

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической и общей электротехники

Н.Ю.Ушакова, Ж.Г.Пискунова

ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Методические указания
к выполнению расчетно-графического задания

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования «Оренбургский государственный
университет»

Оренбург
2011

УДК 621.3.01(07)
ББК 31.21я7
У 93

Рецензент - кандидат технических наук, доцент В.М. Нелюбов

У 93 **Ушакова, Н.Ю.**
Цепи несинусоидального тока. [Текст]: методические указания к к
выполнению расчетно-графического задания / Н.Ю.Ушакова,
Ж.Г.Пискунова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2011. –
43 с.

Методические указания для выполнения расчётно-графического задания по разделу курса ТООЭ «Цепи несинусоидального тока» содержат задания и рекомендации по расчету периодических несинусоидальных режимов в однофазных и трехфазных линейных электрических цепях, а также примеры расчета в системе MathCad.

Предназначены для студентов направления 140400 Электроэнергетика и электротехника всех форм обучения.

УДК 621.3.01(07)

ББК 31.21я7

©Ушакова Н.Ю.,
Пискунова Ж.Г., 2011
© ОГУ, 2011

Содержание

Введение.....	4
1 Задача 1. Расчет однофазной электрической цепи несинусоидального тока ...	5
1.1 Задание.....	5
1.2 Указания к решению задачи 1.....	12
1.3 Контрольные вопросы.....	15
2 Задача 2. Расчет трехфазной электрической цепи несинусоидального тока...	16
2.1 Задание.....	16
2.2 Указания к решению задачи 2.....	21
2.3 Контрольные вопросы и задачи	24
Список использованных источников	25
Приложение А. Примеры разложения функций в ряд Фурье	26
Приложение Б. Пример расчета однофазной цепи несинусоидального тока.....	30
Приложение В. Пример расчета трехфазной цепи несинусоидального тока (при соединении нагрузки треугольником).....	36
Приложение Г. Пример расчета трехфазной цепи несинусоидального тока (при соединении нагрузки звездой с нулевым проводом).....	39
Приложение Д. Пример расчета трехфазной цепи несинусоидального тока (при соединении нагрузки звездой).....	41

Введение

Несмотря на то, что в электроэнергетических системах принимается ряд мер для поддержания синусоидальной формы переменных токов и напряжений, на практике токи и напряжения могут быть несинусоидальными. Причины возникновения несинусоидальных токов и напряжений могут быть обусловлены или несинусоидальностью источника питания или (и) нелинейностью элементов электрической цепи [1,2].

В силовой электроэнергетике появление несинусоидальных токов или напряжений нежелательно, так как вызывает дополнительные потери мощности, пульсации момента на валу двигателей, поэтому в таких случаях необходимо поддержание синусоидальных режимов. В цепях автоматики и связи, где несинусоидальные токи и напряжения лежат в основе принципа действия устройств, задача наоборот заключается в их усилении и передаче с наименьшими искажениями.

Поэтому очень важно знать теорию несинусоидальных периодических токов (напряжений, э.д.с.), уметь использовать ее для анализа работы различных электрических цепей и устройств, владеть методами их расчета.

Цель выполнения расчетно-графического задания (РГЗ) «Периодические несинусоидальные режимы в линейных электрических цепях» – научиться анализировать режимы линейных электрических цепей с несинусоидальными периодическими источниками э.д.с. Расчетно-графическое задание состоит из двух частей: анализ однофазных электрических цепей и анализ трехфазных электрических цепей при воздействии несинусоидальных ЭДС заданной формы.

РГЗ направлено на формирование у студента следующих профессиональных компетенций:

- способность использовать методы анализа цепей несинусоидального тока;
- способность привлечь для решения профессиональных задач соответствующий физико-математический аппарат;
- способность и готовность использовать информационные технологии в своей предметной области.

1 Задача 1. Расчет однофазной электрической цепи

несинусоидального тока

1.1 Задание

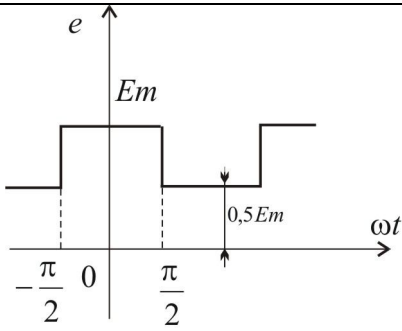
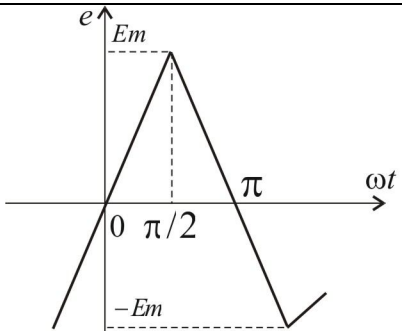
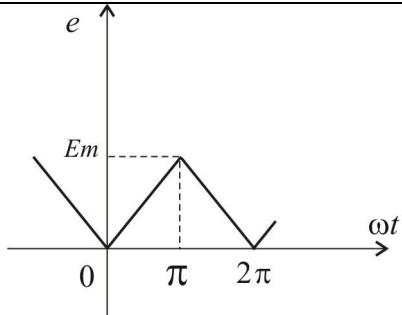
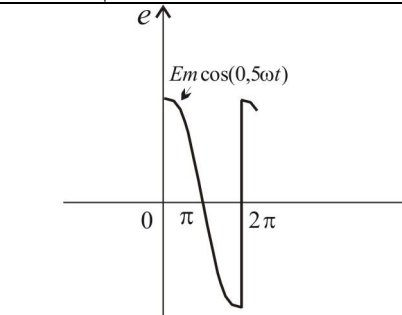
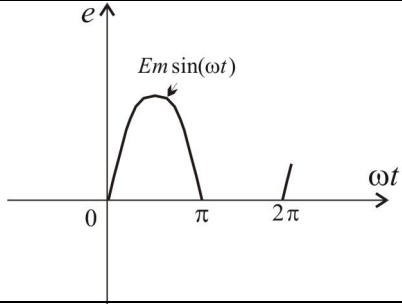
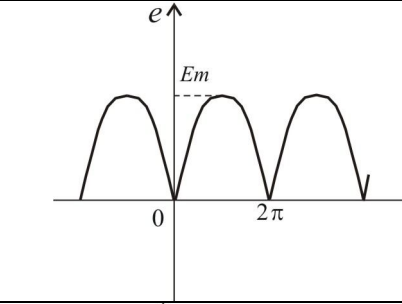
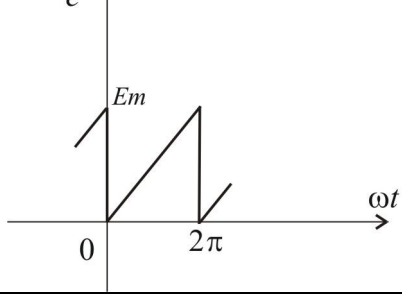
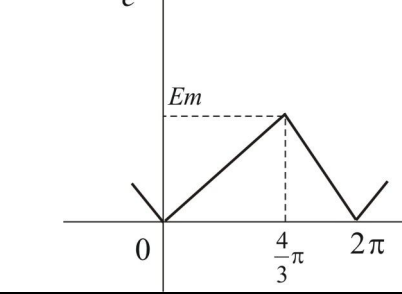
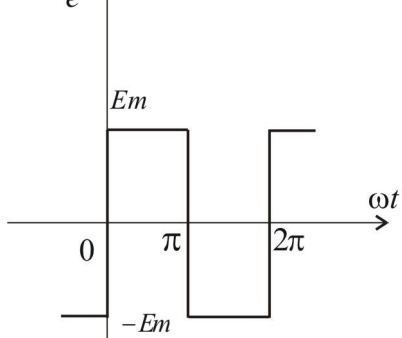
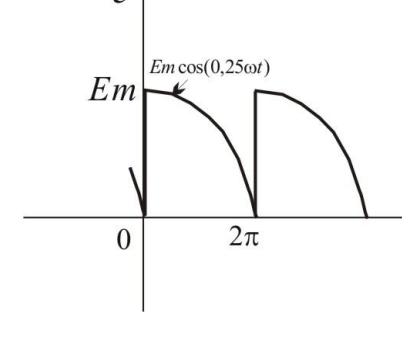
В линейной электрической цепи, схема и параметры которой приведены ниже, действует источник несинусоидального напряжения. Форма ЭДС задана.

Требуется:

- 1) Разложить периодическую несинусоидальную ЭДС источника в тригонометрический ряд Фурье. Для дальнейших расчетов ограничить число членов ряда постоянной составляющей и тремя – пятью гармониками.
- 2) Определить погрешность в определении действующего значения ЭДС, возникающую за счет ограничения числа гармоник ряда.
- 3) На одном графике построить кривую исходной несинусоидальной ЭДС и кривую, полученную в результате сложения гармонических составляющих ограниченного ряда.
- 4) Для каждой гармоники, включая постоянную составляющую, рассчитать токи ветвей, проверить баланс мощности.
- 5) Записать мгновенные значения токов ветвей в виде ряда Фурье. Построить график тока в неразветвленной части цепи (в ветви с источником).
- 6) Определить действующие значения токов ветвей, активную, реактивную, полную мощности цепи, а также мощность искажения.

Кривая ЭДС источника (таблица 1.1) и электрическая схема (таблица 1.2) выбираются по номеру в списке журнала группы. Параметры схемы выбираются из таблицы 1.3 по номеру группы, назначаемому преподавателем.

Таблица 1.1 – Варианты форм кривой ЭДС источника

Вариант	$e(t)$	Вариант	$e(t)$
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	
9		10	

Продолжение таблицы 1.1 – Варианты форм кривой ЭДС источника

Вариант	$e(t)$	Вариант	$e(t)$
11		12	
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	

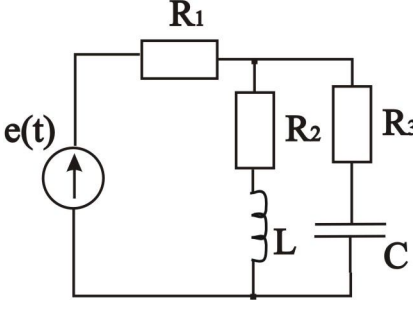
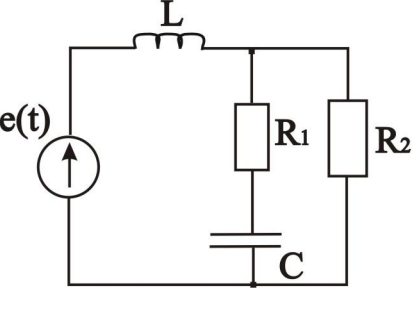
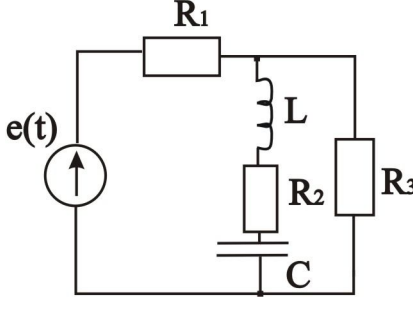
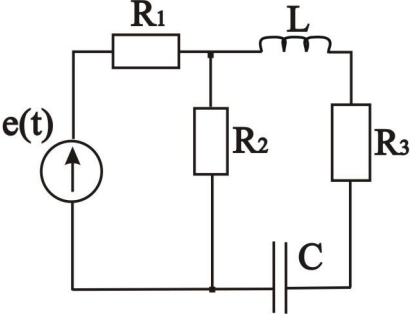
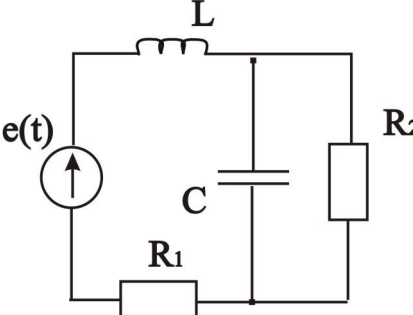
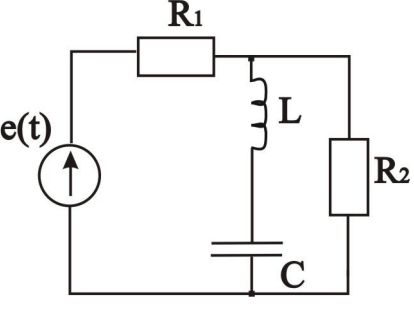
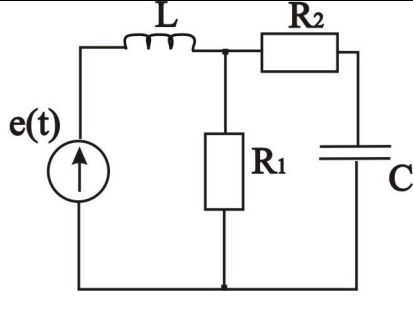
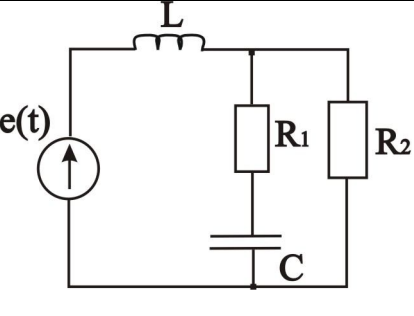
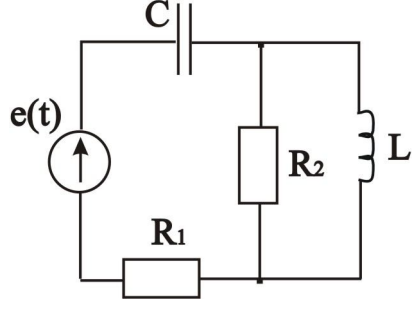
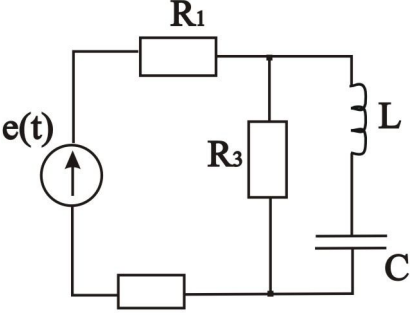
Продолжение таблицы 1 – Варианты форм кривой ЭДС источника

Вариант	$e(t)$	Вариант	$e(t)$
21		22	
23		24	

Таблица 1.2 – Варианты схемы электрической цепи

Вариант	Схема	Вариант	Схема
1		2	
3		4	

Продолжение таблицы 1.2 – Варианты схемы электрической цепи

Вариант	Схема	Вариант	Схема
5		6	
7		8	
9		10	
11		12	
13		14	

Продолжение таблицы 1.2 – Варианты схемы электрической цепи

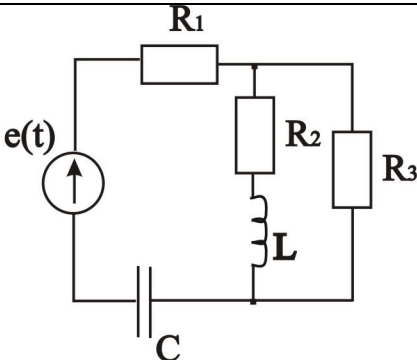
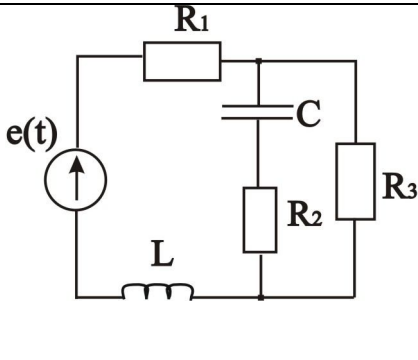
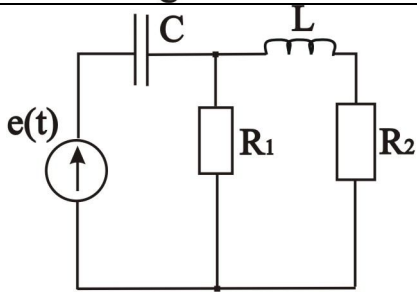
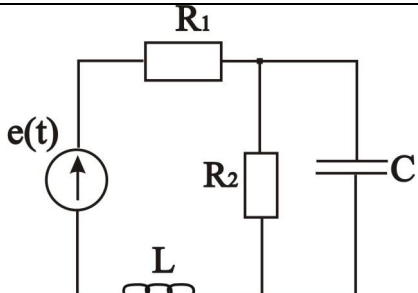
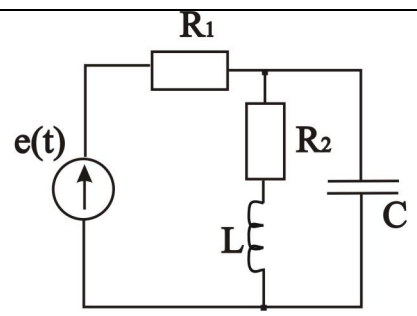
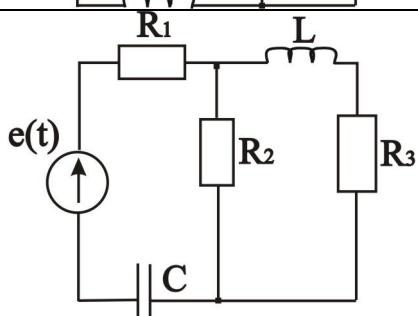
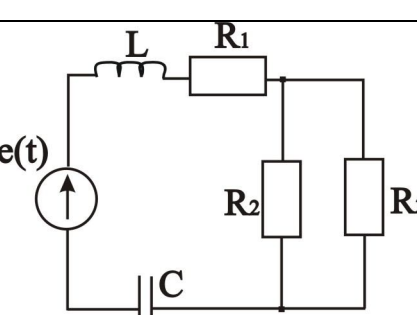
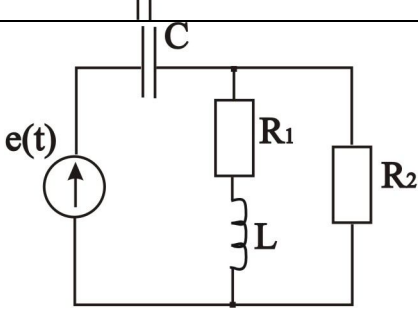
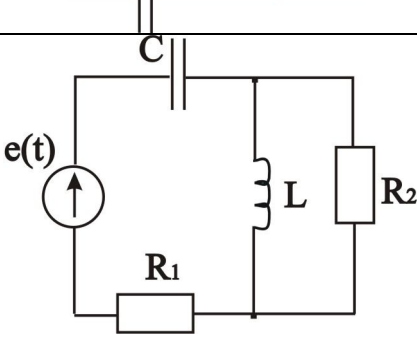
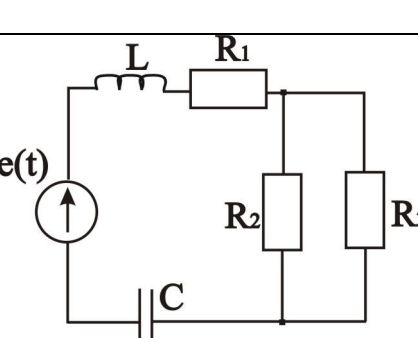
Вариант	Схема	Вариант	Схема
15		16	
17		18	
19		20	
21		22	
23		24	

Таблица 1. 3 – Параметры схемы цепи

№ группы	$E_m, В$	$T \cdot 10^2, с$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$L, мГн$	$C, мкФ$
1	200	0,4	10	10	20	30	30
2	250	0,5	12	12	10	40	25
3	300	0,6	15	10	15	20	30
4	200	0,7	10	14	12	15	44
5	150	0,8	14	8	10	25	60
6	200	0,9	9	13	9	10	55
7	300	1	20	15	4	26	60
8	100	1,1	10	14	8	40	70
9	250	1,2	12	15	15	20	50
10	350	1,3	8	25	20	30	40
11	200	1,4	15	10	20	28	55
12	100	1,5	14	18	6	24	70
13	120	1,6	9	10	10	25	45
14	140	1,7	14	12	8	36	60
15	160	1,8	10	20	12	35	60
16	200	1,9	25	9	30	20	40
17	250	2	30	20	15	35	75
18	240	0,4	12	10	30	25	35
19	220	0,6	16	15	12	20	50
20	200	0,8	20	16	20	25	60

1.2 Указания к решению задачи 1

1.2.1 Анализ заданной линейной электрической цепей несинусоидального тока выполняют на основе принципа наложения по следующему алгоритму:

- раскладывают негармонический периодический сигнал ЭДС в ряд Фурье;
- определяют реакции цепи (токи, напряжения, мощности) от каждой гармоники ЭДС в отдельности;
- определяют результирующие искомые величины как суммы соответствующих гармонических составляющих.

1.2.2 Для разложения несинусоидальной функции ЭДС в тригонометрический ряд Фурье необходимо:

- описать исходную функцию $e(\omega t)$, заданную на графике;
- рассчитать коэффициенты ряда (постоянную составляющую A_0 , квадратурные составляющие B_{km} и C_{km}) по общеизвестным формулам высшей математики (это можно сделать как аналитически, так и в MathCAD)

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(\omega t) d(\omega t), \quad B_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t), \quad C_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(\omega t) \cos k\omega t d(\omega t); \quad (1)$$

- записать ряд в виде суммы гармоник

$$e(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (2)$$

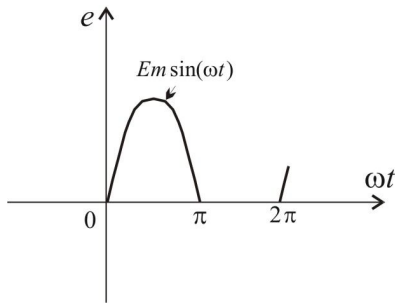
где $E_0 = A_0$ - нулевая гармоника ЭДС;

$E_{km} = A_{km} = \sqrt{(B_{km})^2 + (C_{km})^2}$ - амплитуда k-той гармоники ЭДС;

$\psi_k = \arctg \frac{C_{km}}{B_{km}}$ - начальная фаза k-той гармоники ЭДС.

В среде MathCAD описание любого графика может быть выполнено несколькими способами [3]:

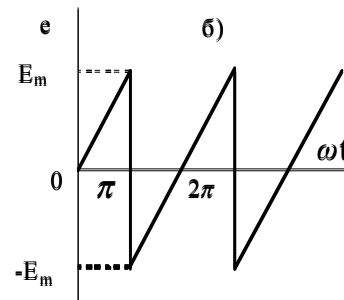
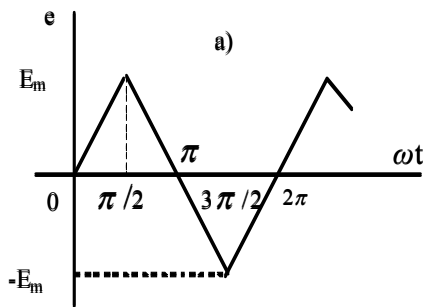
1) с помощью логической функции *if*(логическое условие, *значение*, если истина, *значение*, если ложь). Этот способ целесообразно использовать, если несинусоидальную функцию достаточно просто описать аналитическими выражениями на определенных отрезках, пример приведен на рисунке 1.1.



$$e(\omega t) := \text{if}(0 \leq \omega t \leq \pi, Em, 0)$$

Рисунок 1.1

2) с помощью функции линейной интерполяции **linterp(X, Y, x)**. Этот способ наиболее удобно использовать для формализации графиков, заданных отрезками прямых (рисунок 1.2). Однако необходимо учитывать особенность этой функции – координаты массива X, который стоит на первом месте в linterp, должны монотонно убывать или возрастать. То есть, недопустимы одинаковые координаты, моделирующие вертикальный скачок значения моделируемой функции. При необходимости же моделирования скачка можно изменить значение одной или нескольких координат на такую малую величину, что это не отразится на дальнейших вычислениях. В примере на рисунке 1.2 б это делается за счет уменьшения соответствующих координат на ничтожно малую величину **dp**.



$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{3 \cdot \pi}{2} \\ 2 \cdot \pi \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ Em \\ -Em \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e(\omega t) := \text{linterp}(X, Y, \omega t)$$

$$dp := 1 \cdot 10^{-15}$$

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ \pi - dp \\ \pi \\ 2 \cdot \pi \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ Em \\ -Em \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e(\omega t) := \text{linterp}(X, Y, \omega t)$$

Рисунок 1.2

Подробное разложение в ряд Фурье функций рис. 1.1-1.2 в MathCAD приведено в приложении А.

1.2.3 Точное действующее значение $E_{\text{точн.}}$ заданной функции э.д.с. $e(\omega t)$ рассчитывается по формуле

$$E_{\text{точн.}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (3)$$

После ограничения ряда Фурье принятым количеством гармоник $k=N$, где $N=(3 \div 5)$ определяется приближенное действующее значение э.д.с. $E_{\text{прибл.}}$ по формуле

$$E_{\text{прибл.}} \approx \sqrt{\sum_{k=0}^N E_k^2} \quad (4)$$

Погрешность δ_E в определении действующего значения э.д.с, возникающая за счет ограничения числа гармоник

$$\delta_E \% = \frac{E_{\text{точн.}} - E_{\text{прибл.}}}{E_{\text{точн.}}} \cdot 100\% \quad (5)$$

1.2.4 Расчёт заданной электрической цепи производится в комплексной форме отдельно для каждой из учитываемых гармоник ЭДС любым известным методом (законы Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов, эквивалентных преобразований).

При этом необходимо помнить, что:

- схема электрической цепи будет одинаковой для всех гармоник (кроме нулевой), но сопротивления реактивных элементов для различных гармоник будут разными, так как они зависят от частоты гармоники;
- индуктивное сопротивление участка цепи для k -ой гармоники увеличивается в k раз ($X_{Lk} = k\omega L$), а ёмкостное сопротивление в k раз уменьшается ($X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}$);
- расчёт цепи для постоянной составляющей (нулевой гармоники) соответствует расчёту на постоянном токе ($\omega_0 = 0$): $X_{L0} = 0$, $X_{C0} = \infty$, то есть индуктивный элемент будет эквивалентен замыканию, а ёмкостный – разрыву цепи между точками включения.

1.2.5 Мгновенные значения тока в каждой ветви записываются в виде ряда Фурье, как сумма всех гармоник тока, полученных в результате расчета

$$i(\omega t) = i_0 + \sum_{k=1}^N i_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (6)$$

1.2.6 Действующие значения токов ветвей определяются как

$$I = \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2 + \dots} \quad (7)$$

Активная мощность

$$P = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(2)} + \dots = E_{(0)} \cdot I_{(0)} + E_{(1)} \cdot I_{(1)} \cos \varphi_{(1)} + E_{(2)} \cdot I_{(2)} \cos \varphi_{(2)} + \dots \quad (8)$$

Реактивная мощность

$$Q = Q_{(0)} + Q_{(1)} + Q_{(2)} + \dots = E_{(1)} \cdot I_{(1)} \sin \varphi_{(1)} + E_{(2)} \cdot I_{(2)} \sin \varphi_{(2)} + \dots \quad (9)$$

Полная мощность

$$S = E \cdot I = \sqrt{E_{(0)}^2 + E_{(1)}^2 + E_{(2)}^2 + \dots} \cdot \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2 + \dots} \quad (10)$$

Реактивная мощность искажения

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad (11)$$

1.2.5 Подробный пример расчета однофазной цепи несинусоидального тока приведен в приложении Б.

1.3 Контрольные вопросы

- 1) Что является причиной появления несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях?
- 2) Изложите алгоритм разложения в ряд Фурье периодических несинусоидальных напряжений и токов.
- 3) Какие гармонические отсутствуют в спектрах кривых, симметричных относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала системы координат?
- 4) Какие величины и коэффициенты характеризуют периодические несинусоидальные переменные?

- 5) Как определяются действующие значения периодических несинусоидальных величин?
- 6) Изложите порядок расчета линейных электрических цепей при несинусоидальных напряжениях и токах.
- 7) Приведите формулы для определения всех видов мощностей для несинусоидальных напряжений и токов.
- 8) В чем разница результатов расчетов тока цепи, выполненных для мгновенных и действующих значений?
- 9) Достаточно ли для определения величины полной мощности в цепи несинусоидального тока наличие информации об активной и реактивной мощностях?
- 10) Для каких цепей справедлива методика расчета цепей несинусоидального тока, основанная на разложении ЭДС и токов источников в ряды Фурье?

2 Задача 2. Расчет трехфазной электрической цепи несинусоидального тока

2.1 Задание

Симметричная трехфазная цепь со статической нагрузкой (рисунок 2.1а,б) питается от трехфазного генератора с симметричной несинусоидальной системой ЭДС.

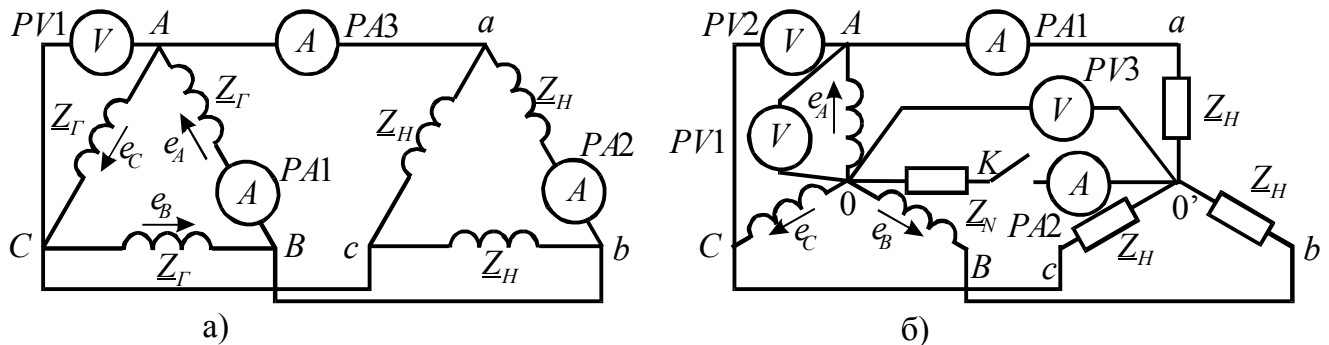


Рисунок 2.1

Известны:

- спектральный состав ЭДС (пять гармоник различной частоты), номера гармоник фазной ЭДС генератора указаны в таблице 2.1;
- сопротивление обмотки генератора \underline{Z}_G и сопротивление фазы нагрузки \underline{Z}_H (таблица 2.2). При расчете схемы цепи рисунка 2.1б сопротивлением фазных обмоток генератора можно пренебречь и принять $\underline{Z}_G=0$;
- действующие значения гармоник ЭДС (таблица 2.3). Начальные фазы всех гармоник в ЭДС фазы А равны нулю;
- сопротивление нейтрального провода \underline{Z}_N на частоте первой гармоники, одинаковое для всех вариантов и равное $\underline{Z}_N = j3 \text{ Ом}$.

Требуется:

- 1) Определить в каждой схеме показания амперметров и вольтметров электромагнитной системы. Для схемы рисунка 2.1 б показания приборов определить для двух положений ключа К.
- 2) Записать выражения для мгновенных значений:
 - фазного тока генератора i_{AB} и фазного тока нагрузки $i_{ав}$ схемы рисунка 2.1а;

- линейного тока i_A , тока нейтрального провода i_N , в схеме рисунка 2.1б при наличии нулевого провода (ключ К замкнут);

- линейного тока i_A и напряжения смещения нейтрали $u_{o'o}$ в схеме рисунка 2.1б при отсутствии нулевого провода (ключ К разомкнут).

Данные из таблиц 2.1 и 2.2. выбираются по номеру в списке журнала группы, из таблицы 2.3 - по номеру группы, назначаемому преподавателем.

Таблица 2.1 – Спектральный состав ЭДС генератора

Номер варианта	Номер гармоники															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	+	+	+			+	+									
2	+				+	+		+				+				
3	+							+	+			+			+	
4	+		+							+	+				+	
5	+		+								+	+		+		
6	+	+		+		+			+							
7	+		+	+	+				+							
8	+			+				+	+			+				
9	+			+		+					+	+				
10	+			+		+			+					+		
11	+	+					+		+			+				
12	+				+		+					+			+	
13	+					+	+	+	+							
14	+		+			+	+				+					
15	+						+		+			+		+		
16	+	+								+		+			+	
17	+				+				+	+		+				
18	+		+			+		+		+						
19	+					+			+	+	+					
20	+									+		+		+	+	
21	+	+	+						+				+			
22	+				+	+			+			+				
23	+							+				+	+			
24	+					+					+		+		+	
25	+		+						+				+	+		
26	+	+				+						+				+
27	+		+		+	+										+
28	+					+		+							+	+
29	+		+						+		+					+
30	+					+						+			+	+

Таблица 2.2 – Параметры генератора и нагрузки

Параметры	Номер варианта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{Z}_Г, \text{ Ом}$	9+j3	5+j2	6+j2	8+j3	7+j1	5+j3	9+j4	4+j1
$\underline{Z}_Н, \text{ Ом}$	13-j39	10-j30	11-j35	8-j30	9-j28	13-j35	7-j28	10-j35

Продолжение таблицы 2.2

Параметры	Номер варианта							
	9	10	11	12	13	14	15	16
$\underline{Z}_Г, \text{ Ом}$	9+j2	3+j3	6+j3	5+j1	4+j2	9+j5	3+j1	9+j3
$\underline{Z}_Н, \text{ Ом}$	8-j25	8-j28	13-j40	9-j25	7-j30	10-j40	12-j36	13-j42

Продолжение таблицы 2.2

Параметры	Номер варианта							
	17	18	19	20	21	22	23	24
$\underline{Z}_Г, \text{ Ом}$	6+j4	4+j3	5+j5	8+j4	3+j2	10+j2	4+j4	6+j1
$\underline{Z}_Н, \text{ Ом}$	8-j26	12-j40	11-j30	10-j28	13-j36	8-j22	9-j30	15-j40

Продолжение таблицы 2.2

Параметры	Номер варианта					
	25	26	27	28	29	30
$\underline{Z}_Г, \text{ Ом}$	9+j2	3+j3	6+j3	5+j1	4+j2	9+j5
$\underline{Z}_Н, \text{ Ом}$	13-j39	10-j30	11-j35	8-j30	9-j28	13-j35

Таблица 2.3 – Действующие значения гармоник ЭДС генератора

Номер варианта	Eк, В															
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16
1	200	175	160	140	120	110	100	90	80	75	70	65	60	55	50	45
2	230	200	180	160	150	140	130	120	110	100	95	90	85	80	75	70
3	400	350	30	280	250	230	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
4	450	400	350	300	280	250	230	200	190	185	180	170	160	150	140	130
5	550	500	450	400	350	300	280	250	230	200	190	180	170	160	150	140
6	500	450	400	350	300	280	250	230	200	190	180	170	160	150	140	130
7	350	300	250	230	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110	100	90
8	300	250	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110	100	95	90	85
9	600	550	500	450	400	350	300	280	250	230	200	190	180	170	160	150
10	190	185	180	170	160	150	140	130	120	110	100	95	90	85	80	75
11	250	200	150	140	130	120	110	100	95	90	85	80	75	70	65	60
12	650	600	550	500	450	400	350	300	260	250	230	200	190	180	170	160
13	670	340	220	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110	100	95	90
14	430	400	390	370	340	320	290	270	260	240	220	210	200	190	180	170
15	380	480	440	420	390	370	340	320	290	270	260	240	220	210	200	190
16	400	300	280	250	240	230	220	210	200	180	170	160	150	140	130	120
17	220	310	190	180	170	160	150	140	130	120	110	100	95	90	85	80
18	320	280	250	240	230	220	210	205	195	175	165	155	145	135	125	115
19	280	260	240	220	210	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110	100
20	310	180	170	165	155	145	135	125	115	105	90	85	80	75	70	65

2.2 Указания к решению задачи 2

Расчёт заданных трехфазных электрических цепей проводится в комплексной форме отдельно для каждой из учитываемых гармоник ЭДС. Результирующие токи и напряжения записываются в виде ряда Фурье как сумма мгновенных значений. Для определения показаний амперметров и вольтметров вычисляются действующие значения токов и напряжений.

При расчете необходимо учитывать, что:

- гармоники порядка $k=1, 4, 7, \dots(3n+1)$ при $n=0, 1, \dots$ образуют трехфазные симметричные системы напряжений и токов прямой последовательности;

- гармоники порядка $k=2, 5, 8, \dots(3n-1)$ при $n=1, 2, \dots$ образуют трехфазные симметричные системы напряжений и токов обратной последовательности;

- гармоники порядка $k=0, 3, 6, 9, \dots(3n)$ при $n=0, 1, \dots$ образуют трехфазные симметричные системы напряжений и токов нулевой последовательности;

- системы прямой и обратной последовательности являются уравновешенными, то есть сумма векторов трех фаз (ЭДС, или напряжений, или токов) равна нулю. Система нулевой последовательности – неуравновешенная, сумма векторов равна утроенному значению одного вектора.

- сопротивления реактивных элементов изменяются с изменением частоты гармоники ($X_{Lk} = k\omega L$, $X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}$);

Кроме того, поскольку заданные трехфазные цепи работают в симметричном режиме расчет для каждой гармоники можно проводить для одной фазы.

Примеры решения подобной задачи приведены в приложениях В, Г, Д

2.2.1 Указания к схеме 2.1 а

2.2.1.1 Для гармоник, не кратных трем ($N=1, 2, 4, 5, \dots(3n+1)$) расчет схемы ничем не отличается от традиционного расчета симметричной трехфазной цепи при соединении обмоток генератора и нагрузки треугольником. Гармоники тока, не кратные трем, протекают в контурах, состоящих из фазной обмотки генератора и

фазного сопротивления нагрузки. Следовательно, для этих гармоник фазный ток k -той гармоники как генератора (\dot{I}_{A1k} , протекающий через амперметр РА1), так и нагрузки (\dot{I}_{A2k} , протекающий через амперметр РА2) рассчитывается по формуле

$$\dot{I}_{A1k} = \dot{I}_{A2k} = \frac{\dot{E}_k}{\underline{Z}_{Гk} + \underline{Z}_{Hk}}, \quad (12)$$

где $\dot{E}_k = E_k e^{j\varphi}$ - комплексное действующее значение k -той гармоники ЭДС;

$\underline{Z}_{Гk}$, \underline{Z}_{Hk} - комплексные сопротивления генератора и нагрузки k -той гармоники.

Эти же гармоники тока будут присутствовать и в линейном токе \dot{I}_{A3} , протекающем через амперметр РА3, но по модулю они будут в $\sqrt{3}$ больше, а по фазе будут сдвинуты относительно гармоник фазного тока на угол $\pm 30^\circ$. Знак «-» берется для гармоник, образующих трехфазную систему прямой последовательности, а знак «+» для гармоник, образующих трехфазную систему обратной последовательности.

$$\dot{I}_{A3k} = \sqrt{3} \dot{I}_{A2k} e^{\mp j30^\circ} \quad (13)$$

2.2.1.2 Гармоники тока, кратные трем, будут протекать только в контуре замкнутого треугольника обмоток генератора (через амперметр РА1). Поэтому, токи гармоник порядка $k=3n$ будут рассчитываться по формуле

$$\dot{I}_{A1}^{3n} = \frac{\dot{E}_k^{3n}}{\underline{Z}_{Гk}^{3n}}. \quad (14)$$

2.2.1.3 При соединении обмоток генераторов треугольником напряжение на зажимах его фазных обмоток будет состоять из гармоник не кратных трем, которые будут меньше соответствующих гармоник э.д.с. на величину падения напряжения от соответствующих гармоник тока на внутреннем сопротивлении генератора. Эти напряжения в схеме рисунка 2.1а равны напряжениям на фазных сопротивлениях приемника.

2.2.2 Указания к схеме 2.1 б

2.2.2.1 При соединении нагрузки звездой с нулевым проводом (ключ К замкнут) в амперметре РА1 будут протекать все гармоники тока. Расчетные формулы

для тока k-той гармоники :

- для гармоник тока, не кратных трем

$$i_{A1k} = \frac{\dot{E}_k}{Z_{Hk}}; \quad (15)$$

- для гармоник тока, кратных трем ($k=3n$)

$$i_{A1}^{3n} = \frac{\dot{E}_k^{3n}}{Z_{Hk}^{3n} + 3Z_{Nk}^{3n}}. \quad (16)$$

В амперметре РА2(в нулевом проводе) будут протекать только гармоники тока, кратные трем, так как сумма токов всех фаз для остальных гармоник будет равна нулю. Так как по нулевому проводу текут токи всех трех фаз они будут в три раза больше фазного тока

$$i_{A2}^{3n} = 3i_{A1}^{3n}. \quad (17)$$

2.2.2.2 При соединении нагрузки звездой без нулевого провода (ключ К разомкнут) в амперметре РА1 будут протекать только гармоники тока, не кратные трем, рассчитываемые по формуле (15).

2.2.2.3 Составляющие спектра фазных напряжений источника равны составляющим спектра его фазных э.д.с., так как внутренние фазные сопротивления источника приняты равными нулю. Фазные напряжения источника, измеряемые вольтметром PV1, будут содержать все гармоники.

Линейные напряжения, измеряемые вольтметром PV2 будут содержать только гармоники не кратные трем. По величине они будут в $\sqrt{3}$ раз больше соответствующих гармоник фазного напряжения, а по фазе будут сдвинуты относительно гармоник фазного напряжения на угол $\pm 30^\circ$. Знак «+» берется для гармоник, образующих трехфазную систему прямой последовательности, а знак «-» для гармоник, образующих трехфазную систему обратной последовательности

$$\dot{U}_{V2k} = \sqrt{3}\dot{U}_{V1k}e^{\pm j30^\circ}. \quad (18)$$

Напряжение смещения нейтрали на вольтметре PV3 (в схеме без нулевого провода) состоит только из гармоник кратных трем, которые равны соответствующим гармоникам напряжения на вольтметре PV1.

2.3 Контрольные вопросы и задачи

- 1) Системы напряжений (ЭДС, токов) какой последовательности в трехфазных цепях образуют гармоники порядка $k = (3n+1)$, $(3n-1)$, $3n$? Каким свойством обладают эти симметричные системы?
- 2) Почему в линейных напряжениях генератора при соединении его обмоток звездой отсутствуют гармоники, кратные трем?
- 3) Какие гармоники содержатся в фазных и линейных токах при соединении обмоток генератора и приемников треугольником?
- 4) Какие гармоники содержатся в фазных и линейных токах при соединении обмоток генератора и нагрузки звездой с нулевым проводом?
- 5) Почему при соединении нагрузки звездой с нулевым проводом ток нулевого провода содержит только гармоники, кратные трем?
- 6) Почему при соединении нагрузки звездой без нулевого провода линейные токи не содержат гармоник, кратных трем?
- 7) Фазная э.д.с. симметричного трехфазного генератора, обмотки которого соединены звездой $e_{\text{ф}} = 300 \sin \omega t + 160 \sin (3\omega t) + 100 \sin (5\omega t) + 60 \sin (7\omega t) + 40 \sin (9\omega t) \text{ В}$.
Определить значение отношения линейной э.д.с. к фазной.
- 8) Используя данные предыдущей задачи в схеме рисунке 2.2 определить показания приборов, если сопротивление фаз приемника при частоте первой гармоники равны: $\underline{Z} = 20 + j10 \text{ Ом}$.

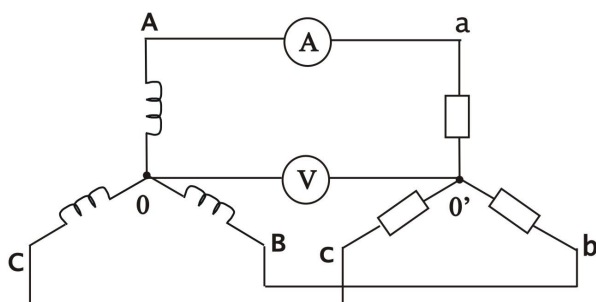


Рисунок 2.2

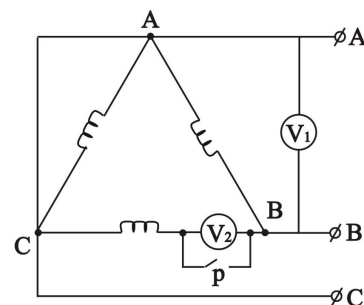


Рисунок 2.3

- 7) Три фазы генератора (рисунок 2.3) соединены треугольником.
Определить показания вольтметров при замкнутом и разомкнутом рубильнике p , если $e_{\text{ф}} = 200 \sin \omega t + 100 \sin (3\omega t) + 800 \sin (5\omega t) + 50 \sin (7\omega t) + 20 \sin (9\omega t) \text{ В}$.

Список использованных источников

1 Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи: учеб. для вузов / Л. А. Бессонов.-11-е изд., испр. и доп.-М.: Гардарики, 2006.-701 с.

2 Демирчян, К. С. Теоретические основы электротехники [Текст] : учеб. для вузов / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин . - СПб. : Питер, 2009. - (5-е изд).

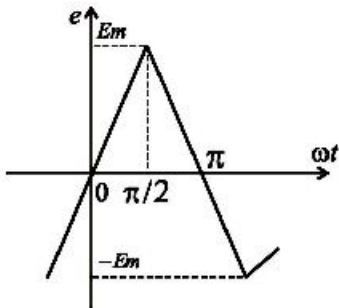
3 Митрофанов, С. В. Использование системы МАТНСАД для решения задач электротехники и электромеханики [Текст] : метод. указ. к выполнению расчет.-граф. задания по дисциплине «Прикладные задачи программирования» / С. В. Митрофанов, А. С. Падеев. - Оренбург : ОГУ, 2005. - 40 с.

4 Огорелков, Б. И. Периодические несинусоидальные режимы в линейных электрических цепях[Текст] : метод. указ. / Б. И. Огорелков [и др.]. - Оренбург : ПТИ, 1994. - 24 с.

Приложение А (обязательное) Примеры разложения функций в ряд Фурье

Пример 1

ORIGIN := 1



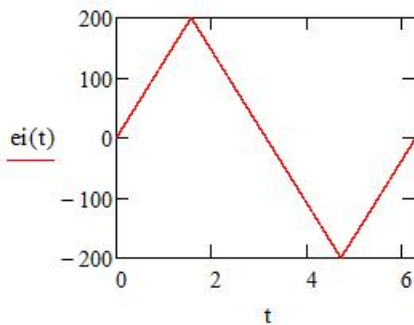
$E_m := 200 \text{ В}$

Исходная кривая

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ \pi \\ \frac{3 \cdot \pi}{2} \\ 2 \cdot \pi \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 0 \\ E_m \\ 0 \\ -E_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$ei(t) := \text{interp}(X, E, t) \quad t := 0, 0.001 .. 2 \cdot \pi$

(для упрощения записи вместо ωt далее везде записывается просто t)



Найдем коэффициенты ряда Фурье

Постоянная составляющая

$$A_0 := \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} ei(t) dt = 0$$

Зададим число гармоник

$k := 1 .. 5$

Синусные составляющие

$$B_k := \left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (ei(t) \cdot \sin(k \cdot t)) dt$$

$B_k =$

162.114
$-5.397 \cdot 10^{-15}$
-18.013
$-6.949 \cdot 10^{-15}$
6.485

Косинусные составляющие

$$D_k := \left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (ei(t) \cdot \cos(k \cdot t)) dt$$

$D_k =$

$1.397 \cdot 10^{-14}$
0
$-4.643 \cdot 10^{-14}$
$-1.456 \cdot 10^{-14}$
$3.104 \cdot 10^{-14}$

Приведем ряд к общепринятому в ТОЭ виду

$$A_k := \sqrt{(B_k)^2 + (D_k)^2} \quad \psi_k := \text{angle}(B_k, D_k)$$

$A_k =$

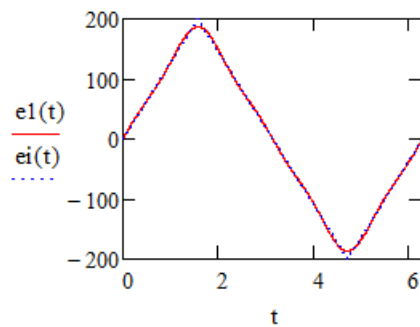
162.114
$5.439 \cdot 10^{-15}$
18.013
$1.613 \cdot 10^{-14}$
6.485

$\psi_k =$

$4.939 \cdot 10^{-15}$ ·deg
172.921
180
244.484
$2.743 \cdot 10^{-13}$

$$e1(t) := A_0 + \sum_k (A_k \cdot \sin(k \cdot t + \psi_k))$$

Изобразим на одном графике функции $ei(t)$ и $e1(t)$



Действующее значение заданной функции ЭДС

$$E_i := \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} (ei(t))^2 dt} = 115.47 \text{ В}$$

Действующее значение ЭДС, ограниченной пятью гармониками

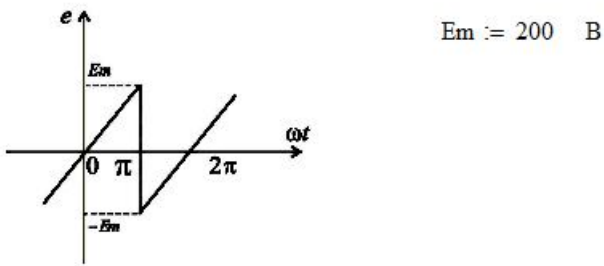
$$E_1 := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \left(\frac{A_k}{\sqrt{2}}\right)^2 + (A_0)^2} = 115.428 \text{ В}$$

Погрешность

$$\delta := \frac{E_i - E_1}{E_i} \cdot 100 = 0.036 \%$$

Пример 2

ORIGIN := 1



Зададим координаты исходной функции

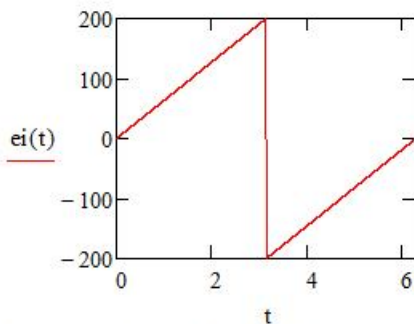
$$dp := 1 \cdot 10^{-15}$$

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ \pi - dp \\ \pi \\ 2 \cdot \pi \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 0 \\ Em \\ -Em \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ei(t) := \text{linterp}(X, E, t)$$

(для упрощения записи вместо ωt далее везде записываем просто t)

$$t := 0, 0.0001 \dots 2 \cdot \pi$$



Найдем коэффициенты ряда Фурье

Постоянная составляющая

$$A_0 := \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} ei(t) dt \quad A_0 = 9.047 \times 10^{-15}$$

Зададим число гармоник

$$k := 1 \dots 5$$

Синусные составляющие

$$B_k := \left(\frac{1}{\pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (ei(t) \cdot \sin(k \cdot t)) dt$$

Косинусные составляющие

$$D_k := \left(\frac{1}{\pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (ei(t) \cdot \cos(k \cdot t)) dt$$

$B_k =$

127.324
-63.662
42.441
-31.831
25.465

$D_k =$

$4.523 \cdot 10^{-15}$
$-8.882 \cdot 10^{-15}$
$9.047 \cdot 10^{-15}$
$-7.105 \cdot 10^{-15}$
$7.209 \cdot 10^{-14}$

Приведем ряд к общепринятому в ТОЭ виду

$$A_k := \sqrt{(B_k)^2 + (D_k)^2} \quad \psi_k := \text{angle}(B_k, D_k)$$

$A_k =$

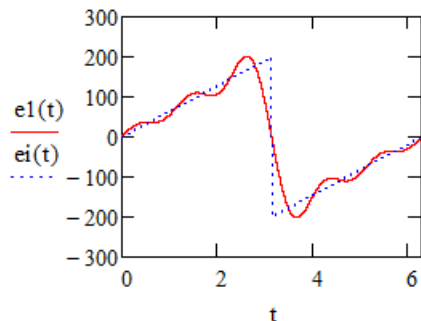
127.324
63.662
42.441
31.831
25.465

$\psi_k =$

$2.036 \cdot 10^{-15}$	·deg
180	
$1.221 \cdot 10^{-14}$	
180	
$1.622 \cdot 10^{-13}$	

$$e1(t) := A_0 + \sum_k (A_k \cdot \sin(k \cdot t + \psi_k))$$

Изобразим на одном графике функции $e_i(t)$ и $e_1(t)$



Действующее значение заданной функции ЭДС

$$E_i := \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} (e_i(t))^2 dt} \quad E_i = 115.47 \quad \text{В}$$

Действующее значение ЭДС, ограниченной пятью гармониками

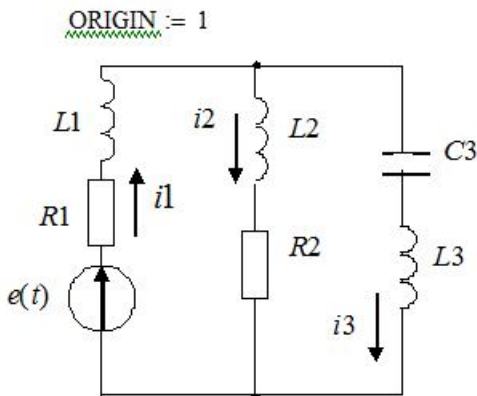
$$E_1 := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \left(\frac{A_k}{\sqrt{2}} \right)^2 + (A_0)^2} \quad E_1 = 108.92 \quad \text{В}$$

Погрешность

$$\delta := \frac{E_i - E_1}{E_i} \cdot 100 \quad \% \quad \delta = 5.672 \quad \%$$

Приложение Б (обязательное)

Пример расчета однофазной цепи несинусоидального тока



$$E_m := 200 \text{ В}$$

$$T := 0.6283 \cdot 10^{-2} \text{ с}$$

$$R_1 := 15 \text{ Ом}$$

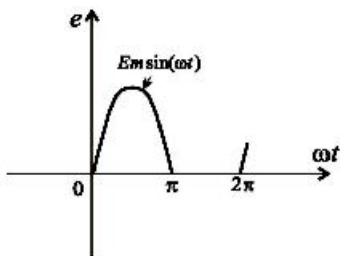
$$R_2 := 25 \text{ Ом}$$

$$L_1 := 20 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$L_2 := 30 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$L_3 := 40 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$C_3 := 20 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$



$$j := \sqrt{-1} \quad \omega := \frac{2 \cdot \pi}{T} = 1 \times 10^3 \text{ рад/с}$$

1 Разложение функции ЭДС в ряд Фурье

Исходную кривую запишем выражением $e_i(t) := \text{if}(0 \leq t \leq \pi, E_m \sin(t), 0)$
(для упрощения записи вместо ωt далее везде записываем просто t)

Найдем коэффициенты ряда Фурье

Постоянная составляющая $A_0 := \left(\frac{1}{2 \cdot \pi}\right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} e_i(t) dt = 63.662 \text{ В}$

Зададим число гармоник

$$k := 1..5$$

Синусные составляющие

$$B_k := \left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (e_i(t) \cdot \sin(k \cdot t)) dt$$

$B_k =$

100
$6.479 \cdot 10^{-15}$
0
$-9.746 \cdot 10^{-15}$
0

В

Косинусные составляющие

$$D_k := \left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (e_i(t) \cdot \cos(k \cdot t)) dt$$

$D_k =$

$5.824 \cdot 10^{-15}$
-42.441
$-2.297 \cdot 10^{-15}$
-8.488
$7.906 \cdot 10^{-15}$

В

Приведем ряд к общепринятому в ТОЭ виду

$$A_k := \sqrt{(B_k)^2 + (D_k)^2} \quad \psi_k := \text{angle}(B_k, D_k)$$

$A_k =$

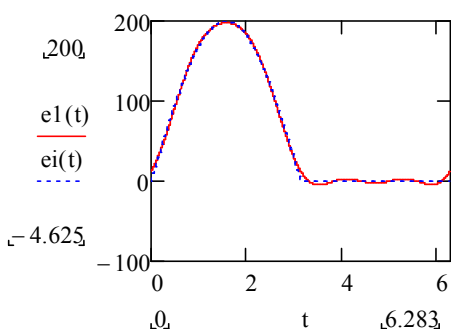
100
42.441
$2.463 \cdot 10^{-15}$
8.488
$7.906 \cdot 10^{-15}$

$\psi_k =$

$3.337 \cdot 10^{-15}$ · deg
270
248.862
270
90

$$e1(t) := A_0 + \sum_k (A_k \cdot \sin(k \cdot t + \psi_k))$$

Изобразим на одном графике функции $e_i(t)$ и $e_1(t)$



Действующее значение заданной функции ЭДС

$$E_{\text{точн}} := \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} (e_i(t))^2 dt} = 100 \quad \text{В}$$

Действующее значение ЭДС, ограниченной пятью гармониками

$$E_{\text{прибл}} := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \left(\frac{A_k}{\sqrt{2}} \right)^2 + (A_0)^2} = 99.948 \quad \text{В}$$

Погрешность

$$\delta := \frac{E_{\text{точн}} - E_{\text{прибл}}}{E_{\text{точн}}} \cdot 100 = 0.052 \quad \%$$

2 Расчет электрической цепи

Для расчета токов запишем все параметры цепи как функции номера гармоник

$E_0 := A_0$ Нулевая гармоника ЭДС

$E(k) := A_k \cdot e^{j \cdot \psi_k}$ комплексная амплитуда k -той гармоники ЭДС

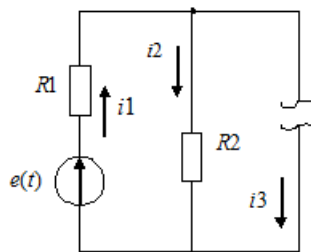
Сопровиления ветвей

$$Z_1(k) := R_1 + j \cdot k \cdot \omega \cdot L_1 \quad Z_2(k) := R_2 + j \cdot k \cdot \omega \cdot L_2 \quad Z_3(k) := j \cdot k \cdot \omega \cdot L_3 - \frac{j}{k \cdot \omega \cdot C_3}$$

$$E(k) = \begin{pmatrix} 100 \\ -42.441i \\ -2.297i \times 10^{-15} \\ -8.488i \\ 7.906i \times 10^{-15} \end{pmatrix} \text{ В} \quad Z1(k) = \begin{pmatrix} 15 + 20.001i \\ 15 + 40.001i \\ 15 + 60.002i \\ 15 + 80.002i \\ 15 + 100.003i \end{pmatrix} \text{ Ом}$$

$$Z2(k) = \begin{pmatrix} 25 + 30.001i \\ 25 + 60.002i \\ 25 + 90.003i \\ 25 + 120.004i \\ 25 + 150.004i \end{pmatrix} \text{ Ом} \quad Z3(k) = \begin{pmatrix} -9.997i \\ 55.003i \\ 103.337i \\ 147.505i \\ 190.006i \end{pmatrix} \text{ Ом}$$

Расчет токов нулевой гармоники



$$I10 := \frac{E0}{R1 + R2} = 1.592 \text{ А}$$

$$I20 := I10 = 1.592 \text{ А}$$

$$I30 := 0$$

Проверим баланс активной мощности

$$P0ist := E0 \cdot I10 = 101.321 \text{ Вт} \quad P0potr := I10^2 \cdot R1 + I20^2 \cdot R2 = 101.321 \text{ Вт}$$

Расчет комплексных амплитудных значений токов гармоник 1-5 проводим, решая для каждой гармоники систему уравнений по законам Кирхгофа

$$\begin{aligned} I1 - I2 - i3 &= 0 \\ Z1 \cdot I1 + Z2 \cdot I2 &= E \\ -Z2 \cdot I2 + Z3 \cdot I3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A(k) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ Z1(k) & Z2(k) & 0 \\ 0 & -Z2(k) & Z3(k) \end{pmatrix} \quad B(k) := \begin{pmatrix} 0 \\ E(k) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I(k) := A(k)^{-1} \cdot B(k)$$

Ток первой ветви для гармоник 1 - 5

$$I(k)_1 = \begin{pmatrix} 4.727 - 2.183i \\ -0.559 - 0.164i \\ 0 \\ -0.056 - 8.663i \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ А}$$

$ I(k)_1 =$	$\arg(I(k)_1) =$
5.206	-24.789
0.583	-163.681
0	170.284
0.057	-171.277
0	7.038

-deg

Ток второй ветви для гармоник 1 - 5

$$I(k)_2 = \begin{pmatrix} -1.454 - 0.727i \\ -0.239 - 0.13i \\ 0 \\ -0.03 - 7.62i \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \quad |I(k)_2| = \begin{array}{|c|} \hline 1.626 \\ \hline 0.272 \\ \hline 0 \\ \hline 0.031 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \arg(I(k)_2) = \begin{array}{|c|} \hline -153.453 \\ \hline -151.417 \\ \hline 177.651 \\ \hline -165.938 \\ \hline 11.243 \\ \hline \end{array} \text{ -deg}$$

Ток третьей ветви для гармоник 1 - 5

$$I(k)_3 = \begin{pmatrix} 6.181 - 1.456i \\ -0.32 - 0.033i \\ 0 \\ -0.026 - 1.043i \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \quad |I(k)_3| = \begin{array}{|c|} \hline 6.35 \\ \hline 0.322 \\ \hline 0 \\ \hline 0.026 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \arg(I(k)_3) = \begin{array}{|c|} \hline -13.258 \\ \hline -174.036 \\ \hline 162.128 \\ \hline -177.706 \\ \hline 1.781 \\ \hline \end{array} \text{ -deg}$$

Проверим баланс мощностей для гармоник 1 - 5

Мощность источника для каждой гармоники

$$S_{ist}(k) := \frac{E(k)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I(k)_1}{\sqrt{2}}$$

Мощность потребителя для каждой гармоники

$$S_{potr}(k) := \left(\frac{|I(k)_1|}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot Z_1(k) + \left(\frac{|I(k)_2|}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot Z_2(k) + \left(\frac{|I(k)_3|}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot Z_3(k)$$

$$S_{ist}(k) = \begin{pmatrix} 236.335 + 109.145i \\ 3.475 + 11.87i \\ 0 \\ 0.037 + 0.24i \\ 0 \end{pmatrix} \quad BA \quad S_{potr}(k) = \begin{pmatrix} 236.335 + 109.145i \\ 3.475 + 11.87i \\ 0 \\ 0.037 + 0.24i \\ 0 \end{pmatrix} \quad BA$$

Для каждой гармоники баланс мощностей сходится, следовательно токи рассчитаны верно

Запишем для каждой ветви токи от гармоник 1, 2, 4 и результирующий ток в мгновенной форме записи. Токи от гармоник 3 и 5 во всех ветвях равны нулю.

Первая ветвь

$$i_{11}(t) := |I(1)_1| \cdot \sin(t + \arg(I(1)_1))$$

$$i_{12}(t) := |I(2)_1| \cdot \sin(2t + \arg(I(2)_1))$$

$$i_{14}(t) := |I(4)_1| \cdot \sin(4t + \arg(I(4)_1))$$

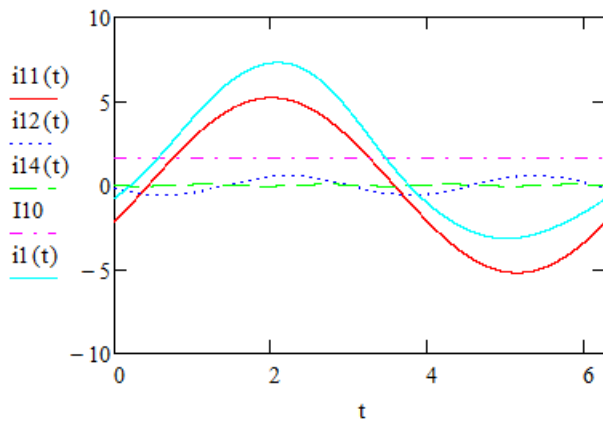
Результирующий ток первой ветви

$$i_1(t) := I_{10} + \sum_{k=1}^5 (|I(k)_1| \cdot \sin(k \cdot t + \arg(I(k)_1)))$$

Действующее значение тока первой ветви

$$I_1 := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \left(\frac{|I(k)_1|}{\sqrt{2}} \right)^2 + (I_{10})^2} = 4.032 \quad \text{A}$$

Построим на одном графике ток первой ветви от каждой гармоники в отдельности и результирующий ток



Вторая ветвь

$$i_{21}(t) := |I(1)_2| \cdot \sin(t + \arg(I(1)_2))$$

$$i_{22}(t) := |I(2)_2| \cdot \sin(2t + \arg(I(2)_2))$$

$$i_{24}(t) := |I(4)_1| \cdot \sin(4t + \arg(I(4)_2))$$

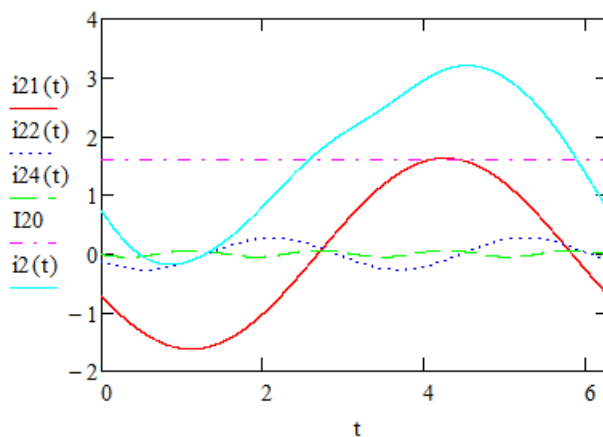
Результирующий ток второй ветви

$$i_2(t) := I_{20} + \sum_{k=1}^5 (|I(k)_2| \cdot \sin(k \cdot t + \arg(I(k)_2)))$$

Действующее значение тока второй ветви

$$I_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \left(\frac{|I(k)_2|}{\sqrt{2}} \right)^2 + (I_{20})^2} = 1.973 \quad \text{A}$$

График тока



Третья ветвь

$$i_{31}(t) := |I(1)_3| \cdot \sin(t + \arg(I(1)_3))$$

$$i_{32}(t) := |I(2)_3| \cdot \sin(2t + \arg(I(2)_3))$$

$$i_{34}(t) := |I(4)_3| \cdot \sin(4t + \arg(I(4)_3))$$

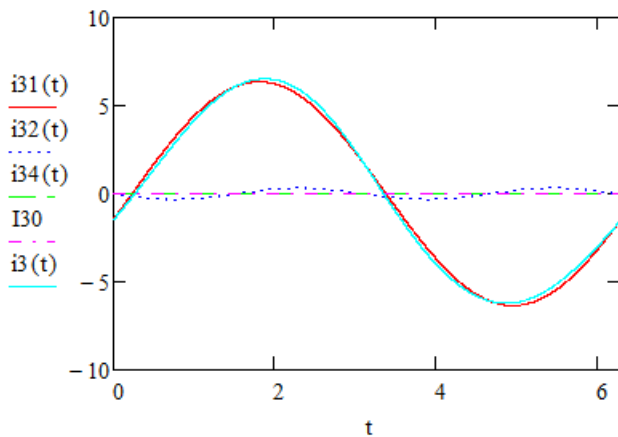
Результирующий ток третьей ветви

$$i_3(t) := I_{30} + \sum_{k=1}^5 (|I(k)_3| \cdot \sin(k \cdot t + \arg(I(k)_3)))$$

Действующее значение тока третьей ветви

$$I_3 := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \left(\frac{|I(k)_3|}{\sqrt{2}} \right)^2 + (I_{30})^2} = 4.496 \quad \text{А}$$

График тока



Рассчитаем показатели энергетического процесса в цепи

Активная мощность цепи

$$P := E_0 \cdot I_{10} + \sum_{k=1}^5 \operatorname{Re}(S_{\text{ист}}(k)) = 341.168 \quad \text{Вт}$$

Реактивная мощность

$$Q := \sum_{k=1}^5 \operatorname{Im}(S_{\text{ист}}(k)) = 121.254 \quad \text{Вар}$$

Полная мощность

$$S := E_{\text{прибл}} \cdot I_1 = 402.998 \quad \text{ВА}$$

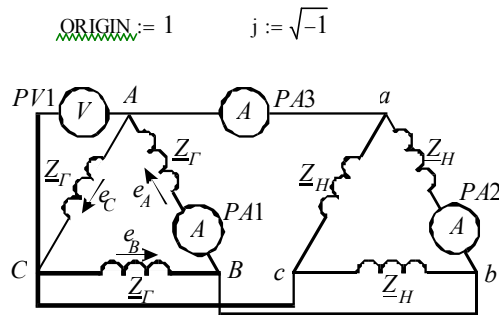
Реактивная мощность искажения

$$T := \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 176.945 \quad \text{ВАр}$$

Коэффициент мощности $\chi := \frac{P}{S} = 0.847$

Приложение В (обязательное)

Пример расчета трехфазной цепи несинусоидального тока (при соединении нагрузки треугольником)



Исходные данные :

E1 := 100 В
 E2 := 80 В
 E3 := 60 В
 E4 := 50 В
 E6 := 100 В

$$e(\omega t) := 100\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t) + 80\sqrt{2}\cdot\sin(2\omega t) + 60\sqrt{2}\cdot\sin(3\omega t) + 50\sqrt{2}\cdot\sin(4\omega t) + 30\sqrt{2}\cdot\sin(6\omega t) \quad \text{В}$$

Zr := 10 + j·6 Ом ZH := 10 - j·60 Ом

Решение

Зададим номера гармоник k и рассчитаем сопротивления генератора и нагрузки для всех гармоник

$$k := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$Z_r(k) := 10 + j \cdot k \cdot 6$$

$$Z_H(k) := 10 - j \cdot \frac{60}{k}$$

$$Z_r(k) = \begin{pmatrix} 10 + 6i \\ 10 + 12i \\ 10 + 18i \\ 10 + 24i \\ 10 + 36i \end{pmatrix}$$

$$Z_H(k) = \begin{pmatrix} 10 - 60i \\ 10 - 30i \\ 10 - 20i \\ 10 - 15i \\ 10 - 10i \end{pmatrix}$$

Рассчитаем токи гармоник и показания приборов

- токи через амперметр A1 и A2 гармоник, не кратных трем (k=1, 2, 4)

первая гармоника

$$IA11 := \frac{E1}{Z_r(1) + Z_H(1)} = 0.603 + 1.628i \quad |IA11| = 1.737 \quad \arg(IA11) = 69.677 \cdot \text{deg}$$

IA21 := IA11

вторая гармоника

$$IA12 := \frac{E2}{Z_r(2) + Z_H(2)} = 2.21 + 1.989i \quad |IA12| = 2.973 \quad \arg(IA12) = 41.987 \cdot \text{deg}$$

IA22 := IA12

четвертая гармоника

$$IA_{14} := \frac{E_4}{Z_r(4) + Z_H(4)} = 2.079 - 0.936i \quad |IA_{14}| = 2.28 \quad \arg(IA_{14}) = -24.228 \cdot \text{deg}$$

$$IA_{24} := IA_{14}$$

- токи гармоник, кратных трем ($k=3, 6$) замыкаются только по обмоткам генератора и поэтому протекают только через амперметр А1

третья гармоника

$$IA_{13} := \frac{E_3}{Z_r(3)} = 1.415 - 2.547i \quad |IA_{13}| = 2.914 \quad \arg(IA_{13}) = -60.945 \cdot \text{deg}$$

шестая гармоника

$$IA_{16} := \frac{E_6}{Z_r(6)} = 0.716 - 2.579i \quad |IA_{16}| = 2.676 \quad \arg(IA_{16}) = -74.476 \cdot \text{deg}$$

Запишем в мгновенной форме ток IA_1 и найдем его действующее значение

$$iA_1(\omega t) := 1.737 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 69.677 \text{ deg}) + 2.973 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2\omega t + 41.987 \text{ deg}) + \\ + 2.914 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(3\omega t - 60.945 \text{ deg}) + 2.28 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(4\omega t - 24.228 \text{ deg}) + 2.676 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(6\omega t - 74.476 \text{ deg})$$

$$IA_1 := \sqrt{(IA_{11})^2 + (IA_{12})^2 + (IA_{13})^2 + (IA_{14})^2 + (IA_{16})^2} = 5.719 \text{ A}$$

Запишем в мгновенной форме ток IA_2 и найдем его действующее значение

$$iA_2(\omega t) := 1.737 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 69.677 \text{ deg}) + 2.973 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2\omega t + 41.987 \text{ deg}) + 2.28 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(4\omega t - 24.228 \text{ deg})$$

$$IA_2 := \sqrt{(IA_{21})^2 + (IA_{22})^2 + (IA_{24})^2} = 4.13 \text{ A}$$

Амперметр РА3 покажет действующее значение линейного тока, в котором отсутствуют гармоники, кратные трем ($k=3,6$), а действующие значения остальных гармоник ($k=1, 2, 4$) будут в $\sqrt{3}$ раз больше, чем действующие значения фазных токов в нагрузке через амперметр РА2

$$IA_3 := \sqrt{3} \cdot \sqrt{(IA_{21})^2 + (IA_{22})^2 + (IA_{24})^2} = 7.153 \text{ A}$$

Показание вольтметра

Фазное напряжение генератора не будет содержать гармоник, кратных трем ($k=3,6$), напряжения остальных гармоник ($k=1,2,4$) будут меньше ЭДС на величину падения напряжения в сопротивлении обмотки генератора

первая гармоника

$$UV_{11} := E_1 - IA_{11} \cdot Z_r(1) = 103.739 - 19.903i \quad UV_{11} = 105.632 \quad \arg(UV_{11}) = -10.861 \cdot \text{deg}$$

вторая гармоника

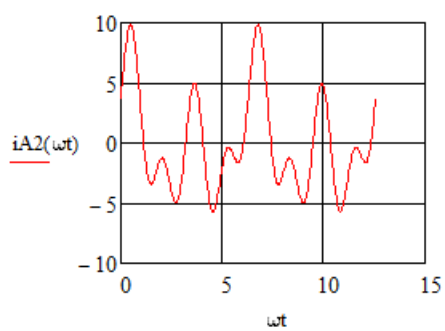
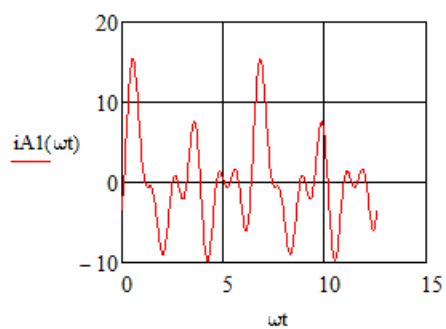
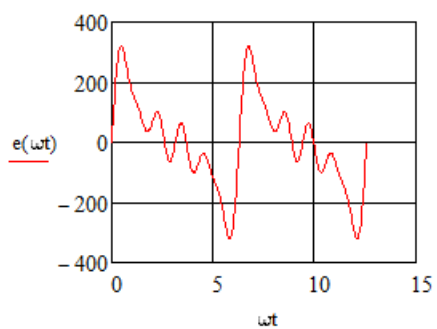
$$UV_{12} := E_2 - IA_{12} \cdot Z_r(2) = 81.768 - 46.409i \quad UV_{12} = 94.02 \quad \arg(UV_{12}) = -29.578 \cdot \text{deg}$$

четвертая гармоника

$$UV_{14} := E_4 - IA_{14} \cdot Z_r(4) = 6.757 - 40.541i \quad UV_{14} = 41.1 \quad \arg(UV_{14}) = -80.538 \cdot \text{deg}$$

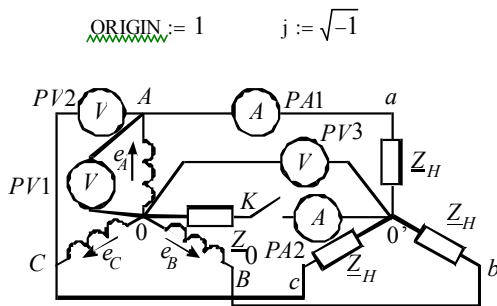
Для иллюстрации расчетов построим графики ЭДС, фазного тока генератора, фазного тока нагрузки

$$\omega t := 0, \frac{\pi}{100} .. 4 \cdot \pi$$



Приложение Г (обязательное)

Пример расчета трехфазной цепи несинусоидального тока (при соединении нагрузки звездой)



Исходные данные :

$$E1 := 100 \text{ В}$$

$$E2 := 80 \text{ В}$$

$$E3 := 60 \text{ В}$$

$$E4 := 50 \text{ В}$$

$$E6 := 100 \text{ В}$$

$$e_k(\omega t) := 100\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t) + 80\sqrt{2}\cdot\sin(2\omega t) + 60\sqrt{2}\cdot\sin(3\omega t) + 50\sqrt{2}\cdot\sin(4\omega t) + 30\sqrt{2}\cdot\sin(6\omega t) \quad \text{В}$$

$$Z_H := 10 - j \cdot 60 \text{ Ом}$$

Решение

Зададим номера гармоник k и рассчитаем сопротивление нагрузки для всех гармоник

$$k := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad Z_H(k) := 10 - j \cdot \frac{60}{k}$$

$$Z_H(k) = \begin{pmatrix} 10 - 60i \\ 10 - 30i \\ 10 - 20i \\ 10 - 15i \\ 10 - 10i \end{pmatrix}$$

Рассчитаем токи гармоник и показания приборов

- токи через амперметр А1 гармоник, не кратных трем (k=1, 2, 4)

первая гармоника

$$IA11 := \frac{E1}{Z_H(1)} = 0.27 + 1.622i \quad |IA11| = 1.644 \quad \arg(IA11) = 80.538 \cdot \text{deg}$$

вторая гармоника

$$IA12 := \frac{E2}{Z_H(2)} = 0.8 + 2.4i \quad |IA12| = 2.53 \quad \arg(IA12) = 71.565 \cdot \text{deg}$$

четвертая гармоника

$$IA14 := \frac{E4}{Z_H(4)} = 1.538 + 2.308i \quad |IA14| = 2.774 \quad \arg(IA14) = 56.31 \cdot \text{deg}$$

- токи гармоник, кратных трем (k=3, 6) отсутствуют, так как нет нулевого провода

Запишем в мгновенной форме ток IA1 и найдем его действующее значение

$$iA1(\omega t) := 1.644 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 80.538 \text{ deg}) + 2.53 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2\omega t + 71.565 \text{ deg}) + 2.774 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(4\omega t + 56.31 \text{ deg})$$

$$|A1| := \sqrt{(|IA11|)^2 + (|IA12|)^2 + (|IA14|)^2} = 4.098 \quad A$$

Рассчитаем показания вольтметров

Вольтметр PV1 покажет действующее значение фазного напряжения генератора, в котором присутствуют все гармоники

$$UV1 := \sqrt{E1^2 + E2^2 + E3^2 + E4^2 + E6^2} = 180.278 \quad B$$

Вольтметр PV2 покажет действующее значение линейного напряжения генератора, в котором отсутствуют гармоники, кратные трем ($k=3,6$), а действующие значения остальных гармоник ($k=1, 2, 4$) будут $\sqrt{3}$ раз больше

$$UV2 := \sqrt{3} \cdot \sqrt{E1^2 + E2^2 + E4^2} = 238.118 \quad B$$

Вольтметр PV3 покажет действующее значение напряжения смещения нейтрали, в котором будут присутствовать только гармоники, кратные трем ($k=3,6$)

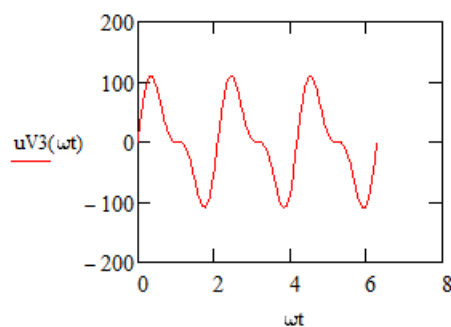
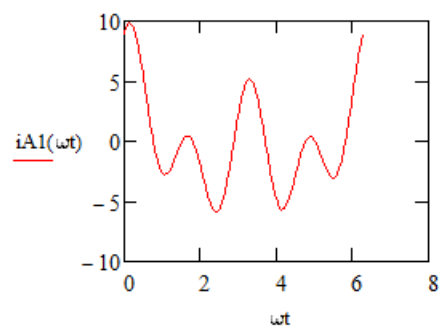
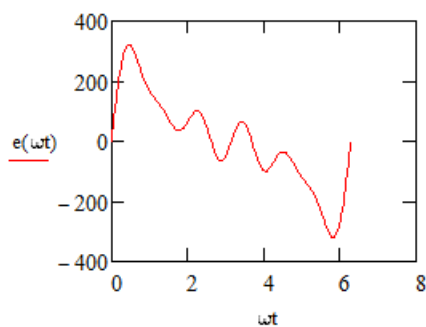
$$UV3 := \sqrt{E3^2 + E6^2} = 116.619 \quad B$$

Запишем в мгновенной форме напряжение смещения нейтрали

$$uV3(\omega t) := 60\sqrt{2} \cdot \sin(3\omega t) + 30\sqrt{2} \cdot \sin(6\omega t) \quad B$$

Для иллюстрации расчетов построим графики ЭДС, фазного тока, напряжения смещения нейтрали

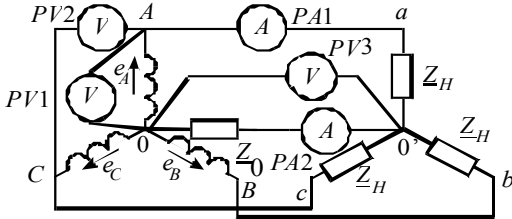
$$\omega t := 0, \frac{2 \cdot \pi}{100} .. 2 \cdot \pi$$



Приложение Д (обязательное)

Пример расчета трехфазной цепи несинусоидального тока (при соединении нагрузки звездой с нулевым проводом)

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad j := \sqrt{-1}$$



Исходные данные :

$$E1 := 100 \text{ В}$$

$$E2 := 80 \text{ В}$$

$$E3 := 60 \text{ В}$$

$$E4 := 50 \text{ В}$$

$$E6 := 100 \text{ В}$$

$$e_A(\omega t) := 100\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) + 80\sqrt{2} \cdot \sin(2\omega t) + 60\sqrt{2} \cdot \sin(3\omega t) + 50\sqrt{2} \cdot \sin(4\omega t) + 30\sqrt{2} \cdot \sin(6\omega t) \quad \text{В}$$

$$Z_H := 10 - j \cdot 60 \text{ Ом} \quad Z_0 := j \cdot 1 \text{ Ом}$$

Решение

Зададим номера гармоник k и рассчитаем сопротивления для всех гармоник

$$k := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Z_H(k) := 10 - j \cdot \frac{60}{k} \\ Z_0(k) := j \cdot k \cdot 1 \end{matrix}$$

$$Z_H(k) = \begin{pmatrix} 10 - 60i \\ 10 - 30i \\ 10 - 20i \\ 10 - 15i \\ 10 - 10i \end{pmatrix} \quad Z_0(k) = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 3i \\ 4i \\ 6i \end{pmatrix}$$

Рассчитаем токи гармоник и показания приборов:

- токи через амперметр A1 гармоник, не кратных трем (k=1, 2, 4)

первая гармоника

$$IA_{11} := \frac{E1}{Z_H(1)} = 0.27 + 1.622i \quad |IA_{11}| = 1.644 \quad \arg(IA_{11}) = 80.538 \cdot \text{deg}$$

вторая гармоника

$$IA_{12} := \frac{E2}{Z_H(2)} = 0.8 + 2.4i \quad |IA_{12}| = 2.53 \quad \arg(IA_{12}) = 71.565 \cdot \text{deg}$$

четвертая гармоника

$$IA_{14} := \frac{E4}{Z_H(4)} = 1.538 + 2.308i \quad |IA_{14}| = 2.774 \quad \arg(IA_{14}) = 56.31 \cdot \text{deg}$$

- токи через амперметр A1 гармоник, кратных трем (k=3, 6)

третья гармоника

$$IA_{13} := \frac{E3}{Z_H(3) + 3Z_0(3)} = 2.715 + 2.986i \quad |IA_{13}| = 4.036 \quad \arg(IA_{13}) = 47.726 \cdot \text{deg}$$

шестая гармоника

$$IA_{16} := \frac{E_6}{Z_{H(6)} + 3Z_{0(6)}} = 6.098 - 4.878i \quad |IA_{16}| = 7.809 \quad \arg(IA_{16}) = -38.66 \cdot \text{deg}$$

Запишем в мгновенной форме токи IA_1 и IA_2 и найдем действующие значения токов

Фазный ток, протекающий через амперметр A1 содержит все гармоники.

$$i_{A1}(wt) := 1.644 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(wt + 80.538 \text{ deg}) + 2.53 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2wt + 71.565 \text{ deg}) + 6.727 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(3wt + 47.726 \text{ deg}) \\ + 2.774 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(4wt + 56.31 \text{ deg}) + 7.809 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(6wt - 38.66 \text{ deg})$$

Действующее значение тока IA_1

$$IA_1 := \sqrt{(IA_{11})^2 + (IA_{12})^2 + (IA_{13})^2 + (IA_{14})^2 + (IA_{16})^2} = 9.698 \text{ A}$$

Ток нулевого провода, протекающий через амперметр A2 содержит только гармоники, кратные трем ($k=3,6$). Так как по нулевому проводу потекут токи всех трех фаз, величина тока каждой гармоники в нулевом проводе будет в три раза больше фазного тока этой гармоники

третья гармоника

$$IA_{23} := 3 \cdot IA_{13} = 8.145 + 8.959i \quad IA_{23} = 12.108 \quad \arg(IA_{23}) = 47.726 \cdot \text{deg}$$

шестая гармоника

$$IA_{26} := 3 \cdot IA_{16} = 18.293 - 14.634i \quad IA_{26} = 23.426 \quad \arg(IA_{26}) = -38.66 \cdot \text{deg}$$

$$i_{A2}(wt) := 20.18 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(3wt + 47.726 \text{ deg}) + 23.426 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(6wt - 38.66 \text{ deg})$$

Действующее значение тока IA_2

$$IA_2 := \sqrt{(IA_{23})^2 + (IA_{26})^2} = 26.37 \text{ A}$$

Рассчитаем показания вольтметров

Вольтметр PV1 покажет действующее значение фазного напряжения генератора, в котором присутствуют все гармоники

$$UV_1 := \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + E_4^2 + E_6^2} = 180.278 \text{ В}$$

Вольтметр PV2 покажет действующее значение линейного напряжения генератора, в котором отсутствуют гармоники, кратные трем ($k=3,6$), а действующие значения остальных гармоник ($k=1, 2, 4$) будут в $\sqrt{3}$ раз больше

$$UV_2 := \sqrt{3} \cdot \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_4^2} = 238.118 \text{ В}$$

Вольтметр PV3 покажет действующее значение напряжения смещения нейтрали (падение напряжения на сопротивлении Z_0), в котором будут присутствовать только гармоники, кратные трем ($k=3,6$)

$$UV_3 := \sqrt{(IA_{23} \cdot Z_0(3))^2 + (IA_{26} \cdot Z_0(6))^2} = 145.174 \text{ В}$$

Для иллюстрации расчетов построим графики ЭДС, фазного тока, тока нулевого провода

$$\omega t := 0, \frac{2 \cdot \pi}{100} .. 2 \cdot \pi$$

