Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Факультет дистанционных образовательных технологий

Университетская физическая школа

А.А. Чакак

ФИЗИКА

Выпуск 3
Работа. Мощность. Энергия.
Законы сохранения механической энергии и импульса

Рекомендовано к изданию Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет" в качестве учебного пособия для учащихся Университетской физической школы.

Оренбург
ОГУ
2012

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я 73
Ч 16

Рецензенты
доцент, кандидат педагогических наук М.А. Кучеренко
ст. преподаватель ОГУ А.В. Михайличенко

Чакак, А.А.
Ч 16 Физика. Выпуск 3. Работа. Мощность. Энергия. Законы сохранения механической энергии и импульса: учебное пособие для учащихся Университетской физической школы / А.А. Чакак; Оренбургский государственный университет – Оренбург: ОГУ, 2012. – 120 с.
ISBN

Учебное пособие содержит краткое изложение основных вопросов школьной программы по темам ″Работа. Мощность. Энергия. Законы сохранения механической энергии и импульса″, примеры решения задач для пояснения теоретического материала, методические указания и задания для учащихся, обучающихся дистанционно и готовящихся к ЕГЭ по физике. В приложении к пособию имеются справочные материалы по математике, которые могут понадобиться при выполнении практических заданий. Пособие может оказаться полезным для старшеклассников при самостоятельном изучении отдельных разделов курса физики. Может быть использовано на занятиях в школе и в физических кружках.

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я 73

ISBN

Содержание

Предисловие

Уважаемые учащиеся УФШ ОГУ!

Вам предстоит выполнить задания по теме «Работа. Мощность. Энергия. Законы сохранения механической энергии и импульса», и мы надеемся, что Вы успешно справитесь с этой нелёгкой задачей. Перед началом работы Вам следует внимательно изучить изложенные ниже правила и руководствоваться ими при выполнении заданий.

Данный выпуск состоит из задания, посвященного теме «Работа. Мощность. Энергия. Законы сохранения механической энергии и импульса». Задание состоит из 25 задач, имеющих различный уровень сложности, который указан в скобках после номера задачи.

Пример. Номер 2(3) задания имеет 2-я задача 3-го уровня сложности.

Первый уровень сложности имеют наиболее простые задачи. С усложнением номер уровня повышается, но даже для задач максимального 3-го уровня сложности решение не требует знаний, выходящих за рамки школьного курса физики.

При выполнении задания Вы должны самостоятельно выбрать ***ровно 10 задач***, решения которых Вы должны выслать в УФШ.

При выборе задач для решения мы советуем руководствоваться Вашим уровнем подготовки и целями, которые Вы ставите перед собой: научиться решать задачи, подготовиться к выпускным экзаменам в школе и к ЕГЭ, к вступительным экзаменам в ВУЗ и т.п. Одним из условий успешного образования является непрерывное, но постепенное овладение новыми знаниями и методами решения задач. Поэтому не стоит выбирать для решения задачи, которые кажутся Вам либо очень лёгкими, либо очень сложными. По мере углубления Вашего понимания физики старайтесь увеличивать уровень сложности задач.

Внимание! 1. Оценка Вашей работы не зависит от уровня сложности задач. 2. При знакомстве с теоретическим введением к пособию вывод основных соотношений можно опустить в случаях, когда использованный математический аппарат не знаком (например, операции с векторами, производные и интегралы). В таких случаях Вам рекомендуется сначала изучить материал из Приложений к пособию.

Обязательные требования:

1. Число высылаемых на проверку задач в задании не должно быть ***меньше 10.*** В противном случае нам будет трудно оценить Вашу работу, и в любом случае оценка будет снижена. Не бойтесь высылать решения, в которых Вы не уверены. Один из наилучших методов обучения – анализ собственных ошибок.

2. Число высылаемых на проверку задач в задании не должно быть ***больше 10.*** В Вашей работе будут проверены и оценены ***только 10 задач***, которые в этом случае преподаватель выберет сам.

3. При оформлении решений не забывайте:

- нумеровать задачи и страницы листов с решениями;
- записывать полный ответ;
- условия задач приводить в краткой общепринятой форме;
- подробно пояснять введённые Вами обозначения физических величин в тексте решения и на рисунках.

Будем благодарны читателям за любые отзывы и замечания.

Желаем успехов!

Рекомендации по выполнению заданий

Методы и приёмы решения задач весьма разнообразны, однако при решении задач целесообразно руководствоваться следующими основными правилами:

– разобраться в условии задачи;

– если позволяет характер задачи, обязательно сделать схематический рисунок и/или график(и), поясняющие сущность задачи;

– представить физическое явление или процесс, о котором говорится в условии. Выяснить: какие теоретические положения связаны с рассматриваемой задачей в целом и с ее отдельными элементами; какие физические законы и их следствия можно применять для решения; какие физические модели и идеализации использованы в условии, а какие могут быть применены при решении;

– отобрать законы, их следствия, соотношения, с помощью которых можно описать физическую ситуацию задачи. Выявить причинно-следственные связи между заданными и неизвестными величинами, установить математическую связь между ними;

– на основании отобранных законов и их следствий записать уравнение (систему уравнений), выражающее условие задачи. Векторные уравнения записать в проекциях на оси координат;

– преобразовать (решить) составленные уравнения так, чтобы искомая величина была выражена через заданные и табличные данные в аналитическом виде, т.е. получить расчётную формулу в общем виде (в буквенных обозначениях). Проводить промежуточные численные расчёты нецелесообразно. Эти расчёты, как правило, являются излишними, так как часто окончательное выражение для искомой физической величины имеет простой вид. Следует также иметь ввиду, что при промежуточных расчётах увеличивается вероятность допустить ошибку;

– получив ответ в аналитическом виде, проверить полученное решение с помощью анализа размерностей. Неверная размерность однозначно указывает на допущенную при решении ошибку;

– подставить числовые значения в определённой системе единиц (предпочтительнее использовать Международную систему единиц – СИ) и провести вычисления. Получив численное значение искомой величины, обязательно указывайте ее размерность;

– оценить правдоподобность ответа, продумать, разумным ли получилось численное значение искомой величины (так, скорость тела не может быть больше скорости света в вакууме, дальность полёта камня, брошенного человеком, не может быть порядка 1 км и т.д.).

В любом деле самое трудное – начало. Многие неудачи объясняются тем, что начинают решать наугад, на ″авось″. Следует потратить несколько минут на тщательный анализ особенностей условия задачи и ее цели. Это поможет выбрать правильное направление поиска решения. Приняв же бездумно шаблонный путь, можно рисковать увеличить объём ненужной работы и шансы появления ошибок.

Хороший рисунок часто помогает в формировании идеи решения. Рисунок должен быть достаточно крупным, чтобы не было риска запутаться в наслоении линий. Нужно избегать частных случаев, например, прямоугольный или равнобедренный треугольник и т.п., так как они могут направить мысль по ошибочному пути.

Изучив условие, не следует заострять внимание на искомой величине и пытаться сразу ее найти. Только план решения позволяет записать условие с помощью уравнений и свести, таким образом, задачу от физической к математической.

Основные определения, законы и соотношения

Любое тело (или совокупность тел) представляет собой, по существу, систему материальных точек или частиц. Если система с течением времени изменяется, то говорят, что изменяется ее состояние. Состояние системы характеризуется одновременным заданием положений (координат) и скоростей всех ее частиц.

Зная действующие на частицы системы силы и состояние системы в некоторый начальный момент времени, можно с помощью уравнений движения предсказать ее дальнейшее поведение, т.е. найти состояние системы в любой момент времени. Так, например, решается задача о движении планет Солнечной системы.

Однако детальное рассмотрение поведения системы с помощью уравнений движения часто бывает настолько затруднительно (например, из-за сложности самой системы), что довести решение до конца представляется практически невозможным. А в тех случаях, когда законы действующих сил вообще неизвестны, такой подход оказывается в принципе неосуществимым. Кроме того, существует ряд задач, в которых детальное рассмотрение движения отдельных частиц просто не имеет смысла (например, описание движения отдельных молекул газа).

В связи с этим возникает вопрос: нет ли каких-либо общих принципов, являющихся следствием законов Ньютона, которые позволяют упростить решение многих практических задач?

Оказывается, такие принципы, основанные на законах сохранения, есть. При движении системы ее состояние изменяется со временем. Однако существуют такие величины, характеризующие состояние системы, которые обладают весьма важным и замечательным свойством сохраняться во времени. Среди этих сохраняющихся величин наиболее важную роль играют энергия, импульс и момент импульса. Эти три величины обладают важным свойством – аддитивностью: их значение для системы, состоящей из частей, равно сумме значений каждой из частей в отдельности. Энергия обладает этим свойством в случае отсутствия заметного взаимодействия между частями системы, а импульс и момент импульса – и при наличии взаимодействия. Свойство аддитивности придаёт этим трём величинам особую роль. С помощью законов сохранения можно и без решения уравнений движения получить ряд важных заключений об изменении состояния системы. Законы сохранения не зависят от характера действующих сил. Поэтому с их помощью можно получить ряд важных сведений о поведении механических систем даже в тех случаях, когда силы оказываются неизвестными.

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса представляют собой универсальные законы природы, характерные и для элементарных частиц и для космических объектов. Они лежат в основе современной физики.

Способность физической системы (в частном случае система может состоять из одного тела) производить изменения в механическом движении окружающих ее тел характеризуют не только силой, но и энергией. Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия материи. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других – переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое). Однако во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной вторым телом.

1 Механическая работа

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы. Работа является мерой изменения энергии.

Если тело движется поступательно и на него действует постоянная сила **F**, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения $\Delta\mathbf{S}$, то элементарная работа ΔA этой силы равна скалярному произведению этих векторов, т.е. произведению проекции силы F_s на направление перемещения ($F_s = F\cdot\cos\alpha$), умноженной на перемещение точки приложения силы (рисунок 1):

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{S} = (\mathbf{F},\Delta\mathbf{S}) = F_s\cdot\Delta S = F\cdot\Delta S\cdot\cos\alpha\ . \qquad (1.1)$$

Размерность работы: $[A] = [F]\cdot[\Delta S] = 1$ Н·1 м = 1 Дж = 1 кг·м^2/с^2. Один Джоуль – работа силы 1 Н при перемещении тела расстояние 1 м в направлении действия силы.

Из выражения для работы $\Delta A = F_s\cdot\Delta S$ следует, что при определении механической работы учитывается только та составляющая силы, которая совпадает по направлению с вектором перемещения тела. Работа может быть положительной ($0 \le \alpha < \pi/2$; $\cos\alpha > 0$), отрицательной ($\pi/2 < \alpha \le \pi$; $\cos\alpha < 0$) или вообще не совершается, т.е. $\Delta A = 0$ ($\alpha = \pi/2$; $\cos\alpha = 0$), даже если на тело действует сила. Последнее обстоятельство особенно отчётливо показывает, что понятие работы в механике существенно отличается от обыденного представления о работе. В обыденном понимании всякое усилие, в частности мускульное напряжение, всегда сопровождается совершением работы. Например, для того чтобы держать тяжёлый груз, стоя неподвижно или перемещать его горизонтально, носильщик затрачивает много усилий, т.е. «совершает работу». Однако работа как механическая величина в этих случаях равна нулю, а энергия груза при этом не изменяется.

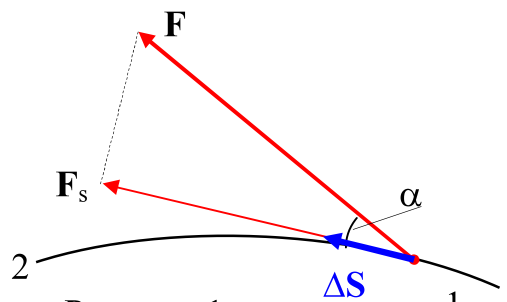


Рисунок 1

Из того, что работа может быть как положительной, так и отрицательной, следует, что работа является алебраической величиной. Если сила, приложенная к телу, совершает положительную работу, то скорость тела увеличивается. Действительно, в этом случае сила, а значит и ускорение, направлены вдоль скорости, увеличивая ее. Если же сила совершает отрицательную работу, то ускорение направлено против скорости, и скорость тела убывает.

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению. Для определения работы переменной силы на конечном участке криволинейной траектории всю траекторию представим в виде суммы N малых перемещений $\Delta\mathbf{S}_i$. В пределах $\Delta\mathbf{S}_i$ можно не учитывать изменения вектора $\mathbf{F}_i$ и угла α_I между $\mathbf{F}_i$ и $\Delta\mathbf{S}_i$.

Тогда работа на малом перемещении может быть вычислена в соответствии с определением:

$$\Delta A_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i = (\mathbf{F}_i, \Delta \mathbf{S}_i) = F_i \cdot \Delta S_i \cdot \cos\alpha_i = F_{si} \cdot \Delta S_i, \tag{1.2}$$

где F_{si} – проекция вектора силы $\mathbf{F_i}$ на направление перемещения $\Delta \mathbf{S}_i$.

И работа силы на конечном участке траектории будет равна сумме элементарных работ на каждом из малых участков:

$$A = \Sigma \Delta A_i = \Sigma \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i. \tag{1.3}$$

Совершая предельный переход в (1.3), можно перейти от суммирования к интегрированию:

$$A = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \max \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_1^2 F_s \cdot dS. \tag{1.4}$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы F_s от пути вдоль траектории 1-2 (см. рисунок 1).

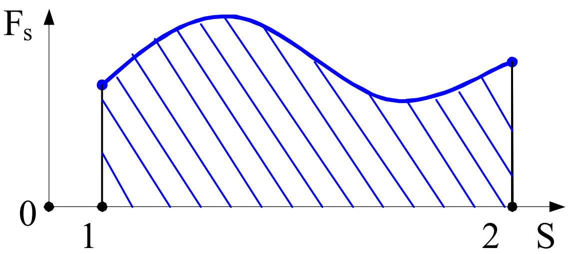


Рисунок 2

Пусть эта зависимость $F_s(S)$ представлена графически (см. рисунок 2). Тогда искомая работа A определяется на графике площадью криволинейной трапеции (заштрихованной фигуры, ограниченной графиком зависимости проекции силы $F_s = F \cdot \cos\alpha$ и осью абсцисс). Если, например, тело движется прямолинейно, проекция силы на направление перемещения $F_s = \text{const}$ (т.е. $\mathbf{F} = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$) в любой момент времени, то получим

$$A = \int_1^2 F \cdot dS \cdot \cos\alpha = \int_1^2 F_s \cdot dS = F \cdot \cos\alpha \int_1^2 dS = F_s \cdot S, \tag{1.5}$$

где S – пройденный телом путь, равный площади прямоугольника.

Если в формуле A = **F**·**S** = F·S·cosα, где **S** – вектор перемещения, сила **F** представляет собой равнодействующую всех сил, действующих на данное тело $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i$, то

$$A = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S} = (\Sigma\mathbf{F}_i)\cdot\mathbf{S} = \Sigma(\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{S}) = \Sigma A_i\,, \tag{1.6}$$

т.е. $A = \Sigma A_i$. Получили, что если движение тела происходит под действием нескольких сил, то работа, совершаемая каждой силой $A_i = \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{S} = F_i\cdot S\cdot\cos\alpha_I$, не зависит от действия других сил, и результирующая работа нескольких сил равна алгебраической сумме работ всех сил, действующих на рассматриваемое тело: $A = \Sigma A_i$ (свойство аддитивности работы).

В приведённом определении работы (см. выражение (1.1)) под ″перемещением тела″ подразумевается перемещение той точки тела, к которой приложена сила. Перемещение тела обусловливается действием не только той силы, работа которой определяется, но и действием всех остальных сил, приложенных к телу.

Как выяснили, работа данной силы **F** равна нулю при α = π/2. При этом не происходит перехода энергии между данным телом и окружающими телами.

Рассмотрим графический способ определения работы для силы упругости, величина которой согласно закону Гука $|F_y| = k|\Delta\ell|$ пропорциональна абсолютной деформации тела $|\Delta\ell|$, равной в этом случае перемещению точки приложения силы. В данном случае согласно рисунку 3 работа A равна площади прямоугольного треугольника:

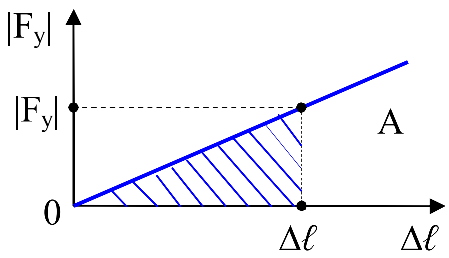


Рисунок 3

$$A = \frac{1}{2}|F_y|\Delta\ell = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}\frac{F_y^{\,2}}{k}. \tag{1.7}$$

2 Мощность

Мощность – это величина, характеризующая быстроту выполнения работы и равная отношению выполненной работы ΔA к промежутку времени Δt, в течение которого эта работа выполнялась:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t}; \quad [P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{Дж}{c} = Вт. \tag{2.1}$$

1 Ватт – мощность, при которой за 1 секунду совершается работа в 1 Джоуль. Внесистемная единица мощности – лошадиная сила, когда за 1 секунду под действием силы 75 кГ происходит перемещение на 1 м:

$$1 \text{ л.с.} = 75\,\frac{кГ \cdot м}{с} = 75\,\frac{9{,}8\ Н \cdot м}{с} = 735\,\frac{Дж}{с} = 735\ Вт. \tag{2.2}$$

Мгновенная мощность по определению равна:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{S}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F \cdot v \cdot \cos\alpha, \tag{2.3}$$

где α – угол между вектором силы **F** и вектором скорости перемещения **v.** Получили, что мгновенная мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы; из выражений (2.1) и (2.3) видно, что мощность, как и работа, – величина скалярная. Из формулы (2.3) следует, что при совпадении направления силы с направлением перемещения $\cos\alpha = 1$ и $P = Fv$, т.е.

$$F = \frac{P}{v} \quad \text{и} \quad v = \frac{P}{F}. \tag{2.4}$$

Из формул (2.4) видно, что при постоянной мощности двигателя скорость движения обратно пропорциональна силе тяги и наоборот. На этом основан принцип действия коробки переключения передач различных транспортных средств.

Когда говорят о работе (или мощности), то необходимо в каждом конкретном случае чётко представлять себе, работа (мощность) какой силы или сил имеется в виду. Из определения работы следует, что в тех случаях, когда одно тело, действуя на другое тело, вызывает его перемещение, а направление силы при этом не перпендикулярно направлению перемещения, совершается механическая работа. Работа может быть совершена любым телом. Например, сжатая или растянутая пружина, действующая силой упругости на прикреплённое к ней тело, перемещает его и при этом совершает механическую работу. Может совершать работу и движущееся тело, сталкиваясь с другим телом, оно действует на него силой и может вызвать перемещение этого тела или его частей (деформацию). При этом также совершается механическая работа.

Коэффициент полезного действия (КПД) механизмов. Действие механизмов всегда связано с потерями части энергии на преодоление действия диссипативных сил. Поэтому для характеристики машин и механизмов вводят понятие КПД – η, равного отношению полезной работы $A_п$ к затраченной (полной) работе $A_з$:

$$\eta = \frac{A_п}{A_з}. \tag{2.5}$$

Так как мощность $P = \dfrac{A}{t}$, то КПД можно выразить и как отношение полезной мощности $P_п$ к затраченной – $P_з$:

$$\eta = \frac{A_п}{A_з} = \frac{P_п}{P_з}. \tag{2.6}$$

Поскольку потери мощности неизбежны в любом механизме, то всегда $P_п < P_з$, и КПД любого механизма всегда меньше единицы; его обычно выражают в процентах. Всякий механизм стремятся сделать таким, чтобы бесполезные потери энергии в нём были по возможности малы, т.е. чтобы КПД был по возможности ближе к единице. Для этого уменьшают насколько возможно силы трения и любые сопротивления движению в механизме. В наиболее совершенных механизмах эти потери удаётся снизить настолько, что КПД оказывается лишь на несколько процентов меньше единицы.

3 Механическая энергия

Про тела, которые могут совершать работу, говорят, что они обладают механической энергией. Механической энергией называют скалярную физическую величину, показывающую, какую работу может совершить тело. Энергия равна той механической работе, которую тело может совершить в данных условиях. Механическая работа является мерой изменения энергии в различных процессах. Поэтому энергию и работу выражают в одних и тех же единицах (в СИ – в Джоулях).

В более общем смысле энергия – это единая мера разных форм движения материи, а также мера перехода движения материи из одной формы в другую. Для харатеристики конкретных форм движения материи используют понятия о соответствующих видах энергии: механической, внутренней, электромагнитной и т.д.

Механическая энергия является характеристикой движения и взаимодействия тел. Она зависит от скоростей и взаимного расположения тел.

Как уже выяснили, для того, чтобы подсчитать работу, совершаемую переменной силой, необходимо представить перемещение тела как совокупность бесконечно малых участков $d\mathbf{S}$, на которых силу можно считать постоянной. Затем необходимо на каждом участке $d\mathbf{S}$ подсчитать работу $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ и просуммировать эти значения:

$$A = \int dA = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \qquad (3.1)$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся вторым законом Ньютона, согласно которому

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (3.2)$$

Умножим обе части уравнения (3.2) на $d\mathbf{S}$ скалярно:

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = dA = m\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{S} = md\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{S}}{dt} = md\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}. \quad (3.3)$$

Полную работу найдём интегрированием:

$$A = \int dA = \int_{v_0}^{v} m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\ 2}}{2}, \quad (3.4)$$

где v_0 и v – начальная и конечная скорости тела при его перемещении.

Итак, работа силы **F** оказалась равной изменению некоторой величины $\frac{mv^2}{2}$, причём эта величина определяет состояние тела и не зависит от того, каким способом тело приведено в это состояние. Эта величина определяется массой тела и его скоростью движения в данной системе отсчёта, т.е. является функцией состояния ее движения, и называется кинетической энергией. Величина кинетической энергии является относительной, так как скорость тела зависит от выбора системы отсчёта, в которой рассматривается движение. В разных инерциальных системах отсчёта, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а, следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Обладая кинетической энергией $W_к = \frac{mv^2}{2}$ тело способно совершить работу за счёт уменьшения скорости, т.е. за счёт убыли кинетической энергии.

Изменить кинетическую энергию тела можно только путём совершения работы, при этом изменение кинетической энергии за любой промежуток времени равно алгебраической сумме работ всех внешних сил, действовавших на тело в течение этого промежутка времени.

Подводя итоги, можно сказать следующее. Кинетической энергией тела называют энергию, обусловленную его движением и в любой момент времени определяют скалярной положительной величиной

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \tag{3.5}$$

где m – масса тела,

p = mv – его импульс,

v – мгновенная скорость.

Размерность кинетической энергии:

$$[W_к] = [m][v^2] = кг\frac{м^2}{с^2} = кг\frac{м}{с^2}м = Н{\cdot}м = Дж.$$

Теорема о кинетической энергии – связь работы с изменением кинетической энергии тела (см. (3.4) и (3.5)): приращение кинетической энергии тела равно работе всех сил, приложенных к телу, т.е.

$$A = W_к - W_{к0}, \tag{3.6}$$

где $W_к = \frac{mv^2}{2}$, $W_{к0} = \frac{mv_0^{\ 2}}{2}$ – кинетическая энергия тела в конечной и начальной точке траектории,

A – работа всех сил, приложенных к телу на участке траектории, соединяющей эти точки.

Если A > 0, то кинетическая энергия частицы увеличивается; если A < 0, то кинетическая энергия частицы уменьшается.

Потенциальной энергией называют энергию, обусловленную взаимным расположением взаимодействующих между собой тел (или частей одного тела), т.е. потенциальная энергия $W_п$ является функцией координат тела (радиус-вектора):

$$W_п = W_п(\mathbf{r}) = W_п(x, y, z). \quad (3.7)$$

Причём убыль потенциальной энергии равно работе, совершаемой силами взаимодействующих тел:

$$A = -(W_{п2} - W_{п1}) = -(W_{п2}(\mathbf{r}_2) - W_{п1}(\mathbf{r}_1)) = -\Delta W_п, \quad (3.8)$$

или $A = W_{п1} - W_{п2}$, т.е. работа связана не с потенциальной энергией, а с ее изменением при перемещении на $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и размерности потенциальной энергии и работы совпадают:

$$[W_п] = [A] = Дж. \quad (3.9)$$

Обычно для некоторого условно выбираемого взаимного расположения тел системы (состояния системы) принимают значение потенциальной энергии равным нулю ($W_{п1} = 0$). Далее величину потенциальной энергии ($W_{п2} = W_п$), связанной с изменением расположения тел системы от условно выбранного, приравнивают совершаемой при этом работе сил взаимодействия, взятой с противоположным знаком: $W_п = -A$.

Потенциальные (консервативные) силы. Понятие потенциальной энергии вводят только для таких консервативных сил, работа которых не зависит от формы траектории, а зависит только от расположения конечной и начальной точек траектории. При переходе же по любой замкнутой траектории (т.е. при возвращении тела в исходное положение) работа, совершаемая такими силами, равна нулю, т.е. в этом случае $\oint \mathbf{F}d\mathbf{S} = \oint F_s dS = 0$. Силы, удовлетворяющие такому требованию, называют потенциальными (консервативными). Это силы гравитации, силы упругости, силы, возникающие в электростатических полях. Работа потенциальных сил, совершаемая над телами системы при переходе из состояния 1 в состояние 2, равна разности потенциальных энергий вначальном (1) и конечном (2) состояниях (см. выражение (3.8)). Непотенциальные или диссипативные (рассеивающие) силы – это силы трения и силы, возникающие при неупругих деформациях.

Работа сил трения зависит от формы траектории. Сила трения скольжения, действующая на тело со стороны твёрдой поверхности, постоянна по величине и в любой момент времени направлена в сторону, противоположную перемещению тела относительно поверхности. Поэтому работа сил трения равна:

$$A_{тр} = F_{тр} \cdot S \cdot \cos\pi = -\mu \cdot N \cdot S, \tag{3.10}$$

где μ - коэффициент трения скольжения,

N – реакция опоры (сила упругости),

S – перемещение тела.

Заметим, что силу трения называют ещё диссипативной силой. В зависимости от выбора системы отсчёта работа такой силы может быть как положительной, так и отрицательной. Однако суммарная работа всех внутренних диссипативных сил, действующих на тела системы, всегда отрицательна: $A_{дис} < 0$. Это неравенство является отличительной особенностью диссипативных сил. Из того, что работа силы трения всегда отрицательна, следует, что силы трения скольжения могут только уменьшать кинетическую энергию тела. При движении с постоянной скоростью кинетическая энергия остаётся постоянной ($W_к$ = const), и в этом случае работа сил трения производится за счёт убыли потенциальной энергии (см. формулу (3.8)).

4 Потенциальная энергия в поле силы тяжести

Работа силы тяжести. Если частица движется около поверхности Земли, то поле тяжести можно считать однородным, т.е. сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ не зависит от координат. На тело могут действовать несколько сил. Мы же рассмотрим только работу силы тяжести при движении тела по криволинейной траектории из точки 1 в точку 2 (см. рисунок 4). Работа определяется соотношением:

$$A = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_т \cdot \Delta\mathbf{S}_i = \sum_{i=1}^{N} m\mathbf{g} \cdot \Delta\mathbf{S}_i = m\sum_{i=1}^{N} \mathbf{g} \cdot \Delta\mathbf{S}_i\ , \tag{4.1}$$

где m – масса перемещаемой частицы,

g – ускорение силы тяжести,

N – количество элементарных участков ΔS_i, на которые мысленно разбили траекторию.

Выберем систему координат с осью 0y, направленной вертикально вверх, тогда

$$\mathbf{g}\cdot\Delta\mathbf{S}_i = g\cdot\Delta S_i\cdot\cos\alpha_i = -\,g\cdot\Delta y_i\ , \tag{4.2}$$

где Δy_i – модуль проекции элементарного перемещения $\Delta\mathbf{S}_i$ на ось 0y.

В этом случае

$$A = -mg\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i = -mg(h_2 - h_1) = -(mgh_2 - mgh_1), \tag{4.3}$$

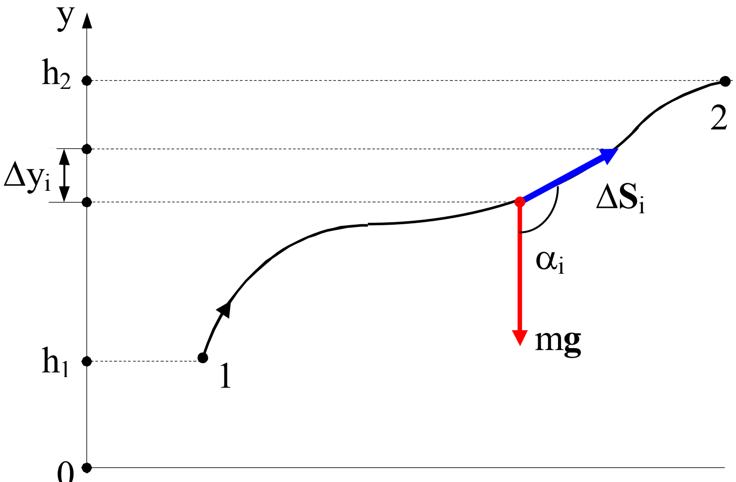


Рисунок 4

где h_1 и h_2 – высота точек 1 и 2, соответственно, от поверхности Земли (или от любой точки, в которой координату y принимаем за нулевую).

Очевидно, работа сила тяжести по замкнутой траектории (когда $h_1 = h_2$) равна нулю, т.е. сила тяготения является потенциальной. О силе тяжести и о силе тяготения: см. **"Физика. Выпуск 2. Динамика механического движения"** (с. 17-19).

Выражение для работы силы тяжести $A = -\,(mgh_2 - mgh_1)$ равна изменению величины mgh, взятой с обратным знаком. Величину mgh называют потенциальной энергией тела в поле силы тяжести $W_п$:

$$W_п = mgh. \tag{4.4}$$

Величина потенциальной энергии существенно определяется тем, от какого уровня отсчитывается высота расположения тела. Поэтому потенциальная энергия одного и того же тела может быть положительной, отрицательной или равной нулю в зависимости от выбора нулевого уровня отсчёта высоты.

Потенциальная энергия тела массой m, находящегося на расстоянии r от центра планеты ($r = R + h$, R – радиус планеты, h – высота тела над поверхностью планеты в данном в данном случае может быть сравнимой с радиусом планеты) массой M, при $r > R$ равна:

$$W_п = -G\frac{mM}{r} = -G\frac{mM}{R+h} = -\frac{mgR^2}{r} = -\frac{mgR^2}{R+h}, \tag{4.5}$$

где G – гравитационная постоянная,

$g = G\dfrac{M}{R^2}$ – ускорение силы тяжести на поверхности планеты.

Численное значение потенциальной энергии зависит от выбора нулевого уровня энергии. В данном случае, если за нулевой уровень потенциальной энергии взять ее значение на бесконечности, то внешние силы для удаления на бесконечность тел массами m и M, находящихся на расстоянии r друг от друга, совершают работу, равную $|W_п| = G\dfrac{mM}{r}$, против сил тяготения. По этой причине в выражении (4.5) для потенциальной энергии $W_п = -G\dfrac{mM}{r}$ нужно ставить знак минус.

В приведённом соотношении (4.5) ускорение свободного падения g зависит только от расстояния от центра планеты. Подробно на примере Земли о зависимости ускорения свободного падения от вращения Земли и ее сплюснотости сказано в пособии "**Физика. Выпуск 2. Динамика механического движения**" (с. 17-20). Нужно отметить, что ускорение свободного падения зависит ещё от наличия разных полезных ископаемых под данной точкой поверхности планеты (так, например, плотность железной руды значительно больше средней плотности Земли). Подобная идеализация (упрощение) – удобный приём для ясного понимания сути многих физических явлений.

5 Потенциальная энергия упруго деформированного тела

В пособии "**Физика. Выпуск 2. Динамика механического движения**" (с. 26-29) мы выяснили, что электромагнитное взаимодействие между молекулами упруго деформированного тела при изменении расстояния между молекулами от равновесного, описывается законом Гука. Согласно определению потенциальной энергии, энергия в этом случае равна работе силы упругости $F_у$, рассмотренной ранее (см. с. 12 данного пособия):

$$W_п = A = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}|F_у|\Delta\ell = \frac{1}{2}\frac{F_у{}^2}{k}, \tag{5.1}$$

где $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ – абсолютное удлинение (или сжатие) пружины жёсткости k.

Для твёрдых тел $k = = \dfrac{ES}{\ell_0}$, например, для стержня длины ℓ_0 и сечения S, E – модуль Юнга (модуль упругости) материала стержня.

6 Закон сохранения энергии в механике

Закон сохранения энергии – результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М.В. Ломоносову (1711–1765), изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814–1878) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821–1894).

Полная механическая энергия системы тел равна сумме кинетических и потенциальных энергий всех тел системы:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_{кi} + \sum_{i=1}^{N} W_{пi} = W_к + W_п, \tag{6.1}$$

где N – число тел в системе.

Закон сохранения механической энергии в механике – ″в замкнутой механической системе тел сумма кинетических и потенциальных энергий всех тел системы есть величина неизменная при всех возможных перемещениях тел системы, если между телами действуют только потенциальные (консервативные) силы″:

$$\sum_{i=1}^{N} W_{кi} + \sum_{i=1}^{N} W_{пi} = const. \tag{6.2}$$

Если система переходит из состояния 1 в состояние 2, то закон сохранения энергии можно записать в такой форме:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} W_{кi}\right)_1 + \left(\sum_{i=1}^{N} W_{пi}\right)_1 = \left(\sum_{i=1}^{N} W_{кi}\right)_2 + \left(\sum_{i=1}^{N} W_{пi}\right)_2 \tag{6.3}$$

или

$$(W_к)_1 + (W_п)_1 = (W_к)_2 + (W_п)_2. \tag{6.4}$$

Системы, в которых полная механическая энергия сохраняется, называют консервативными.

Если в системе действуют непотенциальные (неконсервативные) силы, например, силы трения, то в этом случае изменение полной механической энергии системы равно работе всех неконсервативных сил, действующих на все тела системы:

$$\Delta W_к + \Delta W_п = \Sigma A_{i\ неконсерват} \tag{6.5}$$

Формула (6.5) выражает закон изменения полной механической энергии, т.е. представляет собой своего рода закон сохранения энергии в случае действия в системе неконсервативных сил.

В данном пункте мы рассматривали закон сохранения энергии при макроскопическом движении макроскопических тел, т.е. мы полностью отвлекались от внутреннего атомистического (микроскопического) строения вещества. Закон сохранения и превращения энергии – фундаментальный закон природы, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микрочастиц.

Системы, в которых действуют диссипативные силы, например, силы трения, называются диссипативными. В диссипативных системах полная механическая энергия постепенно уменьшается за счёт преобразования в другие (немеханические) формы энергии, например, во внутреннюю энергию. Внутренняя энергия складывается из кинетической энергии невидимого теплового движения атомов и молекул вещества и потенциальной энергии их взаимодействия. Тепловое движение атомов и молекул воспринимается нашими органами чувств в виде тепла. Таково физическое объяснение кажущейся потери механической энергии при действии диссипативных сил. Этот процесс получил название диссипации (или рассеяния) энергии.

Строго говоря, все реальные макроскопические системы в природе являются диссипативными. Замкнутая система тел является идеализированной моделью для упрощенного рассмотрения многих явлений и процессов.

Следовательно, в реальных случаях закон сохранения механической энергии не выполняется. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой, может переходить от одного тела к другому. При этом общий запас энергии остаётся неизменным. В этом и заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии.

Опыты и теоретические расчёты показывают, что при отсутствии сил трения и при воздействии только сил упругости и тяготения суммарная потенциальная и кинетическая энергия тела остаётся во всех случаях постоянной. В этом заключается закон сохранения механической энергии. Закон сохранения механической энергии является частным случаем общего закона сохранения энергии в любой замкнутой системе.

Нужно иметь ввиду, что деление энергии на кинетическую и потенциальную имеет смысл только в механике и не охватывает всех форм энергии.

Применительно к незамкнутым (неизолированным) системам закон сохранения энергии означает, что изменение энергии такой системы равно работе, совершаемой системой (энергия системы уменьшается), или работе, совершаемой над системой внешними силами (энергия системы увеличивается).

Условие устойчивости тел в замкнутой системе. Представим себе покоящееся в замкнутой системе тело, потенциальная энергия которого минимальна. Пусть, например, шарик лежит на дне лунки, вырытой на поверхности Земли. Очевидно, шарик сможет двигаться только в том случае, если он обладает кинетической энергией, т.е. скоростью, отличной от нуля. Так как система замкнута, то для увеличения кинетической энергии тела необходимо, чтобы уменьшилась потенциальная энергия, так как в замкнутой системе приращение кинетической энергии может произойти только за счёт убыли потенциальной энергии:

$$\Delta W_к = -\Delta W_п. \tag{6.6}$$

Но потенциальная энергия тела минимальна, т.е. не может уменьшаться. Поэтому шарик не сможет прийти в движение под действием внутренних сил. Следовательно, равновесие шарика устойчивое. Таким образом, в замкнутой системе равновесие тела устойчиво в том случае, когда его потенциальная энергия минимальна.

7 Закон сохранения импульса (количества движения)

Приведённое в пособии ″**Физика. Выпуск 2. Динамика механического движения**″ (с. 14) выражение (2.6) второго закона Ньютона после предельного перехода можно записать через производную:

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{7.1}$$

Теперь рассмотрим систему из двух взаимодействующих между собой тел. Запишем второй закон Ньютона для них:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{1внеш}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{2внеш}\ , \qquad (7.2)$$

где $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ – силы взаимодействия тел между собой (внутренние силы),

$\mathbf{F}_{1внеш}$ и $\mathbf{F}_{2внеш}$ – силы, действующие на тела 1 и 2 со стороны других тел (внешние силы).

Складывая почленно уранения (7.2), получим:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{1внеш} + \mathbf{F}_{2внеш} = \Sigma\mathbf{F}_{внутр} + \Sigma\mathbf{F}_{внеш}\ . \qquad (7.3)$$

По третьему закону Ньютона, $\mathbf{F}_{12} = -\,\mathbf{F}_{21}$, т.е.

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \Sigma\mathbf{F}_{внутр} = 0. \qquad (7.4)$$

В случае замкнутой системы на нее не действуют внешние силы:

$$\mathbf{F}_{1внеш} + \mathbf{F}_{2внеш} = \Sigma\mathbf{F}_{внеш} = 0 \qquad (7.3)$$

и

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \qquad (7.4)$$

т.е.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \Sigma m_i\mathbf{v}_i = \text{const}. \qquad (7.5)$$

Полученное уравнение (7.5) справедливо и для большего числа тел в системе и выражает закон сохранения импульса – ″В замкнутой системе тел векторная сумма импульсов тел (полный импульс системы **p**) остаётся постоянной, какие бы процессы и взаимодействия в системе не происходили″:

$$\mathbf{p} = \Sigma \mathbf{p}_i = \Sigma m_i \mathbf{v}_i = \text{const}, \tag{7.6}$$

т.е.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \qquad \text{или} \qquad m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots = m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20} + \ldots. \tag{7.7}$$

для двух любых произвольных моментов времени. При этом отдельные части замкнутой системы могут только обмениваться импульсами так, что приращение импульса одной части системы всегда равно уменьшению импульса оставшейся части системы.

Импульс может сохраняться и у незамкнутой системы при условии равенства нулю результирующей всех внешних сил. Это непосредственно вытекает из уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i\right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}}, \tag{7.8}$$

Закон сохранение импульса даёт возможность получать достаточно простым путём ряд сведений о поведении системы, не вникая в детальное рассмотрение процесса.

У незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс **p**, а его проекция p_x на некоторое направление $0x$, в случае если проекция результирующей внешней силы $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ на направление $0x$ равна нулю, т.е. когда вектор $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ перпендикулярен направлению $0x$. Действительно, из уравнения (7.8) для проекций на направление $0x$, имеем:

$$\frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}\,x}\,. \tag{7.9}$$

Отсюда следует, что если $\mathbf{F}_{внеш\,x} = 0$, то $p_x = const$. Например, при движении системы в однородном поле сил тяжести сохраняется проекция ее импульса на любое горизонтальное направление. В таких случаях говорят, что система замкнута в данном направлении, и рассматривают сохранение проекции импульса на данное направление.

Рассмотрим примеры на закон сохранения импульса. Допустим, что платформа с орудием движется без трения по горизонтальной поверхности с некоторой постоянной скоростью v_1 (рисунок 5,а). В некоторый момент времени был произведён выстрел в сторону движения платформы, причём скорость снаряда относительно платформы равна u (рисунок 5,б). Зная массу m снаряда и массу M платформы с орудием без снаряда, можно определить скорость v_2 платформы после выстрела. Действительно, записывая закон сохранения импульса в системе отсчёта, связанной с горизонтальной поверхностью, получим:

$$(M + m)v_1 = m(v_2 + u) + Mv_2, \tag{7.10}$$

откуда

$$v_2 = v_1 - \frac{m}{m + M} u. \tag{7.11}$$

Чем больше масса платформы, тем на меньшую величину изменяется ее скорость в результате выстрела.

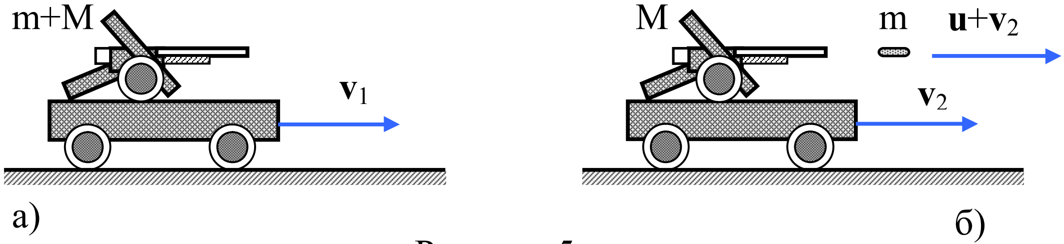


Рисунок 5

Отметим, что тот же результат можно получить в другой инерциальной системе отсчёта – например, в системе, движущейся со скоростью v_1 (скорость платформы до выстрела). В этой системе начальный импульс равен нулю, а конечный складывается из импульса $m(v_2 - v_1 + u)$ снаряда и импульса $M(v_2 - v_1)$ платформы с орудием. Таким образом,

$$0 = m(v_2 - v_1 + u) + M(v_2 - v_1), \tag{7.12}$$

откуда для скорости v_2 платформы получается результат (7.11). Данный пример показывает, что если импульс сохраняется в одной инерциальной системе отсчёта, то он сохраняется и в любой другой инерциальной системе отсчёта. Это утверждение находится в полном соответствии с принципом относительности Галилея.

Заметим, что в рассмотренном выше примере закон, описывающий силу давления пороховых газов, и время действия этой силы неизвестны, поэтому решить эту задачу с помощью законов Ньютона было бы нельзя.

В следующем примере частица с импульсом **p** распадается на две более мелкие частицы, разлетающиеся под некоторым углом друг к другу (рисунок 6,а). Зная импульс p_1 одной из образовавшихся частиц и угол φ ее отклонения от исходного направления, можно определить импульс p_2 второй частицы (рисунок 6,б):

$$p_2 = \sqrt{p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi} \tag{7.13}$$

и угол ϑ разлета частиц:

$$\sin\vartheta = \frac{p\sin\varphi}{p_2}. \tag{7.14}$$

Существует еще одна ситуация, при которой закон сохранения импульса можно в определённом приближении применять для незамкнутой системы. Это случай, когда начальное и конечное состояния отделены малым

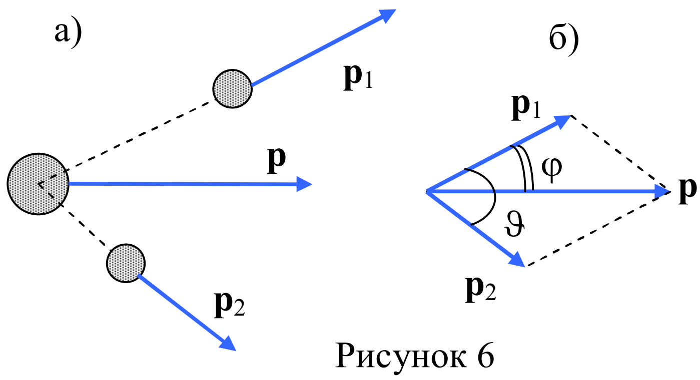


Рисунок 6

промежутком времени (выстрел, взрыв, удар), а внутренние силы значительно больше внешних сил. При этом импульс внешней силы (например, силы тяжести, реакции опоры или трения) не может заметно изменить импульс системы тел за рассматриваемый промежуток времени, и им можно пренебречь. Такая ситуация, например, имеет место в задаче о разрыве летящего снаряда, когда приравниваются импульс снаряда непосредственно перед разрывом и суммарный импульс осколков сразу же после разрыва: импульс внешних сил (тяжести, сопротивления воздуха) незначителен ввиду малости времени разрыва.

Понятие о реактивном движении. Движение тела, возникающее вследствие отделения от него части его массы с некоторой скоростью, называют реактивным. Ряд последовательных выбросов в одном направлении приведёт к изменению величины скорости, а изменение направления движения отделяющихся частей – к изменению направления движения основной массы. Изменение всех видов движения, кроме реактивного, невозможно без наличия внешних для данной системы сил, т.е. без взаимодействия тел данной системы с окружающей средой. А для осуществления реактивного движения не требуется взаимодействия тела с окружающей средой. Реактивное движение, например, наблюдаем при истечении продуктов сгорания из сопла реактивного летательного аппарата.

Пусть, первоначально система покоится, т.е. ее полный импульс равен нулю. Когда из системы начинает выбрасываться с некоторой скоростью часть ее массы, то (так как полный импульс замкнутой системы по закону сохранения импульса должен оставаться неизменным) система получает скорость, направленную в противоположную сторону. Действительно, так как

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0, \qquad \text{то} \qquad m_1\mathbf{v}_1 = -\, m_2\mathbf{v}_2\,, \tag{7.15}$$

т.е.

$$\mathbf{v}_2 = -\,\mathbf{v}_1\frac{m_1}{m_2}\,. \tag{7.16}$$

Из формулы (7.16) следует, что скорость $\mathbf{v}_2$, получаемая системой с массой m_2, зависит от выброшенной массы m_1 и скорости $\mathbf{v}_1$ ее выбрасывания.

Тепловой двигатель, в котором сила тяги, возникающая за счёт реакции струи вылетающих раскалённых газов, приложена непосредственно к его корпусу, называют реактивным. В отличие от других транспортных средств устройство с реактивным двигателем может двигаться в космическом пространстве.

Выведем уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты. Если в момент времени t масса ракеты m, а ее скорость $\mathbf{v}$, то через малое время dt ее масса уменьшится на dm и станет равной m – dm, а скорость станет равной $\mathbf{v}$ + d$\mathbf{v}$. Изменение импульса системы, состоящей из поступательно движущейся ракеты переменной массы и отделяющихся частиц от нее равно:

$$d\mathbf{p} = [(m - dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + dm(\mathbf{v} + \mathbf{u})] - m\mathbf{v}, \tag{7.17}$$

где $\mathbf{u}$ – скорость истечения газов массы dm относительно ракеты.

Тогда

$$d\mathbf{p} = m \cdot d\mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot dm. \tag{7.18}$$

Выражение (7.18) получили из (7.17) после того, как отбросили слагаемое dm·d$\mathbf{v}$, являющееся малым высшего порядка малости по сравнению с остальными слагаемыми.

Подставив полученное выражение (7.18) в закон изменения импульса

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{внеш}, \tag{7.19}$$

получим уравнение Мещерского И.В. (1897 г.):

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{внеш} - \mathbf{u}\frac{dm}{dt}. \tag{7.20}$$

В уравнении (7.20) отношение $\frac{dm}{dt} = \mu$ – ежесекундный расход топлива ракетным двигателем. Если **u** противоположна **v**, то ракета ускоряется, а если **u** совпадает по направлению с **v**, то тормозится. Таким образом, получили уравнение движения тела переменной массы:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} + \mathbf{F}_{\text{р}}\,, \qquad (7.21)$$

где

$$\mathbf{F}_{\text{р}} = -\,\mu\mathbf{u} \qquad (7.22)$$

имеет размерность силы и называется реактивной силой. Реактивная сила направлена противоположно скорости **u**, с которой выбрасываемые частицы покидают ракету (тело).

Второй закон Ньютона мало удобен для описания движения тел типа ракет или других реактивных устройств, т.е. таких тел, у которых масса во время движения не остаётся постоянной. Такие тела меняют свою структуру, выбрасывая, например, какое-то вещество и потому их нельзя считать материальными точками, но их можно рассматривать как систему материальных точек. В этом случае более удобным является уравнение Мещерского.

Основоположником теории космических полётов по праву считается выдающийся русский учёный К.Э. Циолковский (1857-1935). Значение его работ для космонавтики:

1. В 1898 г. нашёл зависимость максимальной скорости ракеты от отношения массы топлива к массе ракеты без топлива, называемого числом Циолковского.

2. В 1903 г. опубликовал монографию ″Исследование мировых пространств реактивными приборами″, в которой заложил основы теории движения ракеты как тела переменной массы и впервые предложил принцип реактивного движения в космосе.

3. Разработал проблему создания орбитальных станций.

4. Предложил использовать атмосферу Земли для торможения межпланетных аппаратов.

5. В 1926 г. разработал теорию многоступенчатых ракет и показал, что последняя ступень ракеты может достичь первой космической скорости.

8 Абсолютно неупругое и упругое столкновение тел

Ракссмотрим абсолютно неупругое и упругое столкновение (удар) тел, двигающихся до и после столкновения в горизонтальной плоскости в отсутствие действия диссипативных сил (силы трения приводят к диссипации – ″рассеиванию″, уменьшению механической энергии системы). Удар – это столкновение двух и более тел, при котором их взаимодействие длится очень короткое время. При этом будем полагать, что при столкновении тела не приходят во вращение, иначе к ним нельзя применять понятие материальной точки. В дальнейших рассуждениях тела будем принимать за материальные точки.

Полностью неупругое столкновение двух тел. Пусть, тело массы m_1 движется со скоростью $\mathbf{v}_1$ и ударяется о тело массы m_2, имевшее скорость $\mathbf{v}_2$. Если после столкновения оба тела имеют одинаковую скорость $\mathbf{u}$, то такое столкновение называют абсолютно неупругим (ударом полностью неупругих тел). Скорость движения тел $\mathbf{u}$ после полностью неупругого удара можно определить на основании закона сохранения импульса:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{u}, \tag{8.1}$$

откуда найдём скорость тел после удара

$$\mathbf{u} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.2}$$

Пусть, тела до удара двигались вдоль прямой линии, а после удара, допустим, скорость тел $\mathbf{u}$ направлена вдоль вектора $\mathbf{v}_1$ (см. рисунок 7). Взяв проекции векторов импульса тел до и после столкновения на ось 0x, направленную вдоль направления движения тел, можем написать закон сохранения импульса в скалярной форме:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)u, \tag{8.3}$$

откуда следует, что

$$u = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.4}$$

Подставляя значения m_i, v_i ($i = 1,2$), можем получить величину скорости u. Если значение скорости тел u будет со знаком ″+″, значит, мы направление $\mathbf{u}$ на рисунке 7 нарисовали правильно, т.е. угадали. Если же значение u будет со знаком ″–″, то это означает, что вектор $\mathbf{u}$ на самом деле направлен в сторону, противоположную, чем указано на рисунке 7.

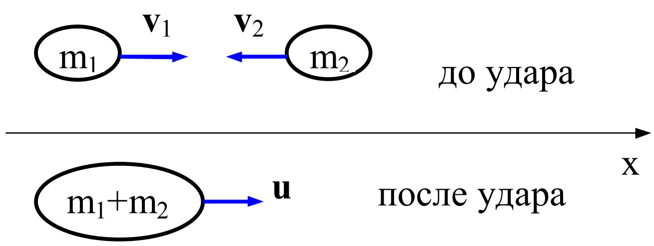


Рисунок 7

Кинетическая энергия тел после удара будет иметь следующую величину:

$$W_к = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \tag{8.5}$$

А до удара кинетическая энергия обоих тел была равна:

$$W_{к0} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \tag{8.6}$$

Определим ″потери″ механической энергии или ту часть энергии, которая во время удара перешла в тепловую форму, т.е. пошла на увеличение внутренней энергии тел:

$$W_{к0} - W_к = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(v_1 + v_2)^2}{m_1 + m_2}. \qquad (8.7)$$

Энергия, перешедшая в тепло, зависит от соотношения масс соударяющихся тел $\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ и от относительной скорости движения соударяющихся тел (в нашем примере относительная скорость движения соударяющихся тел равна $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$). Например, если одно из тел очень велико по сравнению с другим ($m_2 >> m_1$), то

$$\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx m_1, \qquad (8.8)$$

и потери механической энергии равны кинетической энергии относительного движения малого тела. Так, количество тепла, выделившегося при попадании пули (снаряда) в массивную цель, и застрявшей в ней, будет практически равно кинетической энергии пули (снаряда).

Полностью упругое столкновение двух тел. При упругом соударении двух тел, например, двух костяных или стальных твёрдо закалённых шариков, происходит упругая деформация шариков. Поверхности сталкивающихся тел вдавливаются, и сила давления вследствие деформации шариков изменяет их скорость. При этом вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

Анализ явлений при ударе упругих сплошных тел довольно сложен, мы же рассмотрим самый простой случай – центральный удар двух шаров. Центральным называют такой удар, при котором скорости соударяющихся шаров до удара совпадают по направлению с прямой линией, соединяющей центры шаров.

Обозначим скорости шаров массами m_1 и m_2 до удара через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, после удара через $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ (см. рисунок 8). При абсолютно упругом ударе выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения энергии:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \tag{8.9}$$

При прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту линию (например, ось 0х на рисунке 8) равны модулям скоростей. Их направления учтём знаками: положительное значение припишем движению вправо (если проекция вектора скорости направлена в сторону положительной полуоси 0х), отрицательное – движению влево (если проекция вектора скорости направлена в сторону отрицательной полуоси 0х):

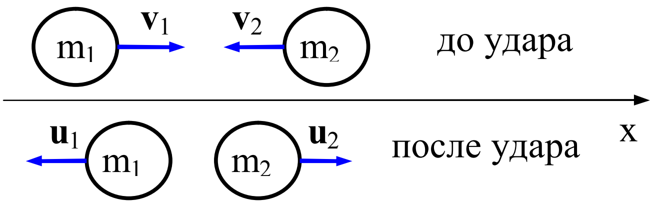


Рисунок 8

$$m_1v_1 - m_2v_2 = - m_1u_1 + m_2u_2$$

$$\frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) = \frac{1}{2}(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) \tag{8.10}$$

Уравнения (8.10) после перегруппировки слагаемых представим в виде:

$$m_1(v_1 + u_1) = m_2(u_2 + v_2)$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \tag{8.11}$$

В уравнениях (8.11) разделив второе уравнение на первое, получаем:

$$v_1 - u_1 = u_2 - v_2 \tag{8.12}$$

Решая систему из двух уравнений, составленную из уравнения (8.12) и первого уравнения из системы уравнений (8.11), находим, что

$$u_1 = \frac{(m_2 - m_1)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \qquad u_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \tag{8.13}$$

Знак получившихся числовых значений u_1 и u_2 укажет направления их скоростей относительно оси 0x, а абсолютные значения u_1 и u_2 дадут модули скоростей.

Если массы шаров одинаковы ($m_1 = m_2$) и один из них покоится (например, $v_2 = 0$), то после удара $u_1 = 0$, т.е. скорость первого шара будет равна нулю, а $u_2 = v_1$, т.е. второй шар будет двигаться со скоростью первого в направлении движения первого шарика.

Если же $v_1 \neq 0$ и $v_2 \neq 0$, то при центральном упругом ударе одинаковых по массе ($m_1 = m_2$) однородных шаров они ″обмениваются″ скоростями, т.е. $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$.

Если масса одного шара гораздо больше массы другого, например, $m_1 >> m_2$, то в знаменателе и в числителе формул (8.13) можно пренебречь членами, содержащими m_2. Если, кроме того, массивный шар покоится, то получаем $u_2 = v_2$, т.е. шар отскакивает (направление $\mathbf{u}_2$ указано на рисунке 8), как от неподвижной стенки. А большой шар при этом получит малую скорость $u_1 = 2m_2v_2/m_1$.

Мы подробно рассмотрели центральный удар двух шаров. Такова же будет картина удара двух любых тел, если начальная скорость направлена вдоль линии, соединяющей центры масс этих тел, и если силы взаимодействия направлены вдоль этой же линии, соединяющей центры масс этих тел. В противном случае удар будет представлять сложное явление.

Рассмотренный выше упругий удар, при котором не происходит ″потерь″ механической энергии, можно было бы назвать идеально упругим ударом, так как в действительности всегда имеют место ″потери″ механической энергии – переход части ее в тепло. Однако если эти ″потери″ очень малы, то рассмотренная картина идеально упругого удара достаточно хорошо отображает реальный процесс.

Удар обычных неупругих тел соответствует какому-то промежуточному случаю между идеально упругим и полностью неупругим ударами. Следовательно, закон сохранения механической энергии в этом случае нельзя применять. Условия равенства скоростей после удара также не будет, как это было при полностью неупругом ударе, так как после удара оба тела движутся с различными скоростями.

Неупругий удар можно было бы характеризовать той долей энергии деформации, которая обращается в тепло за время удара. Но ещё Ньютоном было найдено, что при неупругом ударе шаров из определённого материала величины относительных скоростей до и после удара находятся в постоянном отношении, и поэтому такой удар лучше характеризовать коэффициентом восстановления относительной скорости после удара:

$$e = \frac{|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|}{|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|}, \tag{8.14}$$

где $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ – относительная скорость шаров до удара, а

$\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ – относительная скорость шаров после удара.

Опыт показывает, что с некоторой степенью точности можно считать величину e постоянной и зависящей только от материала соударяющихся шаров.

Легко убедиться, что при идеально упругом ударе относительная скорость остаётся той же самой по величине, но меняет свой знак:

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = -(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1). \tag{8.15}$$

В этом случае e = 1.

При соударении реальных тел коэффициент восстановления всегда меньше единицы. При упругом ударе он равен единице, при полностью неупругом ударе он равен нулю, так как в этом случае $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = 0$. Ньютон нашёл, что для стекла e = 15/16, для железа e = 5/9. Зная коэффициент e, можно подсчитать скорости движения шаров после удара и ″потери″ энергии, как это было сделано при абсолютно неупругом ударе двух тел.

При решении задач по механике в некоторых случаях применение законов сохранения (энергии и импульса) значительно снижает трудоёмкость расчётов.

9 Примеры решения задач

1. Космонавт массой $m_1 = 80$ кг находится на поверхности астероида, имеющего форму однородного шара радиуса R = 1 км, и держит в руках камень массой $m_2 = 4$ кг. С какой максимальной скоростью v_2 относительно астероида (в горизонтальном направлении) космонавт может бросить камень, не рискуя, что сам станет спутником астероида? Плотность астероида $\rho = 5$ г/см^3. Гравитационная постоянная равна $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Дано: $\underline{m_1 = 80 \text{ кг}; R = 1\,000 \text{ м}; m_2 = 4 \text{ кг}; \rho = 5\,000 \text{ кг/м}^3; G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ Н·м}^2/\text{кг}^2.}$

v_2–?

Решение. Первая космическая скорость (см., например, пособие "Физика. Выпуск 2. Динамика механического движения", с. 24) для спутника астероида равна:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}},$$

где $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ – масса астероида.

Итак,

$$v_1 = \sqrt{\frac{G}{R} \cdot M} = \sqrt{\frac{G}{R} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} = 2R\sqrt{\frac{\pi G \rho}{3}}.$$

Допустим, что космонавт после броска камня приобретает максимально допустимую скорость v_1. В этом случае, если космонавт массой m_1 бросит камень массой m_2

со скоростью v_2 относительно астероида, то по закону сохранения импульса системы «космонавт – камень» имеем: $m_1v_1 = m_2v_2$, откуда находим

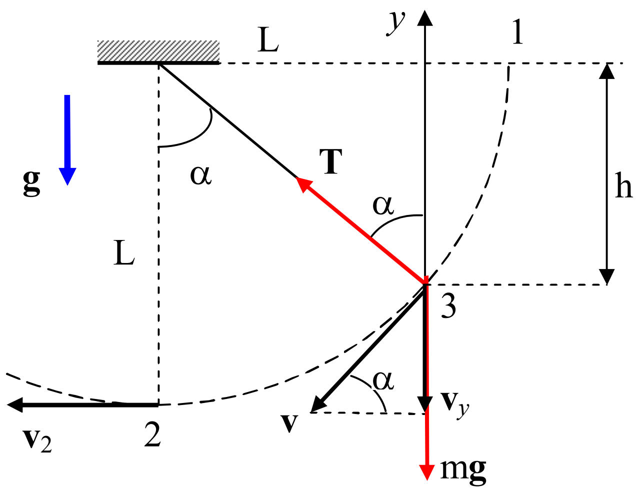
$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1 = \frac{m_1}{m_2}\cdot 2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}} = \frac{80}{4}\cdot 2\cdot 1000\sqrt{\frac{\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5000}{3}} = 23{,}6 \text{ м/с}.$$

2. Шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити, отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают. Какой угол с вертикалью образует нить в тот момент, когда проекция скорости шарика на вертикальное направление наибольшая?

Дано: $\alpha_0 = 90^0$; $v_y = v_{y\,max}$.

α – ?

Решение. В начальный момент (положение 1 на рисунке) скорость шарика равна нулю. Значит, равна нулю и проекция скорости на вертикальную ось $0y$. В положении 2 вертикальная составляющая скорости снова равна нулю, так как вектор скорости $\mathbf{v}_2$ направлен горизонтально. Следовательно, по мере движения шарика из положения 1 в положение 2 вертикальная проекция скорости v_y сначала увеличивается, достигая максимального значения, а затем начинает уменьшаться. Возрастание вертикальной проекции скорости будет продолжаться до тех пор, пока



не станет равной нулю вертикальная проекция равнодействующей приложенных к шарику силы тяжести $m\mathbf{g}$ и силы натяжения нити $\mathbf{T}$. В этот момент (положение 3 на рисунке) вертикальная проекция ускорения обратится в нуль, и второй закон Ньютона в проекциях на ось $0y$ запишется в виде:

$$T \cdot \cos\alpha - mg = 0,$$

где α – угол между нитью и вертикалью.

Натяжение нити T найдём, воспользовавшись тем, что шарик движется по дуге окружности радиуса L, где L – длина нити. Уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекции на ось, совпадающей с нитью, выглядит так:

$$T - mg \cdot \cos\alpha = m \cdot \frac{v^2}{L}.$$

Квадрат линейной скорости v^2 шарика найдем из закона сохранения энергии:

$$m \cdot \frac{v^2}{2} = mgh, \text{ где } h = L \cdot \cos\alpha \text{ (см. рисунок)},$$

откуда

$$v^2 = 2gL\cos\alpha.$$

Учитывая все записанные соотношения, получаем

$$3mg\cos^2\alpha - mg = 0, \qquad \text{и} \qquad 3\cos^2\alpha - 1 = 0,$$

откуда находим

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и

$$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = 55^0.$$

Эту задачу можно решить, используя математический прием. Как известно, в точках экстремума функции ее производная равна нулю. В произвольном положении шарика вертикальная проекция скорости равна:

$$v_y = v \cdot \sin\alpha = \sqrt{2gL \cdot \cos\alpha} \cdot \sin\alpha .$$

Приравняем нулю производную от этого выражения:

$$v_y' = \frac{\sqrt{gL}}{\sqrt{2\cos\alpha}}\left(-\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha\right) = \sqrt{\frac{gL}{2\cos\alpha}}\left(3\cos^2\alpha - 1\right) = 0.$$

Отсюда вытекает условие: $3\cos^2\alpha - 1 = 0$, совпадающее с найденным ранее.

3. Лодка массой M стоит в неподвижной воде. На какое расстояние сместится лодка, если рыбак массой m переместится с кормы на нос лодки. Длина лодки *l*. Сопротивлением воды пренебрегайте.

Дано: M; m; *l*.

L–?

Решение. В системе отсчёта, связанной с неподвижной водой или берегом сохраняется проекция импульса системы «рыбак – лодка» на горизонтальное направление:

$$0 = Mu_x + mv_x,$$

где u_x, v_x – проекции скоростей лодки и рыбака на горизонтально расположенную ось $0x$.

Но $v_x = u_x + v_x'$, где v_x' – проекция скорости рыбака относительно лодки, поэтому

$$0 = Mu_x + m(u_x + v_x') \qquad \text{или} \qquad 0 = (M + m)u_x + mv_x'.$$

Умножим обе части последнего уравнения на Δt – время перемещения рыбака с кормы на нос, тогда с учётом того, что $u_x\Delta t = L$ – перемещение лодки относительно берега, $v_x'\Delta t = l$ – перемещение рыбака относительно лодки равно длине лодки, имеем:

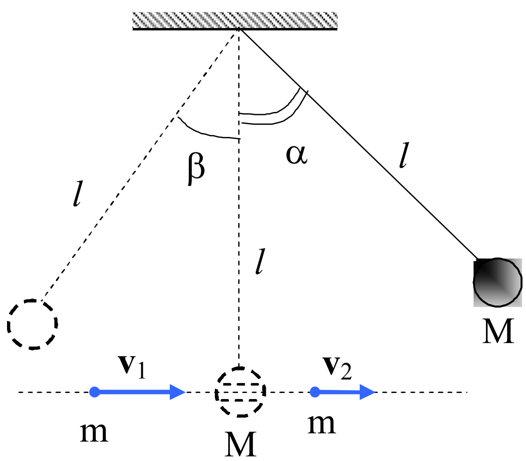
$$0 = (M+m)L + ml,$$

откуда находим

$$L = -\frac{m}{M+m}\cdot l\,.$$

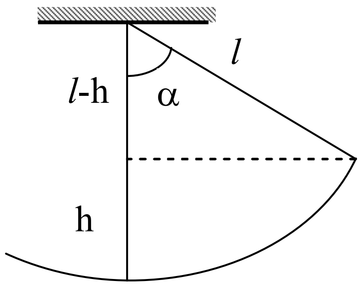
Знак “–” указывает на то, что лодка перемещается в направлении, противоположном перемещению рыбака.

4. Шар массой M = 1 кг, подвешенный на нити длиной l = 90 см, отводят от положения равновесия на угол $\alpha = 60^0$ и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой m = 10 г, летящая навстречу шару (см. рисунок). Она пробивает его и продолжает двигаться горизонтально. Определите изменение скорости пули в результате попадания в шар, если он, продолжая движение в прежнем направлении, отклоняется на угол $\beta = 39^0$. (Массу шара считать неизменной, диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити).



Дано: $\underline{l = 0{,}9\text{ м};\ M = 1\text{ кг};\ m = 10^{-2}\text{ кг};\ \alpha = 60^0;\ \beta = 39^0;\ g = 10\text{ м/с}^2;}$

$$\Delta v = v_1 - v_2 = ?$$



Решение: Шар массой M совершает колебания с максимальным углом отклонения α от вертикали (см. рисунок). При этом от положения равновесия шар поднимается на высоту h, определяемую из условия:

$$\cos\alpha = \frac{l - h}{l} \quad \Rightarrow \quad h = l\cdot(1 - \cos\alpha).$$

При этом шар положение равновесия проходит со скоростью v_α, определяемой из закона сохранения энергии:

$$\frac{Mv_\alpha^{\;2}}{2} = Mgh \quad \Rightarrow v_\alpha = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}.$$

После того как шар будет пробит пулей, он отклоняется на угол β. Это означает, что шар в этом случае положение равновесия проходит со скоростью v_β:

$$v_\beta = \sqrt{2gl(1-\cos\beta)}.$$

Так как $\beta < \alpha$, то из этого мы заключаем, что шар в момент попадания пули проходил положение равновесия со скоростью $\mathbf{v}_\alpha$, направленной навстречу скорости пули $\mathbf{v}_1$. После пробивания шара пуля массой m продолжает движения со скоростью $\mathbf{v}_2$, в том же направлении. Закон сохранения импульса для системы «пуля – шар» в проекции на направление движения пули имеет следующий вид:

$$Mv_\alpha - mv_1 = Mv_\beta - mv_2,$$

откуда находим искомую величину

$$\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{M}{m}\left(v_\alpha - v_\beta\right) = \frac{M}{m}\left(\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} - \sqrt{2gl(1-\cos\beta)}\right) =$$

$$= \frac{M}{m}\sqrt{2gl}\left(\sqrt{1-\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{10^{-2}}\sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}9}\left(\sqrt{1-\cos 60^0} - \sqrt{1-\cos 39^0}\right) = 100 \text{ м/с.}$$

5. Тележка массой 0,8 кг движется по инерции со скоростью 2,5 м/с. На тележку с высоты 50 см падает кусок пластилина массой 0,2 кг и прилипает к ней. Рассчитайте энергию, которая перешла во внутреннюю при этом ударе.

Дано: <u>M = 0,8 кг; v = 2,5 м/с; h = 0,5 м; m = 0,2 кг; g = 10 м/с^2.</u>

Q = ?

Решение. Так как кинетическая энергия куска пластилина в момент удара о тележку равна его потенциальной энергии на высоте h, то полная энергия системы ″пластилин-тележка″ в момент удара куска пластилина равна

$$E_1 = mgh + \frac{1}{2}Mv^2.$$

Поскольку пластилин после удара о тележку прилипает к ней, то удар неупругий. В момент удара куска пластилина его скорость направлена вертикально, т.е. перпендикулярно направлению движения тележки, и поэтому «сила удара» куска пластилина направлена также вертикально. Применяя закон сохранения импульса системы ″пластилин-тележка″ в горизонтальном направлении, имеем:

$$Mv = (M+m)u,$$

где u – скорость системы ″пластилин-тележка″ после прилипания пластилина. Из последнего выражения находим

$$u = \frac{M}{M + m} v.$$

Теперь можем записать выражение для энергии системы ″пластилин-тележка″ после прилипания пластилина:

$$E_2 = \frac{1}{2}(M+m)u^2.$$

Подставляя в последнее выражение для u, имеем:

$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{M + m}v^2.$$

Искомую величину Q найдем, применяя закон полной энергии для системы ″пластилин-тележка″:

$$Q = E_1 - E_2 = mgh + \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}\frac{M^2}{M + m}v^2 =$$

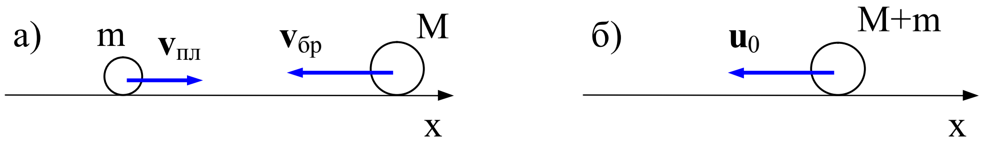
$$= mgh + \frac{1}{2}Mv^2\frac{m}{M + m} = 0{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2}0{,}8 \cdot 2{,}5^2 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}8 + 0{,}2} = 1{,}5 \text{ Дж}.$$

6. Кусок пластилина сталкивается со скользящим навстречу по горизонтальной поверхности стола бруском и прилипает к нему. Скорости пластилина и бруска перед ударом направлены противоположно и равны $v_{пл}$ =15 м/с и $v_{бр}$ = 5 м/с. Масса бруска в 4 раза больше массы пластилина. Коэффициент трения скольжения между бруском и столом μ = 0,17. На какое расстояние переместятся слипшиеся брусок с пластилином к моменту, когда их скорость уменьшится на 30 %?

Дано: $v_{пл}$ =15 м/с; $v_{бр}$ = 5 м/с; M/m = 4; μ = 0,17; u = 0,7 u_0; g = 10 м/с^2.

S = ?

Решение. Обозначим: m – масса куска пластилина, M – масса бруска, $\mathbf{v}_{пл}$ и $\mathbf{v}_{бр}$ – скорости куска пластилина и бруска перед ударом, $\mathbf{u}_0$ – начальная скорость бруска с прилипшим к нему пластилином, на рисунке а) – до столкновения бруска и куска пластилина, б) – после столкновения. Направления скоростей указаны стрелками.



Согласно закону сохранения импульса:

$$M\mathbf{v}_{бр} + m\mathbf{v}_{пл} = (M+m)\mathbf{u}_0.$$

При выбранных направлениях скоростей данное векторное уравнение в проекции на ось 0x примет вид

$$-Mv_{бр} + mv_{пл} = -(M+m)u_0,$$

Откуда выражаем u_0 и находим его значение

$$u_0 = \frac{Mv_{бр} - mv_{пл}}{M+m} = \frac{\frac{M}{m}v_{бр} - v_{пл}}{\frac{M}{m}+1} = \frac{4\cdot 5 - 15}{4+1} = 1 \text{ м/с}.$$

Знак «+» значения u_0 указывает на то, что после столкновения система «кусок пластилина-брусок» движутся в указанном на рисунке направлении, т.е. в направлении отрицательной полуоси 0x.

В момент, когда скорость системы «кусок пластилина-брусок» уменьшится на 30 %, ее скорость u будет составлять 0,7 от первоначального значения u_0, т.е. $u = 0{,}7\, u_0$. Согласно закону полной энергии изменение механической энергии системы равно работе сил трения:

$$\frac{(M+m)u_0^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2} = \mu(M+m)gS,$$

откуда выражаем искомую величину S и вычисляем ее значение

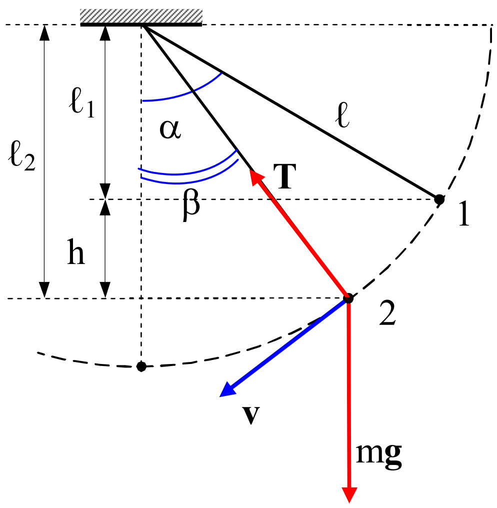
$$S = \frac{u_0^2 - u^2}{2\mu g} = \frac{u_0^2 - (0{,}7u_0)^2}{2\mu g} = \frac{0{,}51u_0^2}{2\mu g} = \frac{0{,}51 \cdot 1^2}{2 \cdot 0{,}17 \cdot 10} = 0{,}15 \text{ м}.$$

7. Тело массой m = 3 кг подвешено на нерастяжимой верёвке длиной ℓ = 2 м. Тело отклонили от вертикали на угол $\alpha = 60^0$ и предоставили самому себе. Найдите силу натяжения T верёвки, когда она составляет угол $\beta = 30^0$ с вертикалью. Ускорение силы тяжести $g = 9{,}8$ м/с^2.

Дано: m = 3 кг; ℓ = 2 м; $\alpha = 60^0$; $\beta = 30^0$; $g = 9{,}8$ м/с^2.

T – ?

Решение. Двигаясь по дуге окружности радиуса ℓ, тело одновременно опускается (см. рисунок). Для решения задачи напишем уравнение движения в проекции на радиальное направление и соотношение, следующее из закона сохранения энергии и учитывающее переход потенциальной энергии тела в кинетическую при его опускании:



$$m\frac{v^2}{\ell} = T - mg\cdot\cos\beta; \qquad \Delta W_п = \Delta W_к.$$

Так как начальная скорость (в положении 1) равна нулю, то изменение кинетической энергии равно кинетической энергии в положении 2, т.е.

$$\Delta W_к = \frac{mv^2}{2},$$

а изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta W_п = mgh = mg(\ell_2 - \ell_1),$$

где $\ell_2 = \ell\cos\beta$, $\ell_1 = \ell\cos\alpha$.

Подставляя выражения для $\Delta W_к$ и $\Delta W_п$ в написанную выше систему уравнений, имеем:

$$m\frac{v^2}{\ell} = T - mg\cdot\cos\beta; \qquad mg\ell(\cos\beta - \cos\alpha) = \frac{mv^2}{2}.$$

Исключая из двух уравнений v^2, решим систему уравнений относительно силы натяжения верёвки T:

$$T = mg\cos\beta + 2mg(\cos\beta - \cos\alpha) = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha).$$

Подстановка численных данных даёт:

$$T = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha) = 3\cdot 9{,}8(3\cos 30^0 - 2\cos 60^0) = 47 \text{ Н}.$$

Воспользовавшись полученным выражением для силы натяжения верёвки $T = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha)$, рассмотрим 2 возможных следствия.

1. Если тело массой m, подвешенное на нерастяжимой верёвке, отклонить на угол $\alpha = 90^0$ и отпустить, то натяжение верёвки в момент прохождения положения равновесия ($\beta = 0$) равно:

$$T = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha) = mg(3\cos 0^0 - 2\cos 90^0) = 3mg.$$

2. Если тело массой m, подвешенное на нерастяжимой верёвке, отклонить на угол $\alpha = 60^0$ и отпустить, то натяжение верёвки в момент прохождения положения равновесия ($\beta = 0$) равно:

$$T = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha) = mg(3\cos0^0 - 2\cos60^0) = 2mg.$$

Из расчётной формулы по задаче и из рассмотренных примеров можно сделать любопытный вывод – натяжение верёвки не зависит от ее длины ℓ, а определяется только углом отклонения из положения равновесия.

8. Один конец горизонтальной пружины прикреплён к вертикальной стене, а другой конец – к деревянному бруску массой M = 990 г, лежащему на гладком столе (см. рисунок). В этот брусок попадает и застревает в нём пуля массой m = 10 г, летящая горизонтально со скоростью v = 500 м/с, направленной вдоль оси пружины. Определить максимальную величину сжатия пружины, если коэффициент ее жёсткости $k = 1\cdot10^4$ Н/м.

Дано: <u>M = 0,99 кг; m = 0,01 кг; v = 500 м/с; $k = 1\cdot10^4$ Н/м.</u>

x – ?

Решение. Будем считать, что удар пули присходит настолько быстро, что брусок не успевает заметно сместиться из начального положения до того времени, пока пуля остановится. Другими словами, время деформации пружины значительно больше времени движения пули внутри бруска. Поэтому происходящее явление можно разделить на два этапа:

1) взаимодействие пули с бруском, причём брусок неподвижен относительно стола;

2) сжатие пружины в результате движения бруска вместе с застрявшей в нём пулей.

Во время первого этапа пуля проникает на некоторое расстояние внутрь бруска и останавливается. Этот процесс можно рассматривать как неупругий удар, во время которого часть механической энергии пули переходит в теплоту из-за действия внутренних сил трения, тормозящих движение пули. Поэтому закон сохранения механической энергии на этом этапе не выполняется. Скорость движения бруска непосредственно после того, как удар закончился (в конце первого этапа), можно найти, применяя закон сохранения импульса в горизонтальном направлении к системе «пуля-брусок».

В горизонтальном направлении импульс внешних сил (силы тяжести и силы реакции опоры) равен нулю, так как эти силы направлены вертикально, а действие пружины на брусок (силу упругости) не учитываем, так как по нашему допущению пружина не успевает заметно деформироваться. Поэтому в горизонтальном направлении импульс системы «пуля-брусок» должен оставаться постоянным.

До удара импульс пули равен m**v**, а бруска – нулю. После удара импульс бруска с пулей равен (m + M)**u**, где **u** – их скорость в конце удара. По закону сохранения импульса системы

$$m\mathbf{v} = (m + M)\mathbf{u}.$$

Очевидно, что направления векторов **v** и **u** совпадают, поэтому в скалярном виде получим

$$mv = (m + M)u,$$

откуда находим

$$u = \frac{m}{m + M}v.$$

На втором этапе кинетическая энергия бруска с пулей переходит в потенциальную энергию сжатой пружины. Таким образом, полная механическая энергия системы «брусок с пулей-пружина» в начальном состоянии равна только кинетической энергии бруска с пулей

$$W_1 = W_{1к} = \frac{m + M}{2}u^2,$$

а в конечном состоянии – потенциальной энергии сжатой пружины

$$W_2 = W_{2п} = \frac{kx^2}{2}.$$

Так как на втором этапе механическая энергия в другие виды энергии не переходит (трением бруска о стол пренебрегаем), то согласно закону сохранения механической энергии

$$W_1 = W_2 \qquad \text{или} \qquad \frac{m+M}{2}u^2 = \frac{kx^2}{2}.$$

Из этого соотношения определяем максимальную величину сжатия пружины x:

$$x = \sqrt{\frac{m+M}{k}}u = \sqrt{\frac{m+M}{k}}\frac{m}{m+M}v = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}.$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$x = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}} = \frac{10^{-2}\cdot 500}{\sqrt{10^4(0{,}01+0{,}99)}} = 5\cdot 10^{-2} \text{ м} = 5 \text{ см}.$$

Если бы в данной задаче была известна величина максимального сжатия пружины x, то можно было рассчитать величину скорости пули v, выражая ее из полученного соотношения $x = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$, скорость пули:

$$v = \frac{\sqrt{k(m+M)}}{m}x.$$

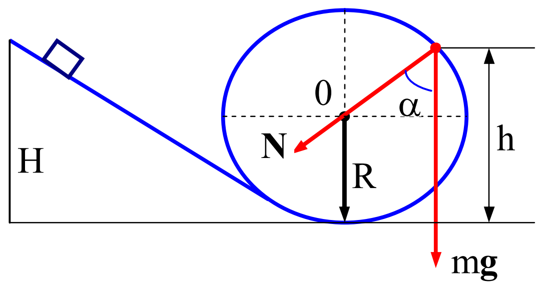
Для измерения скорости пули можно использовать и другую часто встречающуюся схему. Деревянный брусок массы M висит на невесомой нерастяжимой нити длиной ℓ, так что брусок с нитью можно принять за математический маятник. Пуля массы m, летящая со скоростью v горизонтально, попадает и застревает в бруске. По максимальному углу отклонения нити от вертикали (по максимальной высоте подъёма бруска с застрявшей пулей по отношению к положению равновесия) можно рассчитать скорость пули. Рассуждения те же самые, что и в данной задаче: 1) на первом этапе применяют закон сохранения импульса; 2) на втором этапе применяют закон сохранения механической энергии – кинетическая энергия бруска с пулей превращается в их потенциальную энергию при макисмальной высоте подъёма от положения равновесия (при максимальном угле отклонения нити от вертикали).

9. Небольшое тело соскальзывает вниз с высоты H = 7 м по наклонному жёлобу, переходящему в ″мёртвую петлю″ радиуса R = 4 м. На какой высоте h тело оторвётся от петли? Трением пренебрегайте. Проанализируйте, при каких значениях H для заданного радиуса R тело от петли не оторвётся?

Дано: $\underline{H = 7\text{ м}; R = 4\text{ м.}}$

h – ? H_{max} - ? H_{min} - ?

Решение. При движении тела по петле на него действуют две силы: сила тяжести m**g** и сила давления со стороны петли – сила реакции опоры **N**, направленная вдоль радиуса к центру окружности (см. рисунок). Согласно второму закону Ньютона



$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}.$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вдоль радиуса окружности к ее центру. Сумма проекций сил на эту ось равна $mg\cos\alpha + N$, где α – угол между силами m**g** и **N**. Под действием этих сил тело приобретает центростремительное ускорение $a_n = v^2/R$. В итоге,

$$mg\cos\alpha + N = m\frac{v^2}{R}.$$

В написанном уравнении учтём, что в момент отрыва тела от петли $N = 0$ и что из геометрических соображений $\cos\alpha = (h - R)/R$:

$$mg\frac{h-R}{R} = m\frac{v^2}{R},$$

откуда получаем

$$v^2 = g(h - R). \qquad (*)$$

Значение v можно определить, используя закон сохранения энергии. Так как трение отсутствует и, следовательно, на тело действуют только потенциальные силы, то полная механическая энергия тела (точнее, замкнутой системы «тело-жёлоб-Земля») во время его движения сохраняется.

В начальный момент времени тело обладает только потенциальной энергией $W_1 = W_п = mgH$. В момент отрыва тела, движущегося со скоростью v, его полная энергия равна

$$W_2 = W_{2к} + W_{2п} = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Согласно закону сохранения энергии $W_1 = W_2$, т.е.

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh,$$

откуда получаем

$$v^2 = 2g(H - h).$$

Решая это уравнение совместно с ранее полученным уравнением (*), имеем

$$g(h - R) = 2g(H - h),$$

откуда выражаем искомую величину h и, подставляя численные значения, находим:

$$h = \frac{2H + R}{3} = \frac{2 \cdot 7 + 4}{3} = 6 \text{ м.}$$

Тело оторвётся от петли не при любом значении H. Действительно, h не может быть больше 2R, т.е. $h_{max} = 2R$. С другой стороны, h не может быть меньше R, так как при $h < R$ тело, даже полностью потеряв скорость, начнёт скользить обратно, не отрываясь от петли, т.е. $h_{min} = R$. Подставляя эти значения h в уравнение для h:

$$h = \frac{2H + R}{3},$$

находим, что

$$H_{max} = 2{,}5\ R; \qquad H_{min} = R.$$

Следовательно, при $H > 2{,}5\ R$ и $H < R$ тело из петли не выпадет.

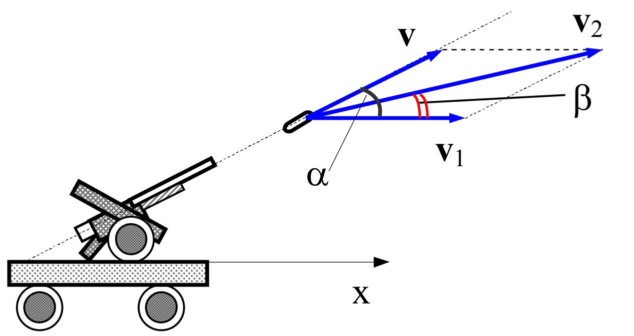
Используя приведённые при решении данной задачи рассуждения, легко решить задачи типа: при соскальзывании тела с вершины гладкой (т.е. без трения) сферы или полусферы радиуса R найти высоту h, на которой тело оторвётся от поверхности.

10. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью v_0, укреплено орудие, ствол которого направлен в сторону движения и составляет с горизонтом угол α. После выстрела скорость платформы с орудием приняла значение $v_1 = v_0/3$. Найдите скорость v снаряда относительно орудия при вылете из ствола. Масса снаряда m, масса платформы с орудием m_0.

Дано: $\underline{v_0;\ \alpha;\ v_1 = v_0/3;\ m;\ m_0.}$

v - ?

Решение. Так как учёт всех сил, действующих в системе "платформа с орудием-снаряд", затруднителен, выясним возможность решения задачи применением закона сохранения импульса. Внешними для рассматриваемой системы являются сила тяжести $(m + m_0)\mathbf{g}$ и сила нормальной реакции $\mathbf{N}$ рельсов (трением между платформой и рельсами пренебрегаем по сравнению с другими силами взаимодействия). До выстрела эти силы уравновешивали друг друга, а во время выстрела силы взаимодействия между платформой и рельсами возросли из-за явления отдачи. Следовательно, во время выстрела система не будет замкнутой, ее полный импульс изменится. Однако проекция импульса на горизонтальное направление (на рисунке ось 0x в системе отсчёта, связанной с Землёй) сохраняется, так как проекция суммы внешних сил на это направление равна нулю. До выстрела эта проекция была равна $(m + m_0)v_0$, а после выстрела



$$m_0v_1 + mv_2\cos\beta,$$

где $v_2\cos\beta$ – проекция скорости снаряда $\mathbf{v}_2$ относительно Земли на ось 0x.

Скорость $\mathbf{v}_2$ является векторной суммой искомой скорости $\mathbf{v}$ снаряда относительно орудия и скорости $\mathbf{v}_1$ платформы с орудием относительно Земли (см. рисунок):

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_1.$$

Проекция данного векторного уравнения на ось 0x равна:

$$v_2\cos\beta = v\cos\alpha + v_1. \qquad (*)$$

Приравнивая выражения для проекции импульса на ось 0x до и после выстрела

$$(m + m_0)v_0 = m_0v_1 + mv_2\cos\beta,$$

с учётом уравнения (*) получим

$$(m + m_0)v_0 = m_0v_1 + m(v\cos\alpha + v_1),$$

откуда выражаем искомую скорость v и с учётом, что $v_1 = v_0/3$, находим

$$v = \frac{(m_0 + m)v_0 - m_0v_1 - mv_1}{m\cos\alpha} = \frac{2(m_0 + m)}{3m\cos\alpha}v_0.$$

11. Определите величину силы, поднимающей тело массой m = 10 кг из состояния покоя по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^0$ и коэффициентом трения $\mu = 0{,}1$ на высоту h = 10 м с ускорением a = 1,5 м/с^2. Ускорение силы тяжести g = 9,8 м/с^2. Рассчитайте работу этой силы и определите составляющие работы, связанные с изменением потенциальной и кинетической энергии тела и количеством тепла, выделяющемся при трении.

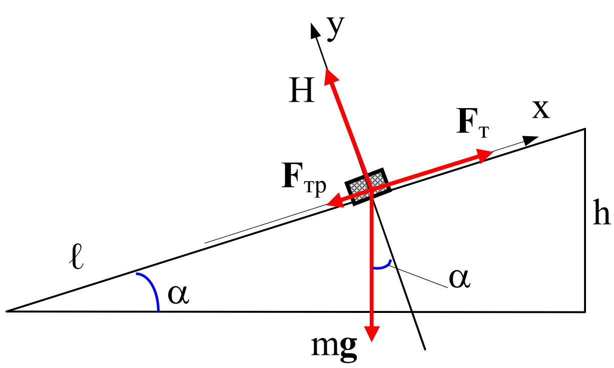
Дано: $v_0 = 0$; m = 10 кг; g = 9,8 м/с^2; $\alpha = 30^0$; $\mu = 0{,}1$; h = 10 м; a = 1,5 м/с^2.

A - ? ΔQ - ? $\Delta W_п$ - ? $\Delta W_к$ - ?

Решение. На тело действуют силы (см. рисунок):

- сила тяги $\mathbf{F}_т$, направленная вдоль наклонной плоскости;

- сила тяжести m**g**, которую следует разложить на две составляющие – mgsinα, параллельную наклонной плоскости, и mgcosα, перпендикулярную наклонной плоскости;



- сила реакции опоры **N**, перпендикулярная наклонной плоскости;

- сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, направленная вдоль наклонной плоскости.

Сила трения и сила реакции опоры согласно закону Амонтона-Кулона связаны соотношением:

$$F_{тр} = \mu N, \qquad (*)$$

где μ – коэффициент трения.

Запишем второй закон Ньютона для данного тела в векторной форме:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_т + m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр.}$$

Перепишем это уравнение в проекциях на взаимно перепндикулярные оси 0x и 0y – параллельную и перпендикулярную наклонной плоскости (см. рисунок):

$$ma = F_т - mg\sin\alpha - F_{тр}$$

$$0 = N - mg\cos\alpha$$

Решая полученную систему уравнений с учётом выражения (*) относительно силы тяги, находим:

$$F_т = mg\sin\alpha + ma + \mu mg\cos\alpha = m(g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a). \qquad (1)$$

Подстановка численных данных даёт:

$$F_т = m\{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a\} = 10\cdot\{9{,}8\cdot(\sin30^0 + 0{,}1\cdot\cos30^0) + 1{,}5\} = 72{,}5\ Н.$$

Работа силы тяги определяется как произведение величины силы на перемещение ℓ и косинус угла между направлением силы и направлением перемещения (в нашем случае эти направления совпадают, т.е. угол между ними равен нулю и косинус нуля равен единице):

$$A = F_т\cdot\ell. \qquad (2)$$

Как видно из геометрического построения на рисунке

$$\ell = \frac{h}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

В уравнение (2) для работы подставим выражение (1) для силы $F_т$ и выражение (3) для перемещения ℓ и получим:

$$A = F_т \cdot \ell = (mg\sin\alpha + ma + \mu mg\cos\alpha) \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = mgh + ma\ell + F_{тр} \cdot \ell.$$

Откуда видно, что работа силы тяги состоит из трёх слагаемых, первое из которых определяет изменение потенциальной энергии тела при подъёме

$$\Delta W_п = mgh,$$

второе слагаемое – изменение кинетической энергии тела

$$\Delta W_к = \frac{mv^2}{2}$$

(действительно, $ma\ell = \frac{mv^2}{2}$, так как при равноускоренном движении $\ell = \frac{at^2}{2}$, а $v = at$, с учётом того, что начальная скорость $v_0 = 0$),

третье слагаемое – количество теплоты, выделяемой при трении, равное работе силы трения

$$\Delta Q = F_{тр} \cdot \ell = (\mu mg\cos\alpha) \cdot \ell.$$

Итак, имеем:

$$A = \Delta W_п + \Delta W_к + \Delta Q.$$

Делая подстановку численных данных, получим:

$$A = F_т \cdot \ell = F_т \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = 72{,}5 \cdot \frac{10}{\sin 30^0} = 1450 \text{ Дж};$$

$$\Delta W_п = mgh = 10 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = 980 \text{ Дж};$$

$$\Delta W_к = \frac{mv^2}{2} = ma\ell = ma\frac{h}{\sin\alpha} = 10 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{10}{\sin 30^0} = 300 \text{ Дж}.$$

$$\Delta Q = F_{тр} \cdot \ell = (\mu mg\cos\alpha) \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30^0 \cdot \frac{10}{\sin 30^0} = 170 \text{ Дж}.$$

12. Определите полезную мощность $P_п$ водяной турбины с КПД $\eta = 90$ %, если вода поступает в нее со скоростью $v_1 = 6$ м/с, а выходит из нее со скоростью $v_2 = 1$ м/с на уровне, находящемся на $h = 4$ м ниже уровня входа. Объёмный расход воды $Q = 20$ м^3/с. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ускорение силы тяжести $g = 9{,}8$ м/с^2.

Дано: $\eta = 0{,}9$; $v_1 = 6$ м/с; $v_2 = 1$ м/с; $h = 4$ м; $Q = 20$ м^3/с; $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3; $g = 9{,}8$ м/с^2.

$P_п$ - ?

Решение. Согласно закону изменения полной механической энергии, изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил, действующих на систему:

$$A = \Delta W_п + \Delta W_к.$$

Изменение кинетической энергии $\Delta W_к$ равно разности кинетических энергий воды массой m на входе и выходе из турбины:

$$\Delta W_к = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}\rho V(v_1^2 - v_2^2),$$

где V – объём воды массой m и плотностью ρ.

Изменение потенциальной энергии $\Delta W_п$ равно:

$$\Delta W_п = mgh = \rho Vgh,$$

где h – разность высот на входе и выходе из турбины.

Итак,

$$A = \Delta W_п + \Delta W_к = \frac{1}{2}\rho V(v_1^2 - v_2^2) + \rho Vgh = \rho V\{\frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + gh\}.$$

Развиваемая водяной турбиной мощность P равна работе A, совершаемой за единицу времени:

$$P = \frac{A}{t} = \rho\frac{V}{t}\{\frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + gh\} = \rho Q\{\frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + gh\},$$

где t – время, за которое совершается работа A;

$Q = \dfrac{V}{t}$ – объёмный расход воды (расход воды за единицу времени).

Полезная мощность $P_п$ по определению равна:

$$P_п = \eta P = \eta\rho Q\{\frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + gh\}.$$

Подставляя численные значения, находим:

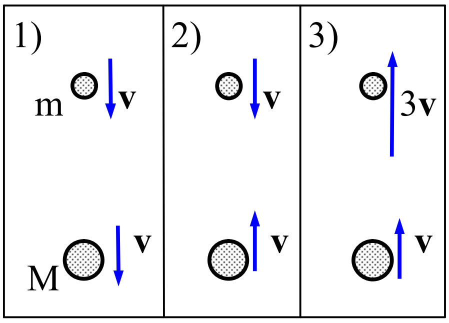
$$P_п = 0{,}9\cdot 1\cdot 10^3\cdot 20\{\frac{1}{2}(6^2 - 1^2) + 9{,}8\cdot 4\} = 1\cdot 10^6 \text{ Вт} = 1 \text{ МВт}.$$

13. Два упругих шара с массами m и M ($m << M$) падают один за другим через очень малый интервал времени с высоты h на массивную стальную плиту. Шар малой массы сталкивается с шаром большой массы сразу после его упругого столкновения с плитой. На какую максимальную высоту может подняться шар малой массы после столкновения с другим шаром?

Дано: <u>m; M; m << M; h.</u>

H - ?

Решение. Так как шары падают один за другим через очень малый интервал времени, то можно считать, что расстояние между падающими шарами мало. В этом случае можно считать, что шары, падая с высоты h, у поверхности плиты имеют одинаковую скорость v (см. рисунок, позиция 1), которую можно определить из закона сохранения энергии:



$$mgh = \frac{1}{2}mv^2; \quad \Rightarrow \; v^2 = 2gh.$$

Шар большой массы упруго отражается от плиты с той же по модулю скоростью (см. рисунок, позиция 2). Оба шара двигаются навстречу друг другу.

Шары испытывают упругий центральный удар, поэтому после столкновения шары продолжают движение по вертикали. Если рассматривать движение малого шара в системе отсчёта, связанной с большим шаром, то движение малого шара происходит со скоростью 2**v**, направленной к большому шару. Малый шар, упруго отразившись от шара большой массы, будет иметь скорость 2**v**, направленную вертикально вверх; опять, в системе отсчёта, связанной с большим шаром (см. упругое столкновение шаров в случае m << M, формула (8.13), с. 37). Так большой шар относительно плиты движется вверх со скоростью **v**, направленной вверх, то получаем, что малый шар относительно плиты движется со скоростью 3**v** (см. рисунок, позиция 3).

Малый шар, начиная двигаться от плиты со скоростью 3v, поднимется на максимальную высоту H, определяемой законом сохранения энергии:

$$mgH = \frac{1}{2}m(3v)^2; \quad \Rightarrow \quad H = \frac{(3v)^2}{2g} = 9\frac{v^2}{2g}.$$

В выражение для H подставим ранее полученное соотношение $v^2 = 2gh$ и получим:

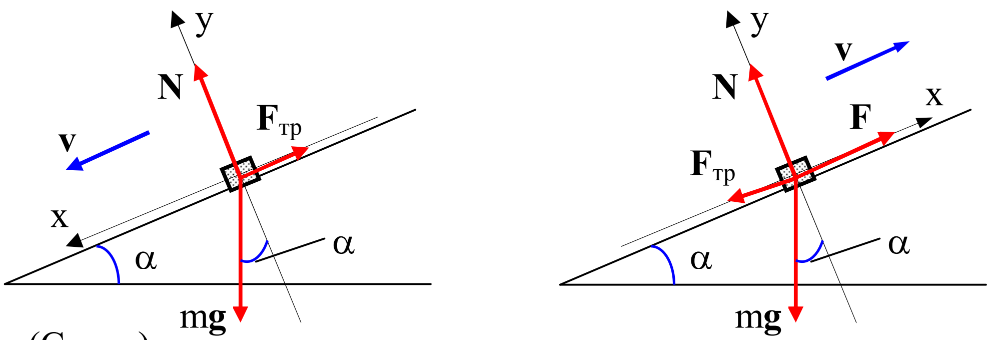
$$H = 9\frac{v^2}{2g} = 9\frac{2gh}{2g} = 9h; \quad \Rightarrow \quad H = 9h\,.$$

14. Автомобиль массой m = 1,5 т движется под гору с уклоном n = 0,02 при выключенном моторе с постоянной скоростью v = 60 км/ч. Какую мощность должен развивать двигатель автомобиля, чтобы двигаться с той же скоростью в гору с таким же уклоном. Ускорение силы тяжести g = 10 м/с^2. (Уклоном называется отношение высоты подъёма h к длине ℓ пути: $n = h/\ell = \sin\alpha$, где α – угол наклона пути к горизонту).

Дано: $\underline{m = 1{,}5\ т = 1{,}5\cdot 10^3\ кг;\ n = 0{,}02 = \sin\alpha;\ v = 60\ км/ч = 60/3{,}6\ м/с;\ g = 10\ м/с^2.}$

P - ?

Решение. Связав систему отсчёта с Землёй, направим оси прямоугольной системы координат вдоль наклонной плоскости – ось 0x и перпендикулярно к наклонной плоскости – ось 0y (см. рисунок). Составим уравнения движения (второй закон Ньютона) автомобиля при спуске с горы и подъёме в гору:



(Спуск) (Подъём)

$0 = \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр} + m\mathbf{g}$, (спуск)

$0 = \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}$, (подъём)

где m**g** – сила тяжести;

$\mathbf{F}_{тр}$ – сила трения;

N – реакция опоры (сила нормального давления);

F – сила тяги автомобиля.

Так как автомобиль и при спуске и подъёме движется равномерно, то ускорение **a** = 0, и в левых частях уравнений движения учтено, что m**a** = 0.

При равномерном спуске с горы уравнения движения в проекциях на оси координат имеют вид:

$$0 = mg\sin\alpha - F_{тр};$$
$$0 = N - mg\cos\alpha. \qquad (*)$$

К уравнениям (*) добавляем соотношение, выражающее закон Амонтона-Кулона:

$$F_{тр} = \mu N, \qquad (**)$$

где μ – коэффициент трения.

Решая систему из трёх уравнений (*) и (**), находим, что сила трения равна

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha. \qquad (***)$$

При подъёме в гору с постоянной скоростью на автомобиль ещё действует сила тяги[1] автомобиля **F**. Уравнение движения в этом случае в проекции на ось 0x запишется следующим образом:

$$0 = F - mg\sin\alpha - F_{тр},$$

откуда выражаем силу тяги F с учётом полученного выражения (***) для силы трения $F_{тр}$ при спуске:

[1] Происхождение силы тяги таково. При работающем двигателе возникающее в цилиндрах усилие с помощью трансмиссии передаётся на колёса. Колёса, взаимодействуя с поверхностью дороги, отталкивают ее с некоторой силой. Согласно третьему закону динамики, дорога действует на колёса, а значит, и на автомобиль, с равной по модулю, но противоположно направленной силой. Этим и обусловлена сила тяги, являющаяся реакцией дороги на воздействие со стороны колёс.

$$F = mg\sin\alpha + F_{тр} = mg\sin\alpha + mg\sin\alpha = 2\,mg\sin\alpha = 2\,mgn.$$

Мощность, развиваемая двигателем, будет равна:

$$P = F\cdot v = 2\,mgnv.$$

Подстановка численных данных приводит к результату:

$$P = 2\,mgnv = 2\cdot 1{,}5\cdot 10^3\cdot 10\cdot 0{,}02\cdot \frac{60}{3{,}6} = 10^4\ \text{Вт} = 10\ \text{кВт}.$$

Примечание. При решении данной задачи корректно было бы назвать силу трения – силой сопротивления, так как сила тяги двигателя автомобиля возникает из-за наличия трения (см. "**Физика. Выпуск 2. Динамика механического движения**", с. 29-34). В задаче используются термины, часто встречающиеся при рассмотрении подобного круга вопросов.

15. Когда к пружине длиной ℓ_0 в ненапряжённом состоянии подвесили груз, длина ее стала равной ℓ_1. До какой наибольшей длины ℓ_2 растянется пружина, если груз поднять так, чтобы пружина оказалась нерастянутой, и отпустить без начальной скорости?

Дано: $\underline{\ell_0;\ \ell_1.}$

ℓ_2 - ?

Решение. Обозначим жёсткость пружины k. В первом случае, когда пружина растягивается под действием силы тяжести mg подвешенного груза, сила упругости пружины уравновешивается силой тяжести:

$$k\Delta\ell_1 = k\cdot(\ell_1 - \ell_0) = mg. \qquad (1)$$

Потенциальную энергию груза, подвешиваемого к пружине, будем отсчитывать от точки подвеса пружины к опоре. Поскольку в обоих случаях груз, подвешенный к другому концу пружины, находится ниже точки подвеса по вертикали, то в обоих случаях потенциальную энергию груза будем считать отрицательной, т.е. будем приписывать знак «минус». Поэтому потенциальная энергия груза, прикреплённого к нерастянутой пружине длиной ℓ_0, будет равна $''-mg\ell_0''$. Когда груз подвешен к пружине, растянутой до ℓ_2, его потенциальная энергия будет равна $''-mg\ell_2''$.

Во втором случае потенциальная энергия упруго деформированной пружины равна $\frac{1}{2}k\cdot\Delta\ell_2^2 = \frac{1}{2}k\cdot(\ell_2-\ell_0)^2$.

Применим закон сохранения энергии к системе «пружина – груз»:

$$\frac{1}{2}k\cdot(\ell_2-\ell_0)^2 - mg\ell_2 = -mg\ell_0. \qquad (2)$$

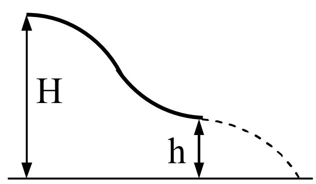
Из уравнения (2) получаем выражение:

$$\frac{1}{2}k\cdot(\ell_2-\ell_0) = mg. \qquad (3)$$

У выражений (1) и (3) правые части одинаковы, значит, равны и правые части:

$$\frac{1}{2}k\cdot(\ell_2-\ell_0) = k\cdot(\ell_1-\ell_0); \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = 2\ell_1-\ell_0.$$

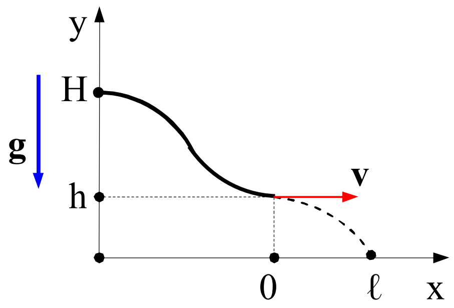
16. Тело соскальзывает с вершины гладкой горки высотой H = 10 м, имеющей горизонтальный трамплин (см. рисунок). При какой высоте трамплина h тело пролетит наибольшее расстояние по горизонтали?



Дано: <u>H = 10 м; ℓ - max.</u>

h - ?

Решение. Тело начинает движение с вершины горки с нулевой начальной скоростью. Скорость v тела в конце горки – на горизонтальном участке трамплина найдём из закона сохранения энергии:



$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2; \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2g(H-h)},$$

где g – ускорение свободного падения;

m – масса тела.

Скорость v в конце горки направлена горизонтально. Далее можно использовать суждения, приведённые при рассмотрении движения тела, брошенного горизонтально (см. **"Физика. Выпуск 1. Кинематика механического движения"**, с. 29). Время полёта тела, скатившегося с трамплина, определяется временем свободного падения с высоты h:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

За время t тело со скоростью v пролетит на расстояние ℓ по горизонтали:

$$\ell = v \cdot t = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(H-h)h},$$

данное выражение для расстояния $\ell(h) = 2\sqrt{(H-h)h}$ получили после подстановки ранее полученных соотношений для v и t.

Для нахождения экстремума функции ℓ(h) ее производную по параметру h приравняем нулю:

$$\ell'_h = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{H-h-h}{((H-h)h)^{3/2}} \right) = 0; \qquad \Rightarrow \qquad H-h-h = 0; \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{H}{2}.$$

Подстановка численных значений даёт: $h = \frac{H}{2} = \frac{10}{2} = 5$ м.

10 Контрольные вопросы

1 Что называют механической работой? Какая формула выражает смысл этого понятия?

2 Установите формулу для вычисления работы силы, действующей на тело под произвольным углом к его перемещению.

3 Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?

4 Что такое мощность? Назовите единицы измерения работы и мощности. Что такое ″лошадиная сила″?

5 Выведите и объясните формулу, выражающую связь между мощностью и скоростью движения. Принцип действия какого механизма основан на этой формуле?

6 Что называют энергией? В чем различие между понятиями энергии и работы? Как найти работу переменной силы?

7 Какую энергию называют кинетической? потенциальной?

8 Как подсчитать работу, совершаемую силой тяжести при переносе материальной точки между двумя точками, находящимися на разной высоте над Землёй? Зависит ли эта работа от траектории движения тела?

9 По какой формуле подсчитывают работу силы упругости? потенциальную энергию упруго деформированного тела?

10 Дайте определения и выведите формулы для известных вам видов механической энергии.

11 Почему изменение потенциальной энергии обусловлено только работой консервативных сил?

12 В чём заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?

13 Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?

14 В чём физическая сущность закона сохранения и превращения энергии?

15 Что называют импульсом? При каких условиях выполняется закон сохранения импульса?

16 Какие законы сохранения выполняются при абсолютно неупругом и упругом столкновениях тел?

11 Тесты для самоконтроля усвоения материала учащимися

1. Вычислите работу, совершаемую при равноускоренном подъёме груза массой 100 кг на высоту 4 м за время 2 с. Ускорение силы тяжести 9,81 м/с^2.

А) 4500 Дж   В) 4720 Дж   С) 5020 Дж   Д) 5200 Дж   Е) нет верного ответа

2. Во сколько раз возрастает импульс тела при увеличении его кинетической энергии в три раза?

А) в 9 раз   В) в $\sqrt{3}$ раз   С) в 3 раза   Д) в 2 раза   Е) не меняется

3. Пуля массой m, летящая горизонтально, попадает в центр бруска массой 10 m, висящий неподвижно на нити, и застревает в нем. Во сколько раз кинетическая энергия пули перед ударом превышает кинетическую энергию бруска с пулей сразу после удара?

А) 11 раз   В) 10 раз   С) 121 раз   Д) 100 раз   Е) $\sqrt{10}$ раз

4. Тело массой m = 2 кг двигалось со скоростью v = 5 м/с и упруго столкнулось с жесткой стенкой, двигавшейся навстречу со скоростью u = 2 м/с. Чему будет равна кинетическая энергия тела после столкновения?

А) 81 Дж   В) 49 Дж   С) 25 Дж   Д) 9 Дж   Е) 1 Дж

5. Пружина растянута сначала на величину ΔL, а затем еще на столько же. Сравните значения работ A_1 и A_2, совершенных при первом и втором растяжениях.

А) $A_1 = 2A_2$ В) $A_2 = A_1$ С) $A_2 = 2A_1$ Д) $A_2 = 3A_1$ Е) $A_2 = 4A_1$

6. Груз массой m, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найдите максимальную разность сил натяжения нити. Ускорение силы тяжести g.

А) 4 mg В) 2 mg С) 6 mg Д) 5 mg Е) 3 mg

7. Камень массой 0,25 кг брошен вверх под углом 30^0 к горизонту. Его начальная скорость равна 16 м/с. Какова кинетическая энергия камня в верхней точке траектории? Сопротивлением воздуха пренебречь.

А) 24 Дж В) 16 Дж С) 0 Дж Д) 8 Дж Е) 32 Дж

8. Из орудия массой M = 10 т выстрелили в горизонтальном направлении. Масса снаряда m = 40 кг, его скорость при вылете v = 1 км/с. Определите длину отката орудия, если коэффициент трения лафета о почву $\mu = 0,4$. Ускорение силы тяжести $g = 10$ м/с^2.

А) 1 м В) 1,5 м С) 2 м Д) 2,5 м Е) 3 м

9. Тележка массой 0,8 кг движется по инерции со скоростью 2,5 м/с. На тележку с высоты 50 см падает кусок пластилина массой 0,2 кг и прилипает к ней. Рассчитайте энергию, которая перешла во внутреннюю энергию при этом ударе. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 2 Дж В) 1 Дж С) 0,5 Дж Д) 1,5 Дж Е) 2,5 Дж

10. Кинетическая энергия тела 16 Дж. Чему равна масса тела, если при этом импульс тела равен 8 кг·м/с?

A) 4кг B) 0,4 кг C) 1 кг Д) 20 кг E) 2 кг

11. Чему равна мощность двигателя подъемного крана, поднимающего равномерно со скоростью 0,1 м/с груз массой 4 тонны при общем КПД установки 40 %? Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

A) 1кВт B) 10 кВт C) 4 кВт Д) 40 кВт E) 16 кВт

12. Два груза массами m_1 = 300 г и m_2 = 200 г соединены нитью, переброшенной через неподвижный блок, и расположены на высоте h = 1 м. В начальный момент грузы покоятся, затем их отпускают. Какое количество теплоты выделится при ударе груза о стол при абсолютно неупругом ударе о стол. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

A) 0,5 Дж B) 0,6 Дж C) 0,4 Дж Д) 0,8 Дж E) 0,9 Дж

13. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 10 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка, массы которых относятся как 1: 2. Осколок меньшей массы полетел горизонтально со скоростью 20 м/с. На каком расстоянии от места выстрела упадет второй осколок? Поверхность Земли можно считать плоской и горизонтальной. Ускорение свободного падения g = 10 м/с$^{2.}$

A) 5 м B) 8 м C) 10 м Д) 16 м E) 20 м

14. Груз подвешен на нити и отклонен от положения равновесия так, что его высота над Землей увеличилась на 20 см. Чему примерно равна скорость, с которой

тело будет проходить положение равновесия при свободных колебаниях? Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 1 м/с В) 2 м/с С) 2,5 м/с Д) 4 м/с Е) 4,25 м/с

15. Для откачки нефти из скважины глубиной 500 м используют насос мощностью 10 кВт. КПД насоса 80 %. Какую массу нефти добывают за 1 мин работы? Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 64 кг В) 72 кг С) 80 кг Д) 96 кг Е) 100 кг

16. Из орудия массой 1500 кг вылетает горизонтально снаряд массой 12 кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете равна 1,5 МДж. Какую кинетическую энергию получает орудие вследствие отдачи?

А) $1{,}25\cdot10^4$ Дж В) $1{,}5\cdot10^4$ Дж С) $1{,}2\cdot10^4$ Дж Д) $1{,}8\cdot10^4$ Дж Е) $2{,}5\cdot10^4$ Дж

17. При произвольном делении покоившегося ядра химического элемента образовалось три осколка массами 3m; 4,5m; 5m. Скорости первых двух взаимно перпендикулярны, а их модули равны, соответственно, 4v и 2v. Определите модуль скорости третьего осколка.

А) v В) 3v С) 5v Д) 4v Е) 6v

18. Край доски длиной L поднят на высоту h над горизонтальной плоскостью. Какую работу потребуется совершить для перемещения тела массой m по этой доске от ее нижнего края? Коэффициент трения равен $\mu = \dfrac{h}{\sqrt{L^2 - h^2}}$. Ускорение свободного падения g.

A) μmgL B) μmgh C) mgh Д) $2\mu mgh$ E) $2mgh$

19. Ракета движется со скоростью v. Скорость истечения продуктов сгорания топлива относительно ракеты u, секундный расход топлива (масса топлива, сгорае-мая за 1 с) равен μ. Какова полная мощность ракетного двигателя?

A) $\frac{\mu(u-v)^2}{2}$ B) $\frac{\mu(u+v)^2}{2}$ C) $\frac{\mu v^2}{2}$ Д) $\frac{\mu u^2}{2}$ E) μuv

20. КПД двигателя механизма, имеющего номинальную мощность 400 кВт и двигающегося со скоростью 10 м/с при силе сопротивления движению 20 кН, равен

A) 60 % B) 40 % C) 30 % Д) 25 % E) 50 %

21. Брусок массой m = 3 кг скользит по гладкой горизонтальной поверхности под действием приложенной к нему горизонтальной силы, которая в течение време-ни t = 8 с равномерно изменяется от величины $F_1 = 20$ Н до $F_2 = 40$ Н. Если начальная скорость бруска была равна нулю, то через указанный интервал времени она станет равной

A) 90 м/с B) 80 м/с C) 70 м/с Д) 60 м/с E) 50 м/с

22. Тело массой 2 кг брошено вертикально вверх со скоростью 10 м/с. При подъёме на какую высоту h изменение потенциальной энергии взаимодействия тела с Землей окажется в 3 раза меньше кинетической энергии тела на этой высоте? Ус-корение свободного падения равно 10 м/с^2.

A) 333 см B) 167 см C) 250 см Д) 125 см E) 375 см

23. Чему равна работа по подъему цепи, взятой за один конец и лежащей на плоскости, на высоту, при которой нижний конец отстоит от плоскости на расстояние, равное длине цепи? Длина цепи L, масса m. Ускорение силы тяжести равно g.

A) mgL B) $\frac{2}{3}mgL$ C) $\frac{1}{2}mgL$ Д) $2mgL$ E) $\frac{3}{2}mgL$

24. На гладком столе лежит цепь, свешиваясь у его края на $\frac{1}{5}$ своей длины. Если длина цепи L, а ее масса m, то какая работа требуется, чтобы втянуть свешивающуюся часть цепи на стол? Ускорение силы тяжести равно g.

A) $\frac{mgL}{5}$ B) $\frac{mgL}{50}$ C) $\frac{mgL}{10}$ Д) $\frac{mgL}{25}$ E) $\frac{mgL}{20}$

25. Если шарик массой m упал с высоты H на горизонтальную поверхность и отскочил от нее на высоту h, то модуль изменения импульса шарика в результате удара равен (ускорение свободного падения равен g) …

A) $M\left(\sqrt{2gH}+\sqrt{2gh}\right)$ B) $\left(\sqrt{2gH}-\sqrt{2gh}\right)$ C) $2m\left(\sqrt{2gH}-\sqrt{2gh}\right)$ Д) $M\sqrt{2g(H+h)}$ E) $m\sqrt{2g(H-h)}$

26. Грузовики, снабженные двигателями мощностью N_1 и N_2, развивают скорости, соответственно, V_1 и V_2. Какова будет скорость грузовиков, если их соединить тросом?

A) $\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$ B) $\frac{N_1V_2+N_2V_1}{N_1+N_2}$ C) $\frac{N_1V_1+N_2V_2}{N_1+N_2}$ Д) $\frac{(N_1+N_2)V_1V_2}{N_1V_2+N_2V_1}$ E) $\frac{(N_1+N_2)V_1V_2}{N_1V_1+N_2V_2}$

27. Канат массой m висит вертикально, касаясь нижним концом поверхности пола. Какова будет максимальная сила действия каната на пол, если верхний конец каната отпустить? Ускорение свободного падения равно g.

А) mg В) 2mg С) 3mg Д) 4mg Е) 5mg

28. При движении корабля в воде сила сопротивления возрастает пропорционально квадрату его скорости. Во сколько раз нужно увеличить мощность судового двигателя, чтобы скорость корабля возросла в 3 раза?

А) 30 В) 3 С) 9 Д) 18 Е) 27

29. Камень соскользнул с горки высотой h и остановился у ее подножия. Какую работу необходимо совершить, чтобы по той же траектории вернуть камень в исходную точку на горке?

А) mgh В) 2mgh С) 3mgh Д) 4mgh Е) 8mgh

30. Какую минимальную скорость надо сообщить космическому кораблю, стартующему с планеты массой M и радиусом R, для того, чтобы он мог удалиться от планеты неограниченно далеко? Гравитационная постоянная G. Ускорение свободного падения на поверхности планеты g.

А) $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ В) $\sqrt{\frac{GM}{R}}$ С) $2\sqrt{\frac{GM}{R}}$ Д) $2\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ Е) $\sqrt{\frac{gM}{2R}}$

31. С каким ускорением стартует ракета массой m, если скорость истечения газов относительно ракеты U, а секундный расход топлива μ? Ускорение свободного падения g.

A) $\frac{\mu U}{m}$ B) $\frac{\mu U + mg}{m}$ C) $\frac{\mu U - mg}{m}$ Д) g E) 0

32. Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок равной толщины и расположенных вплотную друг к другу. В какой по счету доске застрянет пуля, если скорость ее после прохождения первой доски $v_1 = 0{,}8v_0$?

A) 6 B) 4 C) 2 Д) 5 E) 3

33. Протон массой m, летящий со скоростью V_0, столкнулся с неподвижным атомом массой M, после чего стал двигаться в прямо противоположную сторону со скоростью $0{,}5V_0$. Найдите скорость V атома.

A) $\frac{3}{2}\frac{m}{M}V_0$ B) $\frac{1}{2}\frac{m}{M}V_0$ C) $\frac{m}{M}V_0$ Д) $\frac{5}{2}\frac{m}{M}V_0$ E) $2\frac{m}{M}V_0$

34. Выразите кинетическую энергию тела массой m, движущегося по окружности радиуса R через модуль центростремительного ускорения a.

A) $\frac{1}{2}mR^2a$ B) $\frac{1}{2}\frac{ma}{R}$ C) $\frac{1}{2}\frac{mR}{a}$ Д) $\frac{1}{2}mRa^2$ E) $\frac{1}{2}maR$

35. Пусть, космической ракете сообщена вертикальная скорость 11,2 км/с. Как известно, такая ракета будет неограниченно удаляться от Земли, а ее скорость будет неограниченно уменьшаться (если не учитывать влияния других небесных тел). Таким образом, ее предельная скорость в бесконечности будет равна нулю. Пусть, теперь ракете сообщена вертикальная скорость 12,2 км/с. Какова будет ее скорость в бесконечности?

A) 1 км/с B) 2,2 км/с C) 3,2 км/с Д) 4,84 км/с E) 5,76 км/с

36. Во сколько раз уменьшится скорость атома гелия после центрального упругого столкновения с неподвижным атомом водорода, масса которого в четыре раза меньше массы атома гелия?

А) $\frac{4}{3}$ В) $\frac{3}{2}$ С) $\frac{4}{1}$ Д) $\frac{5}{3}$ Е) $\frac{5}{2}$

37. Модуль изменения импульса стального шарика массы m, упавшего с высоты h на стальную плиту и отскочившего вверх, в результате абсолютно упругого удара равен (ускорение свободного падения g) …

А) $m\sqrt{2gh}$ В) $2m\sqrt{2gh}$ С) $2m\sqrt{gh}$ Д) $\frac{1}{2}m\sqrt{gh}$ Е) $m\sqrt{\frac{gh}{2}}$

38. Система из двух соединенных последовательно пружин растянута за свободные концы на расстояние x = 3 см. Найдите потенциальную энергию системы $E_п$, если жесткость одной пружины k_1 = 10 кН/м, а второй пружины k_2 = 20 кН/м.

А) 9 Дж В) 8 Дж С) 6 Дж Д) 3 Дж Е) 2 Дж

39. Если материальная точка массы m = 1 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиуса R = 1,2 м за время t = 2 с, то модуль изменения импульса точки за это время равен

А) 10 кг·м/с В) 3 кг·м/с С) 2,5 кг·м/с Д) 1,3 кг·м/с Е) 0 кг·м/с

40. Шарик массой m подвешен на нерастяжимой и невесомой нити. На какой минимальный угол α надо отклонить шарик, чтобы максимальная возможная сила натяжения нити составляла 1,5 mg? Ускорение силы тяжести равно g.

А) $41,4^0$ В) $61,4^0$ С) $31,4^0$Д) $51,4^0$ Е) $71,4^0$

41. Мотор с полезной мощностью 15 кВт, установленный на автомобиле, может сообщить ему при движении по горизонтальному участку дороги скорость 90 км/ч. Определите силу сопротивления движению автомобиля при заданной скорости.

А) 600 Н В) 800 Н С) 500 Н Д) 750 Н Е) 450 Н

42. Пуля массой m движется в горизонтальном направлении со скоростью v, попадает в ящик с песком массой M и застревает в нем. Ящик подвешен на веревке и способен совершать свободные колебания. На какую максимальную высоту поднимется ящик?

А) $\frac{mv^2}{2Mg}$ В) $\frac{mv^2}{2(M+m)g}$ С) $\frac{m^2v^2}{2M^2g}$ Д) $\frac{m^2v^2}{2(M+m)^2g}$ Е) $\frac{M^2v^2}{2(M+m)^2g}$

43. Один шар налетает на другой, большей массы, первоначально покоившийся. После центрального упругого удара шары разлетаются так, что величина скорости меньшего шара в 2,5 раза больше величины скорости большего шара. Найти отношение массы большего шара к массе меньшего шара.

А) 4 В) 5 С) 6 Д) 6,25 Е) 8

44. Человек и тележка движутся навстречу со скоростями 4 м/с и 2 м/с, соответственно. Человек вскакивает на тележку и остается на ней. Какова скорость человека вместе с тележкой, если масса человека в два раза больше, чем масса тележки?

А) 2 м/с В) 2,5 м/с С) 0,5 м/с Д) 1 м/с Е) 1,5 м/с

45. Средняя мощность мотора автомобиля массы m, который, трогаясь с места и двигаясь равноускоренно, проходит путь S за время t, равна (КПД мотора 50 %):

A) $\frac{mS^2}{t^3}$ B) $\frac{mS^3}{t^2}$ C) $\frac{2mS^3}{t^2}$ Д) $\frac{2mS^2}{t^3}$ E) $\frac{4mS^2}{t^3}$

46. Материальная точка массой m = 1 кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ (B = 3 м/с, C = 5 м/с^2, D = 1 м/с^3). Определите мощность P, затрачиваемую на движение точки в момент времени t = 1 с.

A) 10 Вт B) 12 Вт C) 16 Вт Д) 18 Вт E) 20 Вт

47. Снаряд массой m = 20 кг, летевший горизонтально со скоростью v = 500 м/с, попадает в платформу с песком и застревает в песке. С какой скоростью u начнет двигаться платформа, если ее масса M = 10 т?

A) 0,5 м/с B) 0,6 м/с C) 0,8 м/с Д) 0,9 м/с E) 1 м/с

48. Груз массой 5 кг свободно падает с некоторой высоты и достигает поверхности земли за 2,5 с. Найдите работу силы тяжести. Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

A) 1,4 кДж B) 1,5 кДж C) 1,6 кДж Д) 1,8 кДж E) 2,0 кДж

49. Тело массы M = 990 г лежит на горизонтальной поверхности. В него попадает пуля массы m = 10 г и застревает в нем. Скорость пули v = 700 м/с и направлена горизонтально. Какой путь S пройдет тело до остановки? Коэффициент трения между телом и поверхностью μ = 0,05. Ускорение силы тяжести g = 9,8 м/с^2.

A) 35 м B) 40 м C) 45 м Д) 50 м E) 55 м

50. Снаряд массой m = 5 кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость v = 300 м/с. В этой точке он разорвался на два осколка, причём

больший осколок массой m_1 = 3 кг полетел в обратном направлении со скоростью v_1 = 100 м/с. Определите скорость v_2 второго, меньшего, осколка.

А) 600 м/с В) 700 м/с С) 800 м/с Д) 900 м/с Е) 1000 м/с

51. Автомобиль массой 500 кг движется из состояния покоя равноускоренно с ускорением 0,5 м/с^2. Чему равен импульс автомобиля через 10 с движения?

А) 250 кг·м/с В) 500 кг·м/с С) 5000 кг·м/с
Д) 2500 кг·м/с Е) 1250 кг·м/с

52. Определите полезную мощность водяного двигателя, КПД которого 80 %, если вода поступает в него со скоростью 3 м/с и вытекает со скоростью 1 м/с на уровне, находящемся на 1,5 м ниже уровня входа. Секундный расход воды 0,3 м^3. Плотность воды 1·10^3 кг/м^3. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 4,96 кВт В) 4,86 кВт С) 4,76 кВт Д) 4,66 кВт Е) 4,56 кВт

53. Пуля массы 20 г, выпущенная под углом 60^0 к горизонту с начальной скоростью 600 м/с, в верхней точке траектории имеет кинетическую энергию, равную:

А) 400 Дж В) 500 Дж С) 600 Дж Д) 800 Дж Е) 900 Дж

54. Металлический шарик, падая с высоты h_1 = 1 м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту h_2 = 0,81 м. Во сколько раз уменьшается модуль импульса шарика при ударе?

А) в 0,81 раза В) в 0,9 раза С) в 1,81 раза Д) в 2 раза
Е) импульс не меняется

55. Найдите мощность воздушного потока, имеющего поперечное сечение в виде круга диаметром d = 18 м и текущего со скоростью v = 12 м/с. Плотность воздуха ρ = 1,3 кг/м^3.

А) 296 кВт   В) 286 кВт   С) 276 кВт   Д) 266 кВт   Е) 256 кВт

56. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой m=6 кг под углом α = 60^0 к горизонту со скоростью v = 5 м/с. Какую начальную скорость приобретает конькобежец, если его масса M = 75 кг?

А) 0,1 м/с   В) 0,15 м/с   С) 0,2 м/с   Д) 0,25 м/с   Е) 0,3 м/с

57. Тело брошено вертикально вверх со скоростью v_0 = 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна его потенциальной энергии. Ускорение силы тяжести g = 9,8 м/с^2.

А) 10,0 м   В) 10,4 м   С) 9,8 м   Д) 10,2 м   Е) 10,6 м

58. Два автомобиля с одинаковыми массами m движутся со скоростями v и 3v относительно Земли в одном направлении. Чему равен импульс второго автомобиля в системе отсчета, связанной с первым автомобилем?

А) mv   В) 2 mv   С) 2,5 mv   Д) 3 mv   Е) 4 mv

59. Тело массы 0,5 кг бросили вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Если за все время полета силы сопротивления воздуха совершили работу, модуль которой равен 36 Дж, то тело упало обратно на землю со скоростью

А) 20 м/с   В) 8 м/с   С) 12 м/с   Д) 10 м/с   Е) 16 м/с

60. Тележка движется по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v_1 = 0,5$ м/с. С нее прыгает человек со скоростью $v_0 = 3$ м/с относительно тележки в направлении, противоположном направлению движения. Найдите приращение скорости тележки Δv_1 после прыжка. Масса тележки $m_1 = 240$ кг. Масса человека $m_2 =$ 80 кг.

А) 0,5 м/с В) 1 м/с С) 1,5 м/с Д) 2 м/с Е) 3 м/с

61. Самолет массы 10^4 кг, двигаясь равномерно по окружности радиуса 1 км со скоростью 360 км/ч, пролетает 1/6 ее длины. Величина изменения импульса самолета при этом равна:

А) 0 кг·м/с В) $1\cdot10^5$ кг·м/с С) $2,5\cdot10^5$ кг·м/с Д) $5\cdot10^5$ кг·м/с Е) $1\cdot10^6$ кг·м/с

62. Камень брошен под углом 60^0 к горизонту. Как соотносятся между собой начальная кинетическая T_1 камня с его кинетической энергией T_2 в верхней точке траектории?

А) $T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} T_2$ В) $T_1 = \frac{3}{2} T_2$ С) $T_1 = T_2$ Д) $T_1 = 4T_2$ Е) $T_1 = 2T_2$

63. На горизонтальной платформе с колесами находится пушка, которая производит выстрел под углом α к горизонту со скоростью v. Можно ли использовать закон сохранения импульса для расчета скорости движения платформы с пушкой по горизонтали сразу после выстрела?

А) Да, потому что закон сохранения импульса выполняется всегда;

В) Да, поскольку вдоль горизонтали внешние силы не действуют и поэтому суммарная проекция импульса пушки и снаряда вдоль этой оси сохранится;

С) Нет, поскольку на платформу с пушкой в момент выстрела действует нескомпенсированная внешняя сила реакции опоры;

Д) Нет, так как векторное суммирование импульсов пушки и снаряда до и после выстрела показывает, что импульс изменился;

Е) Среди приведенных ответов нет правильного.

64. Задана система двух частиц массами $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 3$ кг, имеющих скорости $\vec{v}_1 = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$(м/с) и $\vec{v}_2 = \vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 6\vec{e}_z$ (м/с). После их столкновения и разлета суммарный импульс частиц равен…

A) $(16\vec{e}_x - 48\vec{e}_y + 56\vec{e}_z)\ \frac{кг \cdot м}{с}$ B) $(12\vec{e}_x - 24\vec{e}_y - 23\vec{e}_z)\ \frac{кг \cdot м}{с}$

C) $(18\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 13\vec{e}_z)\ \frac{кг \cdot м}{с}$

Д) $(-16\vec{e}_x + 48\vec{e}_y - 56\vec{e}_z)\ \frac{кг \cdot м}{с}$ E) $(32\vec{e}_x - 16\vec{e}_y - 40\vec{e}_z)\ \frac{кг \cdot м}{с}$

65. Шарик массы m, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Чему равна сила натяжения нити в нижнем положении, если угол отклонения нити в крайнем положении равен α. Ускорение свободного падения равно g.

A) mg(1-cosα) B) mg(1-sinα) C) mg(1+sinα) Д) 3mg E) mg(1+cosα)

66. Спортсмен толкнул ядро под некоторым углом к горизонту. В процессе полета ядра его кинетическая энергия…

A) сначала уменьшается, затем увеличивается

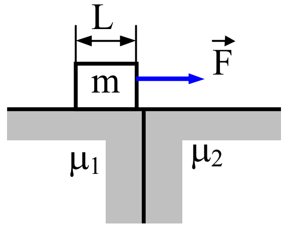
B) сначала увеличивается, затем уменьшается C) все время уменьшается

Д) все время увеличивается E) остается неизменной

12 Контрольные задания

1(1). На горизонтальной поверхности лежит цепь длиной L = 1 м и массой m = 4 кг. Взяв цепь за один из концов, поднимают этот конец на высоту h = 2 м над поверхностью. Определите работу, которую необходимо совершить при подъеме.

2(2). Брусок массой m = 2 кг и длиной L = 0,5м лежит слева от прямой разделяющей две поверхности (см. рисунок). Определите минимальную работу, которую должна совершить горизонтально направленная сила $\vec{F}$, чтобы перетащить брусок с левой поверхности на правую. Коэффициент трения между бруском и поверхностями μ_1 = 0,6 и μ_2 = 0,3.

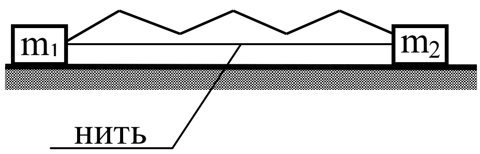


3(3). Канат, длина которого L = 1 м, наполовину свешивается со стола, высота которого больше L. Коэффициент трения между канатом и столом μ = 0,4. Канат начинает соскальзывать без начальной скорости. Определите скорость каната в момент времени, когда его конец соскользнет со стола.

4(1). Небольшой груз массой m = 2 кг падающий с высоты h = 7 м, проникает в мягкий грунт на глубину L = 10 см. Определите среднюю силу сопротивления грунта. Сопротивлением воздуха и линейными размерами груза можно пренебречь.

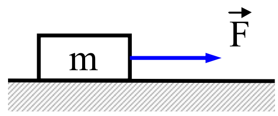
5(2). Горизонтально летящая пуля попадает в деревянный брус, лежащий на гладкой горизонтальной плоскости и пробивает его. Определите, какая часть кинетической энергии пули перешла в тепло. Масса пули m = 10 г, масса бруса M = 2 кг. Начальная скорость пули v_0 = 600 м/с, скорость пули после прохождения бруска v = 400 м/с.

6(1). Два тела, связанные между собой нитью, расположены на горизонтальной поверхности (см. рисунок). Между телами вставляют сжатую пружину. Нить пережигают, и тела начинают двигаться в противоположные стороны. Коэффициент трения между телами и поверхностью одинаков. Определите отношение путей, пройденных телами до остановки, если отношение масс тел равно n = m_2/m_1 = 2,5.



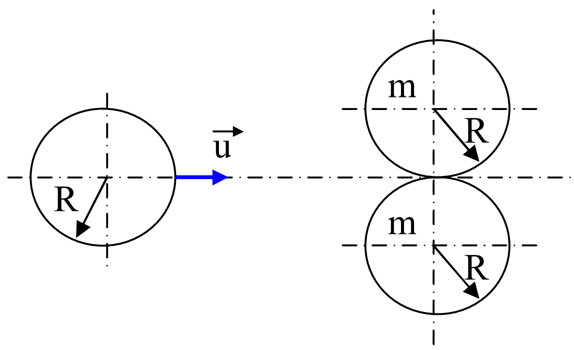
7(1). Самолет для взлёта должен иметь скорость 25 м/с. Длина пробега перед взлетом 100 м. Какова должна быть мощность моторов при взлёте, если масса самолета 1 000 кг и коэффициент сопротивления 0,02? Движение самолета считать равноускоренным.

8(1). Брусок массой m = 5 кг медленно перемещают на расстояние S = 0,15 м по горизонтальной плоскости с помощью резинового шнура, натянутого вдоль плоскости (см. рисунок). Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ = 0,4, коэффициент упругости резинового шнура k = 200 Н/м. Определить совершаемую при этом работу A.



9(2). В шайбу массы M = 490 г, лежащую на расстоянии S = 1,5 м от края стола, попала горизонтально летящая со скоростью v_0 = 400 м/с пуля массы m = 10 г. После этого шайба с застрявшей в ней пулей соскальзывает со стола и падает на расстоянии L = 2,2 м от него. Высота стола h = 0,5 м. Каков коэффициент трения μ между шайбой и поверхностью стола?

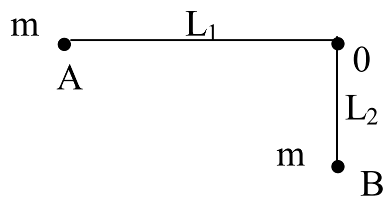
10(1). Два одинаковых шара массы m = 200 г лежат неподвижно на горизонтальной поверхности, касаясь друг друга. Третий шар, двигаясь со скоростью u = 5 м/с по прямой, касающейся одновременно обоих шаров (см. рисунок), налетает на них. Найти массу M налетающего шара, если после удара он останавливается. С какой скоростью разлетаются после столкновения покоившиеся шары? Радиусы всех шаров одинаковы. Считать удар упругим. Трение отсутствует.



11(2). Определить полезную мощность водяной турбины с КПД η = 90 %, если вода поступает в нее со скоростью 6 м/с, а выходит из нее со скоростью 1 м/с на уровне, находящемся на 4 м ниже уровня входа. Объемный расход воды 20 $м^3$/ч.

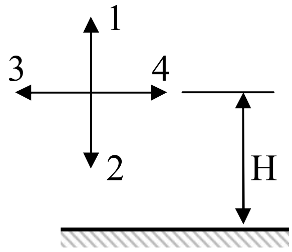
12(3). Тягач с грузом (общей массой 15 т), обладающий мощностью 375 кВт, поднимается в гору с уклоном 30^0. Какую максимальную скорость может развивать тягач на подъеме, если при спуске с горы с выключенным мотором он движется с той же скоростью?

13(3). Два тела одинаковой массы находятся на концах невесомого стержня, согнутого под прямым углом в точке 0 (см. рисунок). Расстояния от грузов до точки 0 равны соответственно L_1 = 30 см и L_2 = 20 см. Точка 0 закреплена и является осью вращения. Груз А поднимают до тех пор, пока отрезок А0 не будет расположен горизонтально, а затем стержень отпускают без начальной скорости. Определите угловую скорость системы в момент времени, когда отрезок 0В будет расположен горизонтально.



14(2). Мяч ударяется о вертикальную стенку, движущуюся со скоростью u = 1 м/с. Скорость мяча перед ударом равна v = 5 м/с. Направления скоростей мяча и стенки совпадают. Определите, какую часть кинетической энергии $\eta = \Delta E/E$ потеряет мяч, если столкновение является упругим.

15(1). Ракета, запущенная вертикально вверх, взрывается в высшей точке своего подъема на высоте H = 100 м. При взрыве образуются 4 осколка, два из которых имеют начальные скорости, направленные вертикально, а два других имеют начальные скорости, направленные горизонтально (см. рисунок). Величины всех скоростей одинаковы $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$ = 25 м/с. Массы осколков 1 и 2 равны $m_1 = m_2$ = 2 кг, а массы осколков 3 и 4 равны $m_3 = m_4$ = 3 кг. Определите скорости всех осколков при падении на Землю. Сопротивлением воздуха следует пренебречь.



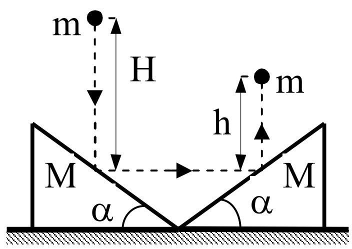
16(2). Два рыбака тянут к берегу лодку, действуя на нее с постоянными силами. Если бы ее тянул лишь первый рыбак, она подошла бы к берегу со скоростью 0,3 м/с, а если бы тянул только второй – со скоростью 0,4 м/с. С какой скоростью подойдет лодка к берегу, когда ее тянут оба рыбака? Сопротивление воды не учитывать.

17(1). Акробат прыгает на сетку с высоты h_1 = 2 м. При этом сетка прогибается на величину x_1 = 1 м. Считая силу упругого сопротивления сетки прямо пропорциональной ее прогибу и пренебрегая массой сетки, найдите максимальную величину прогиба сетки, если акробат будет прыгать на нее с высоты h_2 = 4 м.

18(2). По гладкой горизонтальной поверхности движется со скоростью v_0 = 10 м/с тело массой m = 1 кг. Начиная с некоторого момента времени, на тело начинает действовать сила $\vec{F}$. Величина силы F = 10 Н, а направление противоположно вектору $\vec{v}_0$. Определите работу, которую совершит эта сила за время t = 2 с после ее включения.

19(1). Мальчик, стоящий на льду на коньках, бросает в горизонтальном направлении камень массой m = 1 кг со скоростью v = 20 м/с. Определите расстояние, на которое откатится мальчик, если коэффициент трения полозьев о лёд μ = 0,02. Масса мальчика M = 40 кг.

20(3). На горизонтальной плоскости лежат два клина с углами наклона $\alpha = 45^0$, масса каждого M. С высоты H свободно падает шарик массой m (m << M), ударяется сначала об один клин, затем о другой и подскакивает вертикально вверх. Найти высоту h, на которую подскочит шарик. Принять, что оба удара упругие и что трение между клиньями и плоскостью отсутствует.



21(1). Сила F = 12 Н, действовавшая на покоящееся в начальный момент тело в течение $t = 2\cdot10^{-2}$ с, сообщила ему кинетическую энергию E_1 = 4 Дж. Определите кинетическую энергию второго такого же тела по прошествии того же времени, если начальная скорость тела v_0 = 10 м/с, а сила действует в направлении этой скорости.

22(3). Из пушки, не имеющей противооткатного устройства, производилась стрельба в горизонтальном направлении. Когда пушка была неподвижно закреплена, снаряд вылетел со скоростью 500 м/с, а когда пушке дали возможность свободно откатываться назад, снаряд вылетел со скоростью 499 м/с. С какой скоростью откатилась при этом пушка?

Один из решавших эту задачу сказал: ″т.к. скорость снаряда относительно пушки 500 м/с, то скорость отката равна 1 м/с″. Верно ли это?

23(1). Под каким углом к горизонту надо бросить камень, чтобы его кинетическая энергия в точке максимального подъема была в n = 4 раза меньше кинетической энергии в точке бросания.

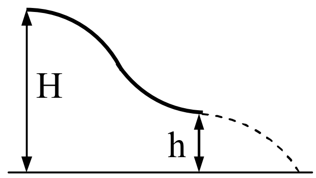
24(2). По идеальной гладкой горизонтальной поверхности пущены навстречу друг другу два абсолютно упругих шарика с массами 10 г и 20 г. Каковы будут скорости шаров после удара, если вначале они равнялись соответственно 20 м/с и 10 м/с?

25(3). Из духового ружья стреляют в спичечную коробку, лежащую на расстоянии ℓ = 30 см от края стола. Пуля массы m = 1 г, летящая горизонтально со скоростью v_0 = 150 м/с, пробивает коробку и вылетает из нее со скоростью $v_0/2$. Масса коробки M = 50 г. При каком максимальном коэффициенте трения μ между коробкой и столом коробка упадет со стола?

13 Задачи для самостоятельного решения

1(1). Пуля массой 10 г попадает в дерево толщиной 10 см, имея скорость 400 м/с. Пробив дерево, пуля вылетает со скоростью 200 м/с. Определите среднюю силу сопротивления, которую испытывает пуля, пробивая дерево.

2(3). Тело соскальзывает с вершины гладкой горки высотой H = 8 м, имеющей горизонтальный трамплин (см. рисунок). При какой высоте трамплина h тело пролетит наибольшее расстояние по горизонтали?



3(1). С хорошо укатанной горы высотой h = 2 м и длиной основания b = 5 м съезжают санки, которые останавливаются, пройдя горизонтально путь L = 35 м от основания горы. Найти коэффициент трения.

4(1). Снаряд, вылетевший из орудия под некоторым углом к горизонту, разрывается в верхней точке своей траектории на высоте h = 100 м на две части m_1 = 1 кг и m_2 = 1,5 кг. Скорость снаряда в этой точке v_0 = 100 м/с, скорость большего осколка v_2 = 250 м/с и направлена так же, как и скорость снаряда перед разрывом, т.е. совпадает по направлению со скоростью v_0. Определить расстояние S между точками падения обоих осколков.

5(2). Тело массой m = 0,5 кг брошено с башни в горизонтальном направлении со скоростью v_0 = 10 м/с. Определите кинетическую энергию тела в момент падения на землю, если время полета оказалось равным t = 4 с.

6(3). Шар массой M висит на нити длиной ℓ. В шар попадает горизонтально летящая пуля массой m и застревает в нем. С какой минимальной скоростью v должна лететь пуля, чтобы в результате попадания пули шар мог сделать на нити полный оборот в вертикальной плоскости?

7(2). Конькобежец массой 70 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг со скоростью 8 м/с. Найдите на какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лёд 0,02.

8(2). Определите работу подъёма груза по наклонной плоскости, среднюю мощность и КПД подъемного устройства, если масса груза 100 кг, длина наклонной плоскости 2 м, угол наклона к горизонту 30^0, коэффициент трения 0,1, ускорение при подъеме 1 м/с^2. У основания наклонной плоскости груз находился в покое. Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

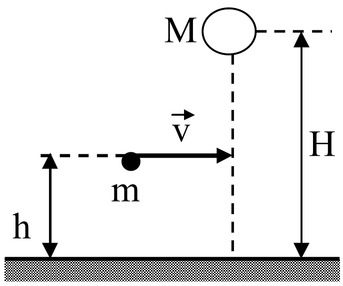
9(3). Небольшой шарик находится на высоте h над поверхностью горизонтальной плиты. Шарик отпускают без начальной скорости, и одновременно плита начинает двигаться вертикально вверх с постоянной скоростью v. Определите, на какую максимальную высоту относительно своего начального положения поднимется шарик после первого соударения с плитой. Удар о плиту является абсолютно упругим, масса плиты много больше массы шарика.

10(2). Веревка длиной L = 5 м переброшена через гвоздь, вбитый в вертикальную стену на высоте H = 6 м над уровнем пола. В начальный момент времени веревка висит симметрично и покоится. Затем в результате незначительного толчка веревка начинает скользить по гвоздю. Определите скорость веревки, когда после соскальзывания с гвоздя, нижний конец веревки коснется пола. Силами сопротивления и растяжением веревки можно пренебречь.

11(1). Нейтрон массы m, двигаясь со скоростью v, ударяется о неподвижное ядро массой $n{\cdot}m$. Считая удар центральным и упругим, найдите, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия нейтрона.

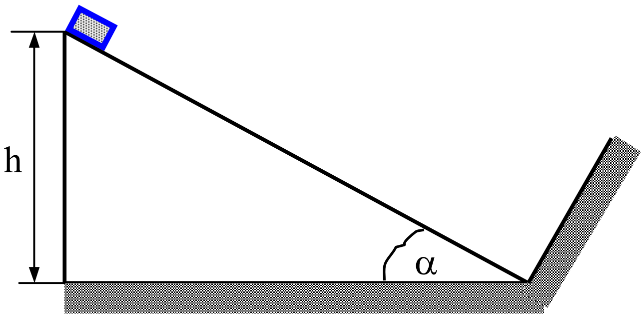
12(2). Земля движется вокруг Солнца со скоростью u = 30 км/с. Метеорит, движущийся по орбите Земли, падает на поверхность Земли со скоростью v = 5 км/с (относительно Земли). Что больше: тепло, выделившееся при ударе метеорита, или вызванное этим ударом увеличение кинетической энергии Земли? Во сколько раз?

13(2). Тело массой М = 0,2 кг свободно падает без начальной скорости с высоты Н = 5 м (см. рисунок). На высоте h = 2 м в него попадает другое тело массой m = 0,1 кг, которое в момент столкновения имеет только горизонтальную составляющую скорости. В результате столкновения тела слипаются – абсолютно неупругий удар. Определите время, прошедшее с момента столкновения до падения тел на землю. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывается.



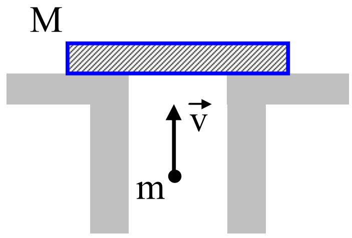
14(1). Какую работу необходимо затратить, чтобы перевернуть куб массой 5 кг и ребром 10 см с одной грани на другую?

15(2). Наклонная плоскость составляет угол α=30° с горизонтом и имеет высоту h = 0,5 м (см. рисунок). С вершины наклонной плоскости соскальзывает небольшое тело без начальной скорости. В нижней точке плоскости тело абсолютно упруго сталкивается со стенкой, расположенной перпендикулярно скорости тела. Определите высоту максимального подъема тела по плоскости, если коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ = 0,3.



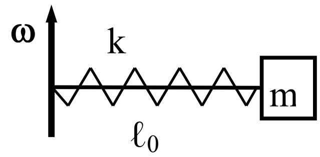
16(1). Тело массой m = 1 кг брошено с поверхности земли с начальной скоростью v_0 = 10 м/с. Максимальная высота подъёма тела оказалась равной h = 3 м. Определите кинетическую энергию тела в этой точке траектории. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

17(3). Пуля массой m = 5 г, летящая вертикально вверх, пробивает лежавшую на подставках доску массой M = 0,25 кг (см. рисунок), после чего поднимается на максимальную высоту H = 50 м над уровнем подставок. Величина начальной скорости пули v = 200 м/с. Определите высоту, на которую подпрыгнет доска. Толщиной доски можно пренебречь.



18(3). Лягушка массы m сидит на конце доски массы M и длины ℓ. Доска плавает на поверхности пруда. Лягушка прыгает под углом α к горизонту вдоль доски. Какой должна быть при этом начальная скорость лягушки v_0, чтобы после прыжка лягушка оказалась на другом конце доски?

19(1). На гладкий легкий стержень, вращающийся вокруг вертикальной оси, надета пружина, одним концом скрепленная со стержнем у оси вращения. К другому концу пружины прикреплена муфта массой m, скользящая по стержню. Какую работу нужно совершить, чтобы раскрутить стержень до угловой скорости ω? Коэффициент жесткости пружины k, длина нерастянутой пружины равна ℓ_0.

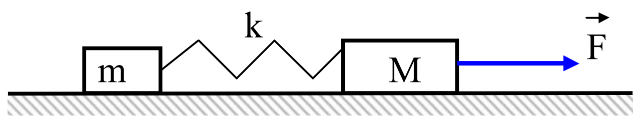


20(2). Между двумя шариками с массами m_1 и m_2 находится сжатая пружина. Если один из шариков (массы m_1) удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью v_0. С какой скоростью будет отлетать шарик массы m_1, если оба шарика освобождаются одновременно? Деформации пружины в обоих случаях одинаковы.

21(1). Груз массы 0,5 кг падает с некоторой высоты на плиту массой 1 кг, укрепленную на пружине с коэффициентом жесткости 10 Н/см. Определите величину наибольшего сжатия пружины, если в момент удара груз обладал скоростью 5 м/с. Удар считать неупругим, время удара – ничтожно малым.

22(2). В клин массы M попадает горизонтально летящая пуля массы m и после абсолютно упругого удара о поверхность клина отскакивает вертикально вверх. На какую высоту поднимется пуля, если скорость клина после удара равна v? Трением пренебречь.

23(3). На горизонтальной плоскости лежат два бруска массы m и M, соединенные ненапряжённой пружиной с жёсткостью k. Коэффициент трения брусков о плоскость равен μ. Какую минимальную работу A нужно совершить, чтобы систему сдвинуть с места, прикладывая к бруску массой M направленную вдоль плоскости силу (см. рисунок)?



24(1). Пружинное ружье выстреливает шарик вертикально вверх на высоту $h_1 = 30$ см, если пружина сжата на $\Delta L_1 = 1$ см. На какую высоту поднимется шарик, если пружину сжать на $\Delta L_2 = 3$ см?

25(2). Автомобиль массой 2 т трогается с места и движется в гору, уклон которой равен 0,02. Пройдя расстояние 100 м, он развивает скорость 32,4 км/ч. Коэффициент трения 0,05. Определите среднюю мощность, развиваемую мотором автомобиля при этом движении.

Список использованных источников

1. Власова, И.Г. Физика. Для поступающих в вузы и подготовки к ЕГЭ / И.Г. Власова.– М.: АСТ: СЛОВО, 2010.– 544 с.

2. Кабардин, О.Ф. Физика. Справочник школьника / О.Ф. Кабардин.– М.: Астрель, 2008.– 573 с.

3. Павленко, Ю.Г. Начала физики / Ю.Г. Павленко. – М.: Экзамен, 2005. – 864 с.

4. Турчина, Н.В. Физика: 3 800 задач для школьников и поступающих в вузы / Н.В. Турчина, Л.И. Рудакова, О.И. Суров, Г.Г. Спирин, Т.А. Ющенко.– М.: Дрофа, 2000.– 672 с.

5. Чакак, А.А. ЕГЭ 2008. Физика: рекомендации, тесты, справочные маетриалы / А.А. Чакак.– Оренбург: ОГУ, 2008.–184 с.

6. Чакак, А.А. Реальные тесты по физике и ответы / А.А. Чакак.– Оренбург: ОГУ, 2007.–732 с.

7. Чакак, А.А. Физика. Краткий курс / А.А. Чакак, С.Н. Летута.– Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2010.–541 с.

8. Чакак, А.А. Физика: учебное пособие для поступающих в Оренбургский государственный университет / А.А. Чакак.– Оренбург: ОГУ, 2007.–219 с.

Приложение А
(*справочное*)

Основные физические константы

Скорость света в вакууме	$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²
Молярный объём идеального газа при нормальных условиях	$V_\mu = 22{,}414$ л/моль
Нормальные условия	р = 760 мм рт. ст. = 101 325 Па $t = 0^{0}$ C
Газовая постоянная	R = 8,314 Дж/(моль·К)
Постоянная Фарадея	F = 96 500 Кл/моль
Число Авогадро	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К$= 8{,}625 \cdot 10^{-5}$ эВ/К
Элементарный заряд	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $k = (4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^{9}$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = $12{,}56 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с$= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ эВ·с $\hbar = h/2\pi = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ $R = 1{,}10 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрон-вольт	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Первый Боровский радиус	$r_1 = 0{,}528 \cdot 10^{-10}$ м
Масса изотопа ${}_1H^1$	$m_н = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

Приложение Б
(*справочное*)

Соотношения между единицами некоторых физических величин

Длина	1 Å (Ангстрем) = $1 \cdot 10^{-10}$ м 1 дюйм = 2,54 см 1 пк (парсек) ≈ $3{,}1 \cdot 10^{16}$ м 1 св. год (световой год) ≈ $0{,}95 \cdot 10^{16}$ м 1 ферми = 10^{-15} м 1 фут = 30,48 см 1 ярд = 91,44 см
Масса	1 тонна = 10^{3} кг 1 а.е.м. = $1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг 1 кар (карат) = 0,2 г
Время	1 сутки = 86 400 с 1 мин = 60 с 1 час = 60 мин 1 сутки = 24 часа 1 год ≈ $3{,}16 \cdot 10^{7}$ с
Объем	1 л = $1 \cdot 10^{-3}$ $м^3$
Сила	1 кГ = 1 кгс (килограмм-сила) = 9,81 Н
Давление	1 бар = $1 \cdot 10^{5}$ Па 1 атм = 760 мм рт. ст. =$1{,}01325 \cdot 10^{5}$ Па 1 ат = 1 кгс/$см^2$ = $0{,}98 \cdot 10^{5}$ Па 1 торр = 1 мм рт. ст. = 133,3 Па
Энергия	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж 1 квт·ч = $3{,}6 \cdot 10^{6}$ Дж 1 кал = 4,1868 Дж
Мощность	1 л.с. (лошадиная сила) = 735 Вт

Приложение В
(*справочное*)

Некоторые сведения из математики

1 Алгебра

$$a:b=\frac{a}{b};\qquad \frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\cdot c};\qquad a:\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c}{b};\qquad \frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot m};$$

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow a\cdot n=b\cdot m\Leftrightarrow \frac{n}{b}=\frac{m}{a};\qquad \frac{a}{b}\pm\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n\pm b\cdot m}{b\cdot n};$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m};\quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m};\quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m};\quad \frac{a+b}{2}\ \geq\ \sqrt{a\cdot b}\ \text{при } a>0,\ b>0.$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;\quad \frac{a+b}{2}=\sqrt{a\cdot b}\ \text{при } a=b.$$

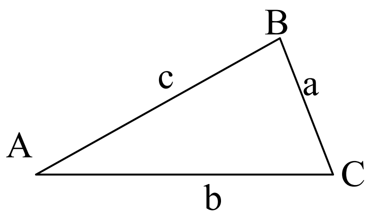
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;\qquad a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$$

$$ax^2+bx+c=0;\ \ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad (a\neq 0);\ \ x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ \ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a};$$

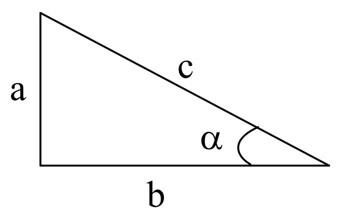
$$\sin x\approx x,\quad \cos x\approx 1-\frac{1}{2}x^2,\quad (x\ll 1);$$

$$(1\pm x)^n\approx 1\pm nx,\quad (x\ll 1;\ n\neq 0;\ );$$

2 Тригонометрия



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C};\qquad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C;$$



$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\ \ \cos\alpha=\frac{b}{c};\ \ \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a}{b};\ \ \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{b}{a};$$

$$a^2+b^2=c^2;$$

x	$\pm\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$
$sinx$	$\pm sin\alpha$	$cos\alpha$	$\mp sin\alpha$	$-cos\alpha$
$cosx$	$cos\alpha$	$\mp sin\alpha$	$-cos\alpha$	$\pm sin\alpha$
tgx	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$

α	$0^0(0)$	$30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^0\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^0\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180^0(\pi)$
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha = 1$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\overline{\sin^2\alpha} = \overline{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{2}$.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$; $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$; $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$;

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$; $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$;

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$; $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$

$\sin x \approx \mathrm{tg}x \approx x$, $(x << 1)$; $x = \dfrac{x^0\cdot\pi}{180^0}$, $[x]$ = рад, $[x^0]$ = град;

3 Геометрия

$L_{окружн} = 2\pi r = \pi d$; $S_{круг} = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$; $S_{сфер} = 4\pi r^2 = \pi d^2$; $(d = 2r)$;

$V_{шар} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$; $(d = 2r)$; $S_{эллипс} = \pi \cdot a \cdot b$, a,b – полуоси эллипса;

4 Логарифмы

$\lg(x^n) = n \cdot \lg x$; $\lg(xy) = \lg x + \lg y$; $\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y$; $\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}$; $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$;

$(x > 0, y > 0)$.

$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ldots$; $a^x = e^{x \ln a}$; $a^x = 10^{x \lg a}$;

5 Векторы

Скаляром называется физическая величина, характеризуемая только числовым значением. Векторы – это направленные отрезки прямых. Физические величины, которые характеризуются направлением в пространстве, могут быть представлены некими направленными отрезками, т.е. векторами. Такая их интерпретация очень наглядна и ею широко пользуются.

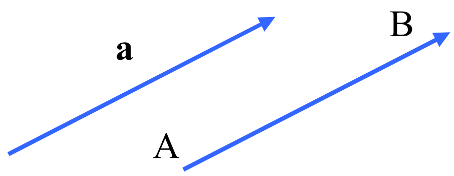


Рисунок В.1

Вектор обозначают символом $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B обозначают начало и конец данного направленного отрезка, либо одной латинской буквой $\vec{a}$ или **a** (рисунок В.1). Начало вектора называют точкой его приложения. Для обозначения длины вектора используют символ модуля (абсолютной величины) или символ вектора без стрелки над ним. Так $|\overrightarrow{AB}| = AB$ и $|\mathbf{a}| = a$ обозначают длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и **a**. Векторы можно проектировать на любые прямые (в частности и на направленные), при этом, $a_\ell = a\cos\alpha$ (рисунок В.2а). Часто приходится проектировать векторы на оси координат x, y, z. Для вектора **a**, расположенного на плоскости x0y, проекции вектора **a** на оси 0x и 0y прямоугольной системы координат равны $a_x = a \cdot \cos\varphi$, $a_y = a \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между вектором **a** и осью 0x (см. рисунок В.2б). Для пространственно – ориентированного вектора проекции на оси координат можно выразить следующим образом (рисунок В.3): $a_x = a \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$; $a_y = a \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$; $a_z = a \cdot \cos\vartheta$. Очевидно, что тройка чисел a_x, a_y, a_z полностью определяют вектор **a**, так как по ним можно однозначно построить вектор **a**, причём $|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Краткое обозначение вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_x, a_y, a_z) = \{a_x, a_y, a_z\}$. Если заданы координаты двух точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ может быть записан в виде $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

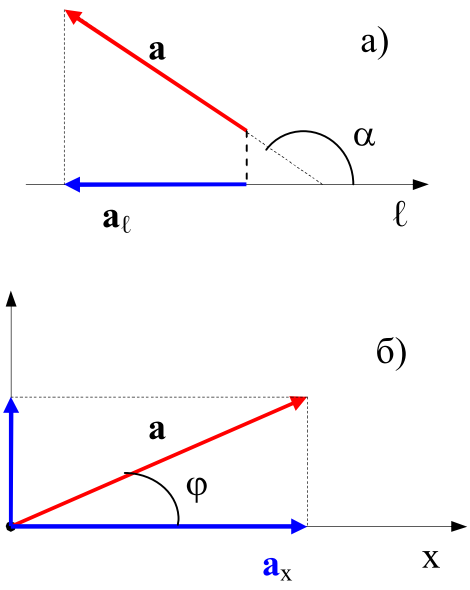


Рисунок В.2

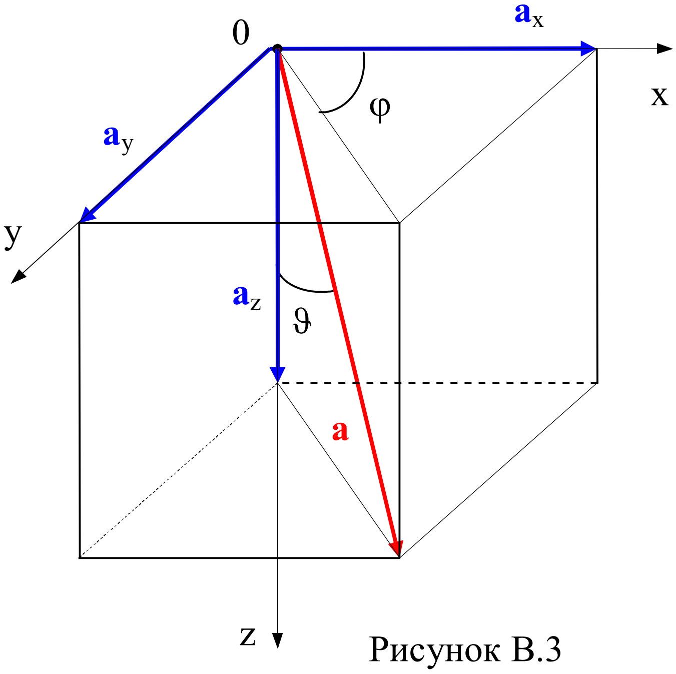


Рисунок В.3

Вектор называется нулевым, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определённого направления и имеет длину, равную нулю. Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной, или на параллельных прямых.

Операции с векторами.

1) Умножение вектора **a** на скаляр (вещественное число) λ даёт вектор **c**, имеющий длину, равную $|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора **a** ($\mathbf{c} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$) при $\lambda > 0$, и противоположное направление вектору **a** ($\mathbf{c} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$) при $\lambda < 0$. Если $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$, то $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

2) Сложение, вычитание векторов. Векторы складываются по правилу треугольника или по правилу параллелограмма, вычитаются по правилу треугольника (см. рисунок В.4). Чтобы из вектора **a** вычесть вектор **b**, можно к вектору **a** прибавить вектор $-\mathbf{b}$. Например, при сложении (вычитании) двух векторов имеем:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \mathbf{c}(c_x, c_y, c_z) = \mathbf{a}(a_x, a_y, a_z) + \mathbf{b}(b_x, b_y, b_z) = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}.$$

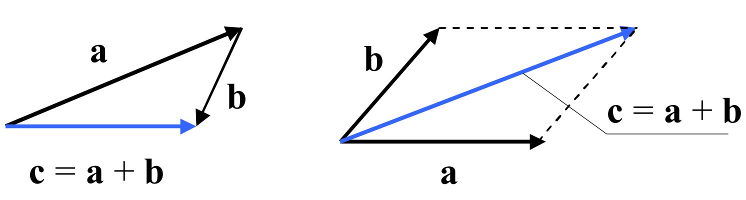


Рисунок В.4

Если число векторов больше двух, то их сумма может быть найдена по правилу замыкания ломаной до многоугольника: если приложить вектор $\mathbf{a}_2$ к концу вектора $\mathbf{a}_1$, вектор $\mathbf{a}_3$ к концу вектора $\mathbf{a}_2$,..., вектор $\mathbf{a}_n$ к концу вектора $\mathbf{a}_{n-1}$, то сумма

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n = \mathbf{c}$$

будет представлять вектор **c**, идущий из начала вектора $\mathbf{a}_1$ к концу вектора $\mathbf{a}_n$ (см. рисунок В.5).

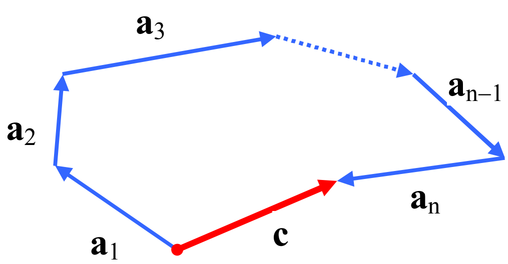


Рисунок В.5

Зная проекции вектора **a** на оси 0x и 0y прямоугольной системы координат (см. рисунок В.2б), можно найти вектор **a**, его модуль и угол между вектором и осью 0x:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \qquad \varphi = \mathrm{arctg}(a_y/a_x).$$

3) Скалярным произведением двух векторов **a** и **b** называют число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла α между ними (см. рисунок В.6):

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{b},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha = ab\cdot\cos\alpha.$$

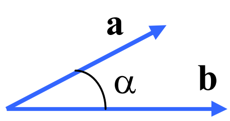


Рисунок В.6

Если два вектора **a** и **b** определены своими проекциями на оси координат, т.е. **a** = $\{a_x, a_y, a_z\}$; **b** = $\{b_x, b_y, b_z\}$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений соответствующих проекций на соответствующие оси координат:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z.$$

4) Векторным произведением векторов **a** и **b** называется вектор **c**, обозначаемый символом

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

с модулем, равным произведению длин векторов **a** и **b** на синус угла α между ними:

$$|\mathbf{c}| = c = ab\cdot\sin\alpha.$$

Вектор **c** перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы **a** и **b**, причём его направление связано с направлением векторов **a** и **b** правилом правого винта, т.е. если правый винт вращать от **a** к **b** в направлении кратчайшего поворота, то поступательное движение винта определяет направление вектора **c** (см. рисунок В.7). Поэтому **c** = **- b×a** = **- [b,a]**

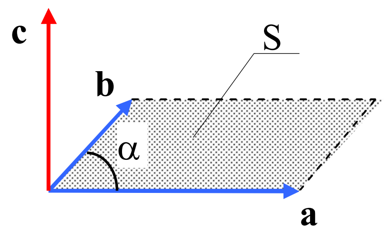


Рисунок В.7

Длина (или модуль) векторного произведения [**a,b**] равна площади S параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах **a** и **b**. Если **c** = = [**a,b**] = $\{c_x, c_y, c_z\}$, то составляющие (проекции) вектора **c** выражаются через составляющие (проекции) векторов **a** =$\{a_x, a_y, a_z\}$ и **b** = $\{b_x, b_y, b_z\}$ по правилу:

$$c_x = a_y\, b_z - a_z\, b_y;$$

$$c_y = a_z\, b_x - a_x\, b_z;$$

$$c_z = a_x\, b_y - a_y\, b_x.$$

Смешанные векторные произведения записываются так:

$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{b}\cdot[\mathbf{c},\mathbf{a}] = \mathbf{c}\cdot[\mathbf{a},\mathbf{b}]; \qquad [\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

6 Производная

Если некоторая непрерывная функция y = f(x) определена на некотором интервале, то всякое изменение x на Δx приводит к тому, что f изменится на Δf. D этом случае выражение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называется средней скоростью изменения функции на интервале значений аргументов от x до x + Δx. Данное отношение показывает, какое изменение Δf функции приходится на единичное изменение аргумента (т.е. как бы Δx = 1).

На интервале Δx функция f(x) может существенно менять свой ход (отличаться от хода линейной функции). Это значит, что на этом интервале скорость изменения функции будет меняться от места к месту. Но совершенно ясно, что всегда можно выбрать интервал Δx столь малым, что на нём ход функции f(x) практически будет неотличим от хода линейной функции. Такие интервалы значений аргументов будем называть элементарными (или малыми) и обозначать dx. Соответствующие изменения функции обозначают df и называют элементарными (или малыми). Такого рода малые величины dx, df. … называют ещё дифференциалами от величин x, f и т.д.

Величина $f' = \dfrac{df}{dx}$ называется первой производной функции y = f(x) по аргументу x, а ее смысл – ″мгновенная″ скорость изменения функции, т.е. по существу всё та же средняя скорость ее изменения, но на столь малом интервале dx, на котором f(x) не отличается существенно от хода линейной функции. Из сказанного ясно, что данную производную можно определить как предел отношения:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{df}{dx}=f'.$$

В приведённом примере для производной кроме y' можно использовать и другие обозначения:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=y'_x=f'_x.$$

Физический смысл производной. Производная

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

характеризует быстроту (скорость) изменения функции $f(x)$ при изменении аргумента x. В частности, если $y = f(x)$ представляет зависимость пути y от времени x, то в этом случае производная y' определяет мгновенную скорость в момент времени x. Если же, скажем, $y = f(x)$ определяет величину заряда y, протекающего через поперечное сечение проводника в зависимости от времени x, то в этом случае производная $y' = f'(x)$ определяет силу тока в момент времени x.

Геометрический (графический) смысл производной. Из рисунка В.8 видно, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\mathrm{tg}\alpha.$$

Отношение

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\mathrm{tg}\alpha_0=\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

называют угловым коэффициентом (см. рисунок В.9). Таким образом, по геометрическому смыслу $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\frac{df}{dx}$ суть тангенсы угла наклона секущей и "касательной" к графику f(x) соответственно. Таким образом, производная от f(x) по x геометрически характеризует крутизну графика f(x) в каждой точке x, которая нас заинтересует. Ясно, что из $f' = \dfrac{df}{dx}$ следует $df = f'dx$.

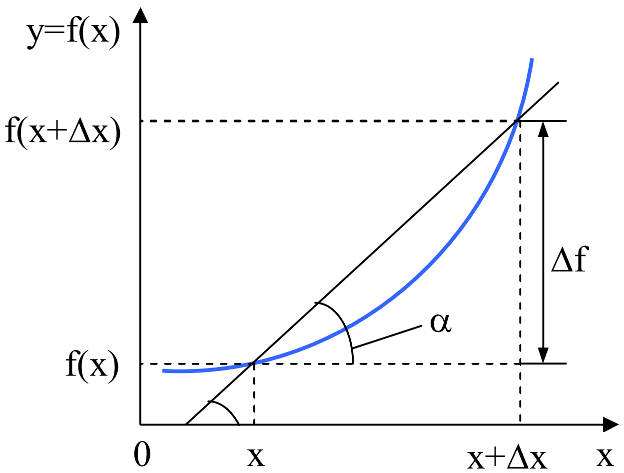


Рисунок В.8

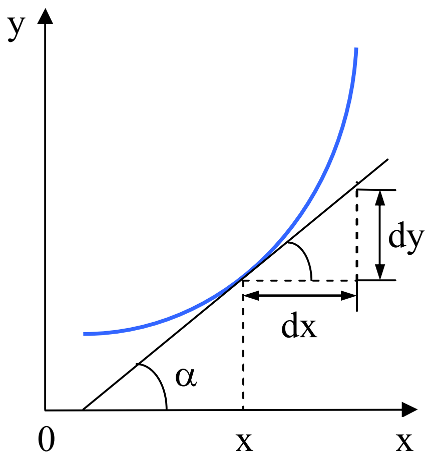


Рисунок В.9

Для сложной функции $f(x) = f(z(x))$ производная по аргументу x равна

$$f'_x = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Так, например, для f(x) = sinz, при z = kx, f(x) = sinkx, и

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}(\sin z) \cdot \frac{d}{dx}(kx) = \cos z \cdot k = \cos kx \cdot k = k \cdot \cos kx.$$

Производную от первой производной называют второй производной и обозначают

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = y''_{xx} = f''_{xx}.$$

В частности, если y = f(x) представляет зависимость пути y от времени x, то в этом случае вторая производная $y'' = f''(x)$ представляет собой ускорение точки в момент времени x.

Производные некоторых функций (C, A, k = const):

$C' = 0$	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(A\sin kx\right)' = Ak\cos kx$	$\left(U \pm V\right)' = U' \pm V'$
$\left(Ce^x\right)' = Ce^x$	$\left(Cx^n\right)' = Cnx^{n-1}$	$\left(A\cos kx\right)' = -Ak\sin kx$	$\left(U \cdot V\right)' = U'V + UV'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-(n+1)}$	$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$
$(tgx)' = 1/\cos^2 x$	$(ctgx)' = -1/\sin^2 x$	$(a^{Cx})' = C \cdot a^{Cx} \cdot \ln a$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
		$y'_x = [f(z(x))]'_x = f'_z \cdot z'_x$	

Пусть имеется некоторая функция f(x, y, z, t), где x, y, z, t – независимые переменные. Если менять какую-либо одну из переменных x, y, z или t при зафиксированных остальных переменных, то величины

$$\frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x.y, z, t)}{\Delta x}, \ldots, \frac{f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x.y, z, t)}{\Delta t} \qquad (*)$$

показывают, какова средняя скорость изменения f(x, y, z, t) на интервалах Δx, Δy, Δz, Δt, соответственно, т.е. показывают, насколько изменится f(x, y, z, t) при единичном изменении только одного из переменных x, y, z, t при зафиксированных остальных переменных. Если интервалы Δx, Δy, Δz, Δt столь малы, что на них ход функции f(x, y, z, t) не отличается существенно от хода линейной функции, то написанные соотношения (*) называются частными производными от f(x, y, z, t) по x, y, z, t, соответственно:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x.y, z, t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \ldots$$

Они обозначаются символами $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$. Смысл частных производных тот же, что и у отношений (*), т.е. они характеризуют быстроту изменения функции при изменении какого-либо одного из аргументов при постоянных значениях остальных аргументов. Для частных производных справедливы все свойства обычных производных. Конечно, вместо переменных x, y, z, t можно взять и другой набор переменных и в любом их количестве.

Если x, y, z являются функциями от t, то при изменении t от t до t + dt другие переменные x, y, z получат вполне определённые приращения dx, dy, dz. Величина

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \qquad (**)$$

называется полной производной от f по ее основному аргументу t и показывает, как быстро меняется f(x, y, z, t) с изменением ее основного аргумента t (при изменении которого меняются и остальные аргументы x, y, z). Возможен такой случай, когда какая-либо из переменных x, y, z или даже все они вместе не меняются при изменении t. Тогда соответствующие величины $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ или $\frac{\partial f}{\partial z}$ будут равны нулю, и равенство (**) становится «короче». При $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0$ оно принимает вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Возможен и такой случай, когда f не зависит от какой-либо из переменных x, y, z, t. Тогда соответствующая частная производная будет равна нулю и (**) опять «укоротится».

Отметим, что $\frac{\partial f}{\partial t}$ характеризует быстроту изменения f при x = const, y = const, z = const, т.е. при зафиксированной точке. Величина же $\frac{df}{dt}$ характеризует быстроту изменения f с учётом изменения x, y, z, т.е. действительно полную быстроту, в отличие от $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и т.д., где часть переменных зафиксирована, т.е. не меняется.

Отметим ещё один момент. Если имеется некоторая функция f(x, y, z, t), то величина

$$df = \frac{df}{dt}\cdot dt = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial t}dt =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz$$

называется полным дифференциалом от функции f. Слагаемые в правой части уравнения называются частными дифференциалами от f.

То, что сказано про производную и дифференциал скалярной функции f(x), вполне применимо и к векторной функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi)$, где φ – некоторый скаляр (см. п.1, п.2, п.3 данного пособия, например, **u** – радиус-вектор, φ – время). Это следует из того, что вместо функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi)$ мы можем всегда рассматривать $u_x(\varphi)$, $u_y(\varphi)$, $u_z(\varphi)$, а тогда при зафиксированных ортах **i**, **j**, **k** имеем:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(u_x\cdot\mathbf{i} + u_y\cdot\mathbf{j} + u_z\cdot\mathbf{k}).$$

7 Интеграл

Интегрированием называют математическую операцию, "обратную" дифференцированию (взятию производной). При интегрировании находят первообразную функцию – такую функцию, производная которой равна данной функции. Функция F(x) называется первообразной функцией для данной функции f(x), если функция F(x) дифференцируема и F′(x) = f(x). Данная функция f(x) может иметь различные первообразные функции, отличающиеся друг от друга на постоянные слагаемые. Поэтому совокупность всех первообразных функций для данной функции f(x) содержится в выражении F(x) + C, которое называют неопределённым интегралом от этой функции f(x) и обозначается символом:

$$\int f(x)dx,$$

где $\int$ – называется знаком интеграла;

f(x) – подынтегральной функцией;

f(x)dx – подынтегральным выражением.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C = const.

Неопределённые интегралы некоторых функций (A, C, k, a = const):

$\int 0 \cdot dx = C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int a dx = ax + C$	$\int AU(x)dx = A\int U(x)dx + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$,	$\int (U+V)dx = \int Udx + \int Vdx$	$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$
где $n \neq -1$	$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$	$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$

Пусть в интервале (а, в) изменения аргумента x определена непрерывная функция f(x). Разобьём интервал (а, в) на элементарные отрезки Δx_1, Δx_2, ... Δx_n. Составим сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i,$$

где каждое слагаемое $f(x_i)\cdot\Delta x_i$ представляет собой площадь прямоугольника со сторонами $f(x_i)$ и Δx_i (см. рисунок В.10).

Выражение

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^в f(x)dx$$

называется определённым интегралом от этой функции f(x).

Геометрический смысл определённого интеграла (рисунок В.11): $\int_a^в f(x)dx$ – определённый интеграл равен площади S криволинейной трапеции (площади фигуры под графиком функции f(x) при изменении аргумента x в интервале (а, в)).

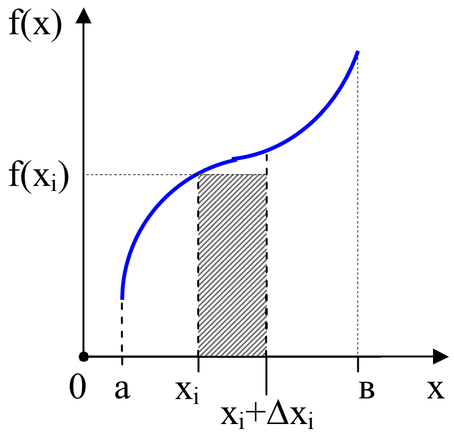


Рисунок В.10

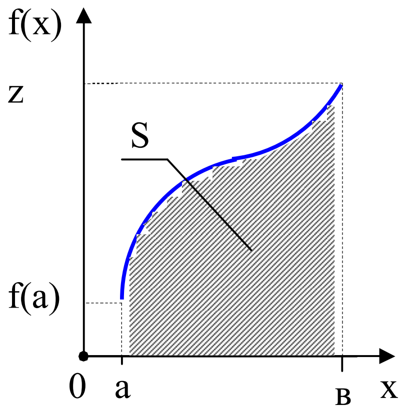


Рисунок В.11

Нужно отметить, что

$$\int_a^в f(x)dx = F(в) - F(a),$$

т.е. значение определённого интеграла от подынтегральной функции f(x) равно разности значений первообразной функции F(x) при значениях x = в и x = а, соответственно.

Например,

$$\int_a^в \cos x dx = \sin x\Big|_a^в = \sin в - \sin a.$$

Для определённых интегралов справедливы правила интегрирования, аналогичные соответствующим правилам для неопределённых интегралов.

Можно говорить и об интеграле от функции многих переменных, т.е. от функции f(x, y, z, t). При этом в интересующих нас случаях это интегралы типа

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \left[f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz\right].$$

Можно показать, что если величина

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

есть полный дифференциал от некоторой функции F(x, y, z), т.е. если

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = dF,$$

то значение интеграла

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dF$$

может быть выражено как разность функции F(x, y, z) на границах интегрирования, т.е.

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dF = F(\mathbf{r}_2) - F(\mathbf{r}_1).$$

Принято говорить, что в данном случае результат интегрирования не зависит от пути интегрирования между точками 1 и 2.

Если же f такова, что

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz \neq dF,$$

то результат интегрирования зависит от пути интегрирования. Это обычно (но не всегда!) означает, что f есть функция не только от x, y, z, но и от каких-то других переменных (например, от v_x, v_y, v_z, t и т.д).

Именно поэтому элементарная работа $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r}$ не является полным дифференциалом, т.е. $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r} \neq dA$. Это значит, величина работы зависит от формы траектории (от «формы пути»). Исключение составляет случай, когда $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ или, что то же самое $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, а тогда $\mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = d\Phi$ и тогда

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\Phi = \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1).$$

Вместо функции $\Phi(\mathbf{r})$ удобно использовать функцию $U(\mathbf{r}) = -\Phi(\mathbf{r})$, где $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия.

К вычислению определённых интегралов сводятся задачи об измерении площадей, объёмов тел, длин дуг кривых, задачи определения координат центров тяжести, моментов инерции, пути тела по известной скорости движения, работы производимой силой и т.п.

Приложение Г
(*справочное*)

Основные формулы по физике

$v=\dfrac{S}{t}$ при равномерном движении скорость v равна отношению пути S ко времени t.

$v_{ср.}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ $v_{ср.}$ – средняя скорость равна отношению пути ΔS к промежутку времени Δt, в течение которого этот путь был пройден.

$\mathbf{v}_{ср} = \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ $\mathbf{v}_{ср}$ – вектор средней скорости перемещения за время Δt, $\Delta \mathbf{r}$ – вектор перемещения.

$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'_t$ **v** – вектор мгновенной скорости равен производной от перемещения по времени.

$v = \dfrac{dS}{dt} = S'_t$ v – модуль мгновенной скорости равен производной от пути по времени.

$\boldsymbol{a}_{ср} = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ $\boldsymbol{a}_{ср}$ – вектор среднего ускорения равен отношению изменения скорости $\Delta \mathbf{v}$ к промежутку времени Δt, за которое это изменение произошло.

$\boldsymbol{a}=\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{v}'_t$ мгновенное ускорение равно производной от скорости по времени

$a_\tau=\dfrac{dv}{dt}=v'_t$ тангенциальное (касательное) ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю и направлено по касательной к траектории в данной точке.

$a_n=\dfrac{v^2}{R}$ нормальное (центростремительное) ускорение a_n характеризует быстроту изменения скорости по направлению и направлено к центру кривизны траектории. R – радиус кривизны траектории, v – скорость. (при равномерном вращении по окружности a_n – центростремительное ускорение, R – радиус окружности).

$R = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \dfrac{dS}{d\varphi}$ R – радиус кривизны в данной точке кривой, $\Delta\varphi$ – угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на элементе участка траектории ΔS.

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau$ **a** – полное ускорение при криволинейном движении;

$a=\sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ a_n, a_τ – нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.

$\mathrm{tg}\alpha = a_n/a_\tau$ α - угол между векторами полного ускорения и скорости.

$x(t)=x_0 + v_0 \cdot t$ кинематическое уравнение равномерного движения со скоростью v_0 вдоль оси x, x_0 - начальная координата, t - время.

$x(t)=x_0 + v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} a t^2$ кинематическое уравнение равнопеременного движения (a=const) вдоль оси x, v_0 - начальная скорость. Значения v_0 и a – положительны, если векторы $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{a}$ направлены в сторону положительной полуоси x, и отрицательны в противном случае.

$S=v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} a t^2$

$v=v_0 + a \cdot t$

S – путь и v – мгновенная скорость при равнопеременном движении, v_0 – начальная скорость, a – ускорение, t – время.

$S = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a}$ кинематическое уравнение, связывающее путь S, пройденный телом за некоторое время, с начальной – v_0 и конечной – v скоростями на этом отрезке пути, с ускорением a.

$H = \dfrac{gt^2}{2}$; $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$;

$h(t)=H - \dfrac{gt^2}{2}$;

$v = gt = \sqrt{2gH}$

свободное падение ($v_0 = 0$) тела с высоты H: t – время падения; g – ускорение свободного падения; v – скорость тела в момент достижения поверхности (Земли), h(t) – высота в момент времени t.

$y(t) = H - \frac{gt^2}{2}$; $x(t) = v_0 \cdot t$; $t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$; $L = v_0 t_0$; $v_x = v_0$; $v_y = gt$; $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ – движение тела, брошенного горизонтально со скоростью v_0 с высоты H: $x_0 = 0$ и $y_0 = H$ – начальное положение тела (в момент броска); x(t) и y(t) – уравнения движения по осям; t_0 – время полета; L – дальность полета; v_x и v_y – составляющие скорости **v** тела по осям координат для любого момента времени t во время полета (до удара о поверхность).

$v_{ox} = v_0 \cdot \cos\alpha$; $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$; $x(t)=v_{ox} \cdot t$; $y(t)=v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2$; $v_x(t)=v_{ox}$; $v_y(t) = v_{oy} - gt$; $H = \frac{v_{0y}^2}{2g}$; $t_0 = \frac{2v_{0y}}{g}$; $L = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$ – движение тела, брошенного со скоростью v_0 под углом α к горизонту: $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ – начальное положение тела (в момент броска); v_{ox} и v_{oy} – проекции скорости $\mathbf{v}_0$ по осям; x(t) и y(t) – уравнения движения по осям; $v_x(t)$ и $v_y(t)$ – зависимость составляющих скорости по осям от времени t; H – высота подъема, t_0 – время полета; L – дальность полета.

$\nu = \frac{N}{t}$; $T = \frac{t}{N}$; $\nu = T^{-1}$; $T = \nu^{-1}$ – при равномерном вращательном движении: ν – частота вращения, T – период вращения, N – число оборотов за время t.

$\omega = \frac{\varphi}{t}$; $N = \frac{\varphi}{2\pi}$; $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ – ω – угловая скорость при равномерном вращении: φ – угол поворота, N – число оборотов за время t; ν – частота вращения, T – период вращения.

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_t'$ – ω – угловая скорость равна производной угла поворота по времени.

$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega_t'$ – ε – угловое ускорение равно производной угловой скорости по времени.

$S=R\cdot\varphi$ — S – путь, пройденный материальной точкой при повороте на угол φ по дуге окружности радиуса R.

$v=\omega\cdot R=\dfrac{2\pi R}{T}=2\pi R\nu$ — связь между линейной и угловой скоростями при равномерном вращательном движении

$a_t=\varepsilon\cdot R;$

$a_n=\omega^2\cdot R=\dfrac{v^2}{R}=v\cdot\omega$ — a_n и a_t – нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.

$\varphi(t)=\varphi_0+\omega_0\cdot t$ — кинематическое уравнение равномерного вращения, φ_0 – начальное угловое положение.

$\varphi(t)=\varphi_0+\omega_0\cdot t+\dfrac{\varepsilon\cdot t^2}{2}$ — кинематическое уравнение равнопеременного вращения (ε=const), ω_0 – начальная угловая скорость.

$\omega(t)=\omega_0+\varepsilon\cdot t$

$\varepsilon=\dfrac{\omega-\omega_0}{t}$ — ω – мгновенная угловая скорость при равнопеременном вращении в момент времени t, ω_0 – начальная угловая скорость, ε – угловое ускорение.

$\varphi=\dfrac{\omega^2-\omega_0{}^2}{2\varepsilon}$ — кинематическое уравнение, связывающее угол поворота φ с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями и с угловым ускорением ε.

$\rho=\dfrac{m}{V}$ — ρ – плотность тела, m – масса, V – объем тела.

$\mathbf{p}=m\cdot\mathbf{v}$ — $\mathbf{p}$ – импульс тела – векторная величина, равная произведению массы m тела на его скорость $\mathbf{v}$.

$\mathbf{F}=m\boldsymbol{a}=m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt};\ \mathbf{F}=\dfrac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{p}'_t$ — второй закон Ньютона: m – масса тела, $\mathbf{F}$ – равнодействующая всех приложенных к телу сил, $\boldsymbol{a}$ – ускорение, $\mathbf{p}$ – импульс тела.

$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$. принцип суперпозиции для силы – если на рассматриваемое тело действует несколько сил, то его движение будет таким же, как если бы на тело действовала результирующая сила, равная векторной сумме отдельных сил.

$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ третий закон Ньютона: силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и противоположно направлены.

$F_{упр} = -k\Delta l$; $\sigma = \varepsilon \cdot E$; $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$; $\sigma = \dfrac{F}{S}$; $\Delta l = l - l_0$

закон Гука: сила упругости $F_{упр}$ пропорциональна удлинению тела (пружины) Δl и направлена в сторону, противоположную направлению перемещений частиц тела при деформации; k – коэффициент пропорциональности (жесткость пружины); σ – механическое напряжение; S – площадь поперечного сечения образца, к которому приложена сила F; E – модуль Юнга (упругости); ε – относительное удлинение; l_0 – начальная длина.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

закон всемирного тяготения: два тела притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между их центрами масс; G – гравитационная постоянная. В такой форме записи закон справедлив для взаимодействия материальных точек и однородных тел сферической формы.

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$$
$$g(h) = g\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$$

g(h) – ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью планеты, M и R – масса и радиус планеты; g – ускорение свободного падения у поверхности планеты (без учета вращения планеты), т.е. $g = G\dfrac{M}{R^2}$.

$F_{тр.} = \mu \cdot N$ сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя $F_{тр.}$, пропорциональной силе нормального давления N (реакции опоры); μ – коэффициент трения.

$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ P – сила тяжести, m – масса тела, g – ускорение свободного падения.

$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{gR}$ v_1 – первая космическая скорость: M и R – масса и радиус планеты, G – гравитационная постоянная, g – ускорение свободного падения на поверхности планеты.

$v = v_1\sqrt{\frac{R}{r}}$ местная первая космическая скорость движения по окружности радиусом r. Так как r > R, то $v < v_1$.

$T = 2\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}\left(\frac{R}{g}\right)^{1/2}$ период обращения спутника по орбите радиусом r; R – радиус планеты; r > R.

$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$ или $\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}$ частная форма третьего закона Кеплера – отношение квадратов периодов вращения двух спутников равно кубу отношения радиусов круговых орбит.

$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{mgR^2}{2r}$. полная энергия E спутника на круговой орбите радиусом r равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

$v_2 = v_1\sqrt{2} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$. v_2 – вторая космическая (или параболическая) скорость, v_1 – первая космическая скорость.

$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{u}\frac{dm}{dt}$ уравнение Мещерского (уравнение движения тела с переменной массой). **F** – геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету, **u** – скорость истечения газов относительно ракеты, dm/dt – масса сгоревшего топлива, которое выбрасывается из ракеты за единицу времени.

$v = v_0 - u\cdot\ln\frac{m}{m_0}$ формула Циолковского. m_0 – начальная масса ракеты, m – масса в конце ускорения, скорость газовой струи **u**. Скорость ракеты в начале и в конце ускорения – v_0 и v, соответственно.

$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\alpha$ — ΔA – элементарная работа равна скалярному произведению силы $\mathbf{F}$ на перемещение $\Delta\mathbf{r}$, α – угол между $\mathbf{F}$ и $\Delta\mathbf{r}$.

$P_{ср.} = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$ — мощность равна работе, совершаемой в единицу времени: $P_{ср}$ - средняя мощность за время Δt.

$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F\cdot v\cdot\cos\alpha$ — мгновенная мощность P равна скалярному произведению силы $\mathbf{F}$ на скорость $\mathbf{v}$, с которой движется точка приложения силы, α – угол между $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$.

$E_K = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$ — E_K - кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v, p - импульс тела.

$A = E_{K2} - E_{K1}$ — работа равнодействующей силы равна изменению кинетической энергии тела (при условии постоянства потенциальной энергии).

$A = -\Delta E_П$ — работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии (при условии постоянства кинетической энергии).

$E_П = m\,g\cdot h$ — потенциальная энергия тела в однородном поле тяготения: h - высота над поверхностью Земли (высота от нулевого уровня), g - ускорение свободного падения, m - масса тела.

$E_П = \dfrac{k\cdot(\Delta l)^2}{2}$ — потенциальная энергия упруго деформированного тела (пружины).

$E_П = -G\cdot\dfrac{m_1\cdot m_2}{R}$ — потенциальная энергия взаимодействия двух тел массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии R друг от друга; G – гравитационная постоянная.

$\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\cdot\mathbf{v}_i = const$ — закон сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой системы остается постоянным (по величине и направлению) при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.

$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \mathbf{F}\cdot\Delta t$; $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}\cdot\Delta t$ — изменение импульса тела $\Delta\mathbf{p}$ за время Δt равно импульсу равнодействующей силы $\mathbf{F}\cdot\Delta t$.

$E=E_К + E_П$ — полная механическая энергия материальной точки (тела) равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

$E=E_К + E_П=const$ — закон сохранения полной механической энергии: полная механическая энергия замкнутой системы тел остается постоянной при любых движениях тел системы, если в системе не действуют диссипативные силы.

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2;$$
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$
законы сохранения импульса и энергии при центральном абсолютно упругом ударе двух тел (шаров).

$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{u}$ — закон сохранения импульса при центральном абсолютно неупругом ударе двух тел.

$$\Delta E_К=Q=\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2$$
изменение кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе (часть ее переходит в «тепловую» форму энергии).

$$\eta=\frac{A_{пол}}{A_{затр}}=\frac{P_{пол}}{P_{затр}};$$
$$\eta=\frac{A_{пол}}{A_{затр}}\cdot 100\,\%=\frac{P_{пол}}{P_{затр}}\cdot 100\%$$
коэффициент полезного действия механизмов равен отношению полезной работы $A_{пол}$ (полезной мощности $P_{пол}$) к затраченной $A_{затр}$ (затраченной – $P_{затр}$).

$$\frac{dE_п}{dx} = (E_п)_x{}' = 0$$
условие равновесия - экстремальное значение потенциальной энергии (для случая одномерной задачи, когда $E_п$ зависит только от координаты x, т.е. когда $E_п = E_п(x)$).

$$\frac{d^2E_п}{dx^2} = (E_п)_{xx}{}'' > 0$$
условие устойчивого равновесия

Приложение Д
(справочное)

Таблицы физических величин

Таблица Д.1 - Астрономические величины

Физические параметры	Солнце	Земля	Луна
Масса, кг	$1{,}97\cdot10^{30}$	$5{,}96\cdot10^{24}$	$7{,}33\cdot10^{22}$
Радиус, м	$6{,}95\cdot10^{8}$	$6{,}37\cdot10^{6}$	$1{,}74\cdot10^{6}$
Средняя плотность, кг/м^3	1 400	5 518	3 350
Среднее расстояние от Земли, км	$1{,}496\cdot10^{8}$	-	384 440
Период обращения вокруг оси, сутки	25,4	1,00	27,3

Планета Солнечной системы	Среднее расстояние от Солнца, 10^6 км	Период обращения вокруг Солнца, в годах	Масса в единицах массы Земли
Меркурий	57,87	0,241	0,056
Венера	108,14	0,615	0,817
Земля	149,50	1,000	1,000
Марс	227,79	1,881	0,108
Юпитер	777,8	11,862	318,35
Сатурн	1426,1	29,458	95,22
Уран	2867,7	84,013	14,58
Нептун	4494	164,79	17,26

Таблица Д.2 - Упругие постоянные. Предел прочности

Материал	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа	Коэффициент Пуассона μ	Предел прочности на разрыв $\sigma_{пч}$, ГПа	Сжимаемость β, ГПа$^{-1}$
Алюминий	70	26	0,34	0,10	0,014
Медь	130	40	0,34	0,30	0,007
Свинец	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Сталь (железо)	200	81	0,29	0,60	0,006
Стекло	60	30	0,25	0,05	0,025
Вода	-	-	-	-	0,49

Таблица Д.3 - Плотность вещества (кг/м^3)

	Твердое вещество		
Алмаз	3 500	Манганин	8 400
Алюминий	2 700	Марганец	7 800
Барий	3500	Медь	8 900
Бериллий	1 840	Мрамор	2 700
Бор	2 400	Молибден	10 200
Бром	3 120	Натрий	970
Бронза	8 700	Нейзильбер	8 600
Ванадий	6 020	Никель	8 900
Висмут	9 800	Олово	7 400
Вольфрам	19 100	Парафин	900
Гранит	2 600	Платина	21 500
Графит	2 100	Пробка	240
Золото	19 300	Сахар	1 590
Исландский шпат	2 710	Свинец	11 300
Кадмий	8 650	Серебро	10 500
Калий	870	Слюда	2 900
Кварц	2 650	Соль поваренная	2 100
Кобальт	8 900	Сталь (железо)	7 800
Каменная соль	2 200	Стекло	2 400
Каменный уголь	1 350	Титан	4 500
Константан	8 800	Уран	19 000
Латунь	8 500	Фарфор	2 300
Лёд	900	Цезий	1 900
Литий	530	Цинк	7 000
Магний	1 740	Эбонит	1 800
	Жидкости		
Ацетон	792	Сероуглерод	1 260
Бензол	880	Скипидар	858
Бензин	700	Спирт этиловый	789
Вода	1 000	Соленая вода	1 030
Глицерин	1 260	Толуол	870
Керосин	800	Тяжелая вода	1 100
Касторовое масло	900	Уксусная кислота	1 049
Нефть	900	Хлороформ	1 483
Ртуть	13 600	Эфир	720
	Газы (при нормальных условиях)		
Азот	1,25	Кислород	1,43
Аммиак	0,77	Метан	0,72
Водород	0,09	Неон	0,9
Воздух	1,293	Углекислый газ	1,98
Гелий	0,18	Хлор	3,21