f(u)$, $u=u(v)$, $v=v(x)$, то нахождение производной y'_x осуществляется последовательным применением предыдущей теоремы.

По доказанному правилу имеем $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. Применяя эту же теорему для u'_x получаем $u'_x=u'_v\cdot v'_x$, т.е. $y'_x=y'_x\cdot u'_v\cdot v'_x=f'_u(u)\cdot u'_v(v)\cdot v'_x(x)$.

Пример 73. $y=e^{arctg\,x}$, $\quad y'-?$

Решение. $y=e^u$, $\quad u=arctg\ x$. Тогда по формуле (28)

$$y'(x)=y'(u)\,u'(x)=e^u\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Заменяя u на $arctg\,x$, окончательно получим $y'=e^{arctgx}\,\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример 74. $y=tg^2\sqrt{x^2+1}\quad y'-?$

Решение: Данную функцию можно представить в виде $y=u^2$, где $u=tg\ v$, а $v=\sqrt{w}$ и $w=x^2+1$. Тогда получаем,

$$y'(x)=y'(u)\,u'(v)\,v'(w)\,w'(x)=(u^2)'(tgv)'(\sqrt{w})'(x^2+1)'=$$

$$=2u\,\frac{1}{\cos^2 v}\,\frac{1}{2\sqrt{w}}\,2x=\frac{2xtg\sqrt{x^2+1}}{\cos^2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 75.

1. $y=\sin x^2$. Тогда $y'=\cos x^2\cdot\left(x^2\right)'=\cos x^2\cdot 2x$.

2. $y=\left(x+\frac{2}{x}\right)^{100}$, $y'=100\left(x+\frac{2}{x}\right)^{99}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)'=100\left(x+\frac{2}{x}\right)^{99}\cdot\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$.

3. $y=\ln^3(x+3)$, $y'=3\ln^2(x+3)\cdot(\ln(x+3))'=3\ln^2(x+3)\frac{1}{x+3}$.

4. $y=\ln\cos\frac{1-2x}{3}$,

$$y'=\frac{1}{\cos\frac{1-2x}{3}}\cdot\left(\cos\frac{1-2x}{3}\right)'=\frac{-1}{\left(\cos\frac{1-2x}{3}\right)}\cdot\sin\frac{1-2x}{3}\cdot\left(\frac{1-2x}{3}\right)'=\frac{-1}{\cos\frac{1-2x}{3}}\cdot\sin\frac{1-2x}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=$$
$$=\frac{2}{3}tg\,\frac{1-2x}{3}.$$

§25 Понятие логарифмической производной функции

Вычислим производную функции $y=\ln|x|\ (x\neq 0)$. Так как

$$\begin{cases}(\ln x)'=1/x,\\ (\ln(-x))'=(-x)'/-x=1/x,\end{cases}$$

(последнее равенство получено на основании правила дифференцирования сложной функции), то производная данной функции выражается следующей формулой:

$$y'=(\ln|x|)'=\frac{1}{x}. \qquad (29)$$

Учитывая формулу (29), вычислим производную сложной функции $y=\ln|u|$, где $u=f(x)$ - дифференцируемая функция.

$$y'=(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}=\frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ или}$$

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \qquad (30)$$

***Определение*:** Производная $(\ln|f(x)|)'$ называется *логарифмической производной* функции $f(x)$.

Вычислим с помощью логарифмической производной производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где u и v – некоторые функции от x (u>0), имеющие в данной точке x производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Так как $\ln y = v(x)\ln u(x)$, то, используя формулу (30), получаем

$$\frac{y'}{y} = [\,v(x)\ln u(x)]' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Отсюда, учитывая, что $y = u(x)^{v(x)}$, получаем формулу для производной показательно-степенной функции

$$y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right],$$

$$y' = v(x)\cdot u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x) + u(x)^{v(x)}\cdot \ln u(x)\cdot v'(x). \qquad (31)$$

Таким образом, для того чтобы найти производную показательно–степенной функции, достаточно дифференцировать её сначала как степенную, а затем как показательную, и полученные результаты сложить (напомним, что для сложной функции справедливы следующие формулы $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ и $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$)

Пример 76. Вычислить производную функции $y = x^x$.

Р е ш е н и е. $y = x^x$, $\ln y = x\cdot\ln x$,

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y};\quad (x\cdot\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = y\,(1 + \ln x) \quad \Rightarrow \quad y' = x^x (1 + \ln x)\,.$$

О т в е т : $y' = x^x (1 + \ln x)$.

Пример 77. Вычислить производную функции $y = (\sin x)^{x^2}$.

Р е ш е н и е . $y = \sin x^{x^2}$, $\ln y = x^2 \ln \sin x$,

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}; \quad (x^2 \ln \sin x)' = (x^2)' \ln \sin x + x^2 (\ln \sin x)' = 2x \ln \sin x + x^2 \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) =$$

$$= 2x \ln \sin x + x^2 ctgx\,;$$

$$y' = y(2x \ln \sin x + x^2 ctgx) = (\sin x)^{x^2} (2x \ln \sin x + x^2 ctgx).$$

О т в е т : $y' = (\sin x)^{x^2} (2x \ln \sin x + x^2 ctgx)$**.**

§26 Дифференцирование обратной функции

Определение**:** Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на некотором отрезке, если большему значению аргумента x из этого отрезка соответствует большее значение функции, т.е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение**:** Функция называется *убывающей* на некотором отрезке, если меньшему значению аргумента из этого отрезка соответствует большее значение функции, т.е. если $x_2 < x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Пусть дана возрастающая или убывающая функция

$$y = f(x),$$

определённая на некотором отрезке $[a,b]$ $(a < b)$. Пусть $f(a) = c$, $f(b) = d$. Для определённости будем рассматривать возрастающую функцию (рисунок 32).

Рассмотрим два различных значения x_1 и x_2, принадлежащих отрезку $[a,b]$. Из определения возрастающей функции следует, что если $x_1 < x_2$ и

$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то $y_1 < y_2$. Следовательно, двум различным значениям x_1 и x_2 соответствуют два различных значения функции y_1 $и$ y_2.

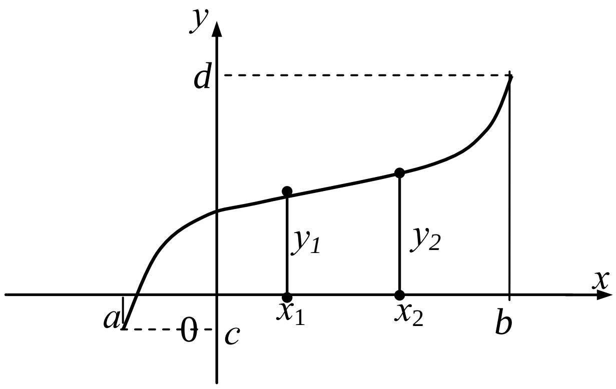


Рисунок 32

Справедливо и обратное, т. е. если $y_1 < y_2$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то из определения возрастающей функции следует, что $x_1 < x_2$. Таким образом, между значениями x и соответствующими им значениями y устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Рассматривая эти значения y как значения аргумента, а значения x как значения функции, получаем x как функцию y:

$$x = \varphi(y). \tag{33}$$

Эта функция называется *обратной* для функции $y = f(x)$.Очевидно, что и функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = \varphi(y)$. Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что и убывающая функция имеет обратную.

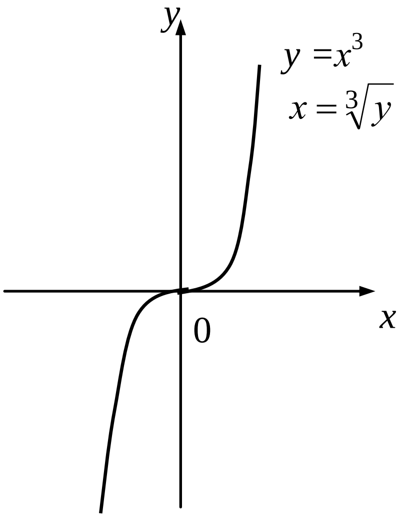
З а м е ч а н и е 1 . Если возрастающая (или убывающая) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причём $f(a) = c$, $f(b) = d$, то обратная функция определена и непрерывна на отрезке $[c, d]$.

Пример 78. Пусть дана функция $y = x^3$. Эта функция - возрастающая на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$ и она имеет обратную функцию

$x=\sqrt[3]{y}.$ Заметим, что обратная функция $x=\varphi(y)$ находится путём решения уравнения $y=f(x)$ относительно x.

Пример 79. Пусть дана функция $y=e^{x}$. Эта функция – возрастающая на бесконечном интервале $-\infty<x<+\infty$. Она имеет обратную $x=\ln y$. Область определения обратной функции $0<y<+\infty$.

З а м е ч а н и е 2 . Если функция $y=f(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей на некотором интервале, то она может иметь несколько обратных функций (рисунок 33).



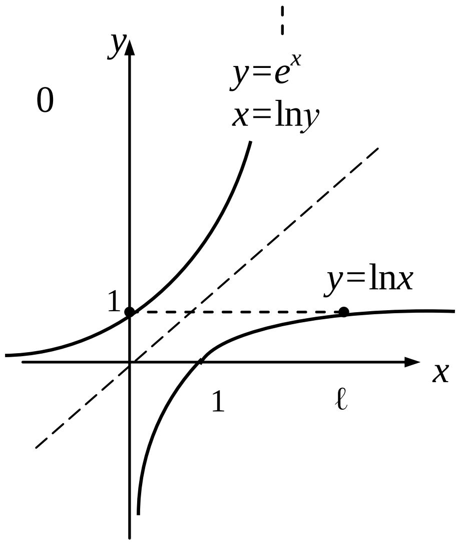


Рисунок 33

Теорема 42. Если для функции $y=f(x)$ существует обратная функция $x=\varphi(y)$, которая в рассматриваемой точке y имеет производную $\varphi'(y)$, отличную от нуля, то в соответствующей точке x функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$, равную $\dfrac{1}{\varphi'(y)}$, т. е. справедлива формула

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о : Возьмём приращение Δy, тогда на основании (33)

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

так как $\varphi(y)$ есть функция монотонная, то $\Delta x \neq 0.$ Напишем тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}. \tag{35}$$

Так как функция $\varphi(y)$ непрерывна, то $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0.$ Переходя к пределу при $\Delta y \to 0$ в обеих частях равенства (35), получим:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ или } f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим применение этой теоремы на примерах.

Пример 79. $y = e^x$. Обратной для этой функции является функция $x = \ln y$. Мы уже доказали, что $x'_y = (\ln y)' = \frac{1}{y}$. Поэтому согласно сформулированной выше теореме $y'_x = \frac{1}{x'_y} = y = e^x$. Итак, $\left(e^x\right)' = e^x$.

Пример 80. $y=\arcsin x$. Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$. Эта функция в интервале $-\pi/2 < y < \pi/2$ монотонна. Её производная $x' = \cos y$ не обращается в этом интервале в нуль. Следовательно, по теореме о производной обратной функции $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$. Но на $(-\pi/2;\pi/2)$ $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Поэтому

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 81. $y=\operatorname{arctg} x$. Эта функция по определению удовлетворяет условию существования обратной функции на интервале $-\pi/2 < y < \pi/2$. При этом обратная функция $x=tg\ y$ монотонна. По ранее доказанному $x'=\frac{1}{\cos^2 y}$. Следовательно, $y'=\cos^2 y$. Но $\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$.

Поэтому $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$

Аналогично можно показать, что $\left(a^x\right)'=a^x\ln a, (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

§27 Неявная функция и её дифференцирование

Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением, которое символически можно обозначить так:

$$F(x,y)=0. \tag{36}$$

Так, например, уравнение

$$x^2+y^2-a^2=0 \tag{37}$$

неявно определяет следующие элементарные функции

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, \tag{38}$$

$$y=-\sqrt{a^2-x^2}. \tag{39}$$

После подстановки в уравнение (37) этих значений, получаем тождество

$$x^2+(a^2-x^2)-a^2=0.$$

Выражения (38) и (39) получились путём решения уравнения (37) относительно y. Но не всякую неявно заданную функцию можно представить явно, т. е. можно представить в виде $y=f(x)$, где $f(x)$ есть элементарная функция.

Так, например, функции, заданные уравнениями

$$y^6-y-x^2=0$$

или

$$y-x-\frac{1}{4}\sin y=0,$$

не выражаются через элементарные функции, т. е. эти уравнения нельзя разрешить относительно y.

Замечание: Термины «явная функция» и «неявная функция» характеризуют не природу функции, а способ её задания. Каждая явная функция $y=f(x)$ может быть представлена и как неявная $y-f(x)=0.$

Укажем правило нахождения производной неявной функции, не требующее преобразования её в явное выражение.

Допустим, что функция задана уравнением

$$x^2+y^2-a^2=0.$$

Дифференцируя обе части этого тождества по x, считая, что y есть функция от x, получим (пользуясь правилом дифференцирования сложной функции):

$$2x+2yy'=0,$$

откуда

$$y'=-x/y.$$

Если бы мы стали дифференцировать соответствующую явную функцию

$$y=\sqrt{a^2-x^2},$$

то получилось бы:

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{y},$$

Рассмотрим ещё один пример неявной функции:

$y^6-y-x^2=0.$

Дифференцируем по x:

$$6y^5y'-y'-2x=0,$$

откуда

$$y'=\frac{2x}{6y^5-1}.$$

§28 Параметрическое задание функции и её дифференцирование

Параметрическое задание функции

Пусть даны две функции

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{40}$$

одной независимой переменной t, определённые и непрерывные в одном и том же промежутке. Если $x=\varphi(t)$ строго монотонна, то обратная к ней функция $t=\Phi(x)$ однозначна, также непрерывна и строго монотонна. Поэтому y можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной x посредством переменной t, называемой *параметром:*

$$y = \psi[\Phi(x)].$$

В этом случае говорят, что функция y от x задана параметрически с помощью уравнений (40) .

Пример 82.

Пусть $x = r\cos t, \quad y = r\sin t \quad (0 \le t \le \pi)$. Так как функция $x = r\cos t$ убывает при $0 \le t \le \pi$, то данные уравнения задают параметрически функцию y от x. Если выразить t через x из первого уравнения и подставить во второе, то получим искомую функцию переменной x в явном виде.

Это ещё легче сделать, если заметить, что

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2.$$

Отсюда $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ или $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

$$\begin{cases} y = \sqrt{r^2 - x^2}, & 0 \le t \le \pi, \\ y = -\sqrt{r^2 - x^2}, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

Пример 83.

Пусть $x = a\cos t, \, y = b\sin t (0 \le t \le 2\pi)$.

Данные равенства являются параметрическими уравнениями эллипса. Исключая из этих уравнений параметр t (разрешая их относительно $\cos t$ и $\sin t$, возводя полученные равенства в квадрат и складывая), получаем

$(x/a)^2 + (y/b)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ *или* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 -$ *уравнение эллипса.*

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \le t \le T. \tag{41}$$

Предположим, что эти функции имеют производные и что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$, которая также имеет производную. Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию $y=f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию

$$y = \psi(t), \quad t = \Phi(x),$$

t – промежуточный аргумент.

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t)\,\Phi'_x(x). \tag{42}$$

На основании теоремы о дифференцировании обратной функции следует:

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}$$

Подставляя последнее выражение в равенство (42), получаем:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

или

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{43}$$

Выведенная формула дает возможность находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя выражение непосредственной зависимости y от x.

Пример 84.

Функция y от x задана параметрическими уравнениями:
$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi).$

Найти производную $\frac{dy}{dx}$: 1) при любом значении *t*; 2) при $t=\frac{\pi}{4}$.

Решение. 1) $y'_x=\frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{a\cos\ t}{-a\sin t}=-ctg\ t$; 2) $(y'_x)t=-ctg(\pi/4)=-1$.

§29 Эластичность и ее свойства

Изучение различных экономических вопросов, таких, как определение динамики спроса населения на данный товар при изменении его цены или при изменении доходов населения, исследование диапазона взаимозаменяемости ресурсов производства, определение эффективности тех или иных затрат, прогнозирование изменения прибыли предприятия или фирмы под воздействием различных факторов и решение многих других проблем, приводит к необходимости выяснения на сколько процентов изменится одна величина, если другая увеличилась на 1%.

Характеристика, дающая ответ на поставленный вопрос, называется *эластичностью* соответствующей функции.[4,5,7,10,13]

Приступим к построению этого показателя. Пусть аргумент x функции $f(x)$ получил приращение Δx. Тогда значение функции изменится на величину

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Приращения $\Delta x,\Delta y$ называют абсолютными приращениями аргумента и функции соответственно. Составим относительные приращения переменных $\frac{\Delta x}{x},\frac{\Delta y}{y}$ и выразим их в процентах.

Величина $\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%$ указывает, на сколько процентов изменилось значение аргумента, а $\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%$ дает соответствующее изменение значения функции.

Отношение $\left(\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%\right):\left(\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%\right)$ показывает, на сколько процентов в среднем меняется (увеличивается или уменьшается) значение функции, когда значение аргумента возрастает на 1% (увеличивается от x до $x+0{,}01x$).

Это отношение будет характеризовать поведение функции $y=f(x)$ в данной точке тем точнее, чем меньше Δx. Пусть Δx неограниченно убывает. Вычислим предел указанного отношения при условии $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%\right):\left(\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%\right)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (44)$$

Отношение $\frac{y}{x}$ не зависит от изменения Δx. Оно играет роль постоянной и может быть вынесено за знак предела.

***Определение*:** Предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к соответствующему относительному приращению аргумента $\frac{\Delta x}{x}$ при условии, что абсолютное приращение аргумента Δx стремится к нулю, называется **эластичностью** функции $y=f(x)$ по переменной x и обозначается символом

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (45)$$

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

и формула (45) принимает вид

$$E_x(y)=\frac{x}{y}f'(x)$$

или

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}. \qquad (46)$$

В ы в о д. Из (45) следует, что эластичность $E_x(y)$ показывает, на сколько процентов изменится значение функции при увеличении независимой переменной на 1 % (с x до $x + 0{,}01x$).

Формулу (46) можно переписать в виде

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} : \frac{y}{x}.$$

Это означает, что для функции выпуска $y = f(x)$ эластичность равна отношению предельной производительности ресурса к его средней производительности.[5,13,14]

Пример 85. Даны функции 1) $f(x) = 3x + 4$, 2) $y = 1 + 2x - x^2$

Р е ш е н и е. 1) Эластичность данной функции вычисляется по формуле $E_x(f(x)) = \dfrac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \dfrac{x}{3x+4} \cdot 3 = \dfrac{3x}{3x+4}$.

В ы в о д. При $x = 2$ показатель эластичности равен 0.6. Это означает, что при увеличении x с 2 до 2.02 значение функции возрастает примерно на 0.6%. Если $x = 0$, то $E_x(f(x)) = 0$. Следовательно, увеличение x с 0 до 0.01 практически не меняет значения функции.

2) Здесь $E_x(f(x)) = \dfrac{x}{1+2x-x^2} \cdot (2-2x) = \dfrac{2x(1-x)}{1+2x-x^2}$.

В ы в о д. При $x = 1$ показатель эластичности равен нулю. При увеличении с 1 до 1.01 значении функции практически не меняется. Если $x = 2$, то $E_x(y) = -4$. Увеличение значения x с 2 до 2.02 приводит к уменьшению значения функции на 4 %.[5, 14]

Свойства эластичности

1. Эластичность – безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины *y* и *x*. $E_{ax}(by)=E_x(y)$.

$$E_{ax}(by)=\frac{d(by)}{d(ax)}\cdot\frac{ax}{by}=\frac{b(dy)}{a(dx)}\cdot\frac{ax}{by}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}=E_x(y).$$

2. Эластичности взаимно обратных функций – взаимно обратные величины:

$$E_x(y)=\frac{1}{E_y(x)}\Leftarrow E_x(y)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}\cdot\frac{y}{x}}=\frac{1}{E_y(x)}.$$

Например, эластичность величины спроса по цене обратна эластичности цены по величине спроса

$$\left(E_p(Q)=\frac{1}{E_Q(p)}\right).$$

3. Эластичность произведения двух функций *u(x)* и *v(x)*, зависящих от одного и того же аргумента *x*, равна сумме эластичностей: $E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v)$.

$$E_x(uv)=\frac{d(uv)}{dx}\cdot\frac{x}{uv}=\frac{v\left(\frac{du}{dx}\right)+u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{uv}\cdot x=\frac{du}{dx}\cdot\frac{x}{u}+\frac{dv}{dx}\cdot\frac{x}{v}=E_x(u)+E_x(v).$$

4. Эластичность частного двух функций *u(x)* и *v(x)*, зависящих от одного и того же аргумента *x*, равна разности эластичностей

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{d\frac{u}{v}}{dx}\cdot\frac{x}{\frac{u}{v}}=\frac{vdu-udv}{v^2}\cdot\frac{xv}{u}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{x}{u}-\frac{dv}{dx}\cdot\frac{x}{v}=E_x(u)-E_x(v).$$

5. Эластичность суммы двух функций *u(x)* и *v(x)* может быть найдена по формуле:

$$E_x(u+v)=\frac{d(u+v)}{dx}\cdot\frac{x}{u+v}=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{x}{u+v}=\frac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}.$$

$$E_x(u+v)=\frac{d(u+v)}{dx}\cdot\frac{x}{u+v}=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{x}{u+v}=\frac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}.$$

Эластичности элементарных функций

1. Эластичность степенной функции $y=x^{\alpha}$ постоянна и равна показателю степени α: $E_x(x^{\alpha}) = \alpha$.

$$E_x\left(x^{\alpha}\right)=\frac{dx^{\alpha}}{dx}\cdot\frac{x}{x^{\alpha}}=\frac{\alpha x^{\alpha-1}\cdot x}{x^{\alpha}}=\alpha.$$

2. Эластичность показательной функции $y=a^x$ пропорциональна x:

$$E_x\left(a^x\right)=x\ln(a).$$

$$E_x\left(a^x\right)=\frac{da^x}{dx}\cdot\frac{x}{a^x}=a^x\cdot x\cdot\frac{\ln a}{a^x}=x\cdot\ln a.$$

3. Эластичность линейной функции $y=ax+b$ $E_x(ax+b)=\dfrac{ax}{ax+b}$

$$E_x(ax+b)=\frac{d(ax+b)}{dx}\cdot\frac{x}{ax+b}=\frac{ax}{ax+b}.$$

Если график линейной функции имеет отрицательный наклон (a<0), то эластичность функции меняется от нуля к точке y_m пересечения графиком оси y до минус бесконечности (-∞) в точке пересечения оси x, проходя через значение (-1) в средней точке.

Таким образом, хотя прямая имеет постоянный наклон, её эластичность зависит не только от наклона, но и от того, в какой точке x мы её находим (рисунок 34). Функция с бесконечной эластичностью во всех точках называется совершенно эластичной, с нулевой эластичностью во всех точках – совершенно неэластичной.[4,5,10,13,14,17]

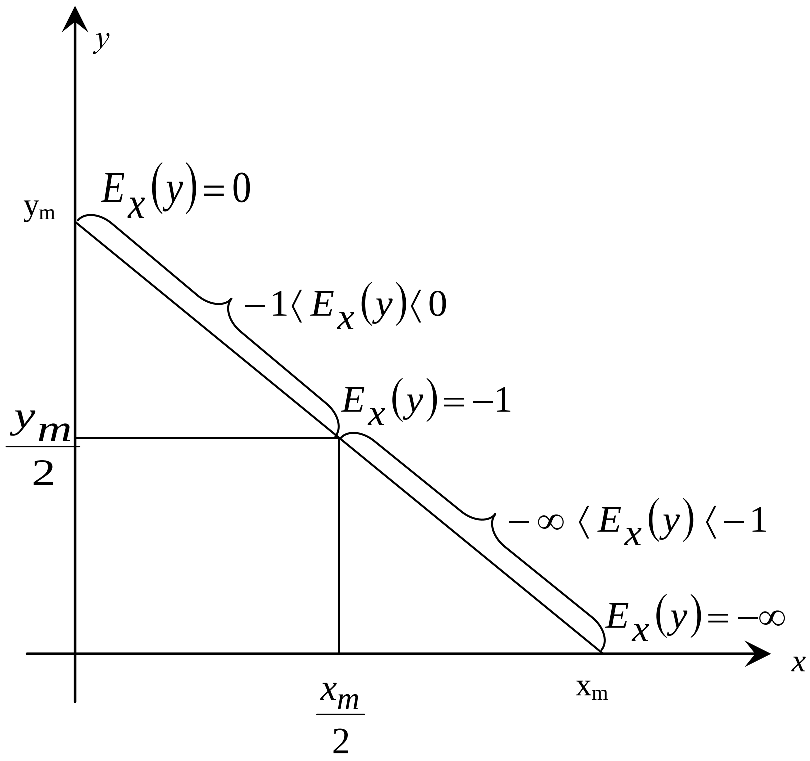


Рисунок 34 - Эластичность линейной функции

Задания для самостоятельной работы

1. Используя свойства эластичности, найдите $E_x(f(x))$, если:

а) $f(x)=x^2e^x$, б) $f(x)=3x\ln x$, в) $f(x)=\dfrac{x^4}{5e^x}$,

г) $f(x)=2+3x-x^2$, д) $f(x)=2^x\ln x$, е) $f(x)=\dfrac{4a^x}{x^5}$.

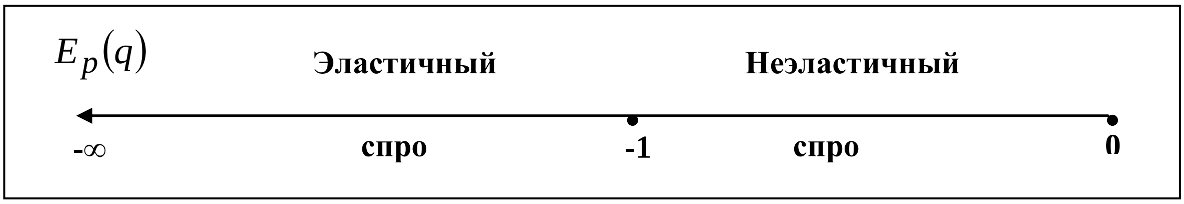
§30 Виды эластичностей в экономике

Рассмотрим основные виды эластичностей.

1.*Эластичность спроса по цене (прямая)*

$$E_p(q)=\left(\frac{dq}{q}\right)\bigg/\left(\frac{dp}{p}\right)=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q},$$

показывающая относительное изменение (выраженное в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризующая чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию. Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине больше единицы, то спрос называют эластичным (совершенно эластичным при бесконечно большой величине эластичного спроса). Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине меньше единицы, то спрос называют неэластичным (совершенно неэластичным при нулевой эластичности спроса).



И, наконец, если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине равна единице, то говорят о спросе с единичной эластичностью.

2.*Эластичность спроса по доходу*

$$E_I(q) = \left(\frac{dq}{q}\right) \Big/ \left(\frac{dI}{I}\right) = \frac{dq}{dI} \cdot \frac{I}{q},$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении дохода потребителей этого блага на один процент. Положительная эластичность спроса по доходу характеризует нормальные (качественные) товары, а отрицательная величина – малоценные (некачественные) товары

Так, высокий положительный коэффициент спроса по доходу в отрасли указывает, что её вклад в экономический рост больше, чем доля в структуре экономики, и она имеет шансы на расширение и процветание в будущем. Наоборот, если коэффициент эластичности спроса на продукцию отрасли по доходу имеет небольшое положительное или отрицательное значение, то её может ожидать застой и перспектива сокращения производства.[4,5,10,13,14]

3. *Перекрестная эластичность спроса по цене*

$$E_{Pj}(q_i) = \left(\frac{dq_i}{q_i}\right) \Big/ \left(\frac{dp_j}{p_j}\right) = \frac{dq_i}{dp_j} \cdot \frac{p_i}{q_j},$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на одно благо при изменении цены на другое благо (замещающее или дополняющее его в потреблении) на один процент. Положительный знак перекрестной эластичности спроса по цене свидетельствует о замещаемости благ, а отрицательный – о дополняемости.

4.*Ценовая эластичность ресурсов*

$$E_{Pi}(R_i)=\left(\frac{dR_i}{R_i}\right)\Big/\left(\frac{dp_i}{p_i}\right)=\frac{dR_i}{dp_i}\cdot\frac{p_i}{R_i},$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какой-нибудь ресурс (например, труд) при изменении цены этого ресурса (соответственно, заработной платы) на один процент.[4,10,13]

5.*Эластичность замещения одного ресурса другим*

$$E_{Rj}(R_i)=\left(\frac{dR_i}{R_i}\right)\Big/\left(\frac{dR_j}{R_j}\right)=\frac{dR_i}{dR_j}\cdot\frac{R_j}{R_i},$$

характеризующая необходимое изменение (в процентах) величины одного ресурса (например, капитала) при изменении количества другого ресурса (например, труда) на один процент с тем, чтобы выпуск при этом не изменился.

Рассмотрим подробнее *эластичность спроса относительно цены*. Изучается зависимость спроса d на товар от цены p на него.

Предположим, что цены на аналогичные товары, доходы потребителей и структура их потребностей – постоянные величины. Тогда зависимость спроса от цены можно описать с помощью функции

$$d=d(p).$$

Во многих экономических исследованиях необходимо установить не величину спроса при каждом конкретном уровне цены, а характер изменения спроса при определенном изменении цены. В этом случае находят эластичность спроса относительно цены. В наших обозначениях

$$E_p(d)=\frac{p}{d(p)}\cdot d'(p).$$

Эластичность спроса относительно цены определяет, на сколько процентов изменится спрос на товар, если цена на него увеличится на 1%. Так как в большинстве случаев спрос является убывающей функцией цены и

$d'(p) < 0$,

то, чтобы избежать отрицательных чисел, в этих случаях при изучении эластичности принимают

$$\widetilde{E}_p(d) = -\frac{p}{d(p)} \cdot d'(p).$$

Знак «-» показывает, что спрос уменьшается при увеличении цены.[4,5,6,8,10,13,14,15]

Пример 86. Если функция спроса линейная:

$$d = 5 - \frac{1}{2}p,$$

то

$$\widetilde{E}_p(d) = -\frac{p}{5 - \frac{1}{2}p} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{p}{10 - p}.$$

Р е ш е н и е. При $p = 2$ имеем $E_p(d) = \frac{1}{4}$. Это означает, что увеличении цены на 1% спрос падает на $\frac{1}{4}$%. При $p = 5$, показатель эластичности равен 1. Увеличение цены с 5 до 0.05 приводит к уменьшению спроса на 1%. При $p = 9$ спрос уменьшается на 9%.

В ы в о д. Спрос нейтрален при $p = 5$; при $p = 2$- неэластичен и для $p = 9$- эластичен. Для функции $d = \frac{c}{p}$ спрос нейтрален при любой цене.

Пример 87. Для $d = \frac{c}{p}$ (c- постоянная, $c > 0$) показатель эластичности равен 1 при любом уровне цены.

Р е ш е н и е. Действительно,

$$\tilde{E}_p(d) = -\frac{p}{\frac{c}{p}} \cdot \left(-\frac{c}{p^2} \right) = 1.$$

Если спрос обратно пропорционален цене, то при любой цене увеличение ее на 1 % влечет за собой уменьшение спроса также на 1 %.

Определение: Говорят, что спрос *эластичен,* если повышению цены на 1 % соответствует снижение спроса более чем на 1%, т.е. $\tilde{E}_p(d) > 1$; спрос *нейтрален*, если $\tilde{E}_p(d) = 1$; спрос *неэластичен,* если $0 < \tilde{E}_p(d) < 1$.[10]

В ы в о д. Спрос на товар эластичен, если небольшое изменение цены товара вызывает значительные изменения величины спроса на него. В обратной ситуации, когда изменение цены ведет к сравнительно небольшому изменению величины спроса, последний является неэластичным. Примерами товаров с эластичным спросом могут служить, например, яблоки, помидоры, персики и т.п. При росте цен на них покупательский спрос может переключиться на другие виды овощей и фруктов. При определенном уровне цен покупатели могут полностью отказаться, например, от употребления фруктов или заменить их соками и другими консервами. В то же время спрос на товары первой необходимости (лекарства, обувь, электричество, газ, телефон), на вещи, цена которых малоощутима для семейного бюджета (карандаш, зубная паста, крем для обуви) и труднозаменяемые товары (электрические лампочки, хлеб, бензин) является неэластичным.[4,5,10]

Исследуем динамику *выручки* при различных видах спроса.

Общие расходы населения на данный товар (выручка от его продажи) при цене p составляют

$$u = p \cdot d(p).$$

Предельная выручка равна

$$\frac{du}{dp} = d(p) + p \cdot d'(p),$$

или

$$\frac{du}{dp} = d(p)\left(1 + \frac{p}{d(p)} \cdot d'(p)\right) = d(p)(1 - E_p(d)).$$

а) Если спрос эластичен, т.е. $E_p(d) > 1$, то

$$\frac{du}{dp} < 0$$

и с повышением цены выручка от продажи снижается.

б) При нейтральном спросе ($E_p(d) = 1$)

$$\frac{du}{dp} = 0,$$

и выручка практически не зависит от цены.

В этом случае $u = c$ (c - постоянная) и

$$d(p) = \frac{c}{p}.$$

Следовательно, в случае нейтрального взноса его размер пропорционален цене (пример 87).

в) При неэластичном спросе ($0 < E_p(d) < 1$) выручка увеличивается с ростом цены, так как в этом случае $\frac{du}{dp} > 0$.

В ы в о д. Знание эластичности спроса на данный товар позволяет прогнозировать направление изменения суммы выручки под влиянием роста или снижения цены. Очевидно, каждой фирме выгодно, чтобы спрос на ее продукцию был как можно более эластичным, ибо в такой ситуации существует возможность назначать сравнительно высокие цены.

Иначе говоря, фирма должна прилагать все усилия к поддержанию спроса на ее товар на достаточно высоком уровне. Достижению этой цели способствуют хорошее качество продукции, четко организованное обслуживание потребителей, высокое качество рекламы.[5,6,9,10,14,15]

Пример 88. Известно, что эластичность спроса на товар составляет 0.4. Определим, как изменится доход от реализации товара, если цену на него увеличить на 5%.

Р е ш е н и е. При эластичности $E_p(d) = 0.4$ увеличение цены на 1 % вызывает уменьшение спроса на 0.4 %. Увеличение цены на 5 % способствует уменьшению спроса на $5 \cdot 0.4\% = 2\%$. Цена выросла на 5 % и стала равной 1.05 p, где p - старая цена. Если $d(p)$ - спрос, соответствующий цене p, то $0.98\,d(p)$ - величина спроса при цене 1.05 p.

В ы в о д. Выручка от реализации товара по цене p составляла $p \cdot d(p)$ денежных единиц. После увеличения цены выручка возросла приблизительно на 3%. При неэластичном спросе (0,4<1) увеличение цены приводит к возрастанию выручки.

Эластичность предложения определяется аналогично эластичности спроса:

$$E_p(s) = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\left(\frac{\Delta s}{s} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%\right)\right) = \frac{p}{s} \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta p}. \qquad (47)$$

Для дифференцируемой функции $s = s(p)$ формула (47) принимает вид

$$E_p(s) = \frac{p}{s}\frac{ds}{dp} \qquad (48)$$

или

$$E_p(s) = \frac{ds}{dp} : \frac{s}{p}. \qquad (49)$$

Замечание. В отличии от формулы (47), выражающей эластичность спроса, в (48) и (49) отсутствует знак «-». Это связано с тем, что с ростом рыночной цены на товар предложение этого товара обычно растет. Каждому предпринимателю выгодно реализовать свою продукцию по более высокой цене. Поэтому $s = s(p)$ - возрастающая функция и $\frac{ds}{dp} > 0$.[7,8,10,13,14]

Равенство (49) означает, что эластичность предложения равна отношению предельного предложения к среднему.

Предложение также может быть эластичным и неэластичным.

***Определение*:** Предложение называется *эластичным,* если $E_p(s) > 1$, *неэластичным,* если $0 < E_p(s) < 1$, и *нейтральным,* если $E_p(s) = 1$.

Пример 89. Фирма решила пригласить на работу дополнительное количество разнорабочих и квалифицированных наладчиков для скорейшего ввода в строй новой автоматической линии. Чтобы увеличить предложение услуг, руководство фирмы объявило об увеличении заработной платы на 1000 рублей в месяц. Если в городе много безработных, студентов, малооплачиваемых трудящихся, то такая надбавка к семейному бюджету может оказаться для них существенной, и предложение услуг в качестве разнорабочего будет эластичным по цене. Однако едва ли много квалифицированных, а следовательно и высокооплачиваемых наладчиков согласиться сменить место работы из-за такой прибавки к зарплате. Транспортные расходы, моральный ущерб, необходимость хотя бы частичной переквалификации для работы с новым для них оборудованием не окупятся дополнительной суммой в 1000 рублей. Здесь предложение услуг едва ли окажется эластичным по цене.[5,10,13,14,15]

Пример 90. Пусть зависимость предложения s от цены p описывается формулой

$$s = 0.05p^2 + p.$$

а) $\dfrac{ds}{dp} = 0.1p + 1 > 0$, т.е. s - возрастающая функция цены.

б) $\dfrac{d^2s}{dp^2} = 0.1 > 0$ - функция вогнутая, темп изменения предложения постоянный.

в) $E_p(s) = \dfrac{(0.1p+1)p}{0.05p^2 + p} = \dfrac{0.1p+1}{0.05p+1} > 1.$ Предложение эластично по цене.

Р е ш е н и е. Зависимость между спросом на товар и его ценой (а значит, и вид соответствующей кривой) в значительной степени определятся полезностью товара. На вид функции предложения в первую очередь оказывают влияние издержки производства.

***Определение*:** Цена, при которой величина спроса равна величине предложения, называется **равновесной (**или ценой равновесия).[5,10,13]

Пример 91. $d(p) = e^{-p^2}$ - функция спроса, $s(p) = e^{p^2-8}$- функция предложения.

Решение. Из уравнения $d(p) = s(p)$ найдем цену равновесия

$$e^{-p^2} = e^{p^2-8},$$

отсюда

$$-p^2 = p^2 - 8$$

или

$$2p^2 = 8 \text{ и } p^2 = 4.$$

В ы в о д. Цена равновесия $p = 2$.

Задания для самостоятельной работы

1. Спрос d и предложение s изменяются по следующим законам:

$$d = \frac{100}{2p+1}, s = \frac{p^2}{2p+1}.$$

2. Найдите цену, при которой спрос совпадает с предложением (цену равновесия). Рассчитайте эластичность спроса при этой цене. Постройте графики спроса и предложения.

3. Формула

$$d(p) = e^{-p^2}$$

выражает зависимость спроса от цены. Определите, при каких значениях p спрос эластичен, нейтрален, неэластичен. Как зависит выручка от изменения цены? Сопоставьте с критериями эластичности.

4. Функция спроса имеет вид $d = \dfrac{400}{p^2 - 4p + 8}$. Постройте график функции. Определите при каких значениях p спрос эластичен, нейтрален, неэластичен.

5. Определите, на сколько процентов приблизительно изменится выручка от реализации товара. Если эластичность спроса равна α, а цена на товар увеличена на β%:

а) $\alpha = 0.2, \beta = 20\%$;

б) $\alpha = 4, \beta = 5\%$;

в) $\alpha = 1, \beta = 10\%$.

§29 Правило Лопиталя. Раскрытие неопределённостей $0/0$ и ∞/∞.

Ранее мы познакомились с примерами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, то есть раскрытия неопределённостей вида $0/0$ и ∞/∞. Сейчас рассмотрим новое правило раскрытия этих неопределённостей.

Теорема 43 (правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ *и* $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Тогда, если существует предел отношения производных этих функции $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел отношения самих функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$, причём

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (51)$$

Таким образом, коротко правило Лопиталя можно сформулировать следующим образом: предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных.

Замечание: Отметим, что формула (51) справедлива только в том случае, если предел, стоящий справа, существует. Может случиться, что предел, стоящий слева существует, в то время как предел, стоящий в правой части равенства, не существует.

Пример 92. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Этот предел существует: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1.$

Но отношение производных $(1+\cos x)/1=1+\cos x$ при $x\to\infty$ не стремится ни к какому значению.

Заметим, что если отношение производных опять представляет собой неопределённость вида $0/0$ или ∞/∞, то можно снова применить сформулированную теорему, то есть перейти к отношению вторых производных и так далее.

Вспомним, что к этим двум случаям сводятся случаи других неопределённостей: $\infty\cdot\infty$; $0\cdot\infty$.

Для раскрытия неопределённостей $1^{\infty}, 1^{0}, \infty^{0}$ нужно прологарифмировать данную функцию и найти предел её логарифма.

Пример 93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{2\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{2x}=8.$

Пример 95. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0.$

Пример 96. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\ln x+x-1}=$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{1+\ln x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 97. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right].$

Обозначим $y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ и прологарифмируем это равенство $\ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x^2) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$. Найдём

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x} = 0.$$

Так как функция $\ln y$ непрерывна, то $\ln\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = 0.$ Следовательно,

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = e^0$ или $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1.$

Задания для самостоятельного решения.

Найти пределы функций.

1)

$1)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ $при:\quad а)x_0=2,\quad б)x_0=3,\quad в)x_0=\infty;$

$2)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4};\quad 3)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg\,4x};\quad 4)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}.$

2)

$1)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ $при:\quad а)x_0=0,\quad б)x_0=2,\quad в)x_0=\infty;$

$2)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}};\quad 3)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 5x};\quad 4)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-4}\right)^{2n-7}.$

3)

$1)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ $при:\quad а)x_0=3,\quad б)x_0=-3,\quad в)x_0=\infty;$

$2)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5};\quad 3)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg\,3x}{ctg\,6x};\quad 4)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-6}{n-4}\right)^{4n+2}.$

4)

$1)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$ $при:\quad а)x_0=-3,\quad б)x_0=-2,\quad в)x_0=\infty;$

$2)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}};\quad 3)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 2x};\quad 4)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+6}\right)^{n-3}.$

5)

$$1)\lim_{x\to x_0}\frac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}\ \textit{при}:\quad a)x_0=2,\quad б)x_0=4,\quad в)x_0=\infty;$$

$$2)\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2};\quad 3)\lim_{x\to 0} tg2xctg3x;\quad 4)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-5}{4n-3}\right)^{3n+5}.$$

6)

$$1)\lim_{x\to x_0}\frac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}\ \textit{при}:\quad a)x_0=2,\quad б)x_0=5,\quad в)x_0=\infty;$$

$$2)\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}};\quad 3)\lim_{x\to 0}\sin 6xctg2x;\quad 4)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n+5}\right)^{5n+3}.$$

7)

$$1)\lim_{x\to x_0}\frac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}\ \textit{при}:\quad a)x_0=1,\quad б)x_0=-4,\quad в)x_0=\infty;$$

$$2)\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2};\quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{arctg7x}{5x};\quad 4)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{2n+3}\right)^{4n-5}.$$

8)

$$1).\lim_{x\to x_0}\frac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}\ \textit{при}:\quad a)x_0=5,\quad б)x_0=-5,\quad в)x_0=\infty;$$

$$2)\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}};\quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg4x};\quad 4)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+6}\right)^{2n+3}.$$

9)

$$1)\lim_{x\to x_0}\frac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}\ \textit{при}:\quad a)x_0=-2,\quad б)x_0=1,\quad в)x_0=\infty;$$

$$2)\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3};\quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg2x};\quad 4)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-3}{5n+4}\right)^{n+4}.$$

10)

$$1)\lim_{x\to x_0}\frac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}\ \textit{при}:\quad a)x_0=-2,\quad б)x_0=-1,\quad в)x_0=\infty;$$

$$2)\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6};\quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{4x};\quad 4)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^{5n-1}.$$

Найти производные заданных функций

1.а) $y=(3x^4-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+2)^5$; б) $y=\ln\sqrt[5]{\left(\frac{1-5x}{1+5x}\right)^3}$; в) $y=\arccos 2x+\sqrt{1-4x^2}$;

г) $y=2^{tgx}+x\sin 2x.$

2. $a)\ y=(5x^2+4\sqrt[4]{x^5}+3)^3$; $б)\ y=\ln\sqrt[6]{\dfrac{1-x^6}{1+x^6}}$; $в)\ y=arctg\sqrt{x^2-1}$;

$г)\ y=e^{3x}-2xtg3x.$

3. $a)\ y=(\dfrac{1}{4}x^8+8\sqrt[8]{x^3}-1)^3$; $б)\ y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{4x-1}{x^4+1}}$; $в)\ y=\arccos\sqrt{x^2+1}$;

$г)\ y=3^{\cos x}-x\sin 2x.$

4. $a)\ y=(\dfrac{1}{5}x^5+3x\sqrt[3]{x}-4)^3$; $б)\ y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3}{x^3+2}}$; $в)\ y=arctg\sqrt{x-1}$;

$г)\ y=\sqrt{x}ctg3x-2^{x^2}.$

5. $a)\ y=(3x^8+5\sqrt[5]{x^2}-3)^5$; $б)\ y=\ln\sqrt[5]{\left(\dfrac{5x+3}{x^5+1}\right)^2}$; $в)\ y=arctg\dfrac{2}{x-3}$;

$г)\ y=5^{\sqrt{x}}-x^2tg2x.$

6. $a)\ y=\left(5x^4-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+3\right)^4$; $б)\ y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1-8x}{x^8+1}}$; $в) y=\arccos\sqrt{1-x}$;

$г)\ y=3^{\sqrt{x}}+\dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}.$

7. $a)\ y=\left(4x^3+\dfrac{3}{x\sqrt[3]{x}}-2\right)^5$; $б)\ y=\ln\sqrt[6]{\left(\dfrac{x^6-1}{6x+5}\right)^7}$; $в) y=arcctg\sqrt{x-1}$;

$г)\ y=2^{x^2+1}-x\sin 4x.$

8. $y=\left(7x^5-3x\sqrt[3]{x^2}-6\right)^4$; $б)\ y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^4}$; $в) y=\arcsin 3x-\sqrt{1-9x^2}$;

$г)\ y=e^{tgx}-\sqrt{x}\cos 2x.$

9. $y=\left(3x^4-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}-3\right)^5$; *б*) $y=\ln\sqrt[2]{\left(\dfrac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}$; *в*) $y=arctg\,\dfrac{1}{x-1}$;

г) $y=xtg3x+2^{x-2}$

10. $=\left(8x^3-\dfrac{9}{x^2\sqrt[3]{x}}+6\right)^5$; *б*) $y=\ln\sqrt[7]{\left(\dfrac{7x-4}{x^7-2}\right)^3}$; *в*) $y=\arcsin\sqrt{1-x}$;

г) $y=3^{\sin x}+\sqrt[3]{x}tg3x.$

§ 32 Экстремумы функции

Рассмотрим график непрерывной функции $y=f(x)$, изображенной на рисунке 35. Значение функции в точке x_1 будет больше значений функции во всех достаточно близких соседних точках как слева, так и справа от x_1. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_1 максимум. В точке x_3 функция, очевидно, также имеет максимум. Если рассмотреть точку x_2, то соответствующее ей значение функции меньше всех соседних значений. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_2 минимум. Аналогичное справедливо для точки x_4.

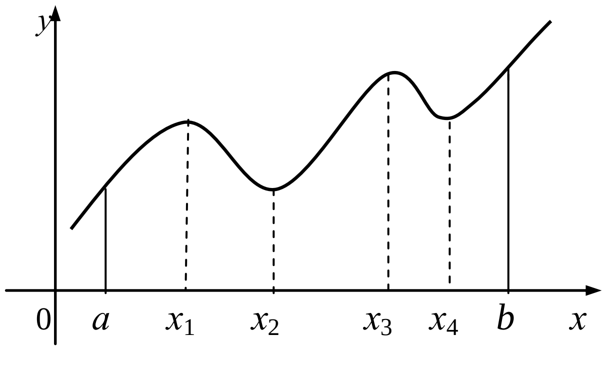


Рисунок 35

***Определение*:** Функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет *максимум*, если значение функции в этой точке больше, чем ее значения во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0, т.е. если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$.

***Определение*:** Функция $y=f(x)$ имеет *минимум* в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, имеет место неравенство $f(x) > f(x_0)$.

***Определение*:** Точки, в которых функция достигает максимума или минимума, называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами функции*.

Обратим внимание на то, что функция, определенная на отрезке, может достигать максимума и минимума только в точках, заключенных внутри рассматриваемого отрезка.

Отметим, что если функция имеет в некоторой точке максимум, то это не означает, что в этой точке функция принимает наибольшее значение на всей области определения. На рисунке 34 функция в точке x_1 имеет максимум, хотя есть точки, в которых значения функции больше, чем в точке x_1. В частности, минимум функции больше максимума. Из определения максимума следует только, что это самое большое значение функции в точках, достаточно близких к точке максимума.

Теорема 44 (необходимое условие существования экстремума). Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ экстремум, то ее производная в этой точке обращается в нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть для определенности в точке x_0 функция имеет максимум. Тогда при достаточно малых приращениях Δx имеем $f(x_0+\Delta x) < f(x_0)$, т.е. $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) < 0$. Но тогда

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0 \text{ при } \Delta x < 0 \quad \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0 \text{ при } \Delta x > 0.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что производная $f'(x_0)$ существует, а следовательно предел, стоящий слева, не зависит от того как $\Delta x \to 0$, получаем: при $\Delta x \to 0-0$ $f'(x_0) \geq 0$, а при $\Delta x \to 0+0$ $f'(x_0) \leq 0$. Так как $f'(x_0)$ определяет число, то эти два неравенства совместны только в том случае, когда $f'(x_0)$=0.

Доказанная теорема утверждает, что точки максимума и минимума могут находится только среди тех значений аргумента, в которых производная обращается в нуль.

Мы рассмотрели случай, когда функция во всех точках некоторого отрезка имеет производную. Как же обстоит дело в тех случаях, когда производная не существует?

Пример 98.

а) $y = |x|$. Функция не имеет производной в точке x=0 (в этой точке график функции не имеет определенной касательной), но в этой точке функция имеет минимум, так как y(0)=0, а при всех $x \neq 0$ $y > 0$.

б) Функция $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ (рисунок 36) не имеет производной при x=0, так как $y' = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ обращается в бесконечность при x=0. Но в этой точке функция имеет максимум.

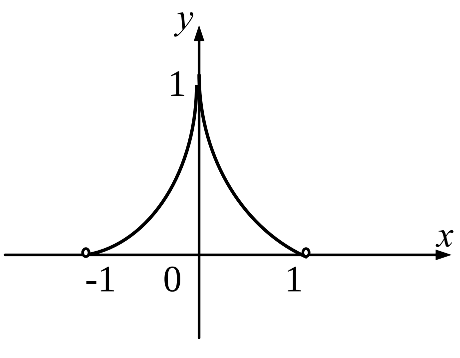


Рисунок 36

в) Функция $y = \sqrt[3]{x}$ не имеет производной при x=0, так как $y' = \dfrac{1}{3x^{2/3}} \to \infty$ при $x \to 0$. В этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, $f(x) = 0$ и при $x < 0$ $f(x) < 0$, а при $x > 0$ $f(x) > 0$. (рисунок 37а)

Таким образом, из приведенных примеров и сформулированной теоремы видно, что функция может иметь экстремум лишь в двух случаях: 1) в точках, где производная существует и равна нулю; 2) в точке, где производная не существует.

Однако, если в некоторой точке x_0 мы знаем, что $f'(x_0)=0$, то отсюда нельзя делать вывод, что в точке x_0 функция имеет экстремум.

Например, функция $y=x^3$. $y'=3x^2$ при $x=0$ $y'=0$ (рисунок 37б).

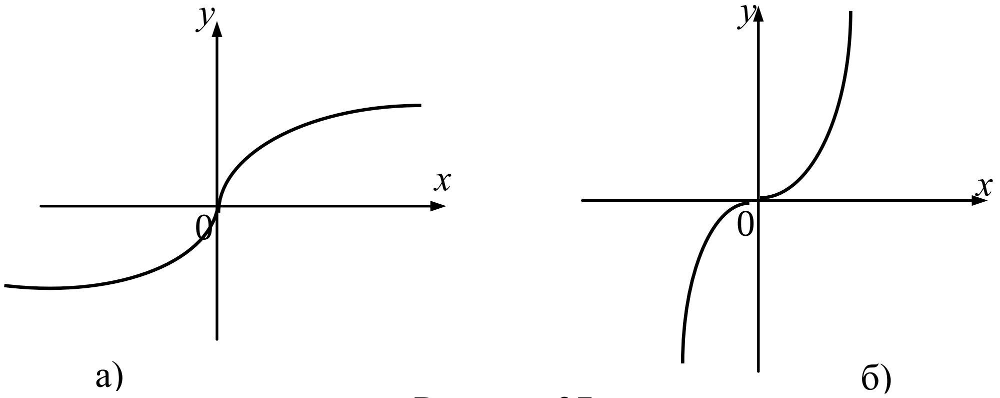


Рисунок 37

Но точка x=0 не является точкой экстремума, поскольку слева от этой точки значения функции расположены ниже оси Ox, а справа выше.

***Определение*:** Значения аргумента из области определения функции, при которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются *критическими точками*.

Из всего вышесказанного следует, что точки экстремума функции находится среди критических точек, однако, не всякая критическая точка является точкой экстремума. Поэтому, чтобы найти экстремум функции, нужно найти все критические точки функции, а затем каждую из этих точек исследовать отдельно на максимум и минимум. Для этого служит следующая теорема.

Теорема 45 (достаточное условие существования экстремума). Пусть функция непрерывна на некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то в точке $x = x_0$ функция имеет максимум. Если же при переходе через x_0 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Таким образом, если

а) $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка максимума;

б) $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка минимума.

Доказательство: Предположим сначала, что при переходе через x_0 производная меняет знак с плюса на минус, т.е. при всех x, близких к точке x_0 $f'(x) > 0$ для $x < x_0$, $f'(x) < 0$ для $x > x_0$. По теореме Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где точка c лежит между x и x_0.

1. Пусть $x < x_0$. Тогда $c < x_0$ и $f'(c) > 0$. Поэтому $f'(c)(x - x_0) < 0$ и, следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$, т.е. $f(x) < f(x_0)$.

2. Пусть $x > x_0$. Тогда $c > x_0$ и $f'(c) < 0$. Значит $f'(c)(x - x_0) < 0$. Поэтому $f(x) - f(x_0) < 0$, т.е. $f(x) < f(x_0)$.

Таким образом, для всех значений x достаточно близких к x_0, $f(x) < f(x_0)$. А это значит, что в точке x_0 функция имеет максимум.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы – о точке минимума. Проиллюстрируем смысл этой теоремы (рисунок 38).

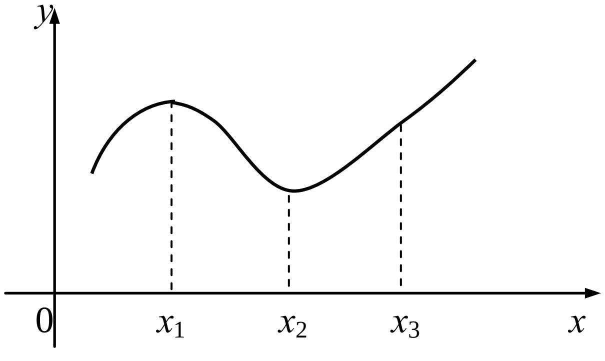


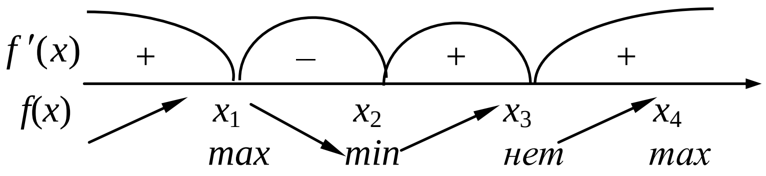
Рисунок 38

Пусть $f'(x_1) = 0$ и для любых x, достаточно близких к x_1, выполняются неравенства $f'(x) < 0$ при $x < x_1$, $f'(x) > 0$ при $x > x_1$. Тогда слева от точки x_1

функция возрастает, а справа убывает, следовательно, при $x = x_1$ функция переходит от возрастания к убыванию, т.е. имеет максимум.

Аналогично рассуждая можно сделать вывод точка x_2 является точкой минимума, а x_3 – не точка экстремума.

Схематически все вышесказанное можно изобразить на схеме:



Правило исследования функции *y*=*f*(*x*) на экстремум:

1. Найти область определения функции $f(x)$.

2. Найти первую производную функцию $f'(x)$.

3. Определить критические точки, для этого:

а) найти действительные корни уравнения $f'(x) = 0$.

б) найти все значения $x \in$ ОДЗ, при которых производная $f'(x)$ не существует.

4. Определить знак производной слева и справа от критической точки. Так как знак производной остается постоянным между двумя критическими точками, то достаточно определить знак производной в какой-либо одной точке слева и в одной точке справа от критической точки.

Сделать вывод о наличии точек экстремума.

5. Вычислить значение функции в точках экстремума.

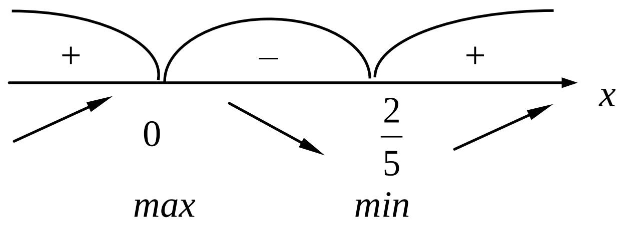
Пример 98. Исследовать функции на минимум и максимум.

1. $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

Область определения функции $D(y)=R$.

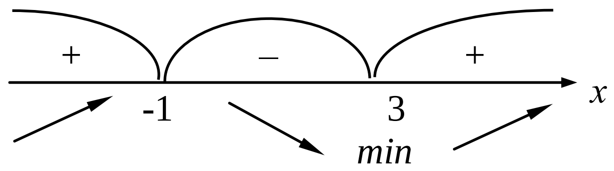
Найдем производную заданной функции: $y' = x^{2/3} + (x-1)\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$

Определим критические точки: $\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0, x_1=\frac{2}{5}$. Производная не существует при $x_2=0$. Следовательно, критические точки: 0 и 2/5. Нанесем их на числовую ось и определим знак производной на каждом из полученных промежутков: $f(-1)>0,\ f\left(\frac{1}{5}\right)<0,\ f(1)>0$.



Итак, $y_{\max}=f(0)=0$, $y_{\min}=f\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}-1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

2. $y=\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2$. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$, $\quad y'=2\left(\frac{x-3}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1-x+3}{(x+1)^2}=8\frac{x-3}{(x+1)^3}$.

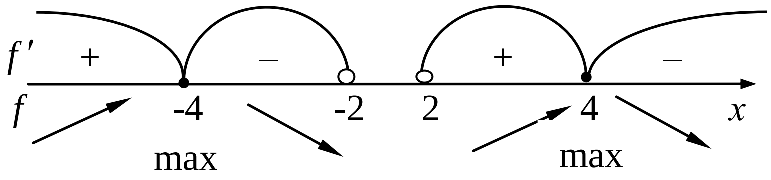


Критическая точка функции x=3. Точка x= –1 не входит в область определения функции. $y_{\min}=f(3)=0.$

3. $y=-\frac{8+x^2}{\sqrt{x^2-4}}\cdot D(y)=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

$$y'=-\frac{2x\sqrt{x^2-4}-\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\left(8+x^2\right)}{x^2-4}=-\frac{2x\left(x^2-4\right)-x\left(8+x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^{3/2}}=-\frac{x^3-16x}{\left(x^2-4\right)^{3/2}}$$

$y_{\max}=f(-4)=f(4)=-\frac{24}{\sqrt{12}}=-2\sqrt{12}=-4\sqrt{3}$.



Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

***Определение*:** *Наибольшим значением* функции на отрезке называется самое большое из всех ее значений на этом отрезке, а н*аименьшим* – самое маленькое из всех ее значений.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$. Как известно, такая функция достигает своего наибольшего значения, либо на границе отрезка, либо внутри его. Если наибольшее или наименьшее значение функции достигается во внутренней точки отрезка, то это значение является максимумом или минимумом функции, т.е. достигается в критических точках.

Таким образом, получаем следующее *правило нахождения наибольшего и наименьшего* значений функции на отрезке $[a,b]$.

1. Найти все критические точки функции в интервале (a,b) и вычислить значения функции в этих точках.

2. Вычислить значения функции на концах отрезка при $x = a$, $x = b$.

3. Из всех полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 99.

1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{4}{x^2}-8x-15$ на отрезке [–2; –0,5].

Найдем критические точки функции: $y'=-\dfrac{8}{x^3}-8=-\dfrac{8+8x^3}{x^3}$, $x=-1$.

Вычислим значения функции в найденной точке и на концах заданного отрезка: $f(-1)=-3$, $f(-2)=2$, $f(-1/2)=5$.

Итак, $\min\limits_{x\in[-2;-1/2]} f(x) = f(-1) = -3, \quad \max\limits_{x\in[-2;-1/2]} f(x) = f(-1/2) = 5$.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - 2\ln x$ на отрезке [1; e].

$y' = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$, $x_1 = 2$.

$f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0.6, \quad f(1) = 1, \quad f(e) = e - 2 \approx 0.7$

$y_{\text{наиб}} = f(1) = 1, \; y_{\text{наим}} = f(2) \approx 0.6$.

3) Чему равна наименьшая площадь боковой поверхности прямого кругового конуса объема 3π?

$S_{\text{бок}} = \pi rl$ (l- длина образующей конуса) (рисунок 38).

Так как $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \; r^2 = \frac{3V}{\pi h} = \frac{9}{h}$.

По теореме Пифагора $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\frac{9}{h} + h^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{9 + h^3}$.

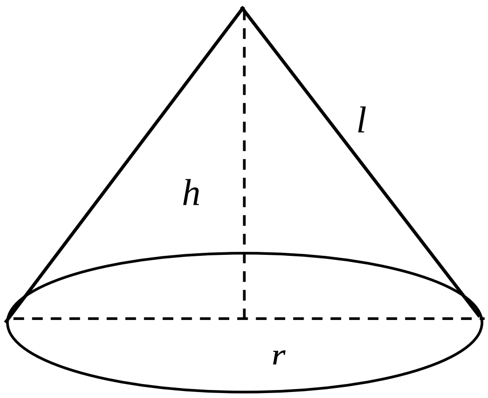


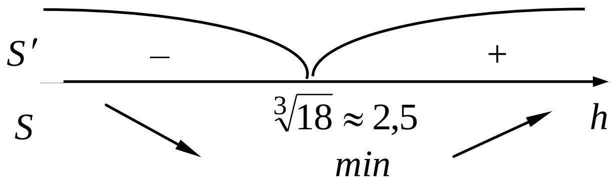
Рисунок 39

Следовательно, $S_{бок} = \pi \frac{3}{\sqrt{h}} \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{9 + h^3} = 3\pi \frac{\sqrt{9 + h^3}}{h}, (h > 0)$

$$S' = 3\pi \frac{\frac{3h^2}{2\sqrt{9+h^3}} - \sqrt{9 + h^3}}{h^2} = 3\pi \frac{3h^3 - 18 - 2h^3}{2h^2\sqrt{9 + h^3}} = 3\pi \frac{h^3 - 18}{2h^2\sqrt{9 + n^3}}.$$

Найдем критические точки функции $S: S' = 0$, т.е. $h = \sqrt[3]{18}$.

Покажем, что при найденном значении *h* функция $S_{бок}$ достигает минимума.



$S'(1) < 0,\ \ S'(3) > 0$

$$S_{наим} = \frac{3\pi\sqrt{9+18}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{9\pi\sqrt{3}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{\pi\sqrt{3}\sqrt[3]{18}}{2}.$$

4) Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса *R*.

Пусть *r*- радиус основания цилиндра, *h* – высота.

Нам нужно максимизировать объем цилиндра $V = \pi r^2 h$.

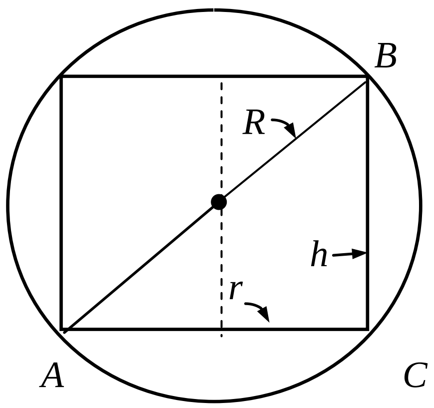


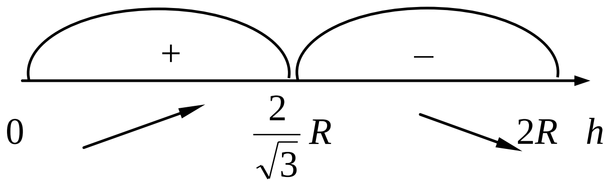
Рисунок 39а

Используя условие задачи, найдем связь между *r* и *h*. По теореме Пифагора из треугольника *ABC* следует, что $4R^2 = h^2 + 4r^2$. Отсюда $r^2 = R^2 - \frac{1}{4}h^2$.

$$V=\pi\left(R^2-\frac{1}{4}h^2\right)h=\pi R^2h-\frac{1}{4}\pi h^3,\ 0\le h\le 2R.$$

$$V'=\pi R^2-\frac{3}{4}\pi h^2;V'=0,\ \text{если}\ \ h=\frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

Покажем, что при найденном значении h функция V принимает наибольшее значение.



$$V'(R)=\frac{1}{4}\pi R^2>0,$$

$$V'\left(\frac{3}{2}R\right)=\pi R^2-\frac{27}{16}\pi R^2<0.$$

Таким образом, $V_{\max}$ при $h=\frac{2}{\sqrt{3}}R,$ откуда $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R.$

§33 Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

***Определение*:** График функции $y=f(x)$ называется *выпуклым* на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

***Определение*:** График функции $y=f(x)$ называется *вогнутым* на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

На рисунке 40 показана кривая, выпуклая на $(a; b)$ и вогнутая на $(b; c)$.

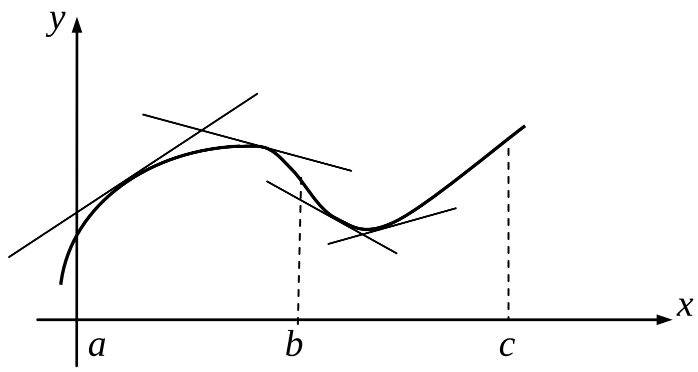


Рисунок 40

Пример 100.

а) Полуокружность $y = \sqrt{1 - x^2}$ выпукла на [-1; 1].

б) Парабола y=x^2 вогнута на интеграле $(-\infty;+\infty)$

в) График функции в одних интервалах может быть выпуклым, а в других вогнутым. Так график функции y=sin x на [0; 2π] – выпуклый в интервале (0; π) и вогнутый – в интервале (π; 2 π) (рисунок 41).

Рассмотрим достаточный признак, позволяющий установить, будет ли график функции в данном интеграле выпуклым или вогнутым.

Теорема 46. Пусть y=f(x) дифференцируема на (a;b). Если во в всех точках интервала (a;b) вторая производная функции y=f(x) отрицательная, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции на этом интеграле выпуклый, если же $f''(x) > 0$ - вогнутый.

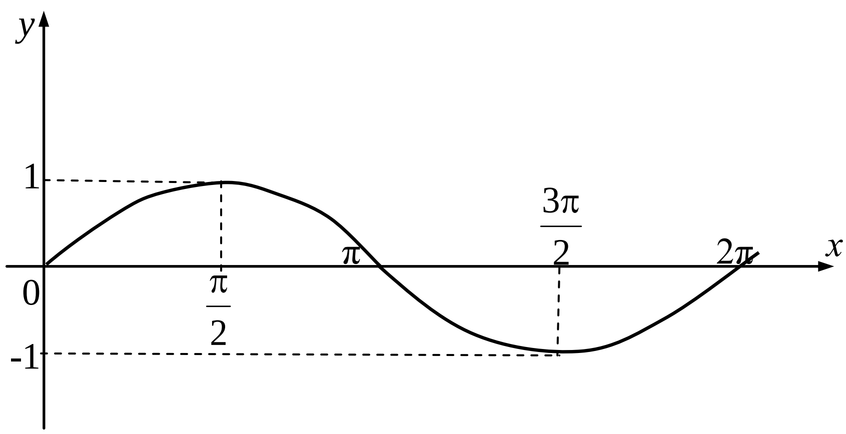


Рисунок 41

Д о к а з а т е л ь с т в о: Предположим для определенности, что $f''(x) < 0$ и докажем, что график функции будет выпуклым.

Возьмем на графике функции $y=f(x)$ произвольную точку M_0 с абсциссой $x_0 \in (a;b)$ и проведем через точку M_0 касательную (рисунок 42). Ее уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Мы должны показать, что график функции на $(a;b)$ лежит ниже этой касательной, т.е. при одном и том же значении x ордината кривой $y=f(x)$ будет меньше ординаты касательной.

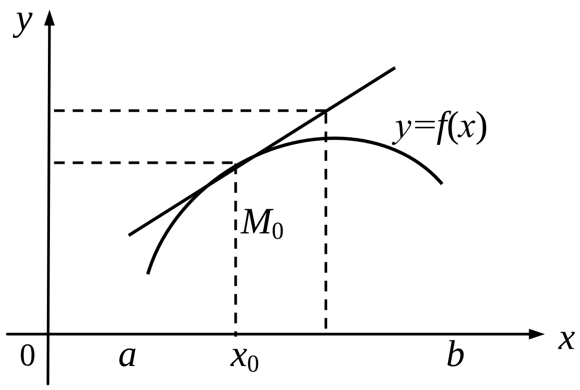


Рисунок 42

Итак, уравнение кривой имеет вид $y=f(x)$. Обозначим $\bar{y}$ ординату касательной, соответствующую абсциссе x. Тогда $\bar{y} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Следовательно, разность ординат кривой и касательной при одном и том же значении x будет $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Разность $f(x) - f(x_0)$ преобразуем по теореме Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где c – точка лежащая между x и x_0.

Таким образом, $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0)$

К выражению, стоящему в квадратных скобках снова применим теорему Лагранжа:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0),$$

где c_1 – точка лежащая между c и x_0. По условию теоремы $f''(x)<0$. Определим знак произведения второго и третьего сомножителей.

1. Предположим, что $x > x_0$. Тогда $x_0 < c_1 < c < x$, следовательно, $(x-x_0)>0$ и $(c-x_0)>0$. Поэтому $y-\bar{y}<0$.

2. Пусть $x < x_0$, следовательно, $x<c<c_1<x_0$ и $(x-x_0)<0$, $(c-x_0)<0$. Поэтому вновь $y-\bar{y}<0$.

Таким образом, любая точка кривой лежит ниже касательной к кривой при всех значениях x и $x_0 \in (a;\ b)$, а это значит, что кривая выпукла. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Пример 101.

а) Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = 2 - x^2$.

Найдем y'' и определим, где вторая производная положительна и где отрицательна: $y' = -2x$, $y'' = -2 < 0$ на $(-\infty;\ +\infty;)$, следовательно, функция всюду выпукла (рисунок 43).

б) $y=e^x$. Так как $y''=e^x>0$ при любых x, то кривая всюду вогнута (рисунок 44).

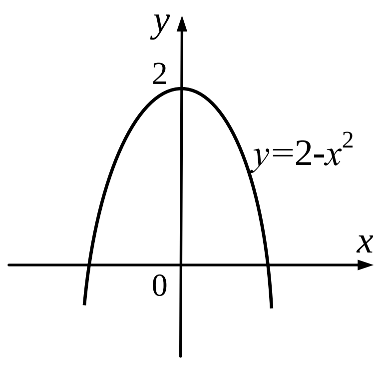


Рисунок 43

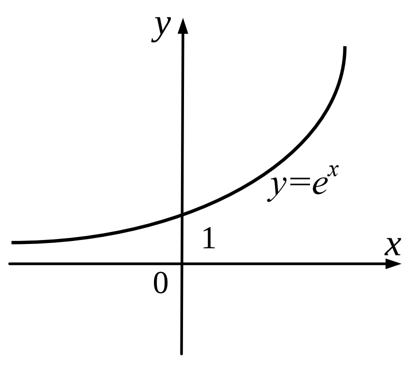


Рисунок 44

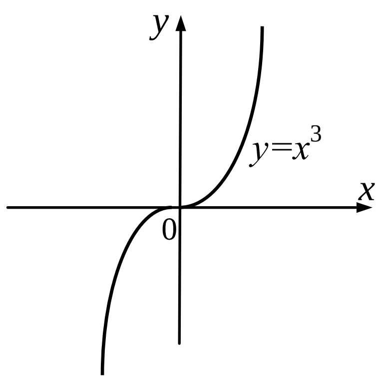


Рисунок 45

в) $y = x^3$. Так как $y'' = 6x$, то $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, при $x < 0$ кривая выпукла, а при $x > 0$ вогнута (рисунок 45).

***Определение*:** Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба.* (рисунок 46, рисунок 47)

Очевидно, что в точке перегиба касательная, если она существует, пересекает кривую, т.к. с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой стороны - над нею.

Определим достаточные условия того, что данная точка кривой является точкой перегиба.

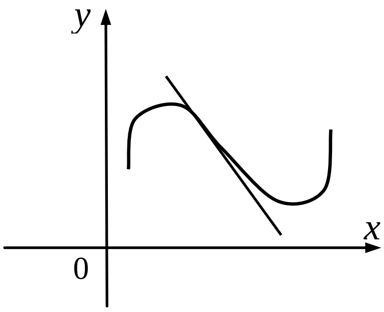


Рисунок 46

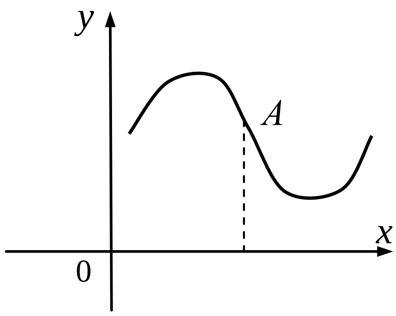


Рисунок 47

Теорема 47. Пусть кривая определяется уравнением $y=f(x)$. Если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, и при переходе через значение $x = x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка графика функции с абсциссой $x=x_0$ есть точка перегиба.

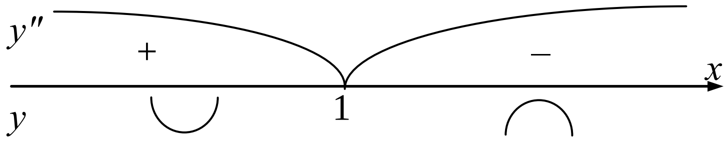
Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $f''(x_0) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x_0) >0$ при $x > x_0$. Тогда при $x < x_0$ кривая выпукла, а при $x > x_0$ – вогнута. Следовательно, точка A, лежащая на кривой, с абсциссой x_0 есть точка перегиба. Аналогично можно рассматривать второй случай, когда $f''(x_0) >0$ при $x < x_0$ и $f''(x_0) < 0$ при $x > x_0$.

Таким образом, точки перегиба следует искать только среди таких точек, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует.

Пример 102.

Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривых.

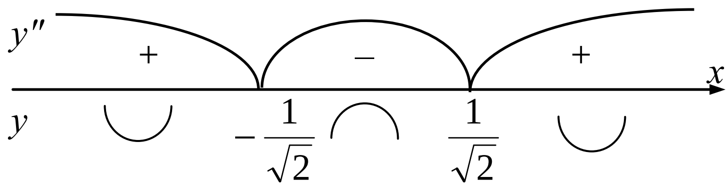
1) $y=(x-1)^{1/3}$. $D(y)=R$. Найдем производные данной функции до второго порядка. $y'=1/3(x-1)^{-2/3}$. $y''=-\dfrac{2}{9(x-1)^{5/3}}$. Вторая производная не существует при $x = 1$. Исследуем эту точку на возможный перегиб.



Итак, точка перегиба x =1. Функция выпукла на (1; +∞), вогнута на (-∞; 1).

2) $y = e^{-x^2}$. $D(y) = R.$ $y' = -2xe^{-x^2}$,

$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$. Возможные точки перегиба найдем, решив уравнение $2x^2 - 1 = 0$. Отсюда $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$.



Точки перегиба: $-1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}$. Функция выпукла на интервале $\left(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right)$ и вогнута на $\left(-\infty; -1/\sqrt{2}\right) \cup \left(1/\sqrt{2}; +\infty\right)$.

3) $y = \ln\left(1 - x^2\right)$. Область определения функции $D(y)$ = (-1; 1). $y' = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$,

$y'' = \dfrac{-2\left(1 + x^2\right)}{\left(1 - x^2\right)^2} < 0$ при всех x из (-1; 1). Следовательно, $f(x)$ – выпуклая на (-1; 1).

§34 Асимптоты графика функции

При исследовании функции важно установить форму ее графика при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Особый интерес представляет случай, когда график функции при удалении его переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

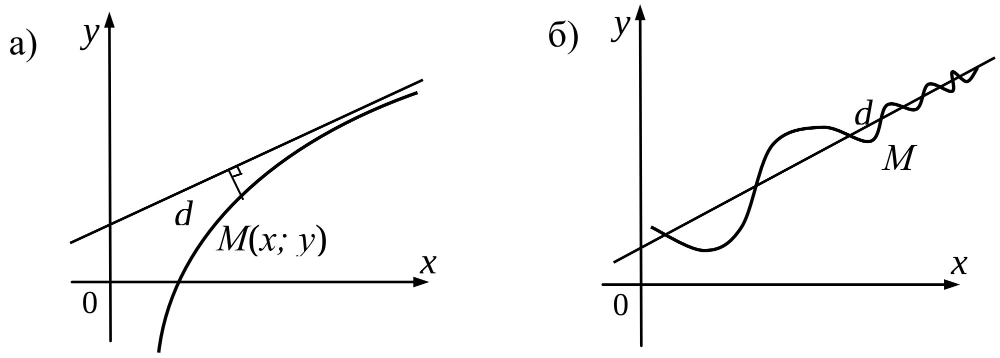


Рисунок 48

Определение: Прямая называется *асимптотой* графика функции $y=f(x)$, ели расстояние от переменной точки M графика до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю, т.е. точка графика функции при своем стремлении в бесконечность должна неограниченно приближаться к асимптоте.

Кривая может приближаться к своей асимптоте, оставаясь с одной стороны от нее или с разных сторон, бесконечное множество раз пересекая асимптоту и переходя с одной ее стороны на другую (рисунок 48).

Если обозначим через d расстояние от точки M кривой до асимптоты, то ясно, что d стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

Будем в дальнейшем различать асимптоты вертикальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты

Пусть при $x \to x_0$ с какой-либо стороны функция $y=f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. Тогда из определения асимптоты следует, что прямая $x = x_0$ является асимптотой. Очевидно и обратное, если прямая $x = x_0$ является асимптотой, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Таким образом, вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая $x = x_0$, если $f(x) \to \infty$ хотя бы при одном из условий $x \to x_0 - 0$ или $x \to x_0 + 0$ (рисунок 49).

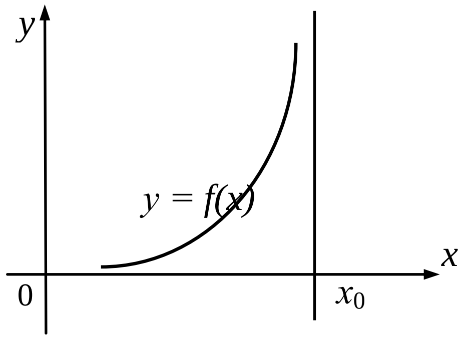


Рисунок 49

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$ нужно найти те значения $x = x_0$, при которых функция обращается в бесконечность (терпит бесконечный разрыв). Тогда вертикальная асимптота имеет уравнение $x = x_0$.

Пример 103.

а) Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = x + \dfrac{1}{x-2}$.

Так как $\lim\limits_{x \to 2-0}\left(x + \dfrac{1}{x-2}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0}\left(x + \dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty$, то прямая x=2 является вертикальной асимптотой.

б) $y = e^{1/x}$. $\lim\limits_{x \to 0+0} e^{1/x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} e^{1/x} = \left[e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}}\right] = 0$. Прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты

Поскольку асимптота – это прямая, т.е. кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, то ее уравнение будет $y = kx+b$. Наша задача найти коэффициенты k и b.

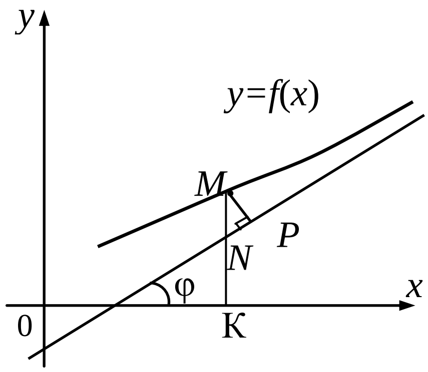


Рисунок 50

Теорема 48. Прямая $y = kx+b$ служит наклонной асимптотой при $x \to +\infty$ для графика функции $y=f(x)$ тогда и только тогда, когда $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx \right]$. Аналогичное утверждение верно и при $x \to -\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть MP – длина отрезка, равного расстоянию от точки M до асимптоты. По условию $\lim\limits_{x\to+\infty} MP = 0$. Обозначим через φ угол наклона асимптоты к оси Ox. Тогда из ΔMNP следует, что $MN = \frac{MP}{\cos\varphi}$.

Так как φ – постоянный угол $(\varphi \ne \pi/2)$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$, но $MN = MK - NK = y - y_{кас} = f(x) - (kx+b)$.

Следовательно, мы можем записать следующее равенство:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (kx+b) \right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Так как $x \to +\infty$, то должно выполняться равенство $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$. Но при постоянных k и b $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} k = k$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0$, т.е. $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Если число k уже известно, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$, поэтому $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]$.

Для доказательства в случае $x\to-\infty$ все рассуждения аналогичны.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что существуют пределы, определяющие числа k и b. Тогда несложно заменить, что выполняется равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$.

Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}\left(x\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\right)\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lim_{x\to+\infty}f(x)\right]=0$$

Следовательно, прямая $y=kx+b$ есть асимптота. Теорема полностью доказана.

Сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Теорема показывает, что для нахождения асимптот нужно найти два указанных предела. Причем, если хотя бы один из пределов не существует или обращается в бесконечность, то кривая асимптот не имеет.

Замечание 2. В случае, когда $k=0$ асимптота $y=b$ называется *горизонтальной асимптотой*. Наличие горизонтальной асимптоты означает, что существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$.

Замечание 3. Пределы для отыскания k и b могут быть различны при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ и, следовательно, график функции может иметь две различные асимптоты при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Пример 104. Найти асимптоты кривых.

1) $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$

а) Вертикальные: $\lim\limits_{x\to0-0}\dfrac{x^2+2x-1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{x^2+2x-1}{x}=-\infty$.

Таким образом, $x=0$ – вертикальная асимптота.

б) Наклонные: $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2} = 1, b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = 2$. При x→–∞ получаем те же значения k и b. Прямая $y = x+2$ является наклонной асимптотой.

2) $y = e^{-x}\sin x + x$

а) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, следовательно, вертикальных асимптот нет.

б) $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}\sin x + x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{e^x x} + 1\right) = 1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\sin x\right) = 0$

Итак, при x→+∞ наклонная асимптота $y=x$.

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}\sin x + x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{-x}}{x}\sin x + 1\right) = \infty$, т.к.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{-x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{-x}\right) = -\infty$, поэтому при x→–∞ наклонных асимптот нет.

3) $y = x - 2arctgx$.

а) Вертикальных асимптот нет.

б) $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - 2arctgx}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2arctgx}{x}\right) = 1$.

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2arctgx\right) = -\pi$. Наклонная асимптота $y = x - \pi$ при x→+∞.

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - 2arctgx}{x} = 1, \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2arctgx\right) = \pi.$. Таким образом, прямая $y = x + \pi$ является наклонной асимптотой графика функции $y = x - 2arctgx$ при x→ – ∞.

§35 Экономический смысл теоремы Ферма

Теорема 49 (теорема Ферма). Если дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.[10]

Один из базовых законов теории производства звучит так: *оптимальный для производства уровень пуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода.*

Обозначим функцию прибыли за $C(x)$. Тогда $C(x) = D(x) - S(x)$, где $D(x)$ - функция дохода, $S(x)$ - функция издержек. Очевидно, что оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т.е. такое значение выпуска x_0, при котором функция $C(x)$ имеет экстремум (максимум). По теореме Ферма в этой точке $C'(x) = 0$. Но $C'(x) = D'(x) - S'(x)$, поэтому $D'(x_0) = S'(x_0)$, т.е. предельные издержки $S'(x_0)$ и предельный доход $D'(x_0)$ равны при оптимальном выпуске x_0.[8, 13]

Рассмотрим другое важное понятие теории производства - это уровень наиболее экономичного производства, при котором средние издержки по производству минимальны. Соответствующий экономический закон гласит: *уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек.*[5, 10]

Получим это условие как следствие теоремы Ферма. Средние издержки определяются как $\frac{S(x)}{x}$, т.е. издержки по производству товара, деленные на произведенное количество товара. Минимум этой величины достигается в критической точке функции $y = \frac{S(x)}{x}$, т.е. при условии $y' = \frac{S'(x)x - S}{x^2} = 0$, откуда $S'(x)x - S = 0$, т.е. $S'(x) = \frac{S}{x}$.

§36 Экономический смысл теоремы Лагранжа

Теорема 50 (теорема Лагранжа). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b), то существует по крайней мере одна точка $c \in (a,b)$, такая, что справедливо неравенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Экономический смысл теоремы Лагранжа. Пусть $y = f(x)$ описывает зависимость выпуска y от затрат x некоторого специфического ресурса. Если объем затрат увеличили с a до b единиц, то разность $f(b) - f(a)$ выражает соответствующее изменение выпуска.

Отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad (52)$$

показывает на сколько единиц в среднем изменяется выпуск продукции, если затраты возросли на одну единицу. Другими словами, (52) - средняя производительность ресурса на промежутке $[a,b]$.

Предельная производительность ресурса равна значению производной функции выпуска при данном уровне затрат. Если затраты ресурса r составляют c единиц, то $f'(c)$ - соответствующая им предельная производительность r.

На основании теоремы Лагранжа можно утверждать, что для процесса производства описываемого функцией выпуска $y = f(x)$, которая непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b), существует, по крайней мере, один уровень затрат c, при котором предельная производительность соответствующего ресурса совпадает с его средней производительностью на $[a,b]$.[4,5,7,9,13]

§37 Экономический смысл выпуклости функции

Теорема 51 (Закон убывающей доходности). С увеличением производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу ресурса (трудового, технологического и т.д.), с некоторого момента убывает.

Иначе говоря, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δx - приращение ресурса, а Δy - приращение выпуска продукции, уменьшается при увеличении x. Таким образом, закон убывающей доходности формулируется так: функция $y = f(x)$, выражающая зависимость выпуска продукции от вложенного ресурса, является функцией выпуклой вверх.[5,10]

Теорема 52 (Закон убывающей полезности). С ростом количества товара дополнительная полезность от каждой новой его единицы с некоторого момента убывает.

В ы в о д. Функция полезности $U = U(x)$, где x - товар, U - полезность, есть величина субъективная для каждого отдельного потребителя, но достаточно объективная для общества в целом. Очевидно, закон убывающей полезности можно переформулировать так: функция полезности является функцией выпуклой вверх.[10,13]

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите предельную производительность ресурса (скорость изменения функции), если функция выпуска имеет вид:

$x = 30 + 10r - 2r^2$,

а затраты ресурса составляют: 1) 2 условных единиц, 2) 5 условных единиц.

Определите, начиная с какого момента увеличение затрат данного ресурса становится экономически невыгодным. Приведите примеры экономических ситуаций, которые могут быть описаны с помощью функций выпуска указанного вида.

2. Определите скорость изменения спроса (предельный спрос) при цене в 1 денежную единицу; 5 денежных единиц; 10 денежных единиц, если зависимость спроса на товар от цены на него выражается формулой

$$d = 200 + \frac{p-3}{p^2+3}.$$

§38 Общая схема исследования функции и построения графиков

1) а) Найти ОДЗ и точки разрыва функции

б) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

2) Провести исследование функции с помощью первой производно, т.е. найти точки экстремума функции и интегралы возрастания и убывания.

3) Исследовать функцию с помощью производной второго порядка, т.е. найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

4) Найти асимптоты графика функции: а) вертикальные, б) наклонные.

5) На основании проведенного исследования построить график функции.

Заметим, что перед построением графика полезно установить, не является ли данная функция четной или нечетной.

Вспомним, что функция называется четной, если при изменении знака аргумента значение функции не меняется: $f(-x) = f(x)$ и функция называется нечетной, если $f(-x) = -f(x)$.

В этом случае достаточно исследовать функцию и построить ее график при положительных значениях аргумента, принадлежащих ОДЗ. При отрицательных значениях аргумента, график достраивается на том основании, что для четной функции он симметричен относительно оси Oy, а для нечетной относительно начала координат.

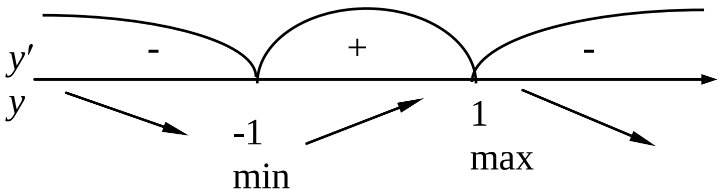
Исследовать функции и построить их график $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. Область определения функции $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$. Точек разрыва нет. Пересечение с осью Ox: $x=0$, $y=0$. Функция нечетная, следовательно, можно исследовать её только на промежутке $[0, +\infty)$.

2. $y' = \dfrac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. Критические точки: $x_1=1$; $x_2=-1$.

$$y_{\min} = f(-1) = -\frac{1}{2}$$

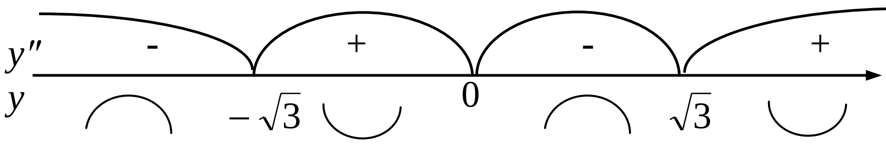
$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{2}$$



3. $$y'' = \frac{-2x\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$\frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3} = 0. \quad x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = +\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}4$$



4. а) Вертикальных асимптот нет

б) $x \to +\infty : k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0,\ b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = 0$. Асимптота -*y*=0.

$$x \to -\infty : k = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0,\ \ b = 0,\ y = 0$$

5. $t(-2) = -2/5$

$t(2) = 2/5$

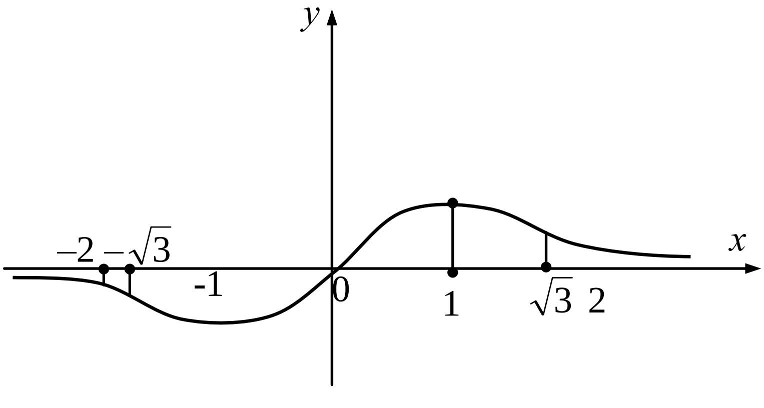


Рисунок 45

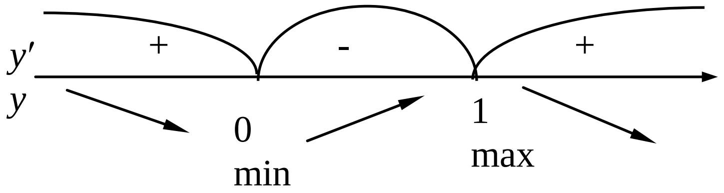
2. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

1. $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$. Точек разрыва нет. Пересечение с осью Ox: $2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0;\quad x_1 = 0,\ x_2 = 3\frac{3}{8}.$

2. $y' = 2 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad x_1=0,\ x_2=1.$

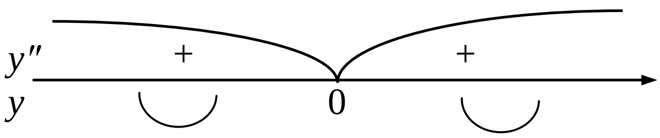
$y_{\min} = f(1) = -1$

$y_{\max} = f(0) = 0$



3. $y'' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}, \quad x = 0$

$$y'' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$$



4. а) Вертикальных асимптот нет.

б) $x \to +\infty:\quad k = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2, \quad b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3\sqrt[3]{x^2}\right) = -\infty$

$x \to -\infty:\ b \to +\infty$

5. Наклонных асимптот нет.

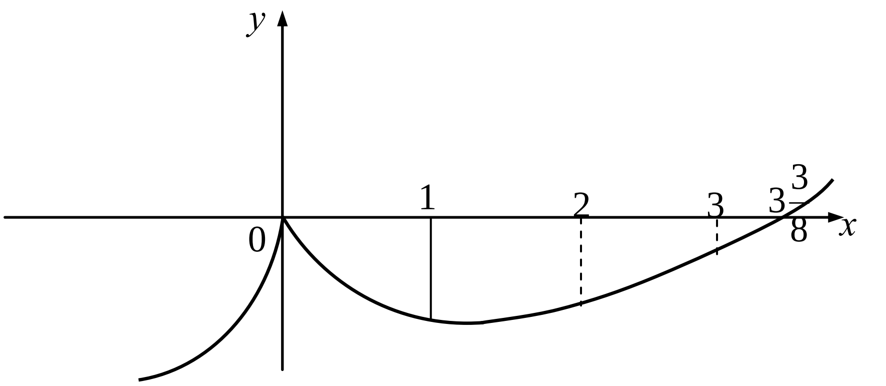


Рисунок 52

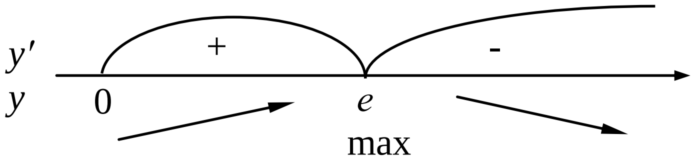
3. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

1. $D(y)=(0;\ +\infty)$. Функция непрерывна на всей области определения.

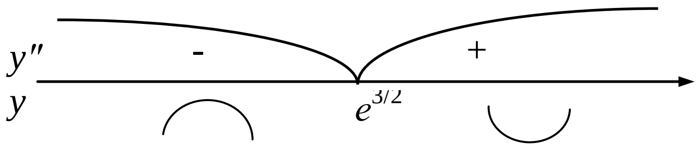
Пересечение с осью Ox: $\dfrac{\ln x}{x} = 0,\ \ x = 1$. Координата точки пересечения (1; 0).

2. $y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = e$

$y_{\max} = f(e) \approx 0{,}4$



3. $y'' = \dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4} = \dfrac{-3+2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow x = e^{3/2}$



4. а) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x}\ln x = [+\infty\cdot(-\infty)] = -\infty$. Вертикальная асимптота x=0.

$x \to +\infty : k = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0,\ b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.Наклонная асимптота $y = 0$.

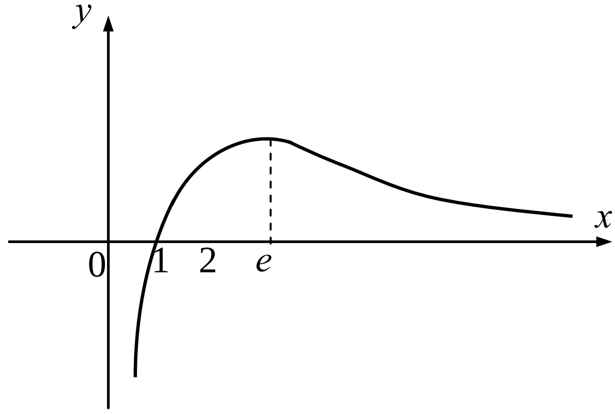


Рисунок 53

Решение типовых примеров

1. $y=\frac{1}{4}\left(x^3+9x^2+15x-9\right)$.

1) Область определения данной функции являются все действительные значения аргумента *x*, то есть $D(y): x\in(-\infty;+\infty)$, а это значит, что функция непрерывна на всей числовой прямой и ее график не имеет вертикальных асимптот.

2) Исследуем функцию на экстремум и интервалы монотонности. С этой целью найдем ее производную и приравняем к нулю:

$$y'=\frac{1}{4}\left(3x^2+18x\right)+15;\ x^2+6x+5=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, делаем вывод о том, что функция имеет две критические точки 1 рода $x_1=-5, x_2=-1$. разбиваем область определения этими точками на части и по изменению знака производной в них выявляем промежутки монотонности и наличие экстремума:

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\max x}=y(-5)=\frac{1}{4}\left[(-5)^3+9(-5)^2+15(-5)-9\right]=4;$$

$$y_{\min}=y(-1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^3+9(-1)^2+15(-1)-9\right]=-4.$$

3) Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдем вторую производную заданной функции и приравняем ее к нулю:

$$y''=\frac{1}{4}(6x+18);\ x+3=0;\ x=-3.$$

Итак, функция имеет одну критическую точку 2 рода $x = -3$. Разобьем область определения полученной точкой на части, в каждой из которых установим знак второй производной:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		т.п.	

Значение $x = -3$. является абсциссой точки перегиба графика функции, а ордината этой точки

$$y(-3) = \frac{1}{4}\left[(-3)^3 + 9(-3)^2 + 15(-3) - 9\right] = 0.$$

4) Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения параметров уравнения асимптоты $y = kx + b$ воспользуемся формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \; b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right).$$

Имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{4}\left(x^3 + 9x^2 + 15x - 9\right)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}\left(x^2 + 9x + 15 - \frac{9}{x}\right) = \infty.$$

Таким образом, у графика заданной функции наклонных асимптот нет.

5) Для построения графика в выбранной системе координат изобразим точки максимума $A_1(-5;4)$, минимума $A_2(-1;-4)$, перегиба $A_3(-3;0)$ и точку пересечения графика с осью $OyA_4\left(0;-\dfrac{9}{4}\right)$. С учетом результатов предыдущих исследований построим кривую (см. рисунок 54).

6) Найдем наибольшее и наименьшее значение заданной функции на отрезке $[-3;0]$. Для этого посчитаем значения функции на концах этого отрезка, в критических точках 1 рода, попавших на отрезок, и сравним результаты:

$$y(-3)=0;\ y(-1)=-4;\ y(0)=-\frac{9}{4}.$$

Очевидно, $\min\limits_{[-3;0]} f(x)=-4;\ \max\limits_{[-3;0]} f(x)=0$.

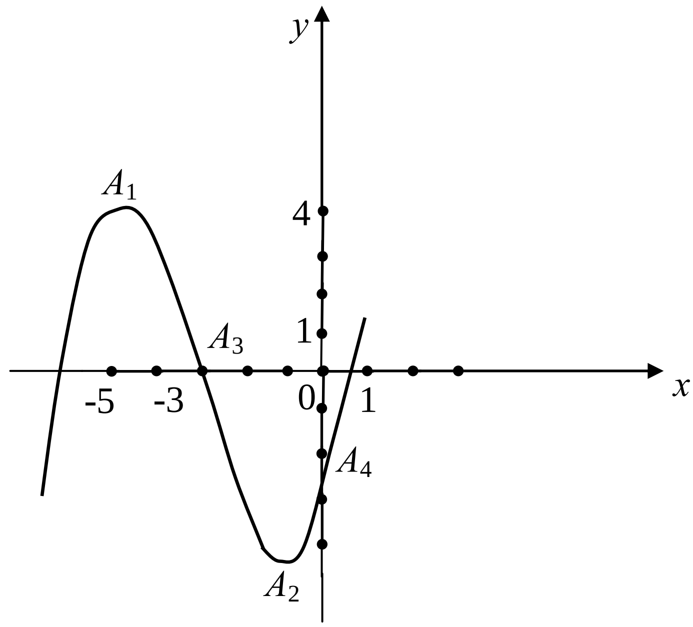


Рисунок 54

2. $y=\dfrac{x^2+20}{x-4}$.

1) Область определения $D(y)=\{x\in(-\infty;4)U(4;+\infty)\}$.

2) Исследование на непрерывность и классификация точек разрыва. Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки $x=4$. Вычислим ее односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}\frac{x^2+20}{x-4}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x)=\lim_{x\to 4+0}\frac{x^2+20}{x-4}=+\infty.$$

Таким образом, точка $x = 4$ является для заданной функции точкой разрыва второго рода, а прямая $x = 4$ – вертикальной асимптотой графика.

3) Исследование на экстремум и промежутки монотонности.

$$y' = \frac{2x(x-4) - (x^2+20)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2};$$

$$\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2} = 0; x^2 - 8x - 20 = 0$$

x	$(-\infty,2)$	–2	$(-2,4)$	4	$(4,10)$	10	$(10,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не сущ.	– $\searrow$	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$			min	$\nearrow$

$$y_{\max} = y(-2) = -4; \;\; y_{\min} = y(10) = 20.$$

4) Исследование графика на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

$$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - 2(x-4)(x^2-8x-20)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{2(x-4)\left[(x-4)^2 - (x^2-8x) - 20\right]}{(x-4)^4} = \frac{36}{(x-4)^3}$$

Так как $y'' \neq 0$, то график заданной функции точек перегиба не имеет. Остается выяснить вопрос об интервалах его выпуклости и вогнутости:

x	$(-\infty,-4)$	4	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	–	не сущ	+
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

5) Исследование графика на наличие наклонных асимптот.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+20}{x^2-4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{20}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+20}{x-4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+20}{x-4}=4.$$

Таким образом, прямая $y=x+4$ – наклонная асимптота графика.

6) Построение графика.

Очевидно, график заданной функции пересекает ось Oy в точке $(0;-5)$ и на основе обобщения результатов всех предыдущих исследований имеет вид, представленный на рисунок 55.

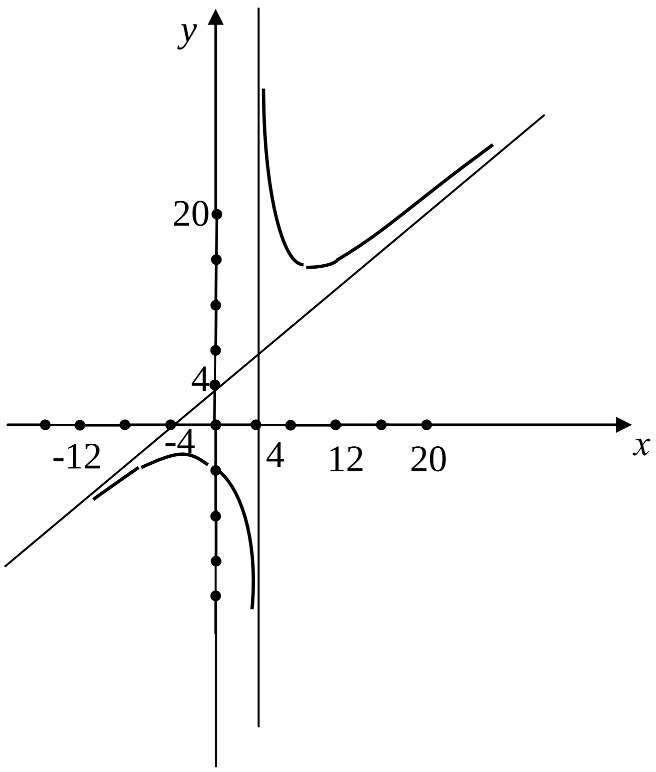


Рисунок 55

Гиперболические функции

Во многих приложениях математического анализа встречаются комбинации показательных функций. Эти комбинации рассматриваются как новые функции и обозначаются:

$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус.

$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус.

С помощью этих функций можно определить еще две функции.

$thx = \dfrac{shx}{chx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ - гиперболический тангенс.

$cthx = \dfrac{chx}{shx} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ - гиперболический котангенс.

Функция *sh x*, *ch x*, *th x* определены, очевидно, для всех значений *x*, т.е. их область определения (-∞; +∞). Функция же *cthx* определена всюду за исключением точки *x*=0.

Между гиперболическими функциями существует следующие соотношения, аналогичные соответствующим соотношениям между тригонометрическими функциями.

$$ch^2 x - sh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = 1$$

Найдем:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

Т.е.

$$sh2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) = 2shxchx$$

Итак, $sh2x = 2shxchx$

$$ch^2 x + sh^2 x = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) =$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = ch2x$$

Следовательно, $ch2x = ch^2 x + sh^2 x$.

Найдем производные гиперболических функций

$$\left(shx\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = chx \Rightarrow \left(shx\right)' = chx$$

Аналогично можно показать $(chx)' = shx$. $(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right) = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$.

Т.е. $(thx)' = \frac{1}{ch^2x}$ и $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}$.

График гиперболических функций. Для того чтобы изобразить графики функций

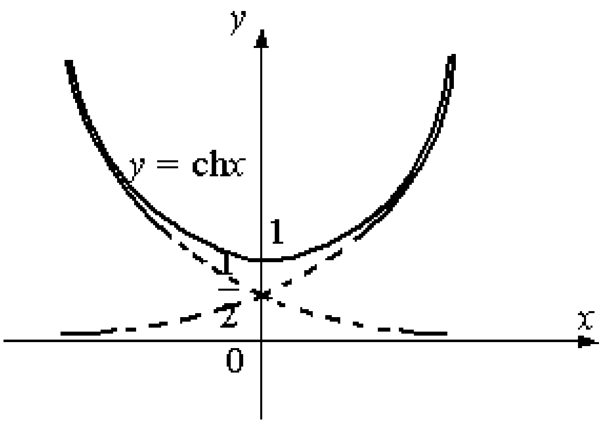


Рисунок 56

shx и *chx* нужно вспомнить графики функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$

Рисунок 57

§39 Исследование функций в экономике предельные производительность, спрос, предложение.

На основании экономического смысла производной и аппарата дифференциального исчисления возникает множество экономических задач, связанных с исследованием функций. Особый интерес, представляют экономические понятия и задачи на предельную производительность ресурса, предельный спрос продукции от цены и т.д. Приведем определение и примеры таких задач.[5, 13, 17]

Пример 105. Предприятие производит x единиц некоторой однородной продукции в месяц. Исследовать финансовые накопления, если зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска выражается формулой

$$F = -0{,}02x^3 + 600x - 1000.$$

Р е ш е н и е.

1. Из экономического смысла независимой переменной (т.е. область определения переменной) следует, что она неотрицательна, т.е. $D_F = [0, \infty)$.

2. $F' = -0{,}06x^2 + 600$. $F' = 0$, при значениях $x = -100$ и $x = 100$. На промежутке $(0{,}100)$ производная положительна, на $(100, \infty)$- отрицательна. В точке $x = 100$ функция достигает максимума:

$$F_{\max} = F(100) = 39000.$$

В ы в о д. Финансовые накопления предприятия растут с увеличением объема производства до 100 единиц. При $x = 100$ они достигают максимума, равного 39000 денежных единиц. Дальнейший рост производства приводит к сокращению финансовых накоплений.

Пример 106. Цементный завод производит x тонн цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т цемента. Производительные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 т в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид:

$$K = -x^3 + 98x^2 + 200x.$$

Р е ш е н и е. Напомним, что удельные затраты - это средние затраты на единицу продукции, данном случае на 1 т цемента. При объеме производства в x т удельные затраты составят:

$$\frac{K}{x} = -x^2 + 98x + 200.$$

Задача сводится к отысканию наибольшего, наименьшего значения функции

$$y = -x^2 + 98x + 200$$

на промежутке $[20,90]$.

1. Из экономического смысла независимой переменной следует, что она неотрицательна, т.е. $Dy = [0,\infty)$.

2. $y' = -2x + 98$. $Y' = 0$, при значении $x = 49$. На промежутке $[20,49]$ производная положительна, на $[49,90]$- отрицательна. В точке $x = 49$ функция достигает максимума: $Y_{\max} = Y(49) = 2601$. На концах промежутка значения функции соответственно равны $Y(20) = 1760$, $Y(90) = 820$.

Ответ: $\max\limits_{[20,90]} \frac{K}{x} = f(49) = 2601$, $\min\limits_{[20,90]} \frac{K}{x} = f(90) = 820.$

Пример 107. Требуется оградить забором прямоугольный участок земли площадью 294 кв. м. и затем разделить его на две равные части перегородкой. Каковы должны быть размеры участка, чтобы на постройку забора и перегородки было истрачено наименьшее количество материала?

Р е ш е н и е. Обозначим ширину прямоугольного участка через *x*, а длину через *y*.

Из условий задачи следует, что $x \in (0, +\infty)$.

Поскольку площадь участка равна 294 кв. м., то

$$S = x \cdot y = 294 \text{ (кв.ед.)}$$

Откуда получаем, что

$$y = \frac{294}{x}$$

а общая длина $P(x)$ всего загона:

$$P(x) = 3x + 2y = 3x + 2\frac{294}{x}$$

Таким образом, общая длина ограды представляет собой функцию от одной переменной x, и наша задача свелась к нахождению наименьшего значения этой функции в интервале $(0, +\infty)$.

Ответ: $x = 14\,м$, $\quad y = 21\,м$.

Изменение предельной производительности ресурса

Пусть в производстве продукции используется несколько видов сырья. Однако затраты всех ресурсов строго регламентированы технологией производства. Только один ресурс (например, затраты труда) может изменяться, оказывая влияние на объем производства. Зависимость выпуска продукции x от затрат этого специфического ресурса r описывается формулой

$$x = f(r).$$

***Определение*:** Скорость изменения этой функции выражается ее производной и называется *предельной производительностью ресурса.*

Замечание: Если речь идет о затратах труда, то $f'(r)$ - предельная производительность труда. Значение $f'(r)$ меняется в зависимости от r, т.е. речь идет о новой функции аргумента r, а именно о$V = f'(r)$.

$$V' = (f'(r))'.$$

Естественно, возникает вопрос: какова скорость изменения V? Скорость изменения любой функции описывается ее производной. Если функция $V = f'(r)$ дифференцируема, то существует

$$V' = (f'(r))'.$$

***Определение*:** Скорость изменения предельной производительности ресурса называется *темпом изменения выпуска при изменении затрат этого ресурса.*

Аналогично определяется *темп изменения спроса от цены $d''(p)$*, где d – спрос на продукцию, p – цена продукции.[15, 4,10]

Пример 108. Если формула

$$d = \frac{100}{p+1}$$

выражает зависимость спроса на товар от цены на него, то

$$d' = -\frac{100}{(p+1)^2}$$

- скорость изменения спроса, или *предельный спрос.*

Спрос является убывающей функцией цены, т.к. $d' < 0$ при любом значении p. *Темп изменения спроса*

$$d'' = \frac{200}{(p+1)^3} > 0.$$

В ы в о д. Спрос убывает с нарастающей скоростью. Чем больше цена, тем быстрее уменьшается спрос на товар. Если $p_2 > p_1$, то $d'(p_2) > d'(p_1)$.

Определение: Монотонная функция f возрастает (убывает) на $[a,b]$ все быстрее, если скорость ее изменения является возрастающей функцией. Если же скорость изменения функции f убывает на $[a,b]$, то говорят, что функция f возрастает (убывает) на $[a,b]$ все медленнее.

Теорема 53. Для того, чтобы функция $y = f(x)$, имеющая на промежутке $[a,b]$ первую и вторую производные, возрастала (убывала) на нем все быстрее, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ для всех $x \in [a,b]$.

Пример 109. Предположим, что на предприятии издержки производства вычисляются по формуле

$$K = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 80x + 300.$$

Предельные издержки

$$K' = x^2 - 10x + 80$$

положительны при любом объеме производства x. Это следует из того, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 10x + 80$ отрицателен, а старший коэффициент 1 положителен. Такой трехчлен может принимать только положительные значения.

Вычислим $K'' = 2x - 10$. Легко установить, что $K'' > 0$, если $x > 5$, и $K'' < 0$ при $x < 5$.

В ы в о д. Если выпуск продукции не превышает 5 условных единиц, то издержки производства возрастают все медленнее. Если же $x > 5$, то издержки растут все быстрее.[5,10,17]

Принцип акселератора

Предположим, что технология процесса производства не меняется, а основные производственные фонды используются полностью.

Введем следующие обозначения:

F - размеры основных производственных фондов в момент времени t,

Q - объем производства предметов потребления с помощью основных производственных фондов F.

Предположим, что масса основных фондов пропорциональна объему производства:

$$F = qQ,$$

где q - постоянный коэффициент пропорциональности ($q > 0$). Следовательно,

$$\frac{dF}{dt} = q\frac{dQ}{dt}.$$

Это означает, что прирост основных производственных фондов в единицу времени пропорционален приросту выпуска предметов потребления в единицу времени.

Прирост основных фондов в единицу времени есть результат капиталовложений K. Можно, следовательно, записать, что в момент времени t

$$K = q\frac{dQ}{dt}, \tag{53}$$

т.е. капиталовложения пропорциональны приросту объема производства.[4,5,7,10,13,14]

Пример 110. Объем производства предметов потребления в период времени $[0, t_1]$ возрастает все быстрее, а с момента t_1 до t_2 возрастает все медленнее. Дать характеристику зависимости капиталовложений от спроса на предметы потребления.

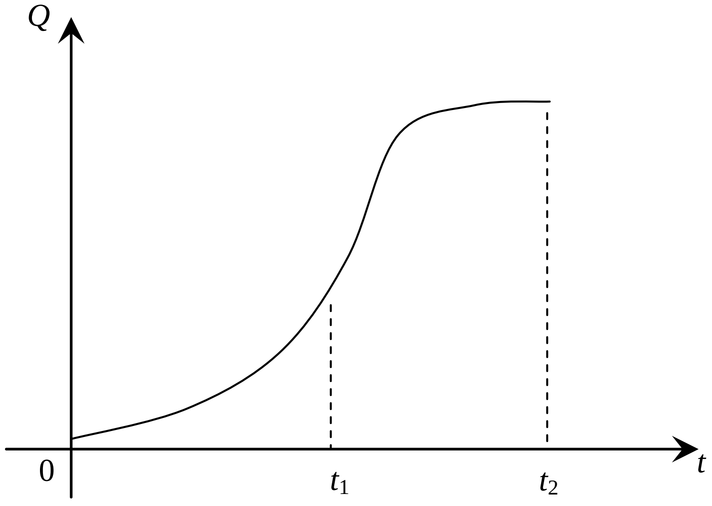


Рисунок 58 - График функции Q

Кривая производства предметов потребления имеет вид, показанный на рисунке 58.

Р е ш е н и е. Для $t \in (0, t_1)$ $Q''(t) > 0$, а для $t \in (t_1, t_2)$ $Q''(t) < 0$. Это означает, что функция $\frac{dQ}{dt}$ возрастает в промежутке $(0, t_1)$ и убывает для $t \in (t_1, t_2)$.

Из (46) и условия $q > 0$ следует, что K имеет такой же характер изменения, что и $\frac{dQ}{dt}$. Поэтому функцию $K = \tilde{K}(t)$ можно изобразить кривой, приведенной на рисунке 59.

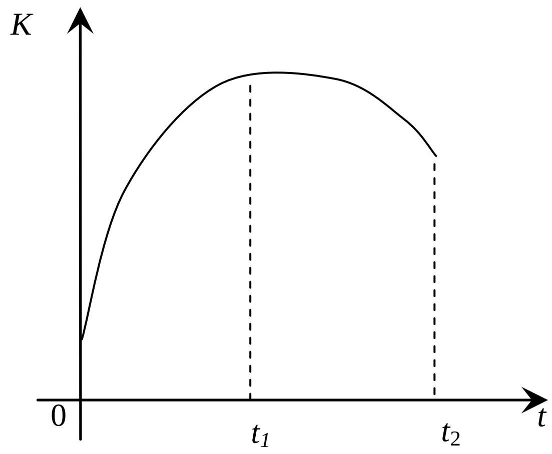


Рисунок 59 - График функции K

Поведение графиков функций $Q = \tilde{Q}(t), K = \tilde{K}(t)$ позволяет сделать следующие **выводы:**

1. Если спрос на предметы потребления (или, то же самое, на производство) возрастает в каком-либо периоде все быстрее (промежуток $(0, t_1)$), то возрастают и капиталовложения. Следовательно, растет спрос на предметы производства, необходимые для увеличения выпуска предметов потребления.

2. Если спрос на предметы потребления (или их производство) с какого-то момента начинает расти все медленнее (промежуток (t_1, t_2)), это вызовет

уменьшение размеров капиталовложений, т.е. падение спроса на средства производства.

3. Удержание капиталовложений на уровне, достигнутом в момент времени t_1, возможно лишь в случае, если спрос на предметы потребления возрастает постоянным темпом, достигнутым в момент времени t_1.

Приведенное положение называют *принципом ускорения* или *принципом акселератора*.[5,6,8,10,13]

Пример 111. Зависимость спроса от цены описывается функцией

$$d(p) = e^{-2p^2} \quad (p \geq 0).$$

Исследовать функции спроса и выручки от цены, построить их графики.

Р е ш е н и е. Спрос убывает с возрастанием цены, так как

$$d'(p) = -4pe^{-2p^2} < 0.$$

Темп изменения функции $d''(p) = 4e^{-2p^2}(4p^2 - 1)$ отрицателен, если $p < \frac{1}{2}$, и положителен, когда цена больше $\frac{1}{2}$. График изображен на рисунке 60.

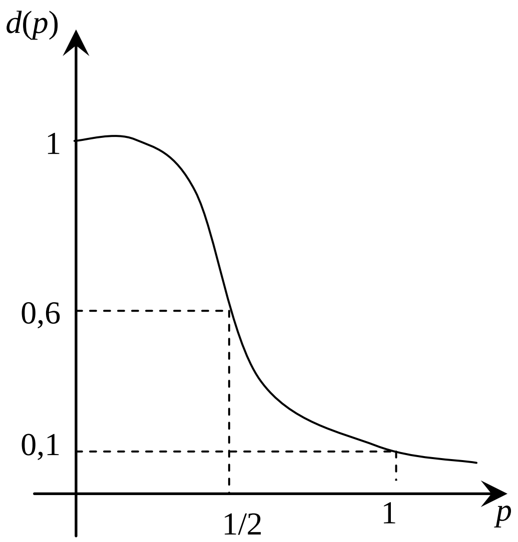


Рисунок 60 - График функции $d(p)$

Выручка от реализации товара по цене p составляет:

$$U(p) = p \cdot d(p) = pe^{-2p^2} \text{ ден.ед.}$$

Производная этой функции

$$U'(p) = e^{-2p^2}(1-4p^2)$$

положительна, если $p < \frac{1}{2}$, и отрицательна для $p > \frac{1}{2}$. Это означает, что с ростом цены выручка вначале увеличивается (несмотря на падение спроса) и при $p = \frac{1}{2}$ достигает максимального значения, равного

$$U_{\max} = U(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}3.$$

Дальнейшее увеличение цены не имеет смысла, так как оно ведет к сокращению выручки.

Темп изменения выручки

$$U''(p) = 4pe^{-2p^2}(4p^2 - 3)$$

положительный, если $p > \frac{\sqrt{3}}{2}$, и отрицательный, пока $p < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

На промежутке $(0, \frac{1}{2})$ функция возрастает все медленнее. Соответствующая часть графика выпукла. Как уже отмечалось, дальнейшее повышение цены невыгодно.

Для $p > \frac{\sqrt{3}}{2}$ выручка убывает все быстрее, темп приближается к нулю при неограниченном увеличении цены. На промежутке $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty)$ функция $U(p)$ вогнута. В точке $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0.2)$ график перегибается (рисунок 61).

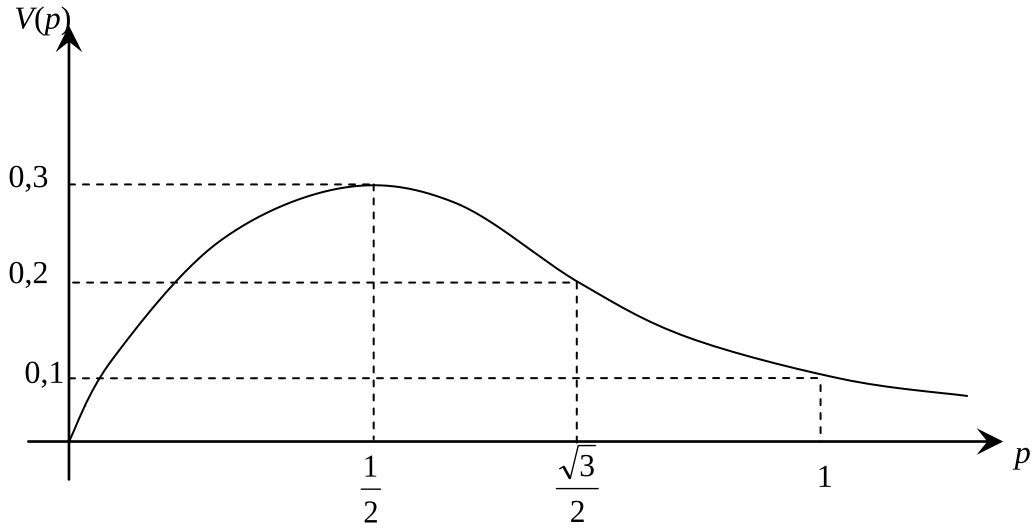


Рисунок 61 - График функции выручки $U(p)$

Задания для самостоятельной работы

1. Объем выпущенной заводом продукции x и выручка z, полученная от ее реализации, связаны следующей зависимостью:

$$z = 15x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{15}x^3.$$

Найдите предельную выручку и постройте ее график. Пользуясь этим графиком, определите, при каком объеме производства выручка максимальна (минимальна). Чему равна при этом предельная выручка? Что это означает?

Замечание. *Предельная выручка* определяется аналогично предельным издержкам производства (это скорость изменения выручки при данном объеме продаж).

2. Предприятие производит x единиц продукции в месяц и реализует ее по цене

$$P = 25 - \frac{1}{30}x.$$

Суммарные издержки производства составляют:

$$K = \frac{1}{25}x^2 + 5x + 300.$$

Определите, при каком объеме производства прибыль предприятия будет максимальной.

3. Из треугольных обрезков фанеры необходимо сделать заготовки, имеющие форму параллелограмма. Как добиться того, чтобы заготовки имели максимально возможную площадь?

4. Имеется запас меда стоимостью в C рублей. Известно, что с течением времени стоимость меда повышается по закону $V = Ce^{\sqrt{t}/2}$, а затраты на хранение настолько меньше V, что ими можно пренебречь. С другой стороны, если мед продать, а деньги положить в банк, то на вырученную сумму непрерывно будут начисляться 10 % годовых. То есть сумма V_0, положенная в банк в момент времени $t = 0$, через t лет станет равной

$$V_1 = V_0 e^{t/10} \quad (10\% = \frac{1}{10}).$$

Определите момент времени t_0, в который наиболее выгодно продать имеющийся запас меда и положить деньги в банк, чтобы через t лет сумма, накапливаемая на счете, была максимальной.

5. Зависимость полных издержек производства K от объема производства x выражается с помощью формулы:

$$K = x^3 - 4x^2 + 9x.$$

Рассчитайте, при каком объеме производства средние издержки минимальны $\left(K_{ср} = \frac{K}{x}\right)$.

6. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части, в каком случае общая стоимость двух частей будет наименьшей?

7. Предположим, что функция затрат имеет вид:

$$y = 2x + \ln(x+1).$$

Определите предельные издержки производства при объеме выпуска $x_1 = 2, x_2 = 9$. При каких значениях x данная функция возрастает (убывает) все быстрее)?

8. Установлено, что предложение данного товара описывается формулой $s = e^p - 1$, где p - цена. Установите вид зависимости предельного предложения (скорости изменения предложения) и темпа изменения предложения от цены на товар. Как изменение этих параметров характеризует динамику предложения?

9. Функция спроса на товар имеет вид:

$$d = 80 + 16p - p^2.$$

Определите уровни цен, соответствующих максимальному спросу на товар, исчезновению спроса на него. При какой цене предельный спрос (скорость изменения спроса) будет равен нулю, двум, десяти? Чему равен темп изменения спроса? Что это означает? Приведите примеры ситуаций, которые могут быть описаны с помощью функций указанного вида.

10. Зависимость спроса от цены выражается формулой:

а) $d(p) = 10 - 2p$;

б) $d(p) = \dfrac{100}{p+1}$;

в) $d(p) = 15 + 2p - p^2$.

Опишите динамику изменения спроса на товар и выручки от продажи этого товара, нарисуйте графики функций.

11. Формула $s = e^p - 1$ задает зависимость предложения s от цены p. Установите характер изменения предельного предложения. Сравните его с характером изменения темпа s. Какую форму имеет график функции предложения?

§40 Многофакторные производственные функции

***Определение*:** Функция n независимых переменных, устанавливающая зависимость между затратами n производственных ресурсов и объемом выпускаемой продукции, называется n-*факторной производственной функцией – ПФ* (функцией выпуска)

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{54}$$

Если (51) выражает зависимость объема выпускаемой данным предприятием продукции от затрат ресурсов $r_1, r_2, \dots, r_n$, запасы которых ограничены, то, очевидно, допустимыми можно считать значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие следующей системе неравенств:

$$\begin{aligned} &0 \le x_1 \le a_1, \\ &0 \le x_2 \le a_2, \\ &\quad \dots \\ &0 \le x_n \le a_{n,} \end{aligned}$$

где a_i $(i = 1, 2, \dots n)$– запасы i-го ресурса (в стоимостном или натуральном выражении).[4,5,10,13,14]

Не нарушая общности рассуждений, в дальнейшем будем рассматривать лишь функции двух независимых переменных.

При моделировании экономики страны в качестве основных ресурсов используют затраты труда *L* и объём производственных фондов *K*. Национальный доход *Y* выступает в роли результата деятельности экономики:

$$Y=F(K,L).$$

В математических моделях функционирования отдельного предприятия, цеха, участка и т.д. *Y* обозначает объем выпускаемой данным экономическим объектом продукции.[4,5,10]

Формальные свойства производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ определена при $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. ПФ должна удовлетворять ряду (для каждой конкретной ПФ – своему) *свойств*:

1. $f(0,0) = 0$;

$$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0;$$

Свойство 1 означает, что без ресурсов нет выпуска, что при отсутствии хотя бы одного из ресурсов нет выпуска.

2. $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \quad (i = 1, 2), \quad x = (x_1, x_2)$;

Свойство 2 означает, что с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет, и что с ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса объем выпуска растет.

3. $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \leq 0 \quad (i = 1, 2), \quad x = (x_1, x_2)$;

$$x > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0 \quad x = (x_1, x_2);$$

Свойство 3 означает что с ростом затрат одного (*i*-го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу *i*-го ресурса не растет (закон убывающей эффективности), при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает. Если выполнены условия 3, то график ПФ есть поверхность, расположенная в неотрицательном ортанте $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0$ трехмерного пространства Ox_1x_2y и выпуклая вверх. Вообще геометрический образ ПФ должен прежде всего ассоциироваться с выпуклой горкой, крутизна которой убывает, если точка (x_1, x_2) уходит в плоскости Ox_1x_2 на «северо-восток».

4. $f(tx_1, tx_2) = t^p f(x_1, x_2)$.

Свойство 4 означает, что ПФ является однородной функцией (ОФ) степени $p>0$. При $p>1$ с ростом масштаба производства в t раз (число $t>1$), т.е. с переходом от вектора x к вектору tx, объем выпуска возрастает в t^p $(>t)$ раз, т.е. имеет рост эффективности производства от роста масштаба производства. При $p<1$ имеем падение эффективности производства от роста масштаба производства. При $p=1$ имеем постоянную эффективность производства при росте его масштаба (или имеем независимость удельного выпуска от масштаба производства – в английской терминологии constant returns to scale).[4,5,10,13]

Для ЛПФ $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ $(a_0 > 0,\quad a_1 > 0,\quad a_2 > 0)$ свойства 1 (при $a_0 = 0$) и свойство 4 не выполняются.

Определение: Множество (линия) l_q уровня $q = f(x_1, x_2)$ ($0<q$ – действительное число) ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется изоквантой ПФ. Иными словами, линия уровня q – это множество точек, в котором ПФ постоянна и равна q.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых (используемых) ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q.

Замечание: Изокванта есть линия, расположенная в неотрицательном ортанте $\{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ двумерной плоскости Ox_1x_2.[6,7,8,10,12,13]

Функция Кобба-Дугласа, функция с постоянными пропорциями

Функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y = Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

При $K = 0$ результат функционирования экономического объекта

$$Y = Y_0 \cdot 0 \cdot L^{1-\alpha} = 0.$$

К такому же выводу приходим и при $L = 0$, т.е. оба ресурса абсолютно необходимы.

Если K и L увеличить в λ раз, то в такое же количество раз возрастает и Y. [10,13,14]

Действительно,

$$F(\lambda K, \lambda L) = Y_0 (\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{1-\alpha} = Y_0 \lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} L^{1-\alpha} =$$

$$= \lambda^{\alpha+1-\alpha} Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha} = \lambda F(K, L).$$

Эта функция находит широкое применение в моделях долгосрочного прогнозирования.

Функцию с постоянными пропорциями

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\}$$

выбирают тогда, когда один из ресурсов производства резко дефицитен, а второй избыточен.

В этой функции реализуются предположения о свойствах производственных функций, убедимся в этом.

1. Если $K = 0$ или $L = 0$,

$$\min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\} = 0$$

и

$$Y = Y_0 \cdot 0 = 0.$$

2. Предположим, что $\frac{K}{K_0} < \frac{L}{L_0}$ и $\lambda > 0$. Тогда

$$\frac{\lambda K}{K_0} < \frac{\lambda L}{L_0}$$

и

$$F(\lambda K, \lambda L) = Y_0 \min\left\{\frac{\lambda K}{K_0}, \frac{\lambda L}{L_0}\right\} = Y_0 \cdot \frac{\lambda K}{K_0} = \lambda \cdot Y_0 \frac{K}{K_0} =$$

$$= \lambda Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\} = \lambda F(K, L).$$

К такому же результату придем, если $\frac{\lambda K}{K_0} \geq \frac{\lambda L}{L_0}$. [4,5]

В ы в о д. В процессе производства, описываемом функцией вида (10), следует использовать ресурсы в постоянной пропорции. Уровень выпуска возрастает в λ раз лишь при одновременном увеличении затрат обоих ресурсов в такое же число раз. Отношение $\frac{K_0}{L_0}$ задает рациональную пропорцию между K и L.[4,5,6,10,13,14,17]

Предельные (маржинальные) и средние значения производственной функции

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ – ПФ.

***Определение*:** Дробь $\frac{f(x)}{x_i} (i = 1, 2)$ называется средней производительностью *i*-го ресурса (фактора производства) (СПФ) или средним выпуском по *i*-му ресурсу (фактору производства). Символика: $A_i = \frac{f(x)}{x_i}$.

Напомним, что в случае двухфакторной ПФКД $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ для средних производительностей $\frac{Y}{K}$ и $\frac{Y}{L}$ основного капитала и труда были использованы соответственно термины капиталоотдача и производительность труда. Эти термины используют и применительно к любым двухфакторным ПФ, у которых $x_1 = K$ и $x_2 = L$.[4,10,13,14,17]

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ – ПФ.

***Определение*:** Первая частная производная $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}(i = 1, 2)$

называется предельной (маржинальной) производительностью *i*-го ресурса (фактора производства) (ППФ) или предельным выпуском по *i*-му ресурсу (фактору производства).

Символика: $M_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

Обозначим символами Δx_i и $\Delta_i(f(x))$ $(\Delta_1 f(x_1, x_2) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)$;

$\Delta_2 f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - (f(x_1, x_2))$ соответственно, приращение переменной x_i и соответствующее ей частное приращение ПФ *f(x)*. При малых Δx_i имеем приближенное равенство

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i}(i = 1{,}2).$$

В ы в о д. ППФ (приближенно) показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска *y*, если объем затрат x_i *i*-го ресурса вырастает на одну (достаточно малую) единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса. Здесь предельную величину $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ (т.е. ППФ) целесообразно интерпретировать, используя близкое к ней отношение малых конечных величин, т.е. $\Delta_i f(x)$ и Δx_i. Отмеченное обстоятельство является ключевым для понимания экономического смысла ППФ $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. С другими предельными величинами следует поступать аналогичным образом.

Пример 112. 1). Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ найти в явном виде A_1, A_2, M_1 и M_2.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}; \; A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1};$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a^1 \cdot A_1; \; M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 \cdot A_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \; \frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Для ПФ $y = f(x)$ (не только для ПФКД) неравенства

$$M_1 \le A_1 \; (i = 1, 2),$$

(т.е. предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса) обычно выполняются.

2). Для ЛПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \; (a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0)$ найти в явном виде A_1, A_2, M_1 и M_2.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + a_2 \frac{x_2}{x_1}; \; A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + a_1 \frac{x_1}{x_2} + a_2,$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1, \; M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2,$$

$$\frac{M_1}{A_1} \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \; \frac{M_2}{A_2} \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$ ч.т.д.

Пусть $y = f(x)$ – ПФ, $x = (x_1, x_2)$.

***Определение*:** Отношение предельной производительности M_i *i*-го ресурса к его средней производительности A_i называется (частной) эластичностью выпуска по *i*-му ресурсу (по фактору производства) (ЭФМ).

Символика: $E_i = \dfrac{M_i}{A_i} = \dfrac{x_i}{f(x)} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} (i = 1, 2)$.

Определение: Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

Поскольку при малом приращении Δx_i имеем приближенное равенство

$$E_i = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) \Big/ \left(\frac{f(x)}{x_i}\right) \approx \left(\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}\right) \Big/ \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)$$

(крайнее правое выражение есть отношение двух относительных величин $\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ и $\frac{\Delta x_i}{x_i}$), поскольку E_i (приближенно) показывает, на сколько процентов увеличится выпуск *y*, если затраты *i*-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса. Пояснение выражения E_i, содержащего предельную величину $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, с помощью выражения, содержащего конечное приближение $\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ этой предельной величины, является ключевым в понимании экономической сути частной эластичности выпуска по *i*-му ресурсу.[5,7,9,10,14]

Пример 113. 1). Выписать в явном виде для ПФКД выражения для E_1, E_2 и E_x.

Р е ш е н и е. Имеем:

$E_1 = a_1$, $E_2 = a_2$,

$E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$.

2) Для ЛПФ $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \ (a_0 = 0)$ выписать в явном виде выражения для E_1, E_2 и E_x.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$E_1 = \frac{x_1}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{a_1 x_1}{a_1 x_1 + a_2 x_2}; \quad E_2 = \frac{x_2}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{a_2 x_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2};$$

$E_x = E_1 + E_2 = 1$. ч.т.д.

Пусть $y = f(x)$ – ПФ, $x = (x_1, x_2)$.

***Определение*:** Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м (аббревиатура: ПНЗФ и символика: R_{ij}) называется выражение

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} (i, j = 1, 2) \tag{52}$$

при постоянной y.

Обратим внимание на то, что i – номер заменяемого ресурса, j – номер замещающего ресурса. Используется также термин: предельная технологическая норма замены (замещения) i-ого ресурса (фактора производства) j-м ресурсом (фактором производства). Приведем более краткий (но не менее точный) термин: (предельная) норма замены (замещения) ресурсов.

Пусть выпуск y является постоянным (т.е. все наборы затрачиваемых ресурсов расположены на одной изокванте), тогда первый полный дифференциал dy ПФ $y = f(x)$ тождественно равен нулю:

$$0 = dy = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2$$

(здесь dx_1, dx_2 – дифференциалы переменных x_1, x_2), откуда, выражая первый дифференциал dx_j, получим ($i \neq j$):

$$dx_j = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} dx_i \ (i, j = 1, 2), \tag{53}$$

откуда, поделив на dx_i, получим

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} dx_i \ (i, j = 1, 2). \tag{54}$$

На основании (51), (52) и (53) имеем:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} > 0_i \ (i \neq j, i = 1,2)$$

(54)

Замечания.

1) Строгий вывод формулы (54) опирается в действительности на теорему о неявной функции (формулировка настоящем пособии не приводится).

2)Непосредственно проверяется, что для двухфакторной ПФ справедливо равенство

$$R_{12} = \frac{E_1}{E_2}\frac{x_1}{x_2}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите значения функций при заданных значениях независимых переменных:

а) $Y = 3K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}, K = 16, L = 81$;

б) $Y = 10\min\left\{\frac{K}{4}, \frac{L}{5}\right\}, K = 12, L = 14$;

в) $Y = 0{,}25x_1 + 0{,}4x_2,\ x_1 = 100, x_2 = 80$;

г) $Y = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1), x_1 = 4,\ x_2 = 3$.

2. Определите, как изменится значение функции

$$Y = 10\min\left\{\frac{K}{4}, \frac{L}{5}\right\},$$

если $K \geq \frac{4}{5}L$ и

а) K увеличить на 3 единицы;

б) L уменьшить на 1 единицу;

в) K увеличить в 2 раза при неизменном значении другой переменной?

3. Процесс производства описывается с помощью степенной функции выпуска

$$Y = 0{,}5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}:$$

а) как следует изменить затраты K, чтобы компенсировать уменьшение L на 50% (Уровень выпуска при этом сохраняется)

б) на сколько процентов уменьшатся затраты K при увеличении L на 25%?

в) как изменится выпуск, если затраты обоих ресурсов увеличить в 2 раза (уменьшить в 3 раза)?

г) во сколько раз надо увеличить затраты L, чтобы компенсировать уменьшение K в 4 раза?

§41 Применение частных производных: задачи на экстремум

Задачи на экстремум имеют большое значение в экономике. Это вычисление, например, максимумов дохода, прибыли, минимума издержек в зависимости от нескольких переменных: ресурсов, производственных фондов и т.д. Теория нахождения экстремумов функций нескольких переменных излагается в базовом курсе математики. Напомним основные моменты.[1,15,16]

***Определение*:** Частная производная функции $z = z(x;y)$ по аргументу, например, x является производной функции одной переменной x при фиксированном значении y.

***Определение*:** Точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой для дифференцируемой функции $z(x;y)$ выполняется условие (необходимое условие существования локального экстремума):

$$\begin{cases} z'_x(x_0;y_0) = 0 \\ z'_y(x_0;y_0) = 0 \end{cases},$$

называется критической точкой возможного экстремума или стационарной точкой.

Теорема 54 **(достаточное условие локального экстремума).** Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности все вторые частные производные функции $z(x;y)$ непрерывны. Тогда, если

$$\Delta = z''_{xx}(x_0, y_0) z''_{yy}(x_0, y_0) - [z''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

то функция $z = z(x;y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум: минимум при $z''_{xx}(x_0; y_0) < 0$ и максимум при $z''_{xx}(x_0; y_0) > 0$. Если $\Delta \le 0$, то данная функция не имеет локального экстремума в точке M_0.

Пример 114. Небольшая фирма производит два вида товаров G_1 и G_2 и продает их по цене 1000 и 800 соответственно. [4,13]Функция затрат (издержек) имеет вид:

$$C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2,$$

где Q_1 и Q_2 обозначают объёмы выпуска соответственно товаров G_1 и G_2.

Р е ш е н и е. Требуется найти такие значения Q_1 и Q_2, при которых прибыль, получаемая фирмой, максимальна.

Поскольку фирма небольшая, она не может монопольно устанавливать цены и вынуждена ориентироваться на рыночные цены, которые не зависят от объёмов производства Q_1 и Q_2 (эти объёмы слишком малы). Поэтому суммарный доход от продажи товаров G_1 и G_2

$$\mathrm{R} = 1000Q_1 + 800Q_2.$$

Прибыль π представляет собой разницу между доходом R и затратами C, поэтому

$$\pi = R - C = (1000Q_1 + 800Q_2) - (2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2),$$

или

$$\pi(Q_1, Q_2) = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2.$$

- это функция двух переменных, максимум которой следует найти, т.е. решить задачу оптимизации.

Для того, чтобы найти стационарные точки, вычисляем частные производные первого порядка

$$\pi'_{Q_1}(Q_1, Q_2) = 1000 - 4Q_1 - 2Q_2,$$
$$\pi'_{Q_2}(Q_1, Q_2) = 800 - 2Q_1 - 2Q_2$$

и приравниваем их к нулю, что дает систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0, \\ 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0. \end{cases}$$

При решении этой системы получим координаты стационарной точки. Вычитая из первого уравнения почленно второе, получаем

$$200 - 2Q_1 = 0,$$

или

$$Q_1 = 100.$$

Подставляя полученное значение в первое уравнение, находим

$$Q_2 = 300.$$

Таким образом, стационарная точка имеет координаты

$$(Q_1, Q_2) = (100{,}300).$$

Остается выяснить вопрос: имеем ли мы в стационарной точке максимум, минимум или не имеем ни того, ни другого. Для решения вычисляем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 Q_2} = -2$$

и оставляем выражение

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 Q_2}\right)^2 = -4 \cdot (-2) - (-2)^2 = 4 > 0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2} = -4 < 0; \qquad \frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2} = -2 < 0\,.$$

Поэтому в стационарной точке имеет место максимум. Подставляя координаты стационарной точки в функцию прибыли

$\pi(100{,}300) = 1000 \cdot 100 + 800 \cdot 300 - 2 \cdot 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 300 - 300^2 = 170000\,.$

В ы в о д. Максимальной прибыли, достигается при объёмах производства Q_1=100; Q_2=300.

Пример 115. Фирма реализует часть товара на внутреннем рынке, а другую часть поставляет на экспорт. Связь цены товара q_1 и его количества p_1, проданного на внутреннем рынке, описывается кривой спроса с уравнением:

$$p_1 + q_1 = 500.$$

Аналогично для экспорта цена p_2 и количество q_2, также связаны соотношением (уравнением кривой спроса)

$$2p_2 + 3q_2 = 720.$$

Суммарные затраты даются выражением

$$C = 50000 + 20(q_1 + q_2).$$

Спрашивается какую ценовую политику должна проводить фирма, чтобы прибыль была максимальна.

Р е ш е н и е. Определим доход фирмы, который складывается из двух частей: продаж на внутреннем рынке

$$R_1 = p_1 q_1 = (500 - q_1)q_1 = 500q_1 - q_1^2$$

и экспортных поставок

$$R_2 = p_2 q_2 = (360 - 1{,}5q_2)q_2 = 360q_2 - 1{,}5q_2^2$$

(в обоих случаях цена берется из соответствующих кривых спроса).

Поэтому суммарный доход

$$R = R_1 + R_2 = 500q_1 - q_1^3 + 360q_2 - 1{,}5q_2^2.$$

Теперь можно легко найти получаемую фирмой прибыль

$$\pi(q_1, q_2) = R - C = \left(500q_1 - q_1^2 + 360q_2 - 1{,}5q_2^2\right) -$$
$$-\left(50000 + 20q_1 + 20q_2\right) = 480q_1 - q_1^2 + 340q_2 - 1{,}5q_2^2 - 50000.$$

Эта функция двух переменных, нахождение максимума которой и решает задачу оптимизации.

Вычисляем частные производные первого порядка

$$\pi'_{q_1}(q_1, q_2) = 480 - 2q_1; \quad \pi'_{q_2}(q_1, q_2) = 340 - 3q_2.$$

Приравнивая их к нулю, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 480 - 2q_1 = 0, \\ 340 - 3q_2 = 0. \end{cases}$$

В данном случае система решается тривиально

$$q_1 = 240; \quad q_2 = 340/3,$$

и мы получили координаты единственной стационарной точки.

Далее вычисляем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} = -2 < 0; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} = -3 < 0; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 q_2} = 0$$

и проверяем знак выражения

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 q_2}\right)^2 = -2 \cdot (-3) - 0^2 = 6 > 0.$$

Отсюда заключаем, что в стационарной точке (240,340/3) имеет место максимум.

Для того чтобы ответить на вопрос об оптимальной ценовой политике фирмы, подставляем координаты точки максимума в кривые спроса:

$$p_1 = 500 - q_1 = 500 - 240 = 260,$$
$$p_2 = 360 - 1{,}5q_2 = 360 - 1{,}5 \cdot 340/3 = 190.$$

Это и есть оптимальные цены для продажи на внутреннем рынке и по экспорту.

Нам осталось подсчитать максимальную прибыль при оптимальных объёмах продаж на внутреннем и внешнем рынках. Подставляя полученные значения q_1 и q_2 (координаты стационарной точки) в функцию прибыли, легко находим эту прибыль

$$\pi(240{,}340/3) = 480 \cdot 240 - 240^2 + 340(340/3) - 1{,}5(340/3)^2 - 50000 = 26866{,}67\,.$$

Пример 116. Фирма-монополист производит два вида товаров G_1 и G_2 в количестве q_1 и q_2 соответственно. Функция затрат имеет вид:

$$C = 10q + q_1 q_2 + 10q_2,$$

а кривые для спроса для каждого товара:

$$p_1 = 50 - q_1 + q_2,$$
$$p_2 = 30 + 2q_1 - q_2,$$

где p_1 и p_2 – цена единицы соответственно товаров G_1 и G_2. Кроме того, фирма связана ограничением на общий объём производства товаров G_1 и G_2, её квота составляет 15 единиц, т.е.

$$\boldsymbol{q_1 + q_2 = 15.}$$

Требуется найти максимальную прибыль, которая может быть достигнута при этом условии.

Р е ш е н и е. Построим целевую функцию, в данном случае прибыли, которая определяется как разница между доходами и затратами:

$$\pi = R - C.$$

Для дохода от продажи товара G_1 имеем:

$$R_1 = p_1 q_1 = (50 - q_1 + q_2)q_1 = 50q_1 - q_1^2 + q_1 q_2,$$

где выражение для p_1 берется из кривой спроса товара G_1. Аналогично доход от продажи товара G_2:

$$R_2 = p_2 q_2 = (30 + 2q_1 - q_2)q_2 = 30q_2 + 2q_1 q_2 - q_2^2.$$

Очевидно, что суммарный доход будет

$$R = R_1 + R_2 = 50q_1 - q_1^2 + 3q_1 q_2 + 30q_2 - q_2^2.$$

Поскольку затраты известны из условия задачи, то прибыль (целевая функция) имеет вид:

$$\pi(q_1, q_2) = R - C = \left(50q_1 - q_1^2 + 3q_1q_2 + 30q_2 - q_2^2\right) -$$
$$-\left(10q_1 + q_1q_2 + 10q_2\right) = 40q_1 - q_1^2 + 2q_1q_2 + 20q_2 - q_2^2.$$

Переписав ограничение в виде

$$g(q_1, q_2) = 15 - q_1 - q_2 = 0,$$

получаем задачу условной оптимизации (поиска условного экстремума). Для её решения применим метод Лагранжа.

Строим вспомогательную функцию

$$F(q_1, q_2, \lambda) = 40q_1 - q_1^2 + 2q_1q_2 + 20q_2 - q_2^2 + \lambda(15 - q_1 - q_2).$$

Вычисляем частные производные и приравниваем их к нулю:

$$F'_{q_1} = 40 - 2q_1 + 2q_2 - \lambda = 0,$$
$$F'_{q_2} = 2q_1 + 20 - 2q_2 - \lambda = 0$$
$$F'_{\lambda} = 15 - q_1 - q_2 = 0$$

Мы получили систему трех уравнений с тремя неизвестными. Представляем её в виде

$$\begin{cases} -2q_1 + 2q_2 - \lambda = -40, \\ 2q_1 - 2q_2 - \lambda = -20, \\ q_1 + q_2 = 15 \end{cases}$$

и решаем методом исключения. Для этого складываем первое и втрое уравнения, что дает

$$-2\lambda = -60; \qquad \lambda = 30.$$

Подставляя в первое уравнение полученное значение, получаем

$$\begin{cases} -2q_1 + 2q_2 = -10, \\ q_1 + q_2 = 15, \end{cases}$$

т.е. систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решая её, легко находим

$$\boldsymbol{q_1 = 10; \qquad q_2 = 5.}$$

Это и есть координаты точки условного экстремума, т.е. тот объём продаж, при котором прибыль максимальна. Соответствующее значение самой прибыли будет

$$\pi(10,5)=40\cdot 10-10^2+2\cdot 10\cdot 5+20\cdot 5-5^2=475.$$

§42 Метод наименьших квадратов

Для множества точек наблюдений $(x_i, y_i)\ i=1,2,...,n$, можно выбрать различные типы кривых или прямую линию в зависимости от исходных данных. После подбора типа кривой можно проанализировать – какая кривая $y=f(x)$ является «ближайшей» к точкам наблюдений. В качестве критерия «близости» используется минимум суммы квадратов разностей наблюдений зависимой переменной y_i и теоретически подобранных значений $f(a_1,...a_k, x_i)$, т.е.

$\min z(a_1,...,a_k)$, где, $z(a_1,...,a_k)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f(a_1,..a_k, x_i)\right]^2$, $k\in N$.[4,10]

Из теоремы дифференциального исчисления критическая точка на минимум находится из условий:

$$z'_{a_1}=0,\ z'_{a_2}=0, z'_{a_k}=0.$$

Замечание. Аналогичным образом можно выбрать наилучшую кривую по каждому типу кривой. Наиболее подходящим можно считать тот тип кривой, где будет наименьшее значение $z(a_1,...,a_k)$.

Наиболее часто используется функция вида $y=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, при $n=1$ график – прямая, при $n=2$ график – парабола и т.д. Иногда рассматриваются функции: $y=ax^b$, $y=ab^x$, $y=a+\dfrac{b}{x}$, $y=\dfrac{A}{1+10^{a+bx}}+C$ и т.д.

Рассмотрим подробнее некоторые случаи.

Аппроксимация прямыми, параболами

Пусть имеется множество точек $(x_i, y_i),\ i = 1,2,\ldots,n$ наблюдений, через него всегда можно провести такую прямую $y = ax + b$, которая является «наилучшей» среди всех прямых, т.е. «ближайшей» к точкам наблюдений по их совокупности. [5,9,10] В качестве критерия близости, как было уже сказано, используется минимум суммы квадратов разностей наблюдений зависимой переменной y_i и теоретических, рассчитанных значений $a + bx_i$:

$$z(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + bx_i) \right]^2 \to \min,$$

Для краткости далее обозначим $\sum\limits_{i=1}^{n}$ через $\sum\limits_{i}$.

Для нахождения минимума функции $z = z(a,b)$ находим:

$$\begin{cases} z'_a = 0 \\ z'_b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum\limits_i (y_i - a - bx_i) = 0 \\ -2\sum\limits_i (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_i y_i - na - b\sum\limits_i x_i = 0 \\ \sum\limits_i y_i x_i - a\sum\limits_i x_i - b\sum\limits_i x_i^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{y} = a + b\bar{x},$$

$\bar{x}, \bar{y}$ – среднее арифметическое. Из системы получаем:

$$b = \frac{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2},\ a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

В случае необходимости аппроксимации статистических данных (x_i, y_i) квадратичной функцией $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2$ необходимо находить минимум функции

$$z(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) \right]^2,$$

решая следующую систему:

$$\begin{cases} z'_{a_0} = 0 \\ z'_{a_1} = 0 \\ z'_{a_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum\limits_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) = 0 \\ -2\sum\limits_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) x_i = 0 \\ -2\sum\limits_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) x_i^2 = 0 \end{cases}.$$

Пример 117. Исследовать характер изменения с течением времени уровня производства мяса и валового сбора зерна в 2000-2004 годов, располагая следующими статистическими данными.

Р е ш е н и е. Очевидна тенденция к увеличению производства мяса, а нарастание валового сбора зерна в 2000-2004 гг. сменилось его уменьшением в дальнейшем. Поэтому имеет смысл искать зависимость производства мяса от времени в виде линейной функции, а изменение валового сбора зерна описать с помощью квадратичной функции с отрицательным старшим коэффициентом.

Таблица 3 -Данные по производству мяса и зерна в России

Год	2000	2001	2002	2003	2004
Валовой сбор(млн.т.)	191,7	210,1	211,4	195,0	209,0
Производство мяса (млн.т.)	17,1	18,0	18,9	19,7	19,7

Вычисления значительно упростятся, если 2000 год примем за начало отсчета. Тогда таблица данных производства мяса примет вид:

Таблица 4 - Приведенные данные производства мяса

Год (x)	-2	-1	0	1	2
Производство мяса (y)	17,1	18,0	18,9	19,7	19,7

Применим метод наименьших квадратов. Результаты вычислений приведены в следующей таблице:

Таблица 5 - Данные промежуточных вычислений

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	-2	17,1	-34,2	2
2	-1	18,0	-18,0	1
3	0	18,9	0	0
4	1	19,7	19,7	1
5	2	19,7	39,4	4
$\sum$	0	93,4	6,9	10

Из системы для нахождения неизвестных коэффициентов, которая в данном случае примет вид

$$\begin{cases} 5a_0 = 93{,}4 \\ 10a_1 = 6{,}9 \end{cases},$$

находим $a_0 = 18{,}68,\ a_1 = 0{,}69$.

Искомая зависимость производства мяса от времени имеет вид

$$y = 18{,}68 + 0{,}69x.$$

Таблица 6 - Приведенные данные валового сбора зерна

Год (x)	-2	-1	0	1	2
Валовой сбор (y)	191,7	210,1	211,4	195,0	209,0

Применим метод наименьших квадратов, считая, что в данном случае имеет место зависимость $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Таблица 7 - Результаты промежуточных вычислений

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$
1	-2	191,7	383,4	4	-8	16	766,8
2	-1	210,1	-210,1	1	-1	1	210,1
3	0	211,4	0	0	0	0	0
4	1	195,0	195,0	1	1	1	195,0
5	2	209,0	418,0	4	8	16	836,0
$\sum$	0	1017,2	19,5	10	0	34	2007,9

Из системы для нахождения неизвестных коэффициентов, которая в данном случае примет вид

$$\begin{cases} 34a_2 + 10a_0 = 2007{,}9 \\ 10a_1 = 19{,}5 \\ 10a_2 + 5a_0 = 1017{,}2 \end{cases},$$

находим $a_0 = 208{,}38,\ a_1 = 9{,}75,\ a_2 = -2{,}47$. Искомая зависимость производства мяса от времени имеет вид $y = 208{,}38 + 9.75x - 2{,}47x^2$.

Аппроксимация гиперболической функцией

В расчетах динамический ряд может быть описан уравнением гиперболы

$$y_x = a + \frac{b}{x}.$$

Для гиперболической зависимости способ наименьших квадратов дает такую систему нормальных уравнений (Σ понимается как $\sum_{i=1}^{n}$):

$$na + b\sum\frac{1}{x} = \sum y$$

$$a\sum\frac{1}{x} + b\sum\frac{1}{x^2} = \sum\frac{y}{x}.$$

Решая это уравнение способом определителей, находим

$$a = \frac{\sum y \cdot \sum\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum\frac{1}{x}\cdot\sum\frac{y}{x}}{n\sum\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum\frac{1}{x}\cdot\sum\frac{1}{x}};\; b = \frac{n\sum\frac{y}{x} - \sum\frac{1}{x}\cdot\sum y}{n\sum\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum\frac{1}{x}\cdot\sum\frac{1}{x}}.$$

Пример 118. За период 2003-2008гг. известен товарооборот регионального склада (таблица 8). Сделайте прогноз товарооборота регионального склада на 2009-2010гг.

Р е ш е н и е. По данным таблицы 8 строим график изменения товарооборота. Она изменяется по гиперболе. Эта связь между указанными признаками соответствует уравнению гиперболы $y = a + b/x$. В этой формуле необходимо определить параметры a и b.

Таблица 8 - Товарооборот регионального склада за период 2004-2009гг., млн. усл. ден. ед.

2003	2004	2005	2006	2007	2008
70	100	140	180	200	240

Для нахождения параметров *a* и *b* составим таблицу 9. Определив параметры *a* и *b*, мы составим уравнение гиперболы для прогнозирования товарооборота в 2009-2010гг.

Таблица 9 - Таблица нахождения параметров *a* и *b*

X	*1/X*	$(1/X)^2$	$X = T$	$1/Y$	Y/X
1	1	1	70	0,01428	70,0
2	0,5	0,25	100	0,01000	50,0
3	0,33	0,109	140	0,00714	46,6
4	0,25	0,062	180	0,00055	45,0
5	0,2	0,04	200	0,00500	40,0
6	0,17	0,029	240	0,00416	40,0
Σ21	Σ2,45	Σ1,491	Σ930	Σ0,04113	Σ291,6

$$a = \frac{\sum y \cdot \sum\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum\frac{1}{x}\cdot\sum\frac{y}{x}}{n\sum\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum\frac{1}{x}\cdot\sum\frac{1}{x}} = \frac{930\cdot 1491 - 2{,}45\cdot 291{,}6}{6\cdot 1{,}491 - 2{,}45\cdot 2{,}45} = 228{,}6.$$

$$b = \frac{n\sum\frac{y}{x} - \sum\frac{1}{x}\cdot\sum y}{n\sum\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \sum\frac{1}{x}\cdot\sum\frac{1}{x}} = \frac{6\cdot 291{,}6 - 2{,}45\cdot 930}{6\cdot 1{,}491 - 2{,}45\cdot 2{,}45} = -179{,}9.$$

Уравнение гиперболы для прогнозирования товарооборота:

$$T = Y = 228{,}6 - \frac{179{,}9}{x}.$$

Спрогнозируем товарооборот на 2008 и 2009гг.

$$T_{2009} = Y_5 = 228{,}6 - \frac{179{,}9}{x} = 206{,}1;$$

$$T_{2010} = Y_6 = 228{,}6 - \frac{179{,}9}{x} = 208{,}6.$$

Задания для самостоятельной работы

1. В результате измерения соответствующих значений аргумента x получены значения y:

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Методом наименьших квадратов найти функциональную зависимость между x и y в виде $y = ax + b$.

2. Результаты измерения дали следующие результаты:

x	0	1	2	4	5
y	1	1,5	2	1	0

Аппроксимировать эти значения функцией $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ методом наименьших квадратов.

3. Найти показатель H_p – удельный показатель объема перевозок, отнесенный на 1 млн. руб. товарооборота в 2010г. В таблице 10 она выражается динамическим рядом. Динамика дает нам основание утверждать, что изменение этого показателя по годам имеет вид гиперболы. (Эта тенденция может быть принята за основу для прогнозирования этого показателя по уравнению гиперболы: $H_p = a + b/x$)

Таблица 10 - Исходные данные для прогнозирования объема перевозок с регионального склада в 2006г.

Показатель	Ед. изм.	Буквенное обозначение	Годы					
			2003	2004	2005	2006	2007	2008
Удельный показатель объема перевозок, отнесенный на 1 млн. руб. товарооборота	т/млн. руб.	H_p	3000	3800	4400	4700	5000	5200

Список использованных источников

1 Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант. – М.: Наука, 1965. – 664с.

2 Бугров, Я.С. Высшая математика. Задачник / Я.С. Бугров, С.М Никольский . – М.: Наука, 2004. – 192с.

3 Виноградов, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: Пособие для университетов, пед.вузов. В 2ч. / И.А. Виноградов, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. 3-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2007. – 725с.

4 Замков, О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, Ю.А. Черемных, А.В. Тостопятенко – М.: МГУ, 2001. – 368с.

5 Карасев, А.И. Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш Кремер, Т.И. Савельева – М.: Экономика, 2008. – 353с.

6 Коршунова, Н.И. Математика в экономике / Н.И Коршунова, В.С. Плясунов – М.: «Вита-Пресс», 2007. –368с.

7 Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П Чупрынов – СПб.: Питер, 2008. – 464с.

8 Высшая математика для экономистов / Н.Ш Кремер [и др.] –М.: ЮНИТИ, 2009. –471с.

9 Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Кремер, Н.Ш., Путко, Б.А., Тришин, И.М., Фридман, М.Н., под ред. проф. Н.Ш. Кремера.–2 –е. изд. перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2008. – 471с.

10 Лопатников, Л.И. Краткий экономико-математический словарь / Л.И Лопатников. – М.: Наука, 1987. – 450с.

11 Мартынов, Г.П. Высшая математика / Г.П Мартынов – Новосибирск: НИИГАиК, 2005. – 90с.

12 Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для вузов, в 4 томах, том 1 / Н.С Пискунов – М.: Наука, 2008 – 456с.

13 Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики / под ред. А.И.Карасева и Н.Ш.Кремера. – М.: Экономическое образование, 2009. – 210с.

14 Солодовников, А.С. Математика в экономике в 2-х ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов – М.: Финансы и статистика, 2005, Ч.1. – 276с.

15 Солодовников, А.С. Математика в экономике / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов – М.: Финансы и статистика, 2006. – 224с.

16 Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, в 2-х т., том 1. / Г.М. Фихтенгольц – М. 1966. – 608с.

17 Шарп, У. Инвестиции: пер. с англ. / У. Шарп, Дж. А. Гордон, Д. Бейли – М.: Инфа-М. 2005. – 210с.

18 Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник для вузов. / В.С. Шипачев –5-е изд., стер. – М.: Высшая школа. 2008. – 479с.

19 Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. / В.С. Шипачев – 3-е изд., стер. – М..: Высшая школа, 2009. – 304с.

20. Шептухина О.М., Рисковец В.В. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания. / О.М. Шептухина, В.В. Рисковец – Оренбург: РИК ГОУ ОГУ, 2004. – 108 с.