Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
″Оренбургский государственный университет″

Факультет дистанционных образовательных технологий

Университетская физическая школа

А.А. Чакак

ФИЗИКА

Выпуск 2
Динамика механического движения

Рекомендовано к изданию Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования ″Оренбургский государственный университет″ в качестве учебного пособия для учащихся Университетской физической школы

Оренбург
ОГУ
2012

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я 73
Ч 16

Рецензенты
доцент, кандидат педагогических наук М.А. Кучеренко
ст. преподаватель ОГУ А.В. Михайличенко

Чакак, А.А.
Ч 16 Физика. Выпуск 2. Динамика механического движения: учебное пособие для учащихся Университетской физической школы / А.А. Чакак; Оренбургский государственный университет – Оренбург: ОГУ, 2012. – 113 с.
ISBN

Учебное пособие содержит краткое изложение основных вопросов школьной программы по динамике механического движения, примеры решения задач для пояснения теоретического материала, методические указания и задания для учащихся, обучающихся дистанционно и готовящихся к ЕГЭ по физике. В приложении к пособию имеются справочные материалы по математике, которые могут понадобиться при выполнении практических заданий. Пособие может оказаться полезным для старшеклассников при самостоятельном изучении отдельных разделов курса физики. Может быть использовано на занятиях в школе и в физических кружках.

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я 73

ISBN

Содержание

Предисловие

Уважаемые учащиеся УФШ ОГУ!

Вам предстоит выполнить задание по теме «Динамика механического движения», и мы надеемся, что Вы успешно справитесь с этой нелёгкой задачей. Перед началом работы Вам следует внимательно изучить изложенные ниже правила и руководствоваться ими при выполнении задания.

Данный выпуск состоит из задания, посвященного теме «Динамика механического движения». Задание состоит из 25 задач, имеющих различный уровень сложности, который указан в скобках после номера задачи.

Пример. Номер 2(3) задания имеет 2-я задача 3-го уровня сложности.

Первый уровень сложности имеют наиболее простые задачи. С усложнением номер уровня повышается, но даже для задач максимального 3-го уровня сложности решение не требует знаний, выходящих за рамки школьного курса физики.

При выполнении задания Вы должны самостоятельно выбрать ***ровно 10 задач***, решения которых Вы должны выслать в УФШ.

При выборе задач для решения мы советуем руководствоваться Вашим уровнем подготовки и целями, которые Вы ставите перед собой: научиться решать задачи, подготовиться к выпускным экзаменам в школе и к ЕГЭ, к вступительным экзаменам в ВУЗ и т.п. Одним из условий успешного образования является непрерывное, но постепенное овладение новыми знаниями и методами решения задач. Поэтому не стоит выбирать для решения задачи, которые кажутся Вам либо очень лёгкими, либо очень сложными. По мере углубления Вашего понимания физики старайтесь увеличивать уровень сложности задач.

Внимание! 1. Оценка Вашей работы не зависит от уровня сложности задач. 2. При знакомстве с теоретическим введением к пособию вывод основных соотношений можно опустить в случаях, когда использованный математический аппарат не знаком (например, операции с векторами, производные и интегралы). В таких случаях Вам рекомендуется сначала изучить материал из Приложений к пособию.

Обязательные требования:

1. Число высылаемых на проверку задач в задании не должно быть ***меньше 10.*** В противном случае нам будет трудно оценить Вашу работу, и в любом случае оценка будет снижена. Не бойтесь высылать решения, в которых Вы не уверены. Один из наилучших методов обучения – анализ собственных ошибок.

2. Число высылаемых на проверку задач в задании не должно быть ***больше 10.*** В Вашей работе будут проверены и оценены ***только 10 задач***, которые в этом случае преподаватель выберет сам.

3. При оформлении решений не забывайте:

- нумеровать задачи и страницы листов с решениями;
- записывать полный ответ;
- условия задач приводить в краткой общепринятой форме;
- подробно пояснять введённые Вами обозначения физических величин в тексте решения и на рисунках.

Будем благодарны читателям за любые отзывы и замечания.

Желаем успехов!

Рекомендации по выполнению заданий

Методы и приемы решения задач весьма разнообразны, однако при решении задач целесообразно руководствоваться следующими основными правилами:

– разобраться в условии задачи;

– если позволяет характер задачи, обязательно сделать схематический рисунок и/или график(и), поясняющие сущность задачи;

– представить физическое явление или процесс, о котором говорится в условии. Выяснить: какие теоретические положения связаны с рассматриваемой задачей в целом и с ее отдельными элементами; какие физические законы и их следствия можно применять для решения; какие физические модели и идеализации использованы в условии, а какие могут быть применены при решении;

– отобрать законы, их следствия, соотношения, с помощью которых можно описать физическую ситуацию задачи. Выявить причинно-следственные связи между заданными и неизвестными величинами, установить математическую связь между ними;

– на основании отобранных законов и их следствий записать уравнение (систему уравнений), выражающее условие задачи. Векторные уравнения записать в проекциях на оси координат;

– преобразовать (решить) составленные уравнения так, чтобы искомая величина была выражена через заданные и табличные данные в аналитическом виде, т.е. получить расчётную формулу в общем виде (в буквенных обозначениях). Проводить промежуточные численные расчёты нецелесообразно. Эти расчёты, как правило, являются излишними, так как часто окончательное выражение для искомой физической величины имеет простой вид. Следует также иметь ввиду, что при промежуточных расчётах увеличивается вероятность допустить ошибку;

– получив ответ в аналитическом виде, проверить полученное решение с помощью анализа размерностей. Неверная размерность однозначно указывает на допущенную при решении ошибку;

– подставить числовые значения в определённой системе единиц (предпочтительнее использовать Международную систему единиц – СИ) и провести вычисления. Получив численное значение искомой величины, обязательно указывайте ее размерность;

– оценить правдоподобность ответа, продумать, разумным ли получилось численное значение искомой величины (так, скорость тела не может быть больше скорости света в вакууме, дальность полёта камня, брошенного человеком, не может быть порядка 1 км и т.д.).

В любом деле самое трудное – начало. Многие неудачи объясняются тем, что начинают решать наугад, на "авось". Следует потратить несколько минут на тщательный анализ особенностей условия задачи и ее цели. Это поможет выбрать правильное направление поиска решения. Приняв же бездумно шаблонный путь, можно рисковать увеличить объём ненужной работы и вероятность появления ошибок.

Хороший рисунок часто помогает в формировании идеи решения. Рисунок должен быть достаточно крупным, чтобы не было риска запутаться в наслоении линий. Нужно избегать частных случаев, например, прямоугольный или равнобедренный треугольник и т.п., так как они могут направить мысль по ошибочному пути.

Изучив условие, не следует заострять внимание на искомой величине и пытаться сразу ее найти. Только план решения позволяет записать условие с помощью уравнений и свести, таким образом, задачу от физической к математической.

Основные определения, законы и соотношения

В кинематике изучается механическое движение, зависимость физических величин, описывающих механическое движение тел, от времени и взаимосвязь между ними при различных видах движения без учёта причин, вызывающих это движение. В динамике изучаются причины возникновения и изменения движения материальных тел с учётом приложенных к ним сил, которые определяют тот или иной характер движения, и их инертности (масс). В основе динамики лежат три закона Ньютона, сформулированные им в 1687 г. Законы Ньютона появились как результат обобщения многочисленных наблюдений, опытов и теоретических исследований Г.Галилея, Х.Гюйгенса, самого Ньютона и др.

Механика Галилея-Ньютона называется классической (нерелятивистской) механикой. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света c в вакууме ($c = 3\cdot10^8$ м/с). Макроскопическими называют тела, состоящие из множества молекул; макроскопические тела не всегда можно принимать за материальные точки.

Законы движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью c, изучаются в релятивистской механике, основанной на специальной теории относительности, сформулированной Эйнштейном (1879–1955). Движение микрочастиц изучается в квантовой механике. В этом выпуске мы будем изучать классическую механику, т.е. движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света c в вакууме.

1 Первый закон Ньютона. Масса и импульс тела. Сила

В качестве первого закона динамики Ньютон принял закон, установленный ещё Галилеем: всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния. Первый закон Ньютона показывает, что состояние покоя или равномерного прямолинейного движения не требует для своего поддержания каких-либо внешних воздействий. В этом проявляется особое динамическое свойство тел, называемое инертностью. Соответственно, первый закон Ньютона называют законом инерции, а движение тела в отсутствие воздействий со стороны других тел – движением по инерции.

Систему отсчёта, в которой выполняется первый закон Ньютона, называют инерциальной. Следовательно, инерциальными являются такие системы отсчёта, относительно которых материальная точка при отсутствии на нее внешних воздействий или их взаимной компенсации покоится или движется равномерно и прямолинейно. Любая система отсчёта, движущаяся равномерно и прямолинейно по отношению к инерциальной системе, также является инерциальной.

Система отсчёта, движущаяся по отношению к инерциальной системе отсчёта с ускорением, неинерциальна, и закон инерции в ней не выполняется. Реальная система отсчёта всегда связывается с каким-нибудь конкретным телом (Солнцем, Землёй, корпусом корабля или самолёта и т.п.), по отношению к которому и изучается движение различных тел. Поскольку все реальные тела движутся с тем или иным ускорением, любая реальная система отсчёта может рассматриваться как инерциальная система отсчёта лишь с определённой степенью приближения. Например, система отсчёта, связанная с поверхностью Земли, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Первый закон Ньютона утверждает, что существуют такие системы отсчёта, находясь внутри которых все свободные тела независимо от их физических параметров будут двигаться равномерно и прямолинейно или покоиться. Это означает, что наблюдение за свободными телами в инерциальной системе отсчёта не позволяет определить скорость этой инерциальной системы отсчёта.

Инертность – свойство тел оказывать противодействие попыткам изменить его состояние движения, т.е. при воздействии на данное тело другого скорость данного тела изменяется не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени, и изменение скорости зависит от инертности тела.

Мерой инертности тела является масса – скалярная величина, определяющая инертные (и гравитационные) свойства тела. В классической механике масса тела служит мерой содержащегося в теле вещества, и имеют место законы сохранения и аддитивности массы: масса изолированной системы тел не меняется со временем и равна сумме масс тел, составляющих эту систему.

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Силой называют векторную величину, являющуюся мерой механического действия на данное тело других тел, в результате которого тело изменяет своё движение. Механическое взаимодействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами (например, при трении, при давлении тел друг на друга), так и между удалёнными телами (например, через гравитационное поле). Действие силы сопровождается деформацией взаимодействующих тел, и величину силы можно оценивать по величине имеющей место деформации или по величине ускорения **a** тела, на которое она действует.

Если материальная точка взаимодействует со многими телами, то их действие можно заменить действием одной силы, которая является равнодействующей всех приложенных к материальной точке сил. Равнодействующую всех сил находят как векторную сумму всех приложенных к материальной точке сил:

$$\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i. \qquad (1.1)$$

Сила характеризуется и точкой приложения. При описании поступательного движения точки приложения всех сил, действующих на данное тело, считаются совпадающими. В этом случае точки приложения сил можно переносить вдоль прямой действия сил. Если тело можно рассматривать как недеформируемое (абслютно твёрдое), то силу также можно считать приложенной в любой точке на линии ее действия.

Всё многообразие сил, наблюдамых в окружающем нас мире, сводится к четырём типам взаимодействий. Слабое (или распадное) взаимодействие наблюдается при превращениях элементарных частиц. Сильное (или ядерное) взаимодействие имеет место внутри атомных ядер и играет преобладающую роль в структуре строения ядер. Электромагнитное взаимодействие связано с наличием у взаимодействующих частиц (тел) электрического заряда и играет роль в структуре строения атомов и молекул. Гравитационное взаимодействие связано с наличием у взаимодействующих тел массы и играет преобладающую роль в структуре строения космических объектов типа Солнечной системы, галактик и т.д.

Массу материальной точки (произвольного тела) можно определить следующим образом. Под действием силы материальная точка изменяет свою скорость не мгновенно, а постепенно, т.е. приобретает конечное по величине ускорение, которое тем меньше, чем больше масса материальной точки. Если два тела с разными массами m_1 и m_2 испытывают одинаковые воздействия ($F_1 = F_2$), то тела движутся с ускорениями, обратно пропорциональными их массам:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}. \qquad (1.2)$$

Таким образом, сравнение масс двух тел, на которые действует одна та же сила, сводится к сравнению ускорений этих тел. Взяв некоторое тело за эталон массы, можно сравнивать массу любого тела с этим эталоном. В физике в качестве основной единицы массы принят килограмм. Килограмм есть масса эталонной гири из платиноиридиевого сплава, хранящейся в Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов. Это тело называют международным прототипом килограмма. Масса прототипа близка к массе 1 л воды при 4 ^{0}С.

Плотность – величина, характеризующая инертные свойства вещества, из которого изготовлено тело, и для однородного тела равна массе единицы объёма тела:

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad [\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{кг}{м^3}, \qquad (1.3)$$

где m и V – масса и объём тела, соответственно.

Зная плотность ρ и объём V тела, можно определить массу тела: m = ρV.

Импульсом или количеством движения называют вектор **p**, равный произведению массы материальной точки (тела) на ее скорость:

$$\mathbf{p} = m\cdot\mathbf{v}. \qquad (1.4)$$

Импульсом системы материальных точек называют векторную сумму импульсов отдельных материальных точек, из которых эта система состоит:

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i = \sum m_i \cdot \mathbf{v}_i\,. \qquad (1.5)$$

2 Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона (динамики): ускорение, с которым движется тело, прямо пропорционально равнодействующей **F** всех сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально массе m тела:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\sum \mathbf{F}_i}{m}; \qquad \mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{F}. \qquad (2.1)$$

Из второго закона Ньютона **F** = m**a** следует, что: 1) направления ускорения тела и действующей на это тело силы совпадают; 2) ускорение пропорционально силе; 3) ускорение обратно пропорционально (инертной) массе m тела. Уравнение (2.1) также называют уравнением движения материальной точки.

Согласно современным представлениям и терминологии, в 1-м и 2-м законах Ньютона под телом следует понимать материальную точку, а под движением – движение относительно инерциальной системы отсчёта.

Единица силы в СИ – ньютон (Н): 1 Н – сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы: 1 Н = 1 кг·м/с^2. В технике широко применяют внесистемную единицу измерения силы (веса) – килограмм-сила (обозначают кгс или кГ. Килограмм-сила определяется как сила, сообщающая телу массы 1 кг ускорение, равное 9,80665 м/с^2. Из этого определения следует, что 1 кгс = 9,80665 Н (точно) или 1 кгс = 9,81 Н (приближённо). Значение веса тела в кгс (кГ) численно совпадает с массой в кг (например, нам в магазине продукты взвешивают в кГ). Измерение силы производят статическими или динамическими методами. Динамический метод основан на втором законе Ньютона. Статический метод основан на уравновешивании измеряемой силы другой, заранее известной.

Принцип независимости действия сил: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было, т.е. действие каждой силы можно рассматривать независимо от действия остальных сил:

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m}, \qquad \text{и} \qquad \Sigma\mathbf{a}_i = \mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}_i}{m}. \tag{2.2}$$

Из этого принципа следует принцип суперпозиции, – при действии на данное тело нескольких сил его движение будет таким же, как если бы на тело действовала результирующая сила, равная векторной сумме отдельных сил (см. формулу (1.1)).

Так как математические действия над векторами удобно сводить к действиям над проекциями, то векторное уравнение

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_i \tag{2.3}$$

эквивалентно трём скалярным уравнениям:

$$ma_x = \Sigma F_{ix}\,; \qquad ma_y = \Sigma F_{iy}\,; \qquad ma_z = \Sigma F_{iz}\,, \tag{2.4}$$

где a_x, a_y, a_z, F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – соответственно прекции вектора ускорения и векторов сил на три взаимноперпендикулярные оси 0x, 0y, 0z.

При решении многих задач достаточно составить выражение второго закона Ньютона для одного (в случае одномерного движения – вдоль прямой линии) или двух взаимноперпендикулярных направлений (в случае плоского движения – на плоскости).

В случае равнопеременного движения скорость **v** спустя промежуток времени Δt после начала движения с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$ принимает значение:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\Delta t, \qquad (2.5)$$

откуда выразим ускорение **a** и подставим в (2.3)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{\Delta t} = \frac{m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0}{\Delta t} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}, \qquad (2.6)$$

где m – масса тела,

$\mathbf{p}_0$ – импульс тела в начальный момент времени,

p – импульс тела спустя время Δt после начала движения,

$\Delta\mathbf{p}$ – приращение импульса за время Δt.

Полученное выражение $\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$ представляет собой более общую форму записи второго закона Ньютона (см. уравнения (2.1) и (2.3)): ″Изменение импульса пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует″ (формулировка, данная И.Ньютоном). Из (2.6) следует, что приращение импульса $\Delta\mathbf{p}$ за время Δt равно импульсу силы $\mathbf{F}\cdot\Delta t$:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\cdot\Delta t. \qquad (2.7)$$

Если сила за время ее действия не остаётся постоянной, то выражение (2.7) справедливо только для таких малых промежутков времени, за которые силу **F** можно считать постоянной (по модулю и по направлению).

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчёта. Первый закон Ньютона можно получить из второго. Действительно, в случае равенства нулю равнодействующей силы (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение (см. уравнение (2.1)) также равно нулю. Однако первый закон Ньютона рассматривается как самостоятельный закон (а не как следствие второго закона), так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчёта, в которых только и выполняется второй закон Ньютона.

3 Динамика вращательного движения

Перед изучением этой темы желательно повторить теорию по кинематике вращательного движения, см. "**Физика. Выпуск 1. Кинематика механического движения**" (с. 20-21, с. 35-40).

Основным уравнением динамики как вращательного, так и поступательного движения материальной точки (тела) является второй закон Ньютона (см. выражение (2.3)). В общем случае движения по окружности ускорение тела имеет две составляющие: одну $\mathbf{a}_\tau$ вдоль вектора скорости по касательной к окружности и другую $\mathbf{a}_n$ перпендикулярную к первой, направленную к центру окружности, так что $\mathbf{a}=\mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$. Ускорения $\mathbf{a}_\tau$ и $\mathbf{a}_n$ лежат в плоскости окружности – траектории движения тела. Из второго закона Ньютона (2.3) можно получить три скалярных уравнения движения:

$$ma_\tau = \Sigma F_{i\tau}\,; \qquad m\frac{v^2}{r} = \Sigma F_{in}\,; \qquad m\cdot 0 = \Sigma F_{i\perp}\,, \tag{3.1}$$

где r – радиус окружности, F_{in}, $F_{i\tau}$, $F_{i\perp}$ – проекции сил на направления к центру вращения, касательные к окружности и перпендикулярные к плоскости, в которой лежит окружность.

Из второго скалярного уравнения в (3.1) следует: произведение массы тела на центростремительное ускорение ($a_n = \dfrac{v^2}{r}$) равно сумме проекций всех действующих сил на направление к центру вращения ($\mathbf{a}_n$ также направлено к центру вращения). Сумму проекций сил, стоящих в правой части второго уравнения (ΣF_{in}), часто называют центростремительной силой. Отсюда видно, что центростремительной силы как таковой в природе нет, движение тела по окружности происходит под действием известных сил – силы тяжести, реакции опоры (силы упругости), силы трения. Центростремительная сила является результирующей всех сил, возникающих при взаимодействии рассматриваемого тела с другими телами, и удерживает вращающееся тело на окружности.

4 Третий закон Ньютона

Механическое воздействие тел друг на друга носит характер их взаимодействия: если тело 1 действует на тело 2 с силой $\mathbf{F}_{21}$, то и тело 2 в свою очередь действует на тело 1 с силой $\mathbf{F}_{12}$. Третий закон Ньютона (закон равенства действия и противодействия) утверждает, что силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\mathbf{F}_{12} = -\,\mathbf{F}_{21}\,. \qquad (4.1)$$

Физический смысл третьего закона Ньютона заключён в следующих утверждениях: 1) силы возникают парами и имеют одинаковую природу; 2) они приложены к разным телам; 3) эти силы равны по величине в любой момент времени независимо от движения взаимодействующих тел; 4) они действуют вдоль одной прямой в противоположных направлениях. На каждое из двух взаимодействующих тел действует только одна сила ($\mathbf{F}_{12}$ или $\mathbf{F}_{21}$), которая и сообщает данному телу ускорение.

Третий закон Ньютона строго выполняется в случае контактных взаимодействий (т.е. при непосредственном соприкосновении тел), а также при взаимодействии покоящихся тел посредством поля. В классической механике третий закон Ньютона всегда справедлив. В других случаях, например, в электродинамике, при рассмотрении взаимодействия движущихся зарядов, бывают обстоятельства, при которых третий закон Ньютона не выполняется. В нашем курсе мы не будем исследовать такие исключительные случаи.

Три основных закона динамики, сформулированные Ньютоном, были известны до него. Но до Ньютона не было представления о том, что эти три закона являются основой всей механики. Только Ньютон, исследуя и анализируя движения всевозможных тел, указал, что все сколь угодно сложные механические явления подчинены трём законам динамики. Поэтому название законов динамики справедливо связывают с именем Ньютона.

Понятие о замкнутой системе. Группу тел, выделенных из множества тел, называют системой тел. Силы взаимодействия между телами, входящими в систему, называют внутренними. Силы, действующие на тела, входящие в систему, со стороны тел, не входящих в систему, называют внешними. Исходя из третьего закона Ньютона можно сделать вывод о том, что в любой системе взаимодействующих тел векторная сумма сил, с которыми тела, входящие в систему, действуют друг на друга (внутренние силы), должна быть равна нулю ($\Sigma\mathbf{F}_{внутр} = 0$). В этом случае силы взаимодействия (внутренние силы) не будут влиять на значение ускорения всей системы в целом. Ускорение системы определяется всеми силами, действующими на тела системы (внешними силами):

$$m_{сист}\mathbf{a}_{сист} = \Sigma\mathbf{F}_{внеш} \quad (4.2)$$

Систему тел называют замкнутой, если на нее не действуют внешние силы.

5 Закон всемирного тяготения

Сила, с которой два тела притягиваются друг к другу, называется силой тяготения или гравитационной силой. Гравитационное взаимодействие связано с наличием массы у взаимодействующих тел и описывается законом всемирного тяготения – две материальные точки с массами m_1 и m_2 притягиваются по направлению друг к другу каждая с силой, прямо пропорциональной массам этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

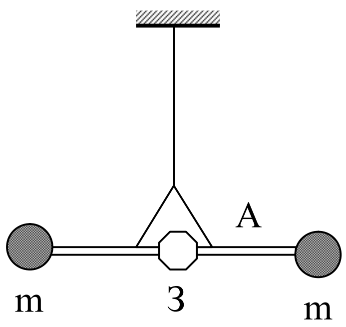
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (5.1)$$

где G – постоянная тяготения Ньютона или гравитационная постоянная,

m_1 и m_2 – гравитационные массы.

Гравитационная постоянная численно равна силе, с которой взаимодействуют две материальные точки с единичной массой, расположенные на единичном расстоянии друг от друга.

Для нахождения сил тяготения, действующих на протяжённые тела, необходимо мысленно разбить эти тела на элементарные кусочки, которые можно принять за материальные точки. Затем находят силы взаимодействия между ними и, векторно складывая их, получают результирующую силу, действующую на каждое из тел. Если два тела являются однородными шарами, то они притягиваются как материальные точки, расположенные в их центрах и имеющие массы соответствующих тел. В частности, Землю принимают за однородный шар радиусом $R_З$ = 6 400 км.



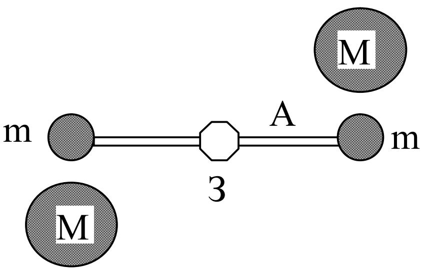


Рисунок 1

Во времена Ньютона закон всемирного тяготения был подтверждён только астрономическими наблюдениями над движениями планет и их спутников. Впервые непосредственное экспериментальное доказательство этого закона для земных тел, а также численное определение гравитационной постоянной G были даны английским физиком Кавендишем в 1798 г. Схема прибора Кавендиша показана на рисунке 1. На концах сравнительно легкого коромысла A находились два одинаковых свинцовых шарика, каждый массой m. Коромысло подвешивалось за середину на достаточно длинной тонкой упругой нити. К середине коромысла было прикреплено зеркальце З. Поворот луча света, отражённого от зеркальца, отмечает закручивание нити, на которой подвешено коромысло А. К массам m придвигались с разных сторон на определённое расстояние два больших свинцовых шара с массой М каждый, причем $M >> m$. Под действием сил тяготения коромысло А крутильных весов поворачивалось до тех пор, пока момент силы тяготения между шарами не уравновешивался упругим моментом закрученной нити, который и определялся по смещению зайчика, отражённого от зеркальца. Устанавливая массы на различных расстояниях, Кавендиш определил силу тяготения в зависимости от расстояния и подтвердил справедливость закона всемирного тяготения, выведенного Ньютоном. Зная упругие свойства нити и массы шаров, Кавендиш вычислил значение гравитационной постоянной.

Существуют и другие методы определения гравитационной постоянной. На основании опытов в настоящее время для гравитационной постоянной принимается следующее значение $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2). Полученный Кавендишем результат отличается от современного значения гравитационной постоянной только на 1 %.

Формулируя закон тяготения (5.1), мы молчаливо предполагали, что масса тела, входящая в этот закон, есть та же масса, которая является мерой инерции. Это действительно так, поскольку все современные методы определения массы указывают на то, что с очень большой степенью точности значения гравитационной и инертной массы совпадают.

Сила тяжести. Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением, равным ускорению свободного падения g. Это означает, что в системе отсчёта, связанной с Землёй, на каждое тело массой m согласно второму закону Ньютона действует сила:

$$F = mg, \tag{5.2}$$

называемая силой тяжести.

Итак, под действием силы тяжести (без учёта действия других сил, например, силы сопротивления воздуха) все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением g. Следовательно, в данном месте Земли ускорение свободного падения не зависит от массы и одинаково для всех тел.

В случае Земли ускорение свободного падения изменяется от 9,780 м/с^2 на экваторе до 9,832 м/с^2 на полюсах. Это различие обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси и сплюснутостью Земли (экваториальный и полярный радиусы Земли равны 6 378 км и 6 357 км, соответственно). Различие в значениях ускорения силы тяжести на экваторе и на полюсах очень мало (оно не превышает 0,5 %), поэтому в первом приближении Землю можно считать однородным шаром радиуса $R_З$, а силу тяжести можно считать равной силе, с которой тело притягивается к Земле, а ускорение свободного падения, которое используется при решении практических задач, принимают равным 9,81 м/с^2.

Если тело массы m находится вблизи поверхности Земли, то ускорение свободного падения g телу сообщается силой тяготения $F_{гр}$. И согласно второму закону Ньютона

$$g = \frac{F_{гр}}{m} = \frac{1}{m} \cdot G \frac{mM_З}{R_З^{\,2}} = G \frac{M_З}{R_З^{\,2}}. \tag{5.3}$$

Получили выражение (5.3) для g, не зависящее от массы тела, т.е. одинаковое для всех тел. При этих же рассуждениях можно получить выражение для g(h) – ускорення свободного падения на высоте h над поверхностью Земли:

$$g(h) = G \frac{M_З}{(R_З + h)^2}. \tag{5.4}$$

Выражая произведение $GM_З$ из выражения (5.3) и подставляя в (5.4), имеем:

$$g(h) = G \frac{M_З}{(R_З + h)^2} = g \frac{R_З^{\,2}}{(R_З + h)^2} = g \left(\frac{R_З}{R_З + h} \right)^2 = g \left(1 + \frac{h}{R_З} \right)^{-2}, \tag{5.5}$$

где g – ускорение свободного падения у поверхности Земли.

В идеале свободное падение должно происходить в безвоздушном пространстве, что исключает силу сопротивления атмосферного воздуха. Для плотных тел небольших размеров (при малых скоростях их движения) влияние атмосферы незначительно и не может заметно повлиять на величину ускорения свободного падения, но сказывается при падении лёгких объёмных тел. Именно из-за сопротивления воздуха различные тела падают с раличными ускорениями.

Вес тела – это сила, с которой тело действует на неподвижное относительно него горизонтальную опору или вертикальный подвес, удерживающие тело от падения вследствие притяжения к планете. Нужно отметить, что вес **P** – это сила, приложенная к опоре (подвесу), а не к телу. И по третьему закону Ньютона вес равен силе упругости (силе реакции опоры или подвеса) N, приложенной к телу, т.е. **P** = -**N**. На покоящееся относительно опоры (подвеса) тело действуют сила тяжести **F** и сила реакции опоры (сила упругости подвеса) **N** (см. рисунок 2). Вес **P** и сила тяжести **F** приложены к различным объектам, к опоре и к телу, поэтому они не могут уравновешивать друг друга. Помимо этого они имеют различную физическую природу, соответственно, вес – упругую, т.е. по существу электромагнитную природу, а сила тяжести – гравитационную. Таким образом, сила тяжести действует всегда, а вес тела проявляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести действуют ещё другие силы.

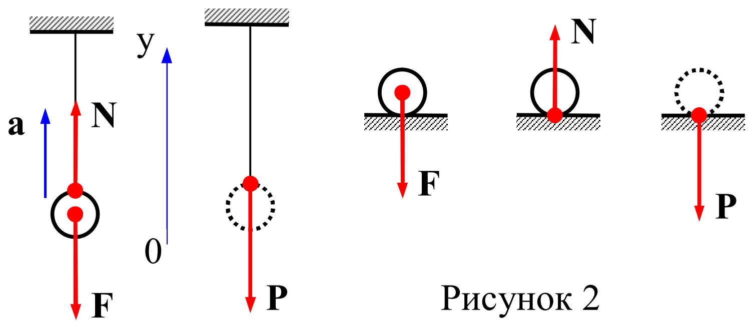


Рисунок 2

В частном случае, когда опора (подвес) покоится или движется равномерно и прямолинейно относительно какой-либо инерциальной системы отсчёта, вес тела **P** по величине и направлению совпадает с силой тяжести m**g**, т.е.

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}. \tag{5.6}$$

Если, например, ускорение ***a*** тела направлено вертикально вверх, то второй закон Ньютона для тела в векторной форме записи имеет вид (см. рисунок 2):

$$m\boldsymbol{a} = \mathbf{N} + \mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) в проекции на вертикальную ось 0у примет вид:

$$ma = N - F = N - mg, \quad (5.8)$$

откуда

$$N = m(g + a). \quad (5.9)$$

И вес тела, равный

$$P = N = m(g + a), \quad (5.10)$$

оказывается больше силы тяжести mg. Кратность перегрузки равна

$$\frac{P}{F} = \frac{m(g+a)}{mg} = \frac{g+a}{g} > 1. \quad (5.11)$$

В данном примере направления векторов веса тела **P** и силы тяжести **F** = m**g** совпадают.

Если же ускорение тела ***a*** направлено вертикально вниз (т.е. **a** по направлению совпадает с направлением **g**), то вес тела, равный по модулю

$$P = m(g - a), \quad (5.12)$$

оказывается меньше веса покоящегося тела (mg). При свободном падении тела, a = g, и P = 0, т.е. вес отсутствует. Наступает состояние невесомости. Следовательно, если на тело действует только сила тяжести, т.е. когда оно свободно падает, тело находится в состоянии невесомости.

В общем случае если тело свободно движется в поле тяготения (в этом случае на тело действует только сила тяжести) по любой траектории и в любом направлении, то ***a*** = **g**, и из уравнения (5.7) следует, что

$$\mathbf{P} = -\mathbf{N} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{a} = m\mathbf{g} - m\boldsymbol{a} = m(\mathbf{g} - \boldsymbol{a}) = 0,$$

т.е. тело будет невесомым. Например, невесомыми являются тела, находящиеся в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.

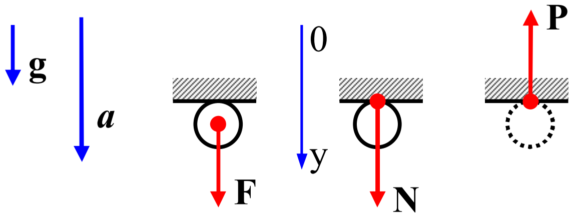


Рисунок 3

При движении тела вертикально вниз с ускорением $\boldsymbol{a}$ в случае $|\boldsymbol{a}| > |\mathbf{g}|$ (т.е. при $a > g$) уравнение движение тела имеет вид (см. рисунок 3):

$$m\boldsymbol{a} = \mathbf{N} + \mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}. \qquad 5.13)$$

Запишем уравнение (5.13) в проекции на вертикальную ось 0y:

$$ma = N + F = N + mg, \qquad (5.14)$$

откуда

$$N = m(a - g). \qquad (5.15)$$

И вес тела, равный

$$P = N = m(a - g), \qquad (5.16)$$

опять станет отличным от нуля. Причём направление вектора веса тела **P** в этом случае окажется противоположно направлению вектора ускорения свободного падения **g** (см. рисунок 3).

Космические скорости. Спутник Земли всегда движется в плоскости, проходящей через центр Земли. Если в качестве модели Земли выбрать однородный шар, то ориентация плоскости не изменяется. В зависимости от начальных условий спутник (или какое-либо тело) будет двигаться по гиперболе, параболе, эллипсу или по отрезку прямой линии. Частный случай эллипса – окружность. Для запуска спутников в космическое пространство в зависимости от поставленных целей необходимо сообщать им определённые начальные скорости, называемые космическими.

Первая космическая скорость v_1 – это скорость, которую необходимо сообщить телу вблизи поверхности Земли в горизонтальном направлении, перпендикулярном радиусу окружности, т.е. радиусу Земли $R_З$, чтобы оно стало двигаться по этой окружности, т.е. превратилось в искусственный спутник Земли. В этом случае тело двигается вдоль поверхности Земли, не касаясь ее, значит, реакция опоры (сила упругости) **N** = 0, и на тело в этом случае действует единственная сила – сила тяготения (сопротивление воздуха не учитываем). Поскольку тело движется по окружности, то, согласно второму закону Ньютона, произведение массы m тела на центростремительное ускорение равно силе тяготения (см. рисунок 4):

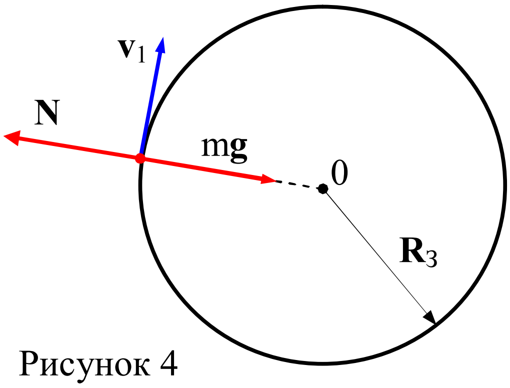


Рисунок 4

$$m\frac{v_1^2}{R_З} = mg, \tag{5.17}$$

откуда получаем

$$v_1 = \sqrt{gR_З} = \sqrt{9{,}81\frac{м}{с^2}\cdot 6{,}4\cdot 10^6 м} = 7{,}91\cdot 10^6 \text{ м/с} \approx 7{,}9 \text{ км/с}. \tag{5.18}$$

Так как согласно (5.3) $g = G\frac{M_З}{R_З^2}$, то из (5.18) можем получить ещё одно выражение для v_1:

$$v_1 = \sqrt{gR_З} = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З^2}R_З} = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З}}. \tag{5.19}$$

Для разных планет их массы M и радиусы R различные, поэтому первые космические скорости v_1 для разных планет различные.

На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом r ($r = R + h$, R – радиус планеты, h – высота над поверхностью планеты), действует сила тяготения, сообщающая ему нормальное ускорение v^2/r. Из второго закона Ньютона с учётом выражения (5.5)

$$m\frac{v^2}{r} = mg(h) = mg\frac{R^2}{(R+h)^2} = mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad (5.20)$$

находим первую космическую скорость для спутника, движущегося по круговой орбите радиуса r:

$$v = R\sqrt{\frac{g}{r}}. \qquad (5.21)$$

Период обращения спутника $T = 2\pi/\omega$, $v = \omega r$. С учётом выражения (5.21) для v, получим

$$T = 2\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}\left(\frac{R}{g}\right)^{1/2}. \qquad (5.22)$$

Полагая радиус орбиты спутника равным радиусу планеты, т.е. $r = R$, получим наименьшее значение периода обращения

$$T = 2\pi\left(\frac{R}{g}\right)^{1/2}. \qquad (5.23)$$

Так как согласно (5.22) $T \sim r^{3/2}$, то отсюда следует, что отношение квадратов периодов вращения двух спутников равно кубу отношения радиусов круговых орбит:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \quad \text{или} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}. \qquad (5.24)$$

Первой космической скорости недостаточно для того, чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения, т.е. удалилось на такое расстояние, при котором притяжение к Земле становится пренебрежимо малым. Необходимая для этого скорость называется второй космической скоростью v_2. Расчёты дают, что вторая космическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической скорости v_1, т.е.

$$v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2gR} = v_1\sqrt{2}, \tag{5.25}$$

где M – масса планеты,

R – ее радиус.

6 Сила упругости. Закон Гука

Деформацией называют изменение формы и размеров тела под внешним воздействием (силы). Деформация называется упругой, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму. Деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются пластическими (или остаточными). Характер деформации (упругая или пластическая) зависит как от материала тела, так и от величины внешнего воздействия.

Мы ограничимся изучением только упругих деформаций изотропных тел. Изотропными называются тела, свойства которых одинаковы по всем направлениям.

Закон Гука описывает явление упругой деформации тел: величина силы F, вызывающей упругую деформацию тела, прямо пропорциональна его абсолютному удлинению (или сжатию) $\Delta\ell$, т.е.

$$F = k\Delta\ell, \tag{6.1}$$

где k – коэффициент жёсткости (упругости), величина, характеризующая упругие свойства тела (а не материала!) и численно равная силе, которую необходимо приложить для единичного удлинения тела.

Размерность k:

$$[k] = \frac{[F]}{[\Delta\ell]} = \frac{Н}{м}. \quad (6.2)$$

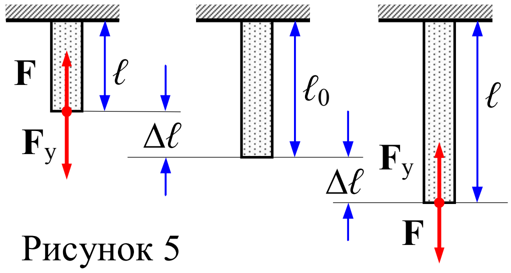


Рисунок 5

Закон Гука можно сформулировать через силу упругости F_y, с которой деформируемое тело действует на другое тело, вызывающее деформацию, и равную по третьему закону Ньютона деформирующей силе: $\mathbf{F}_y = -\mathbf{F}$. На рисунке 5 изображены случаи растяжения и сжатия тела. Очевидно, что

$$F_y = -k\Delta\ell. \quad (6.3)$$

Рассмотрим однородный стержень длиной ℓ_0 и площадью поперечного сечения S (рисунок 5), закреплённый в одном основании и растягиваемый (или сжимаемый) силой **F**. В результате чего длина стержня меняется на величину $\Delta\ell$. Естественно, что при растяжении абсолютное удлинение стержня $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ положительно, а при сжатии – отрицательно.

Силу, отнесённую к единице площади поперечного сечения стержня, называют механическим напряжением:

$$\sigma = \frac{F}{S}, \qquad [\sigma] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{Н}{м^2} = Па. \quad (6.4)$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется нормальным, если же по касательной к поверхности – тангенциальным. В рассматриваемом случае напряжение перпендикулярно к поперечному сечению стержня.

Относительное удлинение стержня ε равно отношению абсолютного удлинения $\Delta\ell$ к первоначальной длине ℓ_0:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}. \quad (6.5)$$

Безразмерная величина ε в случае растягивающих сил положительна, в случае сжимающих сил – отрицательна.

Английский физик Р. Гук экспериментально установил, что для малых деформаций механическое напряжение σ прямо пропорционально относительному удлинению ε:

$$\sigma = E\varepsilon\,, \tag{6.6}$$

где E – модуль Юнга (модуль упругости).

Из выражения (6.6) видно, что модуль Юнга численно равен напряжению, вызывающему относительное удлинение, равное единице. Поэтому модуль Юнга часто определяют как напряжение, которое необходимо приложить к стержню, чтобы его длина удвоилась (если бы при такой деформации закон Гука (6.6) оставался ещё верным). Недостаток этого определения состоит в том, что при таких больших деформациях закон Гука почти для всех тел становится недействительным: тело либо разрушается, либо нарушается пропорциональность между деформацией и приложенным напряжением. Модуль Юнга является характеристикой материала стержня.

Из формул (6.4), (6.5) и (6.6) вытекает, что

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES} \qquad \text{или} \qquad F = \frac{ES}{\ell_0}\,\Delta\ell = k\cdot\Delta\ell, \tag{6.7}$$

где множитель $k = \dfrac{ES}{\ell_0}$ – играет роль коэффициента упругости (жесткости).

Выражение (6.7) соответствует закону Гука, согласно которому удлинение стержня (пружины) $\Delta\ell$ при упругой деформации пропорционально действующей на стержень (пружину) силе F.

Можно постепенно увеличивать растягивающее напряжение σ и отмечать относительное удлинение ε твёрдых тел. На основании этих опытов получим диаграмму зависимости между напряжением σ и относительным удлинением ε, которую называют диаграммой растяжения. Диаграмма растяжения твёрдого тела σ(ε) имеет вид, изображенный на рисунке 6. Деформации твёрдых тел подчиняются закону Гука лишь в очень узких пределах (до предела пропорциональности $\sigma_п$, когда ещё напряжение пропорционально относительному удлинению). При увеличении напряжения зависимость $\sigma(\varepsilon)$ становится нелинейной, хотя деформация ещё упругая вплоть до предела упругости ($\sigma_у$) (т.е. остаточные деформации не возникают). Предел упругости лишь на сотые доли процента превышает предел пропорциональности.

При дальнейшем увеличении напряжений в теле возникают остаточные деформации. Напряжение, при котором остаточная деформация достигает ≈ 0,2 %, называется пределом текучести ($\sigma_т$). При этом деформация возрастает без увеличения напряжения, т. е. тело как бы «течёт». Эта область называется областью текучести (или областью пластических деформаций). Материалы, для которых область текучести значительна, называются вязкими или пластичными, (например, алюминий, медь, некоторые сорта стали), а для которых область текучести практически отсутствует – хрупкими (например, чугун). Дальнейший рост напряжения приводит к разрушению тела. Максимальное напряжение, предшествующее разрушению тела, называется пределом прочности ($\sigma_р$). Разрушение тела наступает в точке, где график обрывается.

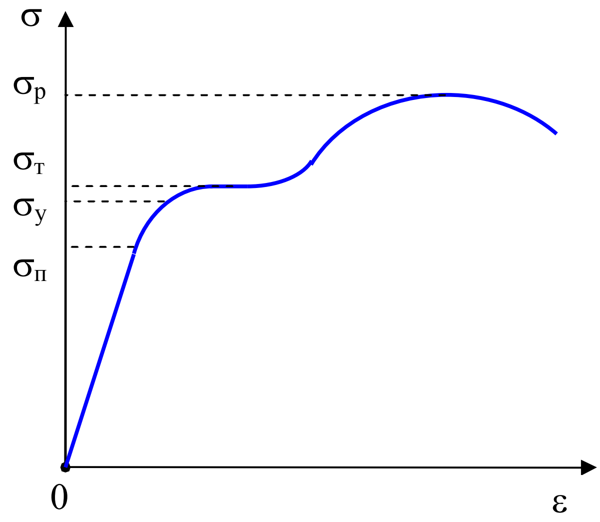


Рисунок 6

Одно и то же твёрдое тело может при сильном кратковременном воздействии вести себя как хрупкое, а при слабом длительном – как вязкое.

7 Силы трения

При взаимодействии движущегося тела с другими телами возникают силы, препятствующие такому движению. Эти силы называют силами трения. Силы трения могут быть разной природы, но в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел, т.е. в теплоту. Будем рассматривать только внешнее трение – трение, при котором возникают силы трения, направленные по касательным к поверхностям соприкасающихся тел. Силы трения возникают в результате межмолекулярного взаимодействия между поверхностями соприкасающихся тел и имеют электромагнитную природу. Процессы трения свойственны телам в любом агрегатном состоянии, а характер сил трения определяется тем, в каком агрегатном состоянии находятся трущиеся тела. Если оба тела твёрдые, то трение называют сухим, если же хотя бы одно из тел находится в жидком или газообразном состоянии, то трение называют жидким (вязким). Характер сил в этих взаимодействиях различен, особенно сложными математическими выражениями описываются силы внутреннего трения (между слоями жидкости или газа). Мы будем рассматривать только трение между твёрдыми телами как наиболее часто встречающееся в повседневной практике.

В случае сухого трения силы трения существуют как при относительном движении соприкасающихся тел, так и при их относительном покое (силы трения покоя), а жидкое трение возможно лишь при относительном движении тел или частей тела. Применительно к сухому трению, когда соприкасающиеся тела движутся друг относительно друга, различают трение скольжения и трение качения. Мы ограничимся рассмотрением случая трения скольжения.

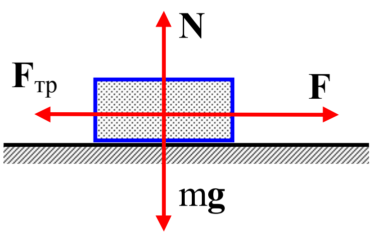


Рисунок 7

Пусть брусок располагается на горизонтальной поверхности (рисунок 7). В состоянии покоя сила тяжести бруска $m\mathbf{g}$ уравновешивается силой упругости (реакцией опоры) $\mathbf{N}$, с которой на брусок действует поверхность ($mg = N$). Если на брусок подействовать в горизонтальном направлении силой $\mathbf{F}$, то, если величина этой силы не превысит некоторое предельное значение F_0 ($F \leq F_0$), брусок не приходит в движение. Из этого следует, что на брусок со стороны поверхности действует равная и противоположно направленная сила $\mathbf{F}_{тр}$, уравновешивающая силу $\mathbf{F}$. Эту силу называют силой трения покоя (такая же сила трения, но в противоположном направлении, действует на поверхность со стороны бруска). Сила трения покоя автоматически принимает значения, равные внешней силе F. Максимальное значение силы трения покоя равно F_0. Если сила F будет превосходить силу трения покоя (т.е. если $F > F_0$), то брусок будет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением под действием результирующей силы $F – F_0$.

В случае сухого трения максимальная сила трения покоя F_0, а также сила трения скольжения не зависят от площади соприкосновения трущихся тел и пропорциональны силе упругости N, с которой одно тело действует на другое:

$$F_{тр} = F_0 = \mu N, \tag{7.1}$$

где постоянную безразмерную величину μ называют коэффициентом трения (соответственно покоя или скольжения).

Выражение (7.1) представляет собой запись опытного закона Амонтона-Кулона. Коэффициент трения μ зависит от природы и состояния соприкасающихся поверхностей.

Сила трения покоя может изменяться от нуля до некоторого максимального значения $F_{тр.\ макс}$, обычно несколько превышающего силу трения скольжения. При расчётах для простоты максимальное значение силы трения полагают равной силе трения скольжения, т.е.

$$F_{тр.\ макс} = F_0 = \mu N. \tag{7.2}$$

С учётом вышеизложенного изобразим зависимость силы трения $F_{тр}$ от приложенной силы F. График $F_{тр}(F)$ представлен на рисунке 8. Из приведённого графика видно, что в тот момент, когда тело под действием внешней силы переходит из состояния покоя в состояние движения (скольжения), сила трения достигает максимального для данных поверхностей зна-

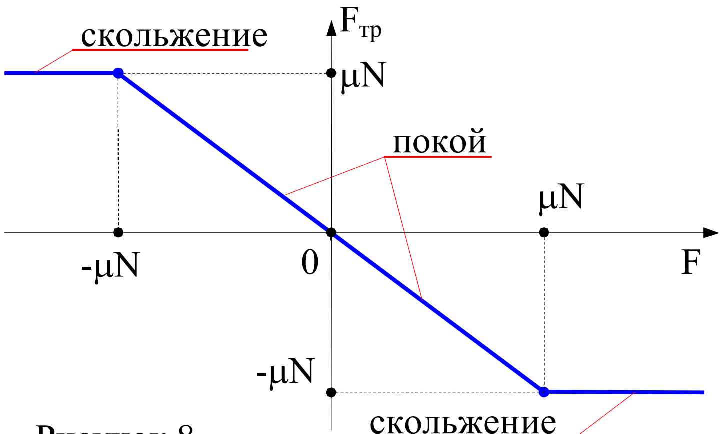


Рисунок 8

чения, после чего перестаёт зависеть от каких-либо внешних причин. Направление силы трения скольжения совпадает с касательной, проведённой для обеих трущихся поверхностей. Сила трения скольжения для каждой поверхности направлена в сторону, противоположную относительной скорости перемещения этой поверхности. Для двух трущихся поверхностей все условия, приводящие к возникновению трения, одинаковы, поэтому силы трения, действующие между ними, равны по величине и направлены в противоположные стороны. Так, например, если к телу, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложить горизонтально направленную силу **F**, то на него кроме **F** действуют следующие силы (см. рисунок 9): сила тяжести m**g**, сила упругости **N**, сила трения $\mathbf{F}_{тр1}$. На поверхность действуют силы: 1) **P** – вес, согласно третьему закону Ньютона равный по модулю силе упругости $|\mathbf{N}| = N$; 2) сила трения $\mathbf{F}_{тр2}$, согласно третьему закону Ньютона равная по модулю $|\mathbf{F}_{тр2}| = F_{тр1}$, но направленная в направлении, противоположном $\mathbf{F}_{тр1}$, т.е. $\mathbf{F}_{тр2} = -\mathbf{F}_{тр1}$. Силы трения $\mathbf{F}_{тр1}$ и $\mathbf{F}_{тр2}$ приложены к разным телам: $\mathbf{F}_{тр1}$ – к телу, $\mathbf{F}_{тр2}$ – к поверхности объекта, на котором находится тело. Так сила упругости **N** и вес **P** приложены к разным телам: **N** – к телу, **P** – к поверхности объекта, на котором находится тело.

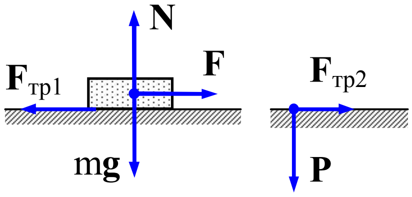


Рисунок 9

Допустим, что брусок скользит по поверхности со скоростью v. При равномерном движении действующая сила F по-прежнему уравновешивается силой $F_{тр}$. Если равновесия нет, то движение будет ускоренным. В обоих случаях сила трения $F_{тр}$, вообще говоря, зависит от относительной скорости v движения соприкасающихся тел. Характер этой зависимости изображён на рисунке 10. Сила трения, действующая на поверхность бруска, всегда действует против направления движения бруска. На графике это отражено тем, что знаки величин $F_{тр}$ и v всегда противоположны. При v = 0 сила трения покоя может принимать любое значение от $-F_0$ до $+F_0$. При увеличении скорости модуль силы трения сначала убывает, проходит через минимум, а затем начинает возрастать. С

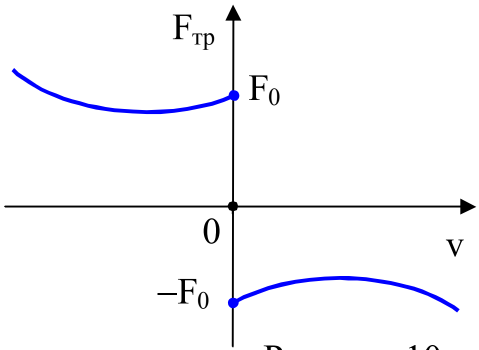


Рисунок 10

такой зависимостью $F_{тр}(v)$ в быту мы часто сталкиваемся: например, чтобы тронуть с места санки, приходится прикладывать значительное усилие, чем после начала движения. Зависимость $F_{тр}(v)$ симметрична относительно начала координат $[F(+v) = -F(-v)]$. При специальной обработке соприкасающихся поверхностей сила трения скольжения может оказаться практически не зависящей от скорости. В этом случае криволинейные участки графика на рисунке 10 превращаются в горизонтальные прямые. При расчётах зависимостью $F_{тр}(v)$ часто можно пренебречь и полагать при всех скоростях скольжения $F_{тр} = F_0 = \mu N$.

Трение играет большую роль в природе и технике. Сила трения скольжения препятствует смещению поверхностей друг относительно друга, но это не означает, что она препятствует движению вообще. Так, автомобиль приводится в движение благодаря силам трения, действующим между шинами колес и полотном дороги. Силы трения между поверхностью дороги и подошвами пешеходов способствуют перемещению пешеходов при ходьбе. Именно при относительном смещении поверхностей подошвы и пола, шины автомобиля и дороги (в перечисленных примерах) возникает сила трения, результатом действия которой и является движение тела. Каждому из опыта знакомо, как тяжело, а иногда и невозможно идти, бежать, или ехать по гладкой поверхности, держать скользкий предмет (когда сила трения мала). Силы трения, возникающие между приводным ремнём и шкивами, осуществляют передачу движения от одного шкива к другому. Благодаря трению удерживается забитый в стену гвоздь и т.д.

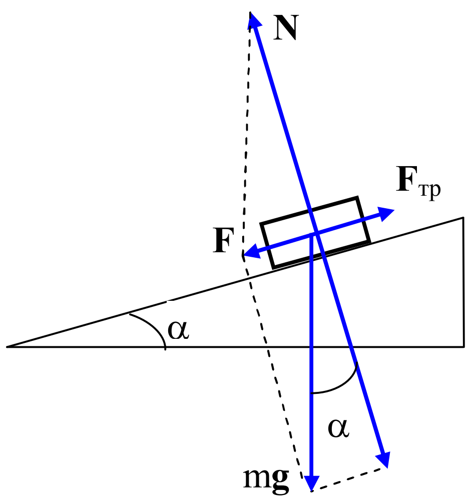


Рисунок 11

Во многих случаях сила трения является нежелательным фактором и нужно принимать меры для ее уменьшения. Таковыми, например, являются силы трения, возникающие между деталями машин. Они приводят к преждевременному износу машин, и поэтому их надо уменьшать. Для этого на трущиеся поверхности наносят смазку (сила трения уменьшается примерно в 10 раз), которая заполняет неровности между этими поверхностями и располагается тонким слоем между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, а скользят друг относительно друга отдельные слои жидкости. Таким образом, внешнее трение твёрдых тел заменяется значительно меньшим внутренним трением жидкости.

Коэффициент трения скольжения можно найти с помощью наклонной плоскости (рисунок 11). Тело на наклонной плоскости приходит в движение только когда тангенциальная составляющая **F** силы тяжести m**g** больше силы трения $\mathbf{F}_{тр}$, т.е. в предельном случае (перед началом скольжения тела) они равны:

$$mg\cdot\sin\alpha = \mu N = \mu mg\cdot\cos\alpha,$$

откуда

$$\mu = \mathrm{tg}\alpha. \qquad (7.3)$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла α, при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

Действенным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения трением качения, которое возникает, например, между цилиндрическим или шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится (шариковые и роликовые подшипники и т.д.). В нашем курсе трение качения не будем рассматривать.

Границы применимости классической механики Ньютона. Ещё раз обратим внимание, что в классической механике изучаются законы движения макроскопических тел, скорости v которых малы по сравнению со скоростью c света в вакууме, т.е. при $v \ll c$, где $c = 3\cdot10^8$ м/с. По этой причине законы динамики Ньютона имеют ограниченную область применимости.

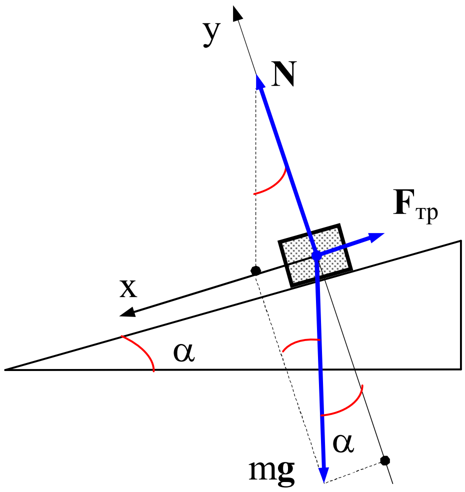
8 Примеры решения задач

1(2). С ледяной горки длиной $\ell = 10$ м съезжают санки. В начальный момент санки были неподвижны, а у подножия горки их скорость достигла $v = 9$ м/с. Определите коэффициент трения μ полозьев санок о лёд, если наклон горки с горизонтом составляет угол $\alpha = 30^0$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Дано: $\underline{\ell = 10 \text{ м}; v_0 = 0; v = 9 \text{ м/с}; \alpha = 30^0; g = 10 \text{ м/с}^2}$.

μ - ?

Решение. На санки действуют силы: сила тяжести m**g**, направленная вертикально вниз, сила упругости **N**, направленная перпендикулярно к поверхности горки, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, направленная в сторону, противоположную направлению движения, т.е. $\mathbf{F}_{тр}$ направлена вверх вдоль горки. Оси координат 0x и 0y направим вдоль наклонной плоскости и нормально к ней (см. рисунок). Нужно отметить, что равнодействующая силы тяжести m**g** и силы упругости **N**, т.е. m**g** + **N** направлена вдоль наклонной плоскости в сторону положительной полуоси 0x. Она вызывает ускоренное движение тела по наклонной плоскости, если эта равнодействующая превосходит $\mathbf{F}_{тр}$, направленную в противоположном направлении – в сторону отрицательной полуоси 0x. В случае, когда равнодействующая равна по модулю $\mathbf{F}_{тр}$, т.е. m**g** + **N** = – $\mathbf{F}_{тр}$, тело находится в покое или движется равномерно вдоль наклонной плоскости.



Для перехода от записи второго закона Ньютона в векторной форме

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр},$$

к скалярной, спроектируем векторные величины на две взаимноперпендикулярные оси 0x и 0y. Если направление проекции вектора на ось совпадает оси координат, то ее проекция берётся со знаком ″+″, в противном случае – со знаком ″–″:

$$0x: \quad ma = mg\sin\alpha - F_{тр}$$

$$0y: \quad 0 = -\,mg\cos\alpha + N$$

$$F_{тр} = \mu N.$$

Третье уравнение в записанной системе представляет собой соотношение, выражающее закон Амонтона-Кулона. Для решения системы уравнений из второго уравнения полученной системы уравнений находим $N = mg\cos\alpha$ и подставляем в третье уравнение: $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Подставляя полученное выражение для $F_{тр}$ в первое уравнение, находим из него коэффициент трения скольжения:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{тр} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha}.$$

Ускорение санок a находим из уравнения:

$$a = \frac{v^2 - v_0^{\ 2}}{2\ell},$$

где v и v_0 – скорости санок в конце и начале пути ℓ, соответственно. Подставляя полученное соотношение для ускорения в выражение для коэффициента трения, имеем:

$$\mu = \mathrm{tg}\alpha - \frac{v^2 - v_0^{\ 2}}{2\ell g\cos\alpha}.$$

Из полученного выражения видно, что коэффициент трения $\mu < \mathrm{tg}\alpha$, так как $v > 0$, $a > 0$, $v_0 = 0$. Если же $a = 0$, то $v = 0$ и $\mu = \mathrm{tg}\alpha$ – это значение $\mu = \mathrm{tg}\alpha$ является предельным, санки с наклонной плоскости соскальзывать не будут, т.к. $v_0 = 0$. Но при начальном внешнем толчке, т.е. если санкам сообщить скорость v_0, направленную вниз, то санки с этой наклонной плоскости будут соскальзывать с горки равномерно.

Подставляя данные, произведём вычисления:

$$\mu = \text{tg}\alpha - \frac{v^2 - v_0^{\;2}}{2\ell g\cos\alpha} = \text{tg}30^0 - \frac{9^2 - 0}{2\cdot 10\cdot 10\cdot \cos 30^0} = 0{,}11.$$

2(2). Через неподвижный блок перекинута нить, к которой подвешены с одной стороны два груза массами m_1 = 2 кг и m_2 = 5 кг, а с другой стороны груз массой m_3 = 3 кг. Найдите ускорение системы и силу натяжения нити, связывающей грузы 1 и 2. Нить считайте невесомой и нерастяжимой. Трение нити о блок не учитывайте. Ускорение силы тяжести g = 10 м/с^2.

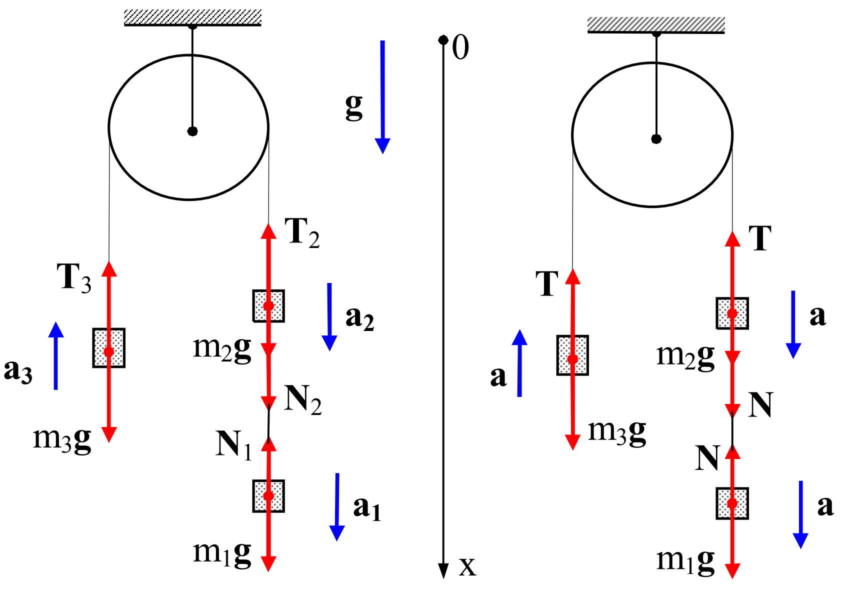
Дано: m_1 = 2 кг; m_2 = 5 кг; m_3 = 3 кг; g = 10 м/с^2.

a = ?   N - ?

Решение. Делаем рисунок к задаче. На тело 1 действует сила тяжести $m_1\mathbf{g}$ и сила натяжения нити $\mathbf{N}_1$. На тело 2 действует сила тяжести $m_2\mathbf{g}$ и сила натяжения нити $\mathbf{N}_2$ (сила взаимодействия груза 2 с нижней нитью) и $\mathbf{T}_2$ (взаимодействие груза 2 с верхней нитью). К грузу 3 приложены сила тяжести $m_3\mathbf{g}$ и сила натяжения нити $\mathbf{T}_3$.

Невесомость нити означает, что масса грузов много больше массы нити. Поэтому можно считать, что сила натяжения нити в любом месте нити между грузами одинакова, т.е. силы натяжения, действующие на два тела, связанные одной нитью, равны по величине. В данном случае $T_2 = T_3 = T$ и $N_1 = N_2 = N$.

Нерастяжимость нити позволяет считать ускорение тел, связанных одной нитью, равными по величине. В нашем случае $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Так как суммарная масса грузов 1 и 2, висящих на одной стороне блока, больше массы груза 3, висящего на другой стороне, то грузы m_1 и m_2



движутся вертикально вниз, а m_3 – вверх (на рисунке направления движения грузов показаны векторами ускорений **a**).

С учётом упомянутых условий запишем уравнения движения каждого груза (второй закон Ньютона) в проекциях на ось 0x, направленную вертикально вниз:

$$m_1a = m_1g - N$$

$$m_2a = m_2g + N - T$$

$$-m_3a = m_3g - T$$

Чтобы найти ускорение a системы сложим уравнения 1 и 2 и вычтем уравнение 3 почленно:

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = (m_1 + m_2 - m_3)g,$$

$$a = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g = \frac{2 + 5 - 3}{2 + 5 + 3} \cdot 10 = 4 \text{ м/с}^2.$$

Подставляя полученное выражение для ускорения a в уравнение 1, получим

$$m_1 \cdot \frac{m_1 + m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g = m_1g - N,$$

откуда находим силу натяжения нити, связывающей грузы 1 и 2:

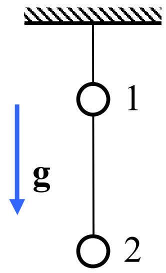
$$N = \frac{2m_1m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 + 5 + 3} \cdot 10 = 12 \text{ Н}.$$

Проанализируем предельные случаи, возможные в данной задаче. Если положить массу груза $m_3 = 0$, то грузы 1 и 2 падают свободно с ускорением свободного падения g. При этом сила натяжения N = 0.

Если же увеличивать массу груза m_3, то ускорение a системы уменьшается, и, при $m_3 = m_1 + m_2$ система будет в равновесии, т.е. $a = 0$. При этом, как и следует ожидать, $N = m_1g$.

Если уменьшать массу груза m_1, то натяжение N уменьшается и обращается в нуль ($N = 0$) при $m_1 = 0$.

3(3). Если пережечь нить, связывающую грузы, висящие на резиновом шнуре, то верхний груз 1 придет в движение с ускорением $a_1 = 5$ м/с^2 (см. рисунок). Если грузы поменять местами и пережечь нить, то с каким ускорением a_2 придет в движение груз 2? Ускорение силы тяжести $g = 10$ м/с^2.



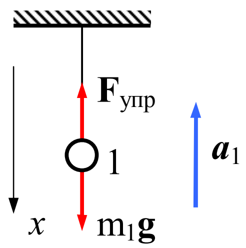
Дано: $a_1 = 5$ м/с^2; $g = 10$ м/с^2.

a_2 – ?

Решение. Упругая резина под действием силы тяжести двух грузов растягивается на величину Δx, определяемую законом Гука $|\mathbf{F}| = k\cdot\Delta x = (m_1+m_2)g$. Когда нить, связывающую грузы 1 и 2 пережигают, то на верхний груз 1 действуют $\mathbf{F}_{упр}$ и сила тяжести $m_1\mathbf{g}$, и по второму закону Ньютона (см. рисунок):

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{упр} + m_1\mathbf{g}.$$

Это уравнение в проекции на вертикальную ось 0x имеет вид:



$$-m_1a_1 = -k\cdot\Delta x + m_1g.$$

С учетом, что $k\cdot\Delta x = (m_1+m_2)g$, имеем

$$-m_1a_1 = -(m_1+m_2)g + m_1g = -m_2g, \text{ т.е. } m_1a_1 = m_2g$$

и

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1} g.$$

Если поменять грузы 1 и 2 местами, то при тех же рассуждениях можно получить выражение для a_2:

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2} g.$$

Перемножая почленно полученные выражения для a_1 и a_2, имеем:

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{m_2}{m_1} g \cdot \frac{m_1}{m_2} g = g^2,$$

откуда находим

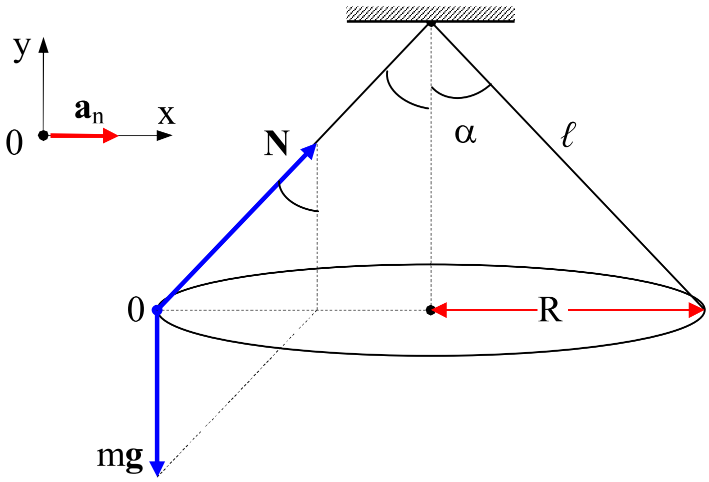
$$a_2 = \frac{g^2}{a_1} = \frac{10^2}{5} = 20 \text{ м/с}^2.$$

4(2). Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити длиной $\ell = 50$ см и равномерно вращается в горизонтальной плоскости. При какой частоте вращения ν угол отклонения нити от вертикали составит угол $\alpha = 60^0$? Какова при этом сила натяжения нити N? Ускорение силы тяжести $g = 10$ м/с^2.

Дано: $m = 0,1$ кг; $\ell = 0,5$ м; $\alpha = 60^0$; $g = 10$ м/с^2.

ν - ?   N - ?

Решение. На шарик действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила натяжения нити $\mathbf{N}$ (см. рисунок). Векторная сумма этих сил (равнодействующая) направлена в радиальном направлении и обеспечивает шарику центростремительное ускорение $\mathbf{a}_n$. Согласно второму закону Ньютона:



$$m\mathbf{a}_n = m\mathbf{g} + \mathbf{N}.$$

Шарик вращается в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = \ell \cdot \sin\alpha$. С позиции (точка 0), где шарик находится, направим оси координат 0x – в радиальном (горизонтальном) направлении, 0y – вертикально вверх. Запишем векторное уравнение движения в проекциях на оси координат 0x и 0y:

$$0x: \; ma_n = N\sin\alpha$$

$$0y: \; 0 = N\cos\alpha - mg$$

Получили систему из двух скалярных уравнений, в которых центростремительное ускорение равно:

$$a_n = \omega^2 R = (2\pi\nu)^2 R = 4\pi^2\nu^2\ell\cdot\sin\alpha.$$

Подставляя выражение для a_n в систему уравнений движения, получаем:

$$m4\pi^2\nu^2\ell\cdot\sin\alpha = N\sin\alpha$$

$$mg = N\cos\alpha$$

Решая эту систему из двух уравнений, находим:

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha}; \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}}.$$

Подставив численные данные, получаем:

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0{,}1 \cdot 10}{\cos 60^0} = 2 \text{ Н.} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell \cos\alpha}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0{,}5 \cdot \cos 60^0}} = 1 \text{ об/с.}$$

5(1). Масса Марса составляет 0,1 от массы Земли, диаметр Марса вдвое меньше, чем диаметр Земли. Каково отношение периодов обращения искусственных спутников Марса и Земли $T_М/T_З$, движущихся по круговым орбитам на небольшой высоте?

Дано: $M_З = M_М \cdot 10;\ d_М = d_З \cdot 0{,}5;$

$T_М/T_З$ - ?

Решение. Так как высота полета спутника мала, то радиус орбиты совпадает с радиусом планеты R = 0,5 d. Согласно второму закону Ньютона сила тяготения равна произведению массы спутника на центростремительное ускорение:

$$G\frac{mM}{R^2} = m\frac{v^2}{R},$$

где G – гравитационная постоянная;

m – масса спутника;

M – масса планеты;

v – скорость орбитального движения спутника.

Из этого соотношения выразим скорость

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R}}\ .$$

Период обращения спутника равен времени совершения одного оборота вокруг планеты со скоростью v:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,.$$

Поскольку записанные соотношения для периодов справедливы для любой планеты, найдем искомое отношение периодов обращения спутников Марса и Земли:

$$T_М/T_З = 2\pi\sqrt{\frac{R_М{}^3}{GM_М}} : 2\pi\sqrt{\frac{R_З{}^3}{GM_З}} = \sqrt{\left(\frac{R_М}{R_З}\right)^3 \frac{M_З}{M_М}} = \sqrt{\left(\frac{d_М}{d_З}\right)^3 \frac{M_З}{M_М}} = \sqrt{0{,}5^3 \cdot 10} = 1{,}1.$$

6(2). На экваторе некоторой сферической планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты 3 000 кг/м^3. Найдите период обращения планеты вокруг своей оси. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (Н·м^2)/кг^2.

Дано: $P_Э = P_П/2$; $\rho = 3\ 000$ кг/м^3; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (Н·м^2)/кг^2.

T - ?

Решение. К телу, находящемуся на поверхности планеты на широте φ, приложены сила тяготения $\mathbf{F}_Т$ и сила нормальной реакции $\mathbf{N}_\varphi$. Реакция опоры (сила упругости) $\mathbf{N}_\varphi$ направлена не в радиальном направлении, нормально к поверхности Земли (вдоль направления действия силы $\mathbf{F}_Т$), а в таком направлении, чтобы равнодействующая $\mathbf{F}_n = \mathbf{N}_\varphi + \mathbf{F}_Т$ была направлена перпендикулярно к оси вращения и обеспечивала вращение тела по окружности радиуса r. Соответственно, вес тела $\mathbf{P}_\varphi = -\mathbf{N}_\varphi$ действует на поверхность Земли. Равнодействующая $\mathbf{F}_n$ направлена к центру параллели на этой широте и сообщает телу центростремительное ускорение $\mathbf{a}_n$ при вращении планеты вокруг своей оси. Согласно второму закону динамики

$$F_n = ma_n = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi,$$

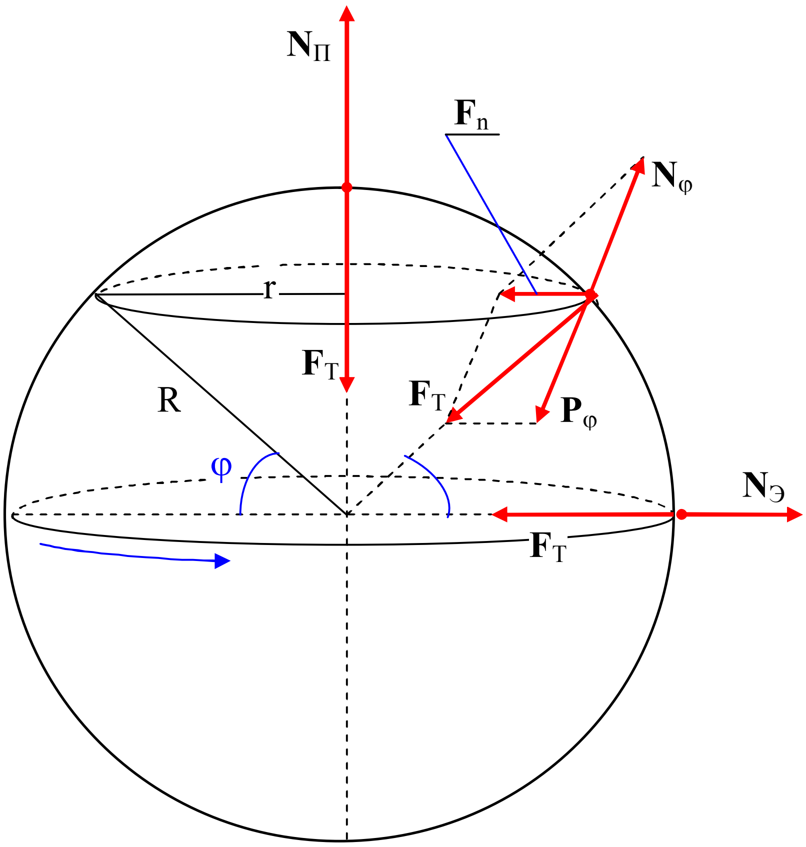
где m – масса тела;

ω – угловая скорость вращения планеты;

r – радиус параллели на широте φ;

R – радиус планеты.

Так как величина $\mathbf{F}_T$ во всех точках поверхности планеты одинакова, направление и



модуль силы $\mathbf{N}_\varphi$ зависит от φ. На полюсе и на экваторе $\mathbf{F}_T$ и $\mathbf{N}_\varphi$ направлены вдоль одной прямой (на рисунке $\mathbf{N}_П$ и $\mathbf{F}_T$, $\mathbf{N}_Э$ и $\mathbf{F}_T$, соответственно).

Вес тела P_φ – это упругая сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес. По третьему закону Ньютона вес тела равен силе нормальной реакции: $P_\varphi = N_\varphi$. Вес и реакция опоры (сила упругости) на полюсе равны силе тяготения

$$N_\varphi\Big|_{\varphi=90^0} = P_П = F_T,$$

так как при $\varphi = 90^0$, $r = 0$. На экваторе $\varphi = 0$ и $r = R\cos\varphi = R$, и по второму закону Ньютона

$$F_T - N_Э = ma_n = m\omega^2 R.$$

По условию задачи на экваторе вес тела, равный $P_Э = N_Э$, вдвое меньше чем на полюсе, т.е.

$$P_Э = \frac{P_П}{2} = \frac{F_T}{2}.$$

Из $F_T - N_Э = m\omega^2 R$ выражаем $N_Э = F_T - m\omega^2 R$.

Итак,

$$P_Э = N_Э = \frac{F_T}{2} = F_T - m\omega^2 R,$$

откуда следует, что

$$m\omega^2 R = \frac{F_T}{2}.$$

Так как

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad F_T = G\frac{mM}{R^2}, \qquad M = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3,$$

то подстановка этих выражений в уравнение $m\omega^2 R = \frac{F_T}{2}$ позволит нам вычислить период вращения T планеты:

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{1}{2}G\frac{mM}{R^2} = \frac{1}{2}G\frac{m}{R^2}\rho\frac{4}{3}\pi R^3,$$

откуда находим период T вращения планеты вокруг своей оси и, подставляя числовые данные, произведём вычисления:

$$T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{6\cdot\pi}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3000}} = 9\ 706\ \text{с} \approx 2\ \text{ч}\ 42\ \text{мин}.$$

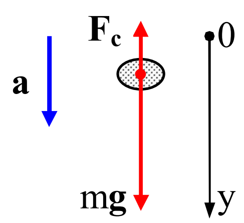
7(1). Тело массой m = 300 г, упав с высоты h = 25 м, приобрело скорость v = 20 м/с. Какова средняя сила сопротивления воздуха? Ускорение силы тяжести равно g = 10 мс/^{2}.

Дано: $v_0 = 0$; m = 0,3 кг; h = 25 м; v = 20 м/с; g = 10 м/с^2.

F_c - ?

Решение. Запишем кинематическое соотношение для случая падения тела без начальной скорости ($v_0 = 0$):

$$a = \frac{v^2}{2h}.$$



Уравнение движения тела в векторной форме имеет вид:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_c,$$

где $m\mathbf{g}$ – сила тяжести (см. рисунок);

$\mathbf{F}_c$ – сила сопротивления воздуха, действующая на тело;

$\mathbf{a}$ – ускорение, с которым падает тело.

Перейдём к скалярной форме записи уравнения движения, спроектировав все векторные величины на вертикальную ось 0y (так как все векторы направлены по вертикали):

$$ma = mg - F_c,$$

откуда выразим искомую среднюю силу сопротивления воздуха F_c за время падения тела

$$F_c = m(g - a) = m\left(g - \frac{v^2}{2h}\right).$$

Подстановка численных значений даёт:

$$F_c = m\left(g - \frac{v^2}{2h}\right) = 0{,}3\left(10 - \frac{20^2}{2 \cdot 25}\right) = 0{,}6 \text{ Н}.$$

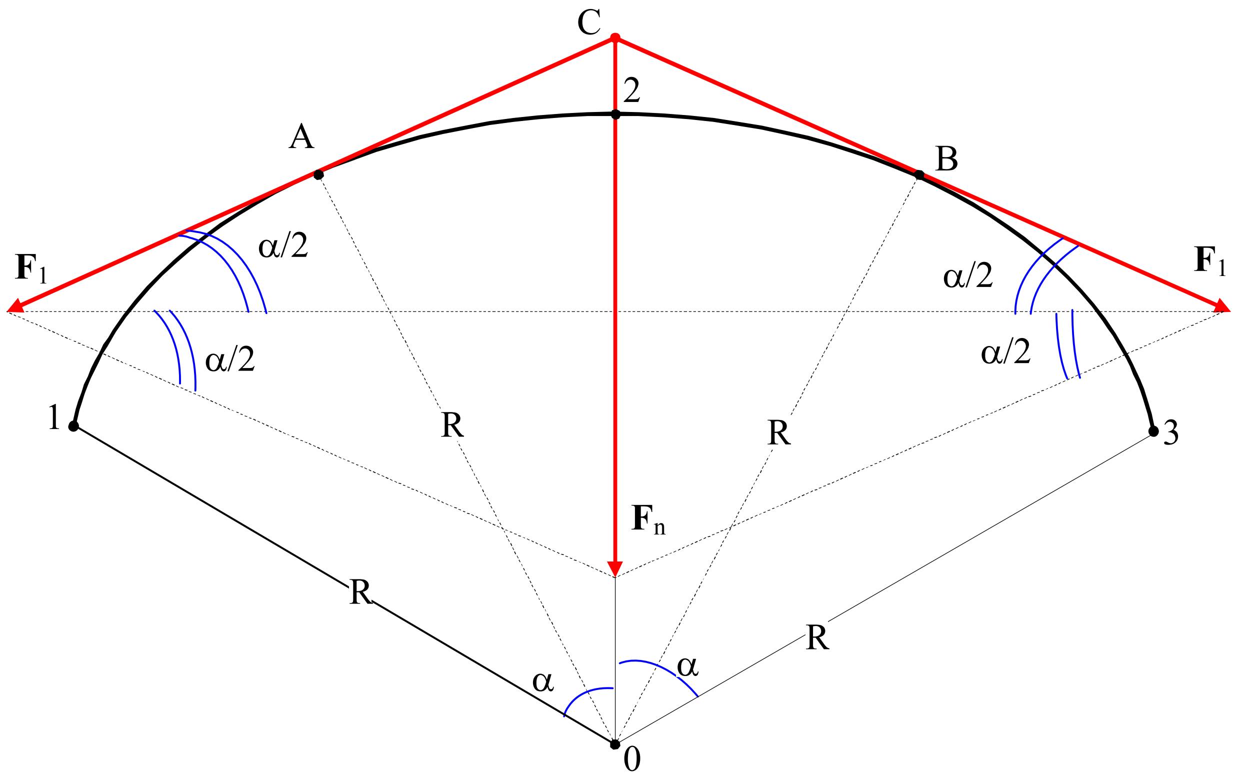
8(3). Кольцо массы m и радиуса R вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Кольцо сделано из тонкой проволоки, выдерживающей натяжение F. С какой максимальной частотой ν можно вращать кольцо, чтобы оно имело трёхкратный запас прочности?

Дано: m; R; F; n = 3.

ν - ?

Решение. Рассмотрим элемент дуги 1A2B3 кольца, который виден из центра 0 кольца радиусом R под малым углом 2α (см. рисунок). Масса Δm этого элемента равна

$$\Delta m = m\frac{2\alpha}{2\pi} = m\frac{\alpha}{\pi}.$$



При вращении кольца в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, элемент дуги кольца растягивается парой сил $\mathbf{F}_1$, равнодействующая которых $\mathbf{F}_n$ направлена к центру кольца и является центростремительной силой. Точки приложения пары сил $\mathbf{F}_1$ точки A и B, соответственно, перенесены в точку C, в которой пересекаются продолжения пары векторов $\mathbf{F}_1$. Из рисунка видно, что при малых углах α

$$F_n = 2F_1\sin\frac{\alpha}{2} \approx F_1\alpha.$$

Согласно условию задачи натяжение F_1 кольца должна составлять $\frac{1}{n}$ часть от предельной силы F, т.е. $F_1 = \frac{F}{n}$ (n = 3-хкратный запас прочности). Итак,

$$F_n = F_1\alpha = \frac{F}{n}\alpha.$$

Приравняем F_n центростремительной силе (так как при вращательном движении результирующая сила является центростремительной силой), т.е. произведению массы Δm на центростремительное ускорение:

$$F_n = F_1\alpha = \frac{F}{n}\alpha = \Delta m\omega^2 R,$$

где $\omega = 2\pi\nu$.

Таким образом, имеем:

$$\frac{F}{n}\alpha = \Delta m\omega^2 R = m\frac{\alpha}{\pi}(2\pi\nu)^2 R.$$

Из последнего уравнения находим искомую частоту вращения ν:

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{n\pi mR}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{3\pi mR}}.$$

В частности циклическая частота ω равна:

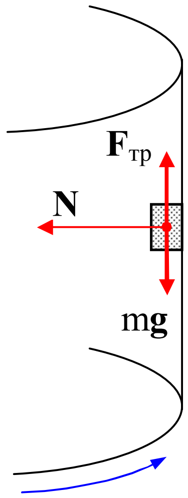
$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{3\pi mR}} = \sqrt{\frac{\pi F}{3mR}}.$$

9(2). В известном аттракционе ″мотоцикл на вертикальной стене″ мотоцикл движется по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса R = 10 м по горизонтальному кругу. Какова при этом должна быть минимальная скорость движения мотоцикла, если известно, что коэффициент трения скольжения между шинами и поверхностью цилиндра μ = 0,24? Ускорение силы тяжести g = 9,8 м/с^2.

Дано: $\underline{R = 10\text{ м}; \mu = 0{,}24; g = 9{,}8\text{ м/с}^2}$.

v - ?

Решение. При движении мотоцикла по вертикальной стене (см. рисунок) на него действуют следующие силы: $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, $\mathbf{F}_{тр}$ – сила трения, **N** – сила нормального давления (сила упругости). Когда мотоцикл едет с некоторой минимальной скоростью v, с которой может ехать по горизонтальному кругу, равнодействующая всех сил должна равняться центростремительной силе, т.е.



$$m\frac{v^2}{R},$$

где m – масса мотоцикла.

Так как в направлении центра круга проекции $m\mathbf{g}$ и $\mathbf{F}_{тр}$ равны нулю, то получаем, что сила упругости **N** равна центростремительной силе, т.е.

$$N = m\frac{v^2}{R}.$$

Устойчивое движение по горизонтальному кругу возможно, когда сумма проекций всех сил, действующих на мотоцикл, на вертикальную ось, равна нулю, т.е.

$$F_{тр} - mg = 0, \qquad \text{или} \qquad F_{тр} = mg.$$

А по закону Амонтона-Кулона $F_{тр} = \mu N$.

Решая систему из трёх написанных уравнений

$$N = m\frac{v^2}{R}; \qquad F_{тр} = mg; \qquad F_{тр} = \mu N,$$

получаем, что

$$mg = \mu m\frac{v^2}{R},$$

откуда находим

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 10}{0{,}24}} = 20 \text{ м/с} = 72 \text{ км/ч}.$$

10(2). Подлетев к неизвестной планете, космонавты придали своему кораблю горизонтальную скорость v = 11 км/с. Эта скорость обеспечила полёт корабля по круговой орбите радиусом r = 9 100 км. Каково ускорение свободного падения у поверхности планеты, если ее радиус R = 8 900 км?

Дано: $\underline{v = 11 \cdot 10^3 \text{ м/с}; r = 9{,}1 \cdot 10^6 \text{ м}; R = 8{,}9 \cdot 10^6 \text{ м}}$.

g - ?

Решение. Так как корабль движется по круговой орбите, то равнодействующая всех сил, действующих на корабль, должна равняться центростремительной силе, т.е. гравитационная сила взаимодействия корабля и планеты должна равняться центростремительной силе:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r},$$

где M – масса планеты;

m – масса корабля;

G – гравитационная постоянная.

Известно выражение для ускорения свободного падения g у поверхности планеты радиуса R (см. выражение (5.3)):

$$g = G\frac{M}{R^2},$$

откуда выражаем $GM = gR^2$ и подставляем в уравнение движения корабля

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{m}{r^2}gR^2 = m\frac{v^2}{r}.$$

Из последнего выражения находим

$$g = \left(\frac{v}{R}\right)^2 r = \left(\frac{11\cdot 10^3}{8{,}9\cdot 10^6}\right)^2 \cdot 9{,}1\cdot 10^6 = 13{,}9 \text{ м/с}^2.$$

11(3). От поезда, идущего по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью v_0, отделяется 1/3 состава. Сила тяги при этом остаётся неизменной. В некоторый момент времени скорость отделившихся вагонов уменьшилась в 2 раза. Определите скорость головной части поезда в этот момент. Сила трения пропорциональна силе тяжести и не зависит от скорости.

Дано: $\underline{\Delta v = v_0/2;\ \Delta m = m/3;\ F = \text{const};\ \mu = \text{const};\ g}$.

v - ?

Решение. Из пропорциональности силы трения силе тяжести и ее независимости от скорости следует, что коэффициент трения μ = const (постоянная величина). Если масса поезда m, то от состава отделяется m/3, а поезд с оставшейся массой 2m/3 продолжает движение под действием силы тяги F.

Если обозначить время, за которое скорость отделившейся части поезда уменьшается в 2 раза, через t, то ускорение этой части состава равно

$$a = \mu g \qquad \text{или} \qquad a = \Delta v/t = v_0/(2t),$$

где g – ускорение свободного падения.

Из записанных соотношений выражаем равенство $\mu g = v_0/(2t)$, которое используем в дальнейших преобразованиях.

При равномерном движении целого поезда по горизонтальному участку пути сила тяги F должна равняиться силе трения $F_{тр}$:

$$F = F_{тр} = \mu\cdot mg.$$

А поезд с отделившимися вагонами массой 2m/3 будет двигаться с ускорением a_1, определяемым из уравнения движения (второго закона Ньютона):

$$(2m/3)\cdot a_1 = F - F_{тр} = F - \mu\cdot(2m/3)\cdot g.$$

В последнем выражении силу F заменяем равным ей значением $\mu\cdot mg$ и получаем:

$$(2m/3)\cdot a_1 = \mu\cdot mg - \mu\cdot(2m/3)\cdot g,$$

откуда выражаем

$$a_1 = \frac{1}{2}\mu g = \frac{1}{2}v_0/(2t) = \frac{v_0}{4t}.$$

За время t поезд с отделившимися вагонами, двигаясь с ускорением a_1, приобретёт скорость v, определяемую из кинематического уравнения:

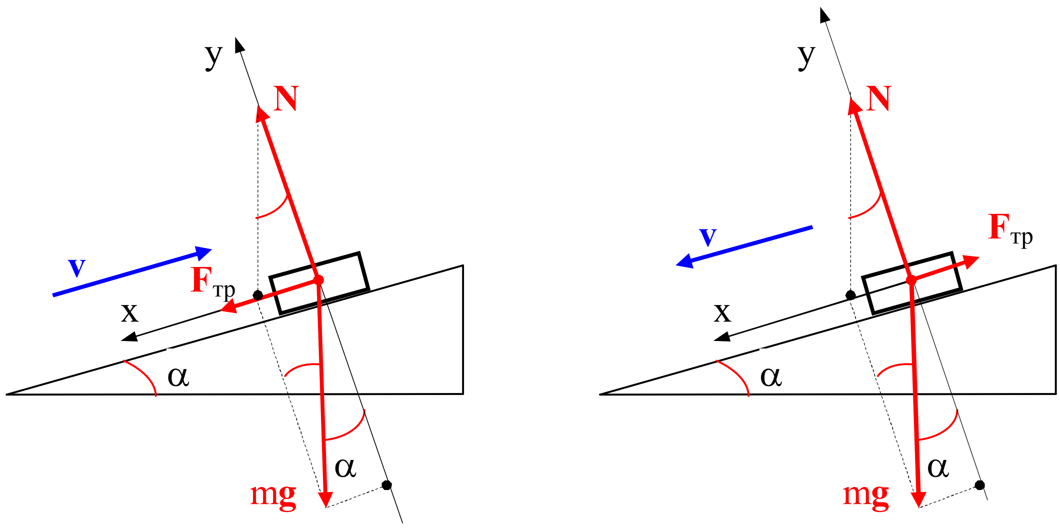
$$v = v_0 + a_1\cdot t = v_0 + \frac{v_0}{4t}\cdot t = \frac{5}{4}v_0.$$

12(2). Ледяная горка составляет с горизонтом угол $\alpha = 10^0$. По ней пускают вверх камень, который, поднявшись на некоторую высоту, соскальзывает по тому же пути вниз. Каков коэффициент трения μ, если время спуска в n = 2 раза больше времени подъёма.

Дано: $\underline{n = 2;\ \alpha = 10^0}$.

μ - ?

Решение. При подъёме камня вверх по горке вектор скорости **v** камня направлен в сторону отрицательной полуоси 0x, а при спуске – вдоль оси 0x (см. рисунок). При подъёме и спуске камень проходит одинаковые пути ℓ.



На камень действуют силы: сила тяжести m**g**, направленная вертикально вниз, сила упругости **N**, направленная перпендикулярно к поверхности горки, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, направленная в сторону, противоположную направлению движения, т.е. $\mathbf{F}_{тр}$ направлена против вектора скорости. Повторяя рассуждения, приведённые в задаче 1, получаем выражения для ускорений при движении вверх (с индексом ↑) и вниз по горке (с индексом ↓):

$$a_{\uparrow} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha);$$

$$a_{\downarrow} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Запишем выражения для времени подъёма $t_{\uparrow}$ и спуска $t_{\downarrow}$ и затем найдём их отношение с учётом вышеприведённых выражений для ускорений:

$$t_{\uparrow} = \sqrt{\frac{2\ell}{a_{\uparrow}}}; \qquad t_{\downarrow} = \sqrt{\frac{2\ell}{a_{\downarrow}}}; \qquad n = \frac{t_{\downarrow}}{t_{\uparrow}} = \sqrt{\frac{a_{\uparrow}}{a_{\downarrow}}} = \sqrt{\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mu}{\mathrm{tg}\alpha - \mu}}.$$

Полученное выражение $n = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mu}{\mathrm{tg}\alpha - \mu}}$ возводим в квадрат и находим искомый коэффициент трения μ:

$$\mu = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\cdot\mathrm{tg}\alpha = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1}\cdot\mathrm{tg}10^0 = 0{,}1.$$

13(2). Два шарика с массами $m_1 = 40$ г и $m_2 = 10$ г, надетые на горизонтальный стержень, связаны нитью длиной $\ell = 20$ см. Определите силу натяжения нити при вращении стержня с угловой скоростью $\omega = 5$ с$^{-1}$, если шарики не смещаются относительно оси вращения. Трением шариков о стержень пренебрегайте.

Дано: $\underline{m_1 = 40 \cdot 10^{-3}\text{ кг}; m_2 = 10 \cdot 10^{-3}\text{ кг}; \ell = 0{,}20\text{ м}; \omega = 5\text{ с}^{-1}}$.

N - ?

Решение. Из условий, что в процессе вращения шарики не смещаются и действием на них силы трения можно пренебречь, заключаем о равенстве сил натяжения нити, действующих на шарики, и неизменности расстояния между шариками, т.е.:

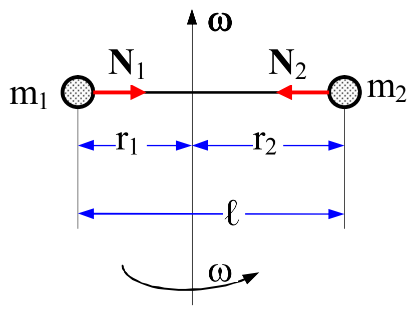
$N_1 = N_2$; и

$r_1 + r_2 = \ell$,

где N_1 и N_2 – силы натяжения нити, действующие на первый и второй шарики, соответственно;

r_1 и r_2 – расстояния от шариков до оси вращения (см. рисунок).

Запишем уравнения движения обоих шариков:



$m_1 a_1 = m_1 \omega^2 r_1 = N_1$;

$m_2 a_2 = m_2 \omega^2 r_2 = N_2$,

где a_1 и a_1 – центростремительные ускорения, с которыми движутся первый и второй шарики, соответственно.

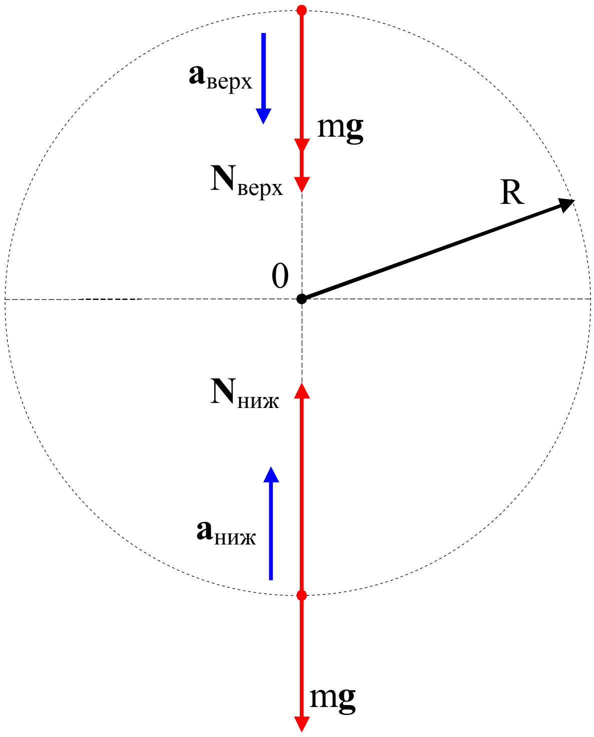
Решая систему из четырёх записанных уравнений, получаем:

$$N = N_1 = N_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\omega^2 \ell = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3}} \cdot 5^2 \cdot 0{,}2 = 40 \cdot 10^{-3}\text{ Н} = 40\text{ мН}.$$

14(2). Самолёт делает «мёртвую петлю». В нижней точке траектории сила, прижимающая лётчика к сиденью в 5 раз больше силы тяжести. В верхней точке траектории лётчик испытывает состояние невесомости. Во сколько раз скорость самолёта в нижней точке больше, чем в верхней точке?

Дано: $\underline{N_{ниж}/mg = 5;\ N_{верх} = 0}$.

$v_{ниж}/v_{верх}$ - ?



Решение. По третьему закону Ньютона сила, прижимающая лётчика к сиденью, равна по модулю и противоположна по направлению силе упругости (реакции опоры) **N**. В верхней точке траектории на лётчика действуют сила тяжести m**g** и сила упругости $\mathbf{N}_{верх}$, а в нижней точке траектории – сила тяжести m**g** и сила упругости $\mathbf{N}_{ниж}$ (см. рисунок). Предположим, что самолёт движется по окружности радиуса R. При круговой траектории движения силы, действующие на лётчика в верхней и нижней точках траектории, направлены по вертикали, и ускорения в этих точках называются центростремительными и равны:

$$a_{верх} = v_{верх}^2/R; \qquad a_{ниж} = v_{ниж}^2/R,$$

где $v_{ниж}$ и $v_{верх}$ – скорость самолёта в верхней и нижней точках траектории.

Уравнение движения лётчика в верхней точке траектории имеет вид:

$$m\mathbf{a}_{верх} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}_{верх},$$

где из того, что в верхней точке траектории лётчик находится в состоянии невесомости, следует $\mathbf{N}_{верх} = 0$.

Тогда написанное векторное уравнение в проекции на вертикальную ось принимает вид:

$$ma_{верх} = m\frac{v_{верх}{}^2}{R} = mg,$$

откуда выражаем

$$gR = v_{верх}{}^2. \qquad (*)$$

Уравнение движения лётчика в нижней точке траектории в скалярной форме имеет вид:

$$ma_{ниж} = m\frac{v_{ниж}{}^2}{R} = N_{ниж} - mg,$$

откуда выражаем

$$N_{ниж} = m\frac{v_{ниж}{}^2}{R} + g = m(g + \frac{v_{ниж}{}^2}{R}).$$

По третьему закону Ньютона сила $F_{ниж}$, прижимающая лётчика к сиденью, равна силе упругости $N_{ниж}$, т.е. $F_{ниж} = N_{ниж}$. Согласно условию задачи $F_{ниж}/mg = 5$. Таким образом, с учётом уравнения (*) имеем:

$$\frac{F_{ниж}}{mg} = \frac{N_{ниж}}{mg} = \frac{m\left(g + \frac{v_{ниж}{}^2}{R}\right)}{mg} = 1 + \frac{v_{ниж}{}^2}{gR} = 1 + \frac{v_{ниж}{}^2}{v_{верх}{}^2} = 5.$$

Из последнего соотношения выражаем

$$\frac{v_{ниж}{}^2}{v_{верх}{}^2} = 4,$$

и затем, извлекая квадратный корень, находим искомое отношение

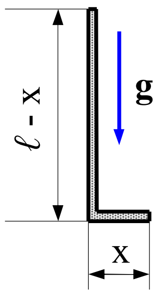
$$\frac{v_{ниж}}{v_{верх}} = 2.$$

15(3). Канат массой m висит вертикально, касаясь нижним концом поверхности пола. Какова будет максимальная сила действия каната на пол, если верхний конец каната отпустить? Ускорение свободного падения равно g.

Дано: $\underline{v_0 = 0; m; g}$.

F_{max} - ?

Решение. Изобразим положение каната в момент, когда канат проходит вертикально вниз расстояние x. Тогда, если длину каната обозначить через ℓ, часть каната длиной x находится на полу, а часть каната длиной ℓ - x ещё движется в направлении к полу (см. рисунок). Сила давления F_0 каната на пол определяется силой тяжести части каната длиной x, находящейся на полу:



$$mg\frac{x}{\ell},$$

и силой динамического давления $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, связанной с изменением импульса p части каната, оказавшейся на полу. Итак,

$$F_0 = mg\frac{x}{\ell} + F = mg\frac{x}{\ell} + \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Если канат отпустить, он начинает движение с нулевой начальной скоростью, т.е. $v_0 = 0$. Канат, падая свободно ($v_0 = 0$) с высоты x с ускорением g, приобретает скорость v, определяемую выражением:

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Элемент каната длины Δx (массой $\Delta m = \frac{m}{\ell}\Delta x$), прилегающий к полу во время падения каната, имеет импульс $p = \Delta m \cdot v = \frac{m}{\ell}\Delta x \cdot v$. Этот элемент каната достигает пола за время $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ и останавливается, т.е. его скорость $v_{кон}$ при этом становится равной нулю. Изменение импульса Δp элемента каната при достижении пола равно:

$$\Delta p = \Delta m \cdot (v - v_{кон}) = \Delta m \cdot (v - 0) = \Delta m \cdot v = \frac{m}{\ell}\Delta x \cdot v.$$

Найдём силу динамического давления

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \Delta p \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{m}{\ell}\Delta x \cdot v \cdot \frac{v}{\Delta x} = \frac{m}{\ell} \cdot v^2 = \frac{m}{\ell} \cdot 2gx = 2mg\frac{x}{\ell}.$$

Полученное выражение для F подставим в выражение для силы давления F_0 каната на пол:

$$F_0 = mg\frac{x}{\ell} + \frac{\Delta p}{\Delta t} = mg\frac{x}{\ell} + 2mg\frac{x}{\ell} = 3mg\frac{x}{\ell}.$$

Сила давления F_0 каната на пол будет максимальной, если $x \to \ell$:

$$F_{max} = F_0\Big|_{x\to\ell} = 3mg\frac{x}{\ell}\Big|_{x\to\ell} = 3mg\frac{\ell}{\ell} = 3mg.$$

16(2). Какую силу тяги F должен развивать двигатель на спутнике Земли массой m для того, чтобы он двигался на орбите радиусом R со скоростью, превышающей в 2 раза скорость свободного движения по этой орбите? Масса Земли M, гравитационная постоянная равна G.

Дано: $G; M; R; m; v_2 = 2v_1$.

F - ?

Решение. Скорость v_1 свободного движения спутника по круговой орбите радиусом R равна первой космической скорости на этой орбите. Центростремительное ускорение a_1 спутника при этом равно:

$$a_1 = \frac{v_1^2}{R}.$$

При движении со скоростью v_2 по этой же круговой орбите центростремительное ускорение a_2 равно:

$$a_2 = \frac{v_2^2}{R} = \frac{(2v_1)^2}{R} = 4\frac{v_1^2}{R} = 4a_1.$$

Теперь запишем уравнения движения спутника для обоих случаев:

$$ma_1 = G\frac{mM}{R^2}; \qquad ma_2 = 4 \cdot ma_1 = G\frac{mM}{R^2} + F.$$

Решая систему из приведённых двух уравнений, получаем выражение для силы тяги F:

$$F = 3 \cdot G\frac{mM}{R^2}.$$

17(2). Парашютист, летящий до раскрытия парашюта со скоростью 50 м/с, раскрывает парашют, и его скорость становится равной 5 м/с. Определите, какой примерно была максимальная сила натяжения строп при раскрытии парашюта. Масса парашютиста 80 кг, ускорение свободного падения 10 м/с^2. Принимайте, что сила сопротивления пропорциональна скорости.

Дано: $\underline{m = 80 \text{ кг}; g = 10 \text{ м/с}^2; v_1 = 5 \text{ м/с}; v_2 = 50 \text{ м/с}}$.

N_2 - ?

Решение. При равномерном движении парашютиста со скоростью v_1 сила тяжести mg уравновешивается силой сопротивления F_1:

$$mg = F_1 = \mu v_1,$$

где μ – коэффициент сопротивления – величина, не зависящая от скорости.

В момент раскрытия парашюта сила натяжения N_2 строп парашюта будет максимальной и равна силе сопротивления F_2:

$$N_2 = F_2 = \mu v_2.$$

Из первого уравнения выражаем μ и, подставляя во второе уравнение, находим:

$$N_2 = \mu v_2 = \frac{mg}{v_1} v_2 = mg\frac{v_2}{v_1} = 80 \cdot 10 \cdot \frac{50}{5} = 8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 8 \text{ кН}.$$

10 Контрольные вопросы

1 Какое движение называют движением по инерции? Какая система отсчёта называется инерциальной? Почему система отсчёта, связанная с Землёй, строго говоря, неинерциальная?

2 Что изучают в разделах классической механики – кинематика и динамика; в релятивистской механике?

3 Что такое масса (инертная, гравитационная)? Что такое сила? Как их можно охарактеризовать? Каковы единицы измерения массы, силы?

4 Какая физическая величина называется импульсом (количеством движения)?

5 Приведите две формы записи второго закона Ньютона.

6 Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона? Почему?

7 В чём заключается принцип независимости действия сил и принцип суперпозиции для силы?

8 Запишите уравнение динамики вращательного движения. Что понимают под центростремительной силой?

9 Сформулировав три закона Ньютона, покажите, какова взаимосвязь между этими законами.

10 Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми?

11 Сформулируйте закон всемирного тяготения.

12 Что понимают под силой тяжести; весом тела? Когда можно наблюдать состояние невесомости?

13 Каков характер движения тела при сообщении ему первой (второй) космической скорости?

14 Какую деформацию называют упругой (пластической)? Изобразите диаграмму растяжения вязких материалов и проанализируйте ее.

15 Какова физическая сущность трения? В чем отличие сухого трения от жидкого трения? Какие виды внешнего (сухого) трения Вы знаете? Запишите выражение для максимальной силы трения покоя (закон Амонтона-Кулона).

16 Как можно найти коэффициент трения скольжения?

11 Тесты для самоконтроля усвоения материала учащимися

1. Математическому маятнику массой m сообщили такой минимальный толчок, чтобы он совершил полный оборот в вертикальной плоскости. Какова будет сила натяжения нити маятника при прохождении положения равновесия? Трением пренебрегайте. Ускорение силы тяжести равно g.

A) 3 mg B) 2 mg C) 6 mg Д) 5 mg E) 8 mg

2. Представьте себе шахту, прорытую вертикально до центра Земли, где на расстоянии 100 км от него на тело действует сила гравитационного притяжения 9 Н, направленная к центру Земли. Какая сила будет действовать на это тело в шахте на расстоянии 300 км от Земли? Землю принимать за однородный шар с неизменной плотностью по всему объему.

А) 1 Н В) 3 Н С) 9 Н Д) 27 Н Е) 81 Н

3. Парашютист спускается вертикально с постоянной скоростью 2 м/с. Систему отсчета, связанную с Землей, считать инерциальной. В этом случае

А) вес парашютиста равен нулю

В) сила тяжести, действующая на парашютиста, равна нулю

С) сумма всех сил, приложенных к парашютисту, равна нулю

Д) сумма всех сил, действующих на парашютиста, постоянна и не равна нулю

4. Скорость лыжника при равноускоренном спуске с горы за 4 с увеличилась на 6 м/с. Масса лыжника 60 кг. Равнодействующая всех сил, действующих на лыжника, равна

А) 20 Н В) 30 Н С) 60 Н Д) 90 Н Е) 180 Н

5. Молекула массой $5 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая со скоростью 500 м/с, упруго ударяется о стенку под углом 60^0 к ее поверхности. Найдите импульс силы, полученный стенкой при ударе.

А) $2{,}50 \cdot 10^{-23}$ Н·с В) $4{,}33 \cdot 10^{-23}$ Н·с С) $1{,}25 \cdot 10^{-23}$ Н·с

Д) $2{,}165 \cdot 10^{-23}$ Н·с Е) $4{,}50 \cdot 10^{-23}$ Н·с

6. Вычислите модуль упругости для железа, если известно, что железная проволока длиной 1,5 м и сечением 1 $мм^2$ под действием силы в 200 Н удлинилась на 1,5 мм.

A) $2\cdot10^8$ Па B) $2\cdot10^9$ Па C) $2\cdot10^{10}$ Па Д) $2\cdot10^{11}$ Па E) $2\cdot10^{12}$ Па

7. Через неподвижный блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы массой по 240 г каждый. На один из грузов положили гирьку 10 г. На каком расстоянии друг от друга окажутся грузы через 2 с, если в начале движения они находились на одной высоте?

A) 0,8 м B) 0,4 м C) 1,0 м Д) 0,6 м E) 1,2 м

8. С каким ускорением стартует ракета массой m, если скорость истечения газов относительно ракеты U, а секундный расход топлива μ? Ускорение свободного падения g.

A) $\frac{\mu U}{m}$ B) $\frac{\mu U + mg}{m}$ C) $\frac{\mu U - mg}{m}$ Д) g E) 0

9. Карусель радиуса 5 м имеет период вращения 10 с. Если расположить отвес у края карусели, какой угол он составит с вертикалью? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/$с^2$.

A) 8^0 B) 9^0 C) 10^0 Д) 11^0 E) 12^0

10. Два шара с одинаковыми массами испытывают упругое столкновение в системе отсчета, в которой один из них до столкновения находился в покое. После столкновения скорости обоих шаров отличны от нуля. В каких пределах могут находиться значения угла между векторами скорости тел после столкновения?

A) только 0^0 B) только 90^0 C) только 180^0 Д) от 0^0 до 90^0 E) от 0^0 до 180^0

11. Космонавт массой M = 80 кг находится на поверхности астероида, имеющего форму шара радиуса R = 1 км, и держит в руках камень массой m = 4 кг. С какой максимальной горизонтальной скоростью v_0 относительно астероида космонавт может бросить камень, не рискуя, что сам станет спутником астероида? Плотность астероида ρ = 5 г/см^3. Гравитационная постоянная G = 6,67·10^{-11} Н·м^2/кг^2.

А) 11,6 м/с В) 14,6 м/с С) 17,6 м/с Д) 20,6 м/с Е) 23,6 м/с

12. Предлагается два объяснения того экспериментального факта, что ускорение свободного падения не зависит от массы тел.

1. В соответствии с третьим законом Ньютона два тела притягиваются друг к другу с одинаковой силой, поэтому они и падают на Землю с одинаковым ускорением.
2. В соответствии с законом всемирного тяготения сила тяжести пропорциональна массе, а в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение обратно пропорционально массе. Поэтому любые тела при свободном падении движутся с одинаковым ускорением.

Какое из них является верным?

А) только 1 В) только 2 С) и 1, и 2 Д) ни 1, ни 2

13. Определите период вращения искусственного спутника вблизи поверхности планеты, которую можно принять за однородный шар плотностью ρ. Гравитационная постоянная равна G.

А) $\sqrt{\dfrac{3\pi}{4\rho G}}$ В) $\sqrt{\dfrac{3\pi}{\rho G}}$ С) $\sqrt{\dfrac{4\pi}{3\rho G}}$ Д) $\sqrt{\dfrac{2\pi}{3\rho G}}$ Е) $\sqrt{\dfrac{2\pi}{\rho G}}$

14. Две гири неравной массы висят на концах нити, перекинутой через невесомый блок, причем легкая гиря расположена на h = 2 м ниже тяжелой. Если дать им

возможность двигаться, то через t = 2 с они окажутся на одной высоте. Определите отношение масс гирь. Ускорение силы тяжести $g = 10$ м/с^2.

А) 1,5 В) 1,2 С) 1,4 Д) 1,1 Е) 1,3

15. Стальной клин (колун, топор), применяемый при колке дров, действует на древесину с силами перпендикулярными к его граням (щекам). Угол между щеками равен 12°. Какая сила действует со стороны каждой щеки, если при забивании колуна на его тупой конец действует сила 1 000 Н?

А) 4,78 кН В) 5,12 кН С) 5,47 кН Д) 5,83 кН Е) 6,38 кН

16. Средняя плотность планеты Плюк равна средней плотности Земли, а радиус Плюка в 2 раза больше радиуса Земли. Во сколько раз первая космическая скорость для Плюка больше, чем для Земли

А) 1 В) 2 С) 1,41 Д) 4 Е) 8

17. Если на тело массой 1 кг, лежащее на горизонтальной плоскости, подействовать горизонтальной силой 1 Н, то сила трения между телом и плоскостью будет равна (коэффициент трения между телом и плоскостью 0,2 и ускорение силы тяжести 10 м/с^2)

А) 0,1 Н В) 1 Н С) 2 Н Д) 0,2 Н Е) 10 Н

18. Тело массой 200 кг равномерно поднимается по наклонной плоскости, образующей угол 30^0 с горизонтом, под действием силы 1 500 Н, приложенной вдоль линии движения. С каким ускорением тело будет соскальзывать вдоль наклонной плоскости, если его отпустить? Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 4,5 м/с^2 В) 2,5 м/с^2 С) 3 м/с^2 Д) 2 м/с^2 Е) 3,5 м/с^2

19. На какой стадии полета в космическом корабле, который становится на орбите спутником Земли, будет наблюдаться невесомость?

A) на стартовой позиции с включенным двигателем
B) при выходе на орбиту с включенным двигателем
C) при орбитальном полете с выключенным двигателем
Д) при посадке с парашютом с выключенным двигателем

20. Пружину длиной ℓ и жесткостью k разрезали на две равные части. Определите жесткость каждой новой пружины.

A) k B) $\frac{k}{2}$ C) 2 k Д) 4 k E) 12 k

21. Один шар налетает на другой, большей массы, первоначально покоившийся. После центрального упругого шара разлетаются так, что величина скорости меньшего шара в 2,5 раза больше величины скорости большого шара. Найти отношение массы большего шара к массе меньшего шара.

A) 4 B) 5 C) 6 Д) 6,25 E) 8

22. В инерциальной системе отсчета движутся два тела. Первому телу массой m сила F сообщает ускорение *a*. Чему равна масса второго тела, если вдвое меньшая сила сообщила ему в 4 раза большее ускорение?

A) 2 m B) $\frac{m}{8}$ C) $\frac{m}{2}$ Д) m E) 8 m

23. Майский жук массой m летит прямолинейно и равномерно со скоростью v, направленной горизонтально. Сила сопротивления воздуха, действующая на жука

F = -kv, где k = const – известная величина. Под каким углом к скорости жука направлена развиваемая им сила тяги? Ускорение силы тяжести g.

A) $tg\,\alpha=\frac{k}{m}$ B) $tg\,\alpha=\frac{kv}{mg}$ C) $tg\,\alpha=\frac{mg}{kv}$ Д) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ E) $\alpha=0$

24. Какова средняя сила давления F на плечо при стрельбе из автомата, если масса пули m = 10 г, а скорость пули при вылете из ствола v = 300 м/с? Число выстрелов из автомата в единицу времени n = 300 $мин^{-1}$.

A) 12 Н B) 15 Н C) 18 Н Д) 24 Н E) 9 Н

25. Парашют сконструирован таким образом, чтобы скорость приземления женщины массы 50 кг составляла 6,5 м/с. С какой скоростью приземлится мужчина массы 70 кг, если воспользуется этим парашютом по ошибке?

A) 6,5 м/с B) 7,8 м/с C) 8,7 м/с Д) 9,1 м/с E) 10,3 м/с

26. Автодрезина ведет равноускоренно две платформы. Сила тяги F = 1,8 кН. Масса первой платформы m_1 = 10 т, второй m_2 = 5 т. С какой силой натянуто сцепление между платформами?

A) 1 500 Н B) 1 200 Н C) 900 Н Д) 600 Н E) 300 Н

27. Груз массой m лежит на полу кабины лифта, опускающегося равнозамедленно с ускорением a. Чему равен вес тела?

A) mg - ma B) mg + ma C) mg Д) ma - mg E) ma

28. Какую силу тяги должен развивать двигатель на спутнике Земли массой m для того, чтобы он двигался по орбите радиусом R со скоростью, превышающей в 2 раза скорость свободного движения по этой орбите? Масса Земли M. Гравитационная постоянная G.

A) $7G\frac{mM}{R^2}$ B) $2G\frac{mM}{R^2}$ C) $G\frac{mM}{R^2}$ Д) $5G\frac{mM}{R^2}$ E) $3G\frac{mM}{R^2}$

29. Тело массой 2 кг движется вдоль оси 0x. Его координата меняется в соответствии с уравнением $x = A + Bt + Ct^2$, где A = 2 м, B = 3 м/с, C = 5 м/с^2. Чему равен импульс тела в момент времени t = 2 с?

A) 86 кг·м/с B) 48 кг·м/с C) 46 кг·м/с Д) 26 кг·м/с E) 16 кг·м/с

30. Человек массой 70 кг поднимается в лифте, движущемся равнозамедленно вертикально вверх с ускорением 1 м/с^2. Определите силу давления человека на пол кабины лифта. Ускорение свободного падения равно 9,8 м/с^2.

A) 546 Н B) 616 Н C) 686 Н Д) 756 Н E) 826 Н

31. Жесткость одной пружины 20 Н/м, другой – 30 Н/м. Пружины соединили последовательно. Найдите жесткость этого соединения.

A) 25 Н/м B) 18 Н/м C) 16 Н/м Д) 12 Н/м E) 50 Н/м

32. Представим себе, что закон всемирного тяготения имеет вид $F = G\frac{m^2M^2}{r^2}$, а основной закон динамики имеет вид $a = F/m^2$. В таком фантастическом мире ускорение свободного падения

А) не зависит от массы тел

В) пропорционально массе тела

С) обратно пропорционально массе тела

Д) обратно пропорционально квадрату массы тела

33. Спутник запускается на круговую околоземную орбиту на высоту h над поверхностью Земли радиусом R (h << R). Массу спутника увеличили вдвое. Как изменилась его первая космическая скорость?

А) увеличилась в 2 раза В) не изменилась С) уменьшилась в 2 раза

Д) уменьшилась в 4 раза Е) увеличилась в 4 раза

34. Какую массу балласта m надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Суммарная масса аэростата с балластом M = 1 200 кг, подъемная сила аэростата постоянна и равна F = 8 000 Н. Силу сопротивления воздуха считайте одинаковой при подъеме и при спуске. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

А) 200 кг В) 400 кг С) 600 кг Д) 800 кг Е) 1 000 кг

35. Оцените среднюю силу натяжения ремней безопасности, удерживающих человека в автомобиле, движущемся со скоростью 36 км/ч и столкнувшегося со столбом. При этом у машины появилась вмятина глубиной 35 см. Масса человека 70 кг.

А) 35 кН В) 40 кН С) 5 кН Д) 20 кН Е) 10 кН

36. Человек сидит на краю круглой горизонтальной платформы радиусом R = 4 м. При какой минимальной частоте n вращения платформы вокруг вертикальной оси человек не сможет удержаться на ней при коэффициенте трения $\mu = 0{,}27$? Ускорение силы тяжести $g = 9{,}8$ м/с^2.

А) 7,77 мин$^{-1}$ В) 8,12 мин$^{-1}$ С) 8,35 мин$^{-1}$ Д) 8,63 мин$^{-1}$ Е) 9,02 мин$^{-1}$

37. Определите плотность вещества планеты, сутки на которой равны 24 ч, если на ее экваторе тела невесомы. Гравитационная постоянная равна $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

А) 35 кг/м^3 В) 31 кг/м^3 С) 27 кг/м^3 Д) 23 кг/м^3 Е) 19 кг/м^3

38. Шарик массы m, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в момент прохождения положения равновесия и при максимальном отклонении из положения равновесия равны друг другу. Чему равна сила натяжения нити в нижнем положении, если угол отклонения нити в крайнем положении равен α? Ускорение свободного падения g.

А) $mg(1-\cos\alpha)$ В) $mg(1-\sin\alpha)$ С) $mg(1+\sin\alpha)$ Д) $3mg$ Е) $mg(1+\cos\alpha)$

39. Определите массу груза, который нужно сбросить с аэростата массой 1 100 кг, движущегося равномерно вниз, чтобы аэростат стал двигаться с такой же по модулю скоростью вверх. Архимедова сила, действующая на аэростат, равна 10^4 Н. Сила сопротивления воздуха при движении аэростата пропорциональна скорости. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 400 кг В) 300 кг С) 250 кг Д) 200 кг Е) 150 кг

40. Утверждение, что материальная точка покоится или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют другие тела или воздействие на него других тел взаимно уравновешено,

А) верно при любых условиях

В) верно для инерциальных систем отсчёта

С) верно для неинерциальных систем отсчёта

Д) неверно ни для каких систем отсчёта

41. Мальчик массой m = 50 кг качается на качелях с длиной подвеса ℓ = 4 м. С какой силой он давит на сиденье при прохождении среднего положения со скоростью v = 6 м/с? Ускорение свободного падения g =10 м/с^2.

А) 1 000 Н В) 950 Н С) 900 Н Д) 850 Н Е) 800 Н

42. В шахту опускается равноускоренно груз массой 580 кг. За первые 10 с он проходит 35 м. Найдите натяжение каната, на котором висит груз. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 4,6 кН В) 5,0 кН С) 5,4 кН Д) 5,8 кН Е) 6,2 кН

43. Груз поднимают равноускоренно на высоту h = 10 м с помощью верёвки. Масса груза m = 2 кг. Изначально груз покоился. Определите время подъёма t, если сила натяжения верёвки в процессе подъёма N = 30 Н. Ускорение силы тяжести g = 10 м/с^2.

А) 6 с В) 5 с С) 4 с Д) 3 с Е) 2 с

44. Груз массой m, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найдите максимальную разность сил натяжения нити. Ускорение силы тяжести g.

А) 4 mg В) 2 mg С) 6 mg Д) 5 mg Е) 3 mg

45. Сани с седоками общей массой 100 кг начинают съезжать с горы высотой 8 м и длиной 100 м. Какова средняя сила сопротивления движению санок, если

в конце горы они достигли скорости 10 м/с? Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

А) 30 Н В) 50 Н С) 20 Н Д) 40 Н Е) 80 Н

46. Груз массой m может скользить без трения по горизонтальному стержню, вращающемуся вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Груз соединяют с этим концом стержня пружиной, коэффициент упругости которой k. При какой угловой скорости ω пружина растянется на 50 % первоначальной длины?

А) $\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{m}}$ В) $\sqrt{\frac{2}{1}\cdot\frac{k}{m}}$ С) $\sqrt{\frac{k}{m}}$ Д) $\sqrt{\frac{3}{1}\cdot\frac{k}{m}}$ Е) $\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{k}{m}}$

47. Космическая станция движется вокруг Земли по орбите радиусом $8\cdot10^6$ м. Чему приблизительно равна сила тяжести, действующая на космонавта массой 80 кг, в этой станции? Гравитационная постоянная $6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2. Масса Земли $6\cdot10^{24}$ кг. Ускорение свободного падения на поверхности Земли равно 10 м/с^2.

А) 0 В) 50 Н С) 80 Н Д) 500 Н Е) 800 Н

48. Два тела связаны нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К телу массы m_1 приложена сила F_1, направленная вдоль поверхности, а к телу массы m_2 – сила F_2 ($F_2 < F_1$), направленная в противоположную сторону. Найдите силу натяжения T нити при движении тел.

А) $\frac{m_2F_1 - m_1F_2}{m_1 + m_2}$ В) $\frac{m_1F_1 - m_2F_2}{m_1 + m_2}$ С) $\frac{m_1F_1 + m_2F_2}{m_1 + m_2}$ Д) $\frac{m_1F_2 + m_2F_1}{m_1 + m_2}$ Е) $\frac{m_1F_2 - m_2F_1}{m_1 + m_2}$

49. Молоток массой 800 г ударяет по небольшому гвоздю и забивает его в доску. Скорость молотка перед ударом равна 5 м/с, после удара она равна 0, продолжительность удара 0,2 с. Определите среднюю за время удара силу удара молотка.

A) 20 Н B) 80 Н C) 40 Н Д) 8 Н E) 4 Н

50. Считая известным ускорение свободного падения у поверхности Земли g и ее радиус R, определите радиус круговой орбиты искусственного спутника, который движется по ней со скоростью v.

A) $\frac{gR^2}{v^2}$ B) $\frac{v^2R}{2g}$ C) $\frac{gR}{v^2}$ Д) $\frac{v^2}{2gR}$ E) $\frac{2gR^2}{v^2}$

51. Шарик массы m, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в момент прохождения положения равновесия и при максимальном отклонении из положения равновесия равны друг другу. Чему равна сила натяжения нити в нижнем положении, если угол отклонения нити в крайнем положении равен α? Ускорение свободного падения g.

A) $mg(1-\cos\alpha)$ B) $mg(1-\sin\alpha)$ C) $mg(1+\sin\alpha)$ Д) $3mg$ E) $mg(1+\cos\alpha)$

52. Какова должна была бы быть продолжительность суток на Земле, чтобы предметы, расположенные на экваторе, ничего не весили? Радиус Земли равен 6 400 км. Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

A) 84 мин B) 96 мин C) 60 мин Д) 72 мин E) 48 мин

53. Под действием некоторой силы тележка, двигаясь из состояния покоя, прошла путь 40 см. Когда на тележку положили груз 200 г, то под действием той же си-

лы за то же время тележка прошла из состояния покоя путь 20 см. Какова масса тележки?

А) 200 г В) 300 г С) 400 г Д) 100 г Е) 600 г

54. Чтобы удержать тело на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 45^0$ надо приложить силу $F_1 = 0{,}2$ Н, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, а чтобы равномерно втаскивать вверх, надо приложить силу $F_2 = 0{,}6$ Н. Найдите коэффициент трения.

А) 0,25 В) 0,75 С) 1 Д) 0,5 Е) 0,4

55. Шарик массой 500 г, укрепленный на конце легкого стержня длиной 1 м, равномерно вращается в вертикальной плоскости с угловой скоростью 2 рад/с. С какой силой действует шарик на стержень в нижней точке траектории? Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 7 Н В) 10 Н С) 5 Н Д) 12 Н Е) 4 Н

56. Чему равен тормозной путь автомобиля массой 1 000 кг, движущегося со скоростью 30 м/с? Коэффициент трения скольжения между дорогой и шинами автомобиля равен 0,15. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 15 м В) 30 м С) 150 м Д) 300 м Е) 90 м

57. Искусственный спутник обращается по круговой орбите на высоте 600 км от поверхности планеты со скоростью 3,4 км/с. Радиус планеты равен 3 400 км. Чему равно ускорение свободного падения на поверхности планеты?

А) 3,0 км/с^2 В) 4,0 м/с^2 С) 9,8 м/с^2 Д) 9,8 км/с^2 Е) 16 м/с^2

58. Радиус планеты меньше радиуса Земли в 3 раза. Чему равна масса планеты, если сила тяжести тела на ее поверхности равна силе тяжести этого тела на поверхности Земли? Масса Земли равна М.

A) $\frac{M}{3}$ B) 3 М C) $\frac{M}{9}$ Д) 9 М E) М

59. Камень, привязанный к веревке длиной ℓ = 2,5 м, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Масса камня m = 2 кг. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. При каком значении периода обращения камня его вес в верхней точке траектории станет равным нулю?

A) 6,28 с B) 3,14 с C) 1,57 с Д) 2 с E) 4 с

60. Какое ускорение сообщает Солнце Земле своим притяжением? Расстояние до Солнца примерно в 24 тыс. раз больше, чем радиус Земли, а масса Солнца превышает массу Земли в 333 тыс. раз. Ускорение свободного падения у поверхности Земли g = 10 м/с^2.

A) 6 $\frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$ B) 12 $\frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$ C) 18 $\frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$ Д) 24 $\frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$ E) 30 $\frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$

61. Самолет делает″мёртвую петлю″ радиусом R = 100 м и движется по ней со скоростью v = 280 км/час. С какой силой F тело летчика массой М = 80 кг будет давить на сиденье самолета в верхней точке петли? Ускорение силы тяжести g = 9,8 м/с^2.

A) 2 853 Н B) 3 256 Н C) 3 812 Н Д) 4 056 Н E) 5 624 Н

62. Определите ускорение свободного падения на высоте h, равной половине радиуса Земли. У поверхности Земли ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

А) 4,95 м/с^2 В) 3,3 м/с^2 С) 4,4 м/с^2 Д) 5,5 м/с^2 Е) 6,6 м/с^2

63. Космический корабль движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом $2 \cdot 10^7$ м. Определите скорость корабля, считая известными радиус Земли 6 400 км и ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 11 км/с В) 8 км/с С) 6,3 км/с Д) 4,5 км/с Е) 3,8 км/с

64. Поезд массы $m = 500$ т после прекращения тяги паровоза останавливается под действием силы трения $F = 0{,}1$ МН через время $t = 1$ мин. С какой скоростью v шел поезд до момента прекращения тяги паровоза?

А) 37,8 км/час В) 39,6 км/час С) 41,4 км/час Д) 43,2 км/час Е) 45 км/час

65. Канат лежит на столе так, часть его свешивается со стола и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части составляет $k = 0{,}2$ его длины. Чему равен коэффициент трения каната о стол?

А) 0,4 В) 0,3 С) 0,1 Д) 0,2 Е) 0,25

66. Какие силы в механике сохраняют своё значение при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую?

А) только гравитационные

В) только силы упругости

С) только силы трения

Д) А, В и С

Е) ни А, ни В, ни С

67. Каков вес поезда, идущего с ускорением 0,05 м/с^2, если коэффициент трения 0,004, а сила тяги тепловоза 223 кН? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) $30 \cdot 10^5$ Н В) $22 \cdot 10^5$ Н С) $30 \cdot 10^6$ Н Д) $20 \cdot 10^5$ Н Е) $24{,}8 \cdot 10^6$ Н

68. Сани с седоками общей массой 100 кг начинают съезжать с горы высотой 8 м и длиной 100 м. Какова средняя сила сопротивления движению санок, если в конце горы они достигли скорости 10 м/с? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 30 Н В) 50 Н С) 20 Н Д) 40 Н Е) 80 Н

69. Жесткость пружины равна 50 Н/м. Если с помощью этой пружины равномерно тянуть по полу коробку массы 2 кг, то длина пружины увеличивается с 10 до 15 см. Каков коэффициент трения коробки о пол? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 0,125 В) 0,25 С) 0,1 Д) 0,2 Е) 0,4

70. Вычислите модуль упругости для железа, если известно, что железная проволока длиной 1,5 м и сечением 1 мм^2 под действием силы в 200 Н удлинилась на 1,5 мм.

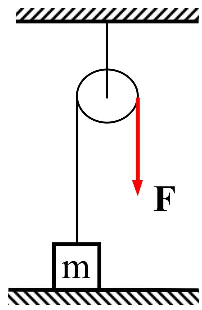
А) $2 \cdot 10^8$ Па В) $2 \cdot 10^9$ Па С) $2 \cdot 10^{10}$ Па Д) $2 \cdot 10^{11}$ Па Е) $2 \cdot 10^{12}$ Па

12 Контрольные задания

1(2). Из n = 5 проволок одинаковой длины L = 3,5 м и одинаковой жесткостью $k = 1{,}2 \cdot 10^5$ Н/м сплели канат. От каната отрезали кусок $\ell = 0{,}5$ м. Определите жесткость оставшейся части каната. Предположите, что свойства отдельных проволочек при сплетении не изменились.

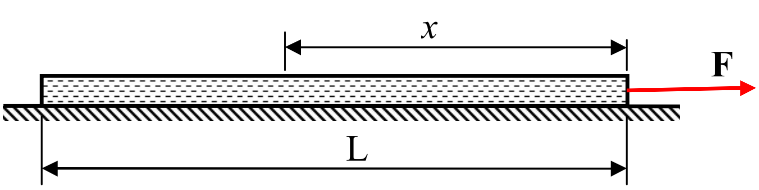
2(2). Определите первую космическую скорость для планеты, масса которой в k = 2 раза больше массы Земли. Радиус планеты в n = 1,5 раза больше земного. Первая космическая скорость для Земли равна v = 7,91 км/с.

3(2). Для подъема груза массой m = 10 кг используются неподвижный блок и нерастяжимый трос (см. рисунок). Потянув за трос с некоторой силой можно поднять груз на высоту $H_1 = 3$ м за время t = 5 с. На какую величину ΔF необходимо увеличить приложенную силу, чтобы за то же время поднять груз на высоту $H_2 = 5$ м? Массами блока и троса можно пренебречь.



4(3). Ледяная горка представляет собой наклонную плоскость с углом α. Средняя треть длины горки посыпана песком. С вершины без начальной скорости съезжают санки. При движении санок по чистому льду трение отсутствует. Определите, при каких значениях коэффициента трения между средней частью горки и санками они смогут доехать до подножия горки.

5(3). К тяжелому канату длиной L, лежащему на горизонтальной плоскости, приложили силу **F**, направленную вдоль каната (см. рисунок). Определите натяжение каната на расстоянии *x* от того конца, к которому приложена сила. Трение между канатом и плоскостью отсутствует.



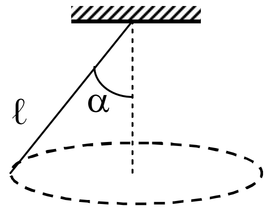
6(1). Груз массой m = 800 кг поднимают вертикально с помощью троса, прочность которого на разрыв равна T = 20 000 Н. Определите максимальное ускорение, с которым можно поднимать этот груз.

7(3). Доска массой M лежит на горизонтальной плоскости (см. рисунок). На доске находится брусок массой m. Коэффициент трения между доской и плоскостью равен μ_1, между доской и бруском μ_2. Определите, при какой минимальной величине силы **F**, приложенной к доске в горизонтальном направлении, брусок начинает скользить по доске.

8(2). Определите минимально возможный период обращения спутника вокруг планеты, плотность которой ρ = 2,8 г/см^3. Гравитационная постоянная равна G = 6,67·10^{-11} Н·м^2/кг^2.

9(2). Двум одинаковым телам сообщают одинаковые начальные скорости, направленные под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту. Одно тело движется свободно, другое по гладкой наклонной плоскости (трение отсутствует, угол наклона плоскости $\alpha = 45^0$). Определите отношение высот максимального подъёма этих тел.

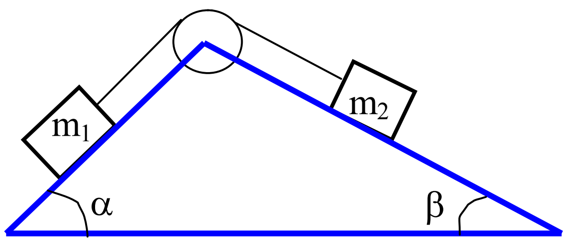
10(2). Груз, висящий на невесомой нерастяжимой нити длиной ℓ = 0,5 м, движется по окружности в горизонтальной плоскости (см. рисунок). Шнур образует с вертикалью угол $\alpha = 45^0$. Определите период вращения тела.



11(2). Определите, может ли равнодействующая трех равных по величине сил, приложенных в одной точке, быть равной нулю. Если это, возможно, приведите пример.

12(3). Вы ведете автомобиль, когда внезапно видите впереди на расстоянии ℓ препятствие, которое невозможно объехать. Что в этой ситуации выгоднее: затормозить или повернуть, не меняя величины скорости. Силу трения в обоих случаях считайте одинаковой. При обосновании ответа пренебрегите размерами автомобиля.

13(2). Два груза с массами $m_1 = m_2$ = 0,5 кг связаны между собой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Грузы лежат на гладких плоскостях, расположенных под углами $\alpha = 60^0$ и $\beta = 30^0$ к горизонту (см. рисунок). Определите величины ускорений, с которыми движутся грузы.

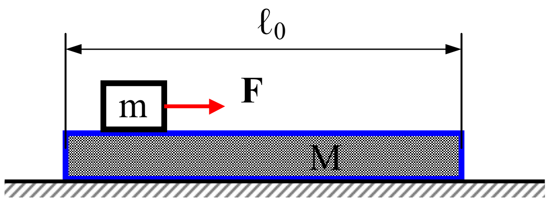


14(2). Лифт разгоняется с постоянным ускорением до скорости v = 10 м/с в течение t = 10 с. Столько же времени занимает и остановка лифта. Определите отношение весов человека в поднимающемся лифте в начале и конце движения.

15(2). Самолет совершает мертвую петлю. Радиус петли R = 250 м, масса летчика m = 80 кг, скорость самолета v = 360 км/ч. Определите вес летчика в верхней и нижней точках петли.

16(2). Тело тянут за нить так, что оно движется по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью (**v** ≠ 0). Коэффициент трения между телом и плоскостью μ = 0,4. Определите угол наклона нити к плоскости, при котором ее натяжение будет минимальным.

17(3). Брусок массой M = 1 кг и длиной ℓ_0 = 1 м находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может скользить без трения. На бруске у левого его конца лежит небольшой кубик массой m = 0,2 кг (см. рисунок). К кубику в горизонтальном направлении приложена некоторая сила F, под действием которой кубик, двигаясь равноускоренно, соскользнул с противоположного конца бруска в тот момент, когда брусок переместился на расстояние ℓ, равное его учетверенной длине ($\ell = 4\ell_0$).Определить коэффициент трения между кубиком и бруском, если в момент падения кубика скорость бруска v = 2 м/с.



18(3). Тело массой m = 1 кг тянут по горизонтальной поверхности с силой F = 4 Н. Тело движется равномерно, если сила приложена к нему под углом α = 30^0 к горизонту. С каким ускорением a будет соскальзывать тело вниз по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 30^0, если коэффициенты трения тела о горизонтальную поверхность и наклонную плоскость равны? Считать, что ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

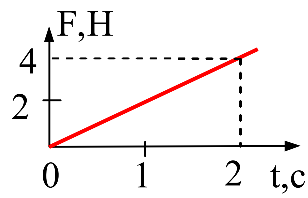
19(2). Груз, подвешенный на нити, отклоняют на угол α и отпускают без начальной скорости. В момент времени, когда нить расположена строго вертикально, ее натяжение в n = 2 раза больше силы тяжести, действующей на груз. Определите значение угла α.

20(2). На диске, который вращается вокруг вертикальной оси, лежит маленькая шайба массой m = 100 г. Шайба соединена с помощью горизонтальной пружины с осью диска. Если угловая скорость диска не превышает величины ω_1 = 10 рад/с, пружина находится в недеформированном состоянии. При медленном увеличении угловой скорости до величины ω_2 = 30 рад/с пружина удлиняется в n = 1,5 раза. Определите коэффициент жесткости k пружины.

21(2). На полюсе некоторой планеты тело весит в n = 1,5 раза больше, чем на экваторе. Период обращения планеты вокруг собственной оси равен T = 2 часа. Определите плотность планеты, предполагая, что она имеет форму идеального шара. Численное значение гравитационной постоянной равно $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $Н\cdot м^2/кг^2$.

22(1). На гладкой горизонтальной поверхности находятся два тела, соединенные невесомой нерастяжимой нитью. Масса левого тела m=1 кг, правого – M = 2 кг. К системе прикладывают силу F = 3 Н, направленную вдоль нити. В первом случае сила приложена к правому шару и тянет систему вправо, а во втором – к левому шару и тянет систему влево. Определите силы натяжения нити в обоих случаях.

23(2). Тело массой 1 кг начинает двигаться из состояния покоя под действием постоянной по направлению силы **F**. Модуль силы изменяется со временем по закону, представленному графически на рисунке. Какова скорость тела в конце 2-й секунды?



24(1). Два тела массами m_1 = 1,5 кг и m_2 = 2,5 кг висят на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Определите величину силы натяжения нити при движении грузов. Трение в блоке отсутствует.

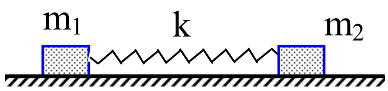
25(2). Тело массой 10 кг движется равномерно по окружности по законам: S = 2t; φ = 5t. Найдите равнодействующую сил, действующих на тело.

13 Задачи для самостоятельного решения

1(3). К одному концу веревки, перекинутой через неподвижный блок, подвешен груз массой m = 2 кг. К другому концу в одном случае приложена направленная вниз сила F = 25 Н, а в другом – подвешен второй груз. Определите массу второго груза, при которой ускорение первого груза будет в обоих случаях одинаковым. Массой и растяжением веревки можно пренебречь.

2(2). Найдите силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, движущегося в гору с ускорением 1 м/с^2. Уклон горы 1 м на каждые 25 м пути. Масса автомобиля 1 т, коэффициент трения 0,1.

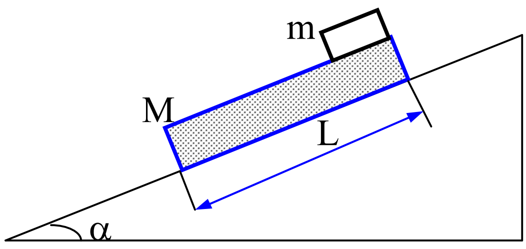
3(3). На горизонтальной поверхности лежат два тела массами m_1 = 2 кг и m_2 = 3 кг, прикрепленные к концам пружины (см. рисунок). Коэффициент жесткости пружины k = 75 Н/м. В недеформированном состоянии длина пружины равна ℓ = 0,3 м. Определите максимальное расстояние между телами, при котором они будут оставаться в покое. Коэффициент трения между телами и поверхностью равен μ = 0,2. Размерами тел по сравнению с длиной пружины можно пренебречь.



4(2). Вертикально расположенная пружина соединяет два тела. Масса верхнего тела m_1 = 1 кг, нижнего – m_2 = 2 кг. Когда система подвешена за верхнее тело, длина пружины равна ℓ_1 = 10 см. Если систему поставить на горизонтальную поверхность, длина пружины равна ℓ_2 = 5 см. Определите длину недеформированной пружины.

5(3). На барабан намотана нить, к концу которой привязан груз. Предоставленный самому себе груз начинает опускаться с ускорением 5,6 м/с^2. Определить ускорение точек, лежащих на ободе барабана в тот момент, когда барабан сделает поворот на угол в 1 рад?

6(3). На плоскости с углом наклона $\alpha = 45^0$ находится доска массой M = 1,2 кг и длиной L = 1,5 м. На верхнем конце доски находится кубик массой m = 0,6 кг (см. рисунок). В начальный момент времени доска и кубик удерживаются в состоянии покоя. Определите время соскальзывания кубика с доски после того, как оба тела опускают. Коэффициент трения доски о плоскость μ = 0,7. Трение между кубиком и доской отсутствует. Размерами кубика по сравнению с длиной доски можно пренебречь.

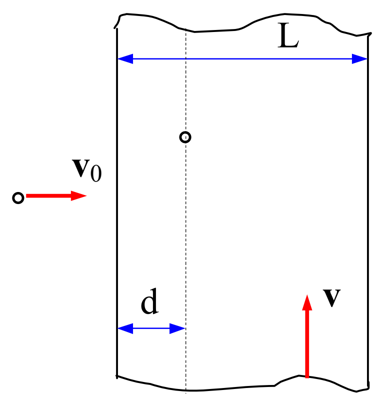


7(2). Ленточный подъемник образует угол α с горизонтом. Определите максимальное ускорение, с которым подъемник может поднимать ящик, если коэффициент трения между ящиком и поверхностью ленты равен μ. Предположите, что лента под тяжестью ящика не прогибается.

8(2). Пуля, летевшая горизонтально со скоростью v = 400 м/с, попадает в брусок, подвешенный на нити длиной ℓ = 4 м, и застревает в нем. Определите силу натяжения в момент удара пули, если масса пули m = 20 г, а бруска M = 5 кг. Ускорение силы тяжести g = 10 м/с^2.

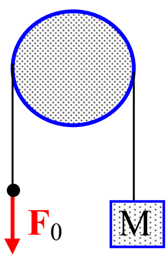
9(2). Определите период обращения искусственного спутника Земли по круговой орбите, если он удален от поверхности Земли на расстояние, равное земному радиусу ($R_з$ = 6 370 км).

10(3). Небольшое тело, обладающее скоростью v_0 = 1 м/с, попадает на движущуюся шероховатую ленту транспортера, скорость которой v = 1,5 м/с. Оба вектора скорости лежат в горизонтальной плоскости и взаимно перпендикулярны (см. рисунок). Тело останавливается на ленте транспортера на расстоянии d = L/4 от ближайшего края. Определите, при какой величине скорости транспортера тело остановится точно посередине ленты.



11(3). Определите плотность вещества шарообразной планеты, если тела, находящиеся на ее экваторе, не имеют веса. Сутки на этой планете длятся T = 1 ч 30 мин. Гравитационная постоянная равна G = 6,67·10^{-11} Н·м^2/кг^2.

12(3). Через неподвижное горизонтально закрепленное бревно переброшена веревка. Минимальная сила, позволяющая удерживать груз массой M = 5 кг, подвешенный на этой веревке (см. рисунок), равна F_0 = 40 Н. Определите величину минимальной силы F, с которой необходимо тянуть веревку, чтобы груз начал подниматься. Масса веревки пренебрежимо мала по сравнению с массой груза.

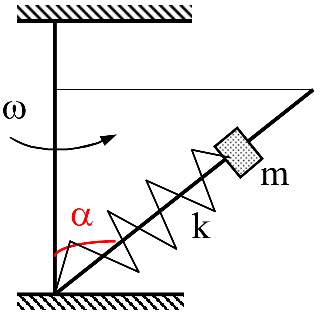


13(2). Наклонная плоскость составляет угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом. Некоторое тело, помещенное на плоскость, равномерно скользит вниз. Определите путь, который пройдет это тело до остановки, если ему сообщить начальную скорость v_0 = 8 м/с, направленную вверх вдоль плоскости.

14(3). К вертикально расположенной стальной плите прилип магнит. Для равномерного перемещения магнита вверх необходимо приложить силу F_1 = 2,4 Н, для такого же перемещения вниз – силу F_2 = 1,2 Н. Если плиту расположить горизонтально и положить сверху тот же магнит, то для равномерного перемещения необходимо приложить силу F = 2,0 Н. Определите коэффициент трения скольжения магнита о плиту.

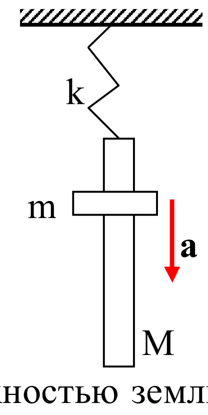
15(3). Тело начинает двигаться по наклонной плоскости снизу вверх со скоростью v_0 = 4 м/с. Поднявшись на некоторую высоту, тело соскальзывает вниз. Определите скорость тела, когда оно вернется в исходную точку. Угол наклона плоскости к горизонтали равен $\alpha = 30^0$. Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0,3$.

16(3). Тело массой m, прикрепленное к пружине, может без трения скользить по стержню, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (см. рисунок). Угол наклона стержня $\alpha = 45^0$. Длина недеформированной пружины – ℓ_0, жесткость – k. Определите величину удлинения пружины при вращении системы.



17(3). На горизонтальной поверхности выстроены в ряд слева направо N = 100 одинаковых брусков с массами m = 0,1 кг, связанные между собой невесомыми нерастяжимыми нитями. К крайнему правому бруску прикладывают силу величиной F = 200 Н, направленную направо. Определите возникающую при движении силу натяжения нити между двумя крайними левыми брусками, если коэффициент трения между всеми брусками и поверхностью одинаков.

18(3). Длинный стержень массой M висит на пружине с коэффициентом жесткости k. По стержню скользит вниз шайба массой m (см. рисунок). Величина ускорения шайбы равна a. Определите величину растяжения пружины, если ее массой можно пренебречь.



19(3). Тело массой m = 0,1 кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной ℓ = 0,5 м. Ось вращения расположена над поверхностью земли на высоте h = 2 м. При прохождении нижней точки траектории нить обрывается, и тело падает на землю. Расстояние между местом падения и точкой пересечения с поверхностью земли перпендикуляра, опущенного из оси вращения, равно S = 10 м. Определите силу натяжения нити при обрыве.

20(3). В цирковом аттракционе мотоциклист едет по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса R = 13 м. Определите минимальную скорость, при которой мотоциклист не упадет вниз, если коэффициент трения между колесами мотоцикла и поверхностью цилиндра μ = 0,5. При решении рассматривайте систему ″человек + мотоцикл″, как материальную точку.

21(3). Стоя на льду и стараясь остаться неподвижным, человек пытается сдвинуть с места тяжелые сани за привязанную к ним веревку. Масса саней M = 200 кг, человека m = 80 кг. Коэффициент трения саней о лед μ_1 = 0,15, человека – μ_2 = 0,3. Определите минимальный угол наклона веревки к горизонту, при котором человек сможет решить свою задачу.

22(2). Два тела с разными массами ($m_1 > m_2$) одновременно отпустили без начальной скорости с некоторой высоты. Сила сопротивления воздуха для обоих тел одинакова и постоянна. Определите, какое из тел упадет на землю первым. Ответ должен быть обоснован законами механики.

23(3). Пуля, обладающая некоторой начальной скоростью, направленной горизонтально, пробивает доску толщиной d = 3 см и продолжает полет со скоростью в n = 0,75 раз меньше начальной. Определите максимальную толщину доски, которую может пробить пуля, если сила сопротивления доски не зависит от скорости пули.

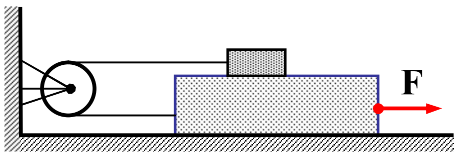
24(3). Ледяная горка составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^0$. По ней пускают снизу вверх плоский камень, который, поднявшись на некоторую высоту, затем соскальзывает по тому же пути вниз. Каков коэффициент трения μ, если время спуска в n = 2 раза больше времени подъема?

25(3). Для устранения бокового давления колес поезда на рельсы при движении по закругленным участкам пути наружный рельс укладывают несколько выше внутреннего. Определите высоту h возвышения внешнего рельса над внутренним, если радиус закругления R=300 м, скорость поезда v = 36 км/час и ширина колеи ℓ=1,5 м.

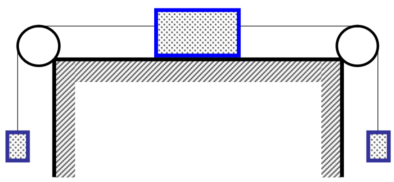
26(3). С наклонной плоскости, угол наклона которой равен α, соскальзывают два груза массы m_1 и m_2, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны, соответственно, μ_1 и μ_2, причем $\mu_1 < \mu_2$. Найти силу натяжения нити.

27(3). На тележке массой $m_1 = 20$ кг лежит груз массой $m_2 = 5,0$ кг. К грузу приложена сила F, сообщающая тележке с грузом ускорение a. Сила действует под углом 30^0 к горизонту. Каково максимальное значение этой силы, при котором груз не будет скользить по тележке? Коэффициент трения между грузом и тележкой $\mu = 0,2$. Трением между тележкой и дорогой пренебречь. С каким ускорением будет двигаться тележка под действием силы F?

28(3). На гладком горизонтальном столике лежит брусок массой 2 кг, на котором находится брусок массой 1 кг. Оба бруска соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Какую силу F нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он начал двигаться от блока с ускорением 4,9 м/с^2? Коэффициент трения между брусками 0,5. Ускорение свободного падения равно 9,8 м/с^2.



29(2). На столе лежит деревянный брусок, к которому привязаны нити, перекинутые блоки, укрепленные на краю стола. К свободным концам нитей подвешены грузы массами 0,85 кг и 0,2 кг, вследствие чего брусок приходит в движение и за 1 с проходит путь 1 м. Учитывая, что масса бруска 2 кг, определите коэффициент трения скольжения и силы натяжения нитей.



30(2). Тело начинает скользить вниз по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. В нижней точке тело ударяется о стенку, поставленную, перпендикулярно направлению его движения. Удар абсолютно упругий. Определите коэффициент трения при движении тела, если после удара оно поднялось до половины первоначальной высоты.

Список использованных источников

1. Власова, И.Г. Физика. Для поступающих в вузы и подготовки к ЕГЭ / И.Г. Власова.– М.: АСТ: СЛОВО, 2010.– 544 с.

2. Кабардин, О.Ф. Физика. Справочник школьника / О.Ф. Кабардин.– М.: Астрель, 2008.– 573 с.

3. Павленко, Ю.Г. Начала физики / Ю.Г. Павленко. – М.: Экзамен, 2005. – 864 с.

4. Турчина, Н.В. Физика: 3 800 задач для школьников и поступающих в вузы / Н.В. Турчина, Л.И. Рудакова, О.И. Суров, Г.Г. Спирин, Т.А. Ющенко.– М.: Дрофа, 2000.– 672 с.

5. Чакак, А.А. ЕГЭ 2008. Физика: рекомендации, тесты, справочные маетриалы / А.А. Чакак.– Оренбург: ОГУ, 2008.–184 с.

6. Чакак, А.А. Реальные тесты по физике и ответы / А.А. Чакак.– Оренбург: ОГУ, 2007.–732 с.

7. Чакак, А.А. Физика. Краткий курс / А.А. Чакак, С.Н. Летута.– Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2010.–541 с.

8. Чакак, А.А. Физика: учебное пособие для поступающих в Оренбургский государственный университет / А.А. Чакак.– Оренбург: ОГУ, 2007.–219 с.

Приложение А
(*справочное*)

Основные физические константы

Скорость света в вакууме	$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Молярный объём идеального газа при нормальных условиях	$V_\mu = 22{,}414$ л/моль
Нормальные условия	$p = 760$ мм рт. ст. $= 101\,325$ Па $t = 0^0$ С
Газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(моль·К)
Постоянная Фарадея	$F = 96\,500$ Кл/моль
Число Авогадро	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К$= 8{,}625 \cdot 10^{-5}$ эВ/К
Элементарный заряд	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $k = (4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^{9}$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $= 12{,}56 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с$= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ эВ·с $\hbar = h/2\pi = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ $R = 1{,}10 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомная единица массы	1 а.е.м. $= 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрон-вольт	1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Первый Боровский радиус	$r_1 = 0{,}528 \cdot 10^{-10}$ м
Масса изотопа ${}_1H^1$	$m_н = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

Приложение Б
(*справочное*)

Соотношения между единицами некоторых физических величин

Длина	1 Å (Ангстрем) = $1 \cdot 10^{-10}$ м 1 дюйм = 2,54 см 1 пк (парсек) ≈ $3{,}1 \cdot 10^{16}$ м 1 св. год (световой год) ≈ $0{,}95 \cdot 10^{16}$ м 1 ферми = 10^{-15} м 1 фут = 30,48 см 1 ярд = 91,44 см
Масса	1 тонна = 10^{3} кг 1 а.е.м. = $1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг 1 кар (карат) = 0,2 г
Время	1 сутки = 86 400 с 1 мин = 60 с 1 час = 60 мин 1 сутки = 24 часа 1 год ≈ $3{,}16 \cdot 10^{7}$ с
Объем	1 л = $1 \cdot 10^{-3}$ $м^3$
Сила	1 кГ = 1 кгс (килограмм-сила) = 9,81 Н
Давление	1 бар = $1 \cdot 10^{5}$ Па 1 атм = 760 мм рт. ст. =$1{,}01325 \cdot 10^{5}$ Па 1 ат = 1 кгс/$см^2$ = $0{,}98 \cdot 10^{5}$ Па 1 торр = 1 мм рт. ст. = 133,3 Па
Энергия	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж 1 квт·ч = $3{,}6 \cdot 10^{6}$ Дж 1 кал = 4,1868 Дж
Мощность	1 л.с. (лошадиная сила) = 735 Вт

Приложение В
(*справочное*)

Некоторые сведения из математики

1 Алгебра

$$a:b=\frac{a}{b};\qquad \frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\cdot c};\qquad a:\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c}{b};\qquad \frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot m};$$

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow a\cdot n=b\cdot m\Leftrightarrow\frac{n}{b}=\frac{m}{a};\qquad \frac{a}{b}\pm\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n\pm b\cdot m}{b\cdot n};$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m};\quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m};\quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m};\quad \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{a\cdot b}\ \text{при } a>0,\ b>0.$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;\quad \frac{a+b}{2}=\sqrt{a\cdot b}\ \text{при } a=b.$$

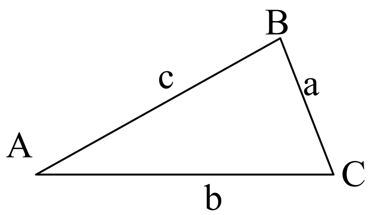
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;\qquad a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$$

$$ax^2+bx+c=0;\ \ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad (a\neq 0);\ \ x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ \ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a};$$

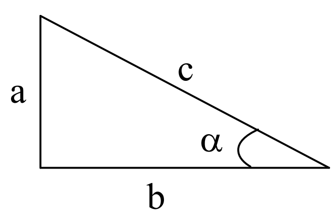
$$\sin x\approx x,\quad \cos x\approx 1-\frac{1}{2}x^2,\quad (x\ll 1);$$

$$(1\pm x)^n\approx 1\pm nx,\quad (x\ll 1;\ n\neq 0;);$$

2 Тригонометрия



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C};\qquad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C;$$



$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\ \ \cos\alpha=\frac{b}{c};\ \ \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a}{b};\ \ \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{b}{a};$$

$$a^2+b^2=c^2;$$

x	$\pm\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$
$sinx$	$\pm sin\alpha$	$cos\alpha$	$\mp sin\alpha$	$-cos\alpha$
$cosx$	$cos\alpha$	$\mp sin\alpha$	$-cos\alpha$	$\pm sin\alpha$
tgx	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$

α	$0^0(0)$	$30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^0\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^0\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180^0(\pi)$
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha = 1$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\overline{\sin^2\alpha} = \overline{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{2}$.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$; $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$; $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$;

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$; $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$;

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$; $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$

$\sin x \approx \mathrm{tg}x \approx x$, $(x << 1)$; $x = \dfrac{x^0\cdot\pi}{180^0}$, $[x]$ = рад, $[x^0]$ = град;

3 Геометрия

$L_{окружн} = 2\pi r = \pi d$; $S_{круг} = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$; $S_{сфер} = 4\pi r^2 = \pi d^2$; $(d = 2r)$;

$V_{шар} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$; $(d = 2r)$; $S_{эллипс} = \pi \cdot a \cdot b$, a,b – полуоси эллипса;

4 Логарифмы

$\lg(x^n) = n \cdot \lg x$; $\lg(xy) = \lg x + \lg y$; $\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y$; $\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}$; $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$;

$(x > 0, y > 0)$.

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ldots$; $a^x = e^{x\ln a}$; $a^x = 10^{x\lg a}$;

5 Векторы

Скаляром называется физическая величина, характеризуемая только числовым значением. Векторы – это направленные отрезки прямых. Физические величины, которые характеризуются направлением в пространстве, могут быть представлены некими направленными отрезками, т.е. векторами. Такая их интерпретация очень наглядна и ею широко пользуются.

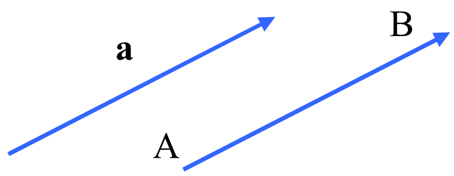


Рисунок В.1

Вектор обозначают символом $\overrightarrow{AB}$, где точки А и В обозначают начало и конец данного направленного отрезка, либо одной латинской буквой $\vec{a}$ или **a** (рисунок В.1). Начало вектора называют точкой его приложения. Для обозначения длины вектора используют символ модуля (абсолютной величины) или символ вектора без стрелки над ним. Так $|\overrightarrow{AB}| = AB$ и $|\mathbf{a}| = a$ обозначают длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и **a**. Векторы можно проектировать на любые прямые (в частности и на направленные), при этом, $a_\ell = a\cos\alpha$ (рисунок В.2а). Часто приходится проектировать векторы на оси координат x, y, z. Для вектора **a**, расположенного на плоскости x0y, проекции вектора **a** на оси 0x и 0y прямоугольной системы координат равны $a_x = a \cdot \cos\varphi$, $a_y = a \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между вектором **a** и осью 0x (см. рисунок В.2б). Для пространственно – ориентированного вектора проекции на оси координат можно выразить следующим образом (рисунок В.3): $a_x = a \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$; $a_y = a \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$; $a_z = a \cdot \cos\vartheta$. Очевидно, что тройка чисел a_x, a_y, a_z полностью определяют вектор **a**, так как по ним можно однозначно построить вектор **a**, причём $|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Краткое обозначение вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_x, a_y, a_z) = \{a_x, a_y, a_z\}$. Если заданы координаты двух точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ может быть записан в виде $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

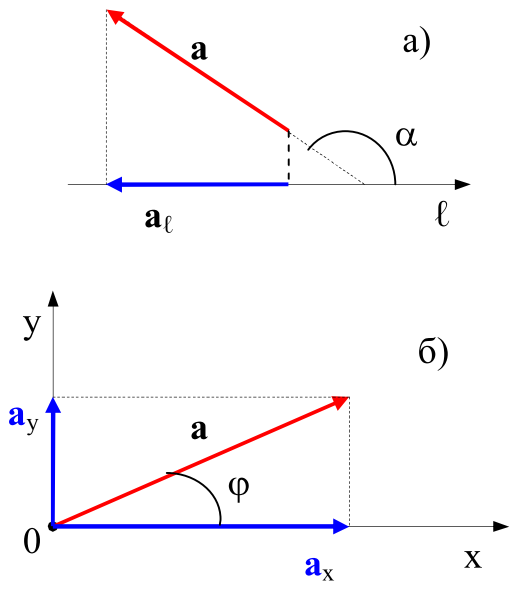


Рисунок В.2

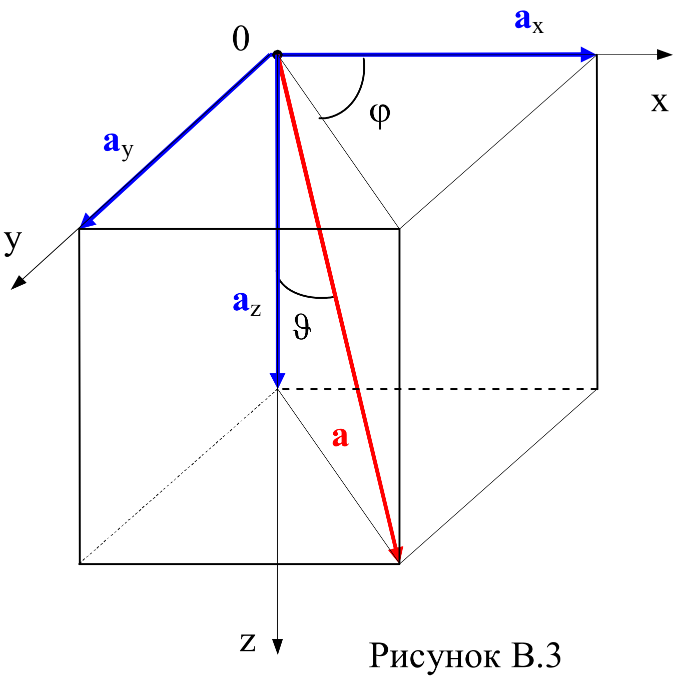


Рисунок В.3

Вектор называется нулевым, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определённого направления и имеет длину, равную нулю. Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной, или на параллельных прямых.

Операции с векторами.

1) Умножение вектора **a** на скаляр (вещественное число) λ даёт вектор **c**, имеющий длину, равную $|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора **a** ($\mathbf{c} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$) при $\lambda > 0$, и противоположное направление вектору **a** ($\mathbf{c} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$) при $\lambda < 0$. Если $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$, то $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

2) Сложение, вычитание векторов. Векторы складываются по правилу треугольника или по правилу параллелограмма, вычитаются по правилу треугольника (см. рисунок В.4). Чтобы из вектора **a** вычесть вектор **b**, можно к вектору **a** прибавить вектор $-\mathbf{b}$. Например, при сложении (вычитании) двух векторов имеем:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \mathbf{c}(c_x, c_y, c_z) = \mathbf{a}(a_x, a_y, a_z) + \mathbf{b}(b_x, b_y, b_z) = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}.$$

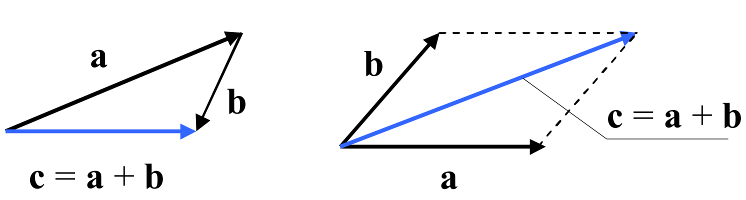


Рисунок В.4

Если число векторов больше двух, то их сумма может быть найдена по правилу замыкания ломаной до многоугольника: если приложить вектор $\mathbf{a}_2$ к концу вектора $\mathbf{a}_1$, вектор $\mathbf{a}_3$ к концу вектора $\mathbf{a}_2$,..., вектор $\mathbf{a}_n$ к концу вектора $\mathbf{a}_{n-1}$, то сумма

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n = \mathbf{c}$$

будет представлять вектор **c**, идущий из начала вектора $\mathbf{a}_1$ к концу вектора $\mathbf{a}_n$ (см. рисунок В.5).

Зная проекции вектора **a** на оси 0x и 0y прямоугольной системы координат (см. рисунок В.2б), можно найти вектор **a**, его модуль и угол между вектором и осью 0x:

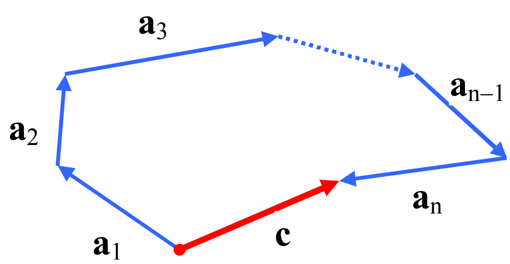


Рисунок В.5

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,; \qquad \varphi = \mathrm{arctg}(a_y/a_x).$$

3) Скалярным произведением двух векторов **a** и **b** называют число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла α между ними (см. рисунок В.6):

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{b},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha = ab\cdot\cos\alpha.$$

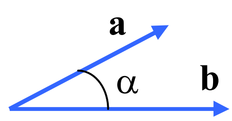


Рисунок В.6

Если два вектора **a** и **b** определены своими проекциями на оси координат, т.е. **a** = $\{a_x, a_y, a_z\}$; **b** = $\{b_x, b_y, b_z\}$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений соответствующих проекций на соответствующие оси координат:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z.$$

4) Векторным произведением векторов **a** и **b** называется вектор **c**, обозначаемый символом

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

с модулем, равным произведению длин векторов **a** и **b** на синус угла α между ними:

$$|\mathbf{c}| = c = ab\cdot\sin\alpha.$$

Вектор **c** перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы **a** и **b**, причём его направление связано с направлением векторов **a** и **b** правилом правого винта, т.е. если правый винт вращать от **a** к **b** в направлении кратчайшего поворота, то поступательное движение винта определяет направление вектора **c** (см. рисунок В.7). Поэтому $\mathbf{c} = -\,\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\,[\mathbf{b},\mathbf{a}]$

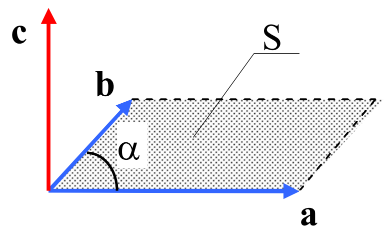


Рисунок В.7

Длина (или модуль) векторного произведения [**a**,**b**] равна площади S параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах **a** и **b**. Если **c** = = [**a**,**b**] = $\{c_x, c_y, c_z\}$, то составляющие (проекции) вектора **c** выражаются через составляющие (проекции) векторов **a** = $\{a_x, a_y, a_z\}$ и **b** = $\{b_x, b_y, b_z\}$ по правилу:

$$c_x = a_y\, b_z - a_z\, b_y;$$

$$c_y = a_z\, b_x - a_x\, b_z;$$

$$c_z = a_x\, b_y - a_y\, b_x.$$

Смешанные векторные произведения записываются так:

$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{b}\cdot[\mathbf{c},\mathbf{a}] = \mathbf{c}\cdot[\mathbf{a},\mathbf{b}]; \qquad [\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

6 Производная

Если некоторая непрерывная функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале, то всякое изменение x на Δx приводит к тому, что f изменится на Δf. D этом случае выражение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называется средней скоростью изменения функции на интервале значений аргументов от x до $x + \Delta x$. Данное отношение показывает, какое изменение Δf функции приходится на единичное изменение аргумента (т.е. как бы $\Delta x = 1$).

На интервале Δx функция f(x) может существенно менять свой ход (отличаться от хода линейной функции). Это значит, что на этом интервале скорость изменения функции будет меняться от места к месту. Но совершенно ясно, что всегда можно выбрать интервал Δx столь малым, что на нём ход функции f(x) практически будет неотличим от хода линейной функции. Такие интервалы значений аргументов будем называть элементарными (или малыми) и обозначать dx. Соответствующие изменения функции обозначают df и называют элементарными (или малыми). Такого рода малые величины dx, df. … называют ещё дифференциалами от величин x, f и т.д.

Величина $f' = \dfrac{df}{dx}$ называется первой производной функции $y = f(x)$ по аргументу x, а ее смысл – "мгновенная" скорость изменения функции, т.е. по существу всё та же средняя скорость ее изменения, но на столь малом интервале dx, на котором f(x) не отличается существенно от хода линейной функции. Из сказанного ясно, что данную производную можно определить как предел отношения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'.$$

В приведённом примере для производной кроме y' можно использовать и другие обозначения:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = y'_x = f'_x.$$

Физический смысл производной. Производная

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

характеризует быстроту (скорость) изменения функции f(x) при изменении аргумента x. В частности, если y = f(x) представляет зависимость пути y от времени x, то в этом случае производная y' определяет мгновенную скорость в момент времени x. Если же, скажем, y = f(x) определяет величину заряда y, протекающего через поперечное сечение проводника в зависимости от времени x, то в этом случае производная $y' = f'(x)$ определяет силу тока в момент времени x.

Геометрический (графический) смысл производной. Из рисунка В.8 видно, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Отношение

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha_0 = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

называют угловым коэффициентом (см. рисунок В.9). Таким образом, по геометрическому смыслу $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\frac{df}{dx}$ суть тангенсы угла наклона секущей и "касательной" к графику f(x) соответственно. Таким образом, производная от f(x) по x геометрически характеризует крутизну графика f(x) в каждой точке x, которая нас заинтересует. Ясно, что из $f' = \dfrac{df}{dx}$ следует $df = f'dx$.

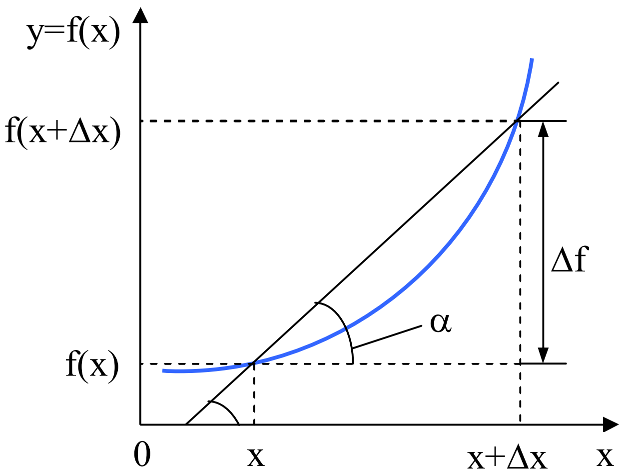


Рисунок В.8

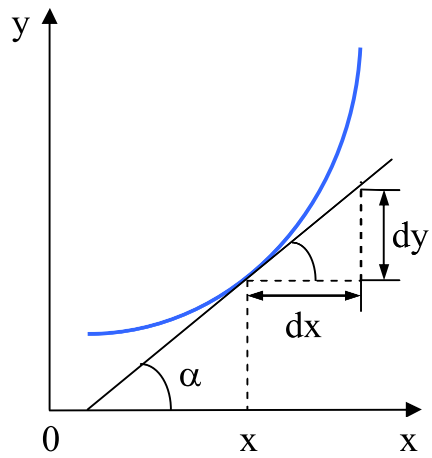


Рисунок В.9

Для сложной функции $f(x) = f\big(z(x)\big)$ производная по аргументу x равна

$$f'_x = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Так, например, для f(x) = sinz, при z = kx, f(x) = sinkx, и

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}(\sin z)\cdot\frac{d}{dx}(kx) = \cos z\cdot k = \cos kx\cdot k = k\cdot\cos kx.$$

Производную от первой производной называют второй производной и обозначают

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = y''_{xx} = f''_{xx}.$$

В частности, если y = f(x) представляет зависимость пути y от времени x, то в этом случае вторая производная $y'' = f''(x)$ представляет собой ускорение точки в момент времени x.

Производные некоторых функций (C, A, k = const):

$C' = 0$ $(Ce^x)' = Ce^x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = 1/\cos^2 x$	$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(Cx^n)' = Cnx^{n-1}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(ctgx)' = -1/\sin^2 x$	$(A\sin kx)' = Ak\cos kx$ $(A\cos kx)' = -Ak\sin kx$ $(x^{-n})' = -nx^{-(n+1)}$ $(a^{Cx})' = C\cdot a^{Cx}\cdot \ln a$ $y'_x = [f(z(x))]'_x = f'_z \cdot z'_x$	$(U \pm V)' = U' \pm V'$ $(U \cdot V)' = U'V + UV'$ $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Пусть имеется некоторая функция f(x, y, z, t), где x, y, z, t – независимые переменные. Если менять какую-либо одну из переменных x, y, z или t при зафиксированных остальных переменных, то величины

$$\frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x.y, z, t)}{\Delta x}, \ldots, \frac{f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x.y, z, t)}{\Delta t} \qquad (*)$$

показывают, какова средняя скорость изменения f(x, y, z, t) на интервалах Δx, Δy, Δz, Δt, соответственно, т.е. показывают, насколько изменится f(x, y, z, t) при единичном изменении только одного из переменных x, y, z, t при зафиксированных остальных переменных. Если интервалы Δx, Δy, Δz, Δt столь малы, что на них ход функции f(x, y, z, t) не отличается существенно от хода линейной функции, то написанные соотношения (*) называются частными производными от f(x, y, z, t) по x, y, z, t, соответственно:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x.y, z, t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \ldots$$

Они обозначаются символами $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$. Смысл частных производных тот же, что и у отношений (*), т.е. они характеризуют быстроту изменения функции при изменении какого-либо одного из аргументов при постоянных значениях остальных аргументов. Для частных производных справедливы все свойства обычных производных. Конечно, вместо переменных x, y, z, t можно взять и другой набор переменных и в любом их количестве.

Если x, y, z являются функциями от t, то при изменении t от t до t + dt другие переменные x, y, z получат вполне определённые приращения dx, dy, dz. Величина

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \qquad (**)$$

называется полной производной от f по ее основному аргументу t и показывает, как быстро меняется f(x, y, z, t) с изменением ее основного аргумента t (при изменении которого меняются и остальные аргументы x, y, z). Возможен такой случай, когда какая-либо из переменных x, y, z или даже все они вместе не меняются при изменении t. Тогда соответствующие величины $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ или $\frac{\partial f}{\partial z}$ будут равны нулю, и равенство (**) становится «короче». При $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0$ оно принимает вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Возможен и такой случай, когда f не зависит от какой-либо из переменных x, y, z, t. Тогда соответствующая частная производная будет равна нулю и (**) опять «укоротится».

Отметим, что $\frac{\partial f}{\partial t}$ характеризует быстроту изменения f при x = const, y = const, z = const, т.е. при зафиксированной точке. Величина же $\frac{df}{dt}$ характеризует быстроту изменения f с учётом изменения x, y, z, т.е. действительно полную быстроту, в отличие от $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и т.д., где часть переменных зафиксирована, т.е. не меняется.

Отметим ещё один момент. Если имеется некоторая функция f(x, y, z, t), то величина

$$df = \frac{df}{dt}\cdot dt = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}dt =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz$$

называется полным дифференциалом от функции f. Слагаемые в правой части уравнения называются частными дифференциалами от f.

То, что сказано про производную и дифференциал скалярной функции f(x), вполне применимо и к векторной функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi)$, где φ – некоторый скаляр (см. п.1, п.2, п.3 данного пособия, например, **u** – радиус-вектор, φ – время). Это следует из того, что вместо функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi)$ мы можем всегда рассматривать $u_x(\varphi)$, $u_y(\varphi)$, $u_z(\varphi)$, а тогда при зафиксированных ортах **i**, **j**, **k** имеем:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(u_x\cdot\mathbf{i} + u_y\cdot\mathbf{j} + u_z\cdot\mathbf{k}).$$

7 Интеграл

Интегрированием называют математическую операцию, "обратную" дифференцированию (взятию производной). При интегрировании находят первообразную функцию – такую функцию, производная которой равна данной функции. Функция F(x) называется первообразной функцией для данной функции f(x), если функция F(x) дифференцируема и $F'(x) = f(x)$. Данная функция f(x) может иметь различные первообразные функции, отличающиеся друг от друга на постоянные слагаемые. Поэтому совокупность всех первообразных функций для данной функции f(x) содержится в выражении F(x) + C, которое называют неопределённым интегралом от этой функции f(x) и обозначается символом:

$$\int f(x)dx,$$

где $\int$ – называется знаком интеграла;

f(x) – подынтегральной функцией;

f(x)dx – подынтегральным выражением.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C = const.

Неопределённые интегралы некоторых функций (A, C, k, a = const):

$\int 0 \cdot dx = C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int a dx = ax + C$	$\int AU(x)dx = A\int U(x)dx + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$,	$\int (U+V)dx = \int U dx + \int V dx$	$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$
где $n \neq -1$	$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$	$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$

Пусть в интервале (а, в) изменения аргумента x определена непрерывная функция f(x). Разобьём интервал (а, в) на элементарные отрезки Δx_1, Δx_2, ... Δx_n. Составим сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i,$$

где каждое слагаемое $f(x_i)\cdot\Delta x_i$ представляет собой площадь прямоугольника со сторонами $f(x_i)$ и Δx_i (см. рисунок В.10).

Выражение

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^в f(x)dx$$

называется определённым интегралом от этой функции f(x).

Геометрический смысл определённого интеграла (рисунок В.11): $\int_a^в f(x)dx$ – определённый интеграл равен площади S криволинейной трапеции (площади фигуры под графиком функции f(x) при изменении аргумента x в интервале (a, в)).

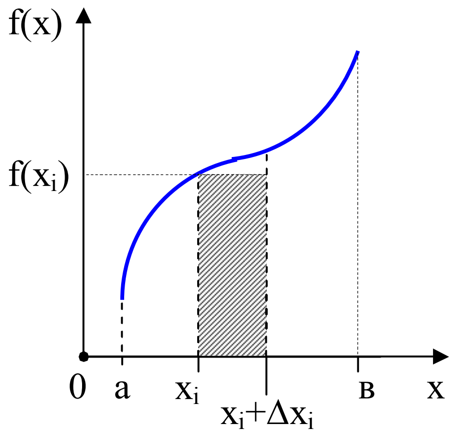


Рисунок В.10

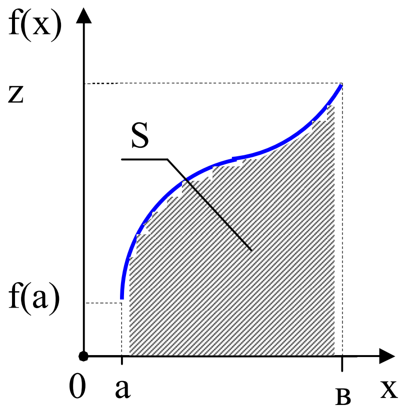


Рисунок В.11

Нужно отметить, что

$$\int_a^в f(x)dx = F(в) - F(a),$$

т.е. значение определённого интеграла от подынтегральной функции f(x) равно разности значений первообразной функции F(x) при значениях x = в и x = a, соответственно.

Например,

$$\int_a^в \cos x dx = \sin x\Big|_a^в = \sin в - \sin a.$$

Для определённых интегралов справедливы правила интегрирования, аналогичные соответствующим правилам для неопределённых интегралов.

Можно говорить и об интеграле от функции многих переменных, т.е. от функции f(x, y, z, t). При этом в интересующих нас случаях это интегралы типа

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2} \left[f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz\right].$$

Можно показать, что если величина

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

есть полный дифференциал от некоторой функции F(x, y, z), т.е. если

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = dF,$$

то значение интеграла

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dF$$

может быть выражено как разность функции F(x, y, z) на границах интегрирования, т.е.

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dF = F(\mathbf{r}_2) - F(\mathbf{r}_1).$$

Принято говорить, что в данном случае результат интегрирования не зависит от пути интегрирования между точками 1 и 2.

Если же f такова, что

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz \neq dF,$$

то результат интегрирования зависит от пути интегрирования. Это обычно (но не всегда!) означает, что f есть функция не только от x, y, z, но и от каких-то других переменных (например, от v_x, v_y, v_z, t и т.д).

Именно поэтому элементарная работа $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r}$ не является полным дифференциалом, т.е. $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r} \neq dA$. Это значит, величина работы зависит от формы траектории (от «формы пути»). Исключение составляет случай, когда $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ или, что то же самое $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, а тогда $\mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = d\Phi$ и тогда

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\Phi = \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1).$$

Вместо функции $\Phi(\mathbf{r})$ удобно использовать функцию $U(\mathbf{r}) = -\Phi(\mathbf{r})$, где $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия.

К вычислению определённых интегралов сводятся задачи об измерении площадей, объёмов тел, длин дуг кривых, задачи определения координат центров тяжести, моментов инерции, пути тела по известной скорости движения, работы производимой силой и т.п.

Приложение Г
(*справочное*)

Основные формулы по физике

$v=\dfrac{S}{t}$ при равномерном движении скорость v равна отношению пути S ко времени t.

$v_{ср.}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ $v_{ср.}$ – средняя скорость равна отношению пути ΔS к промежутку времени Δt, в течение которого этот путь был пройден.

$\mathbf{v}_{ср} = \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ $\mathbf{v}_{ср}$ – вектор средней скорости перемещения за время Δt, $\Delta \mathbf{r}$ – вектор перемещения.

$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'_t$ $\mathbf{v}$ – вектор мгновенной скорости равен производной от перемещения по времени.

$v = \dfrac{dS}{dt} = S'_t$ v – модуль мгновенной скорости равен производной от пути по времени.

$\boldsymbol{a}_{ср} = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ $\boldsymbol{a}_{ср}$ – вектор среднего ускорения равен отношению изменения скорости $\Delta \mathbf{v}$ к промежутку времени Δt, за которое это изменение произошло.

$\boldsymbol{a}=\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{v}'_t$ мгновенное ускорение равно производной от скорости по времени

$a_\tau=\dfrac{dv}{dt}=v'_t$ тангенциальное (касательное) ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю и направлено по касательной к траектории в данной точке.

$a_n=\dfrac{v^2}{R}$ нормальное (центростремительное) ускорение a_n характеризует быстроту изменения скорости по направлению и направлено к центру кривизны траектории. R – радиус кривизны траектории, v – скорость. (при равномерном вращении по окружности a_n – центростремительное ускорение, R – радиус окружности).

$R = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}$ R – радиус кривизны в данной точке кривой, $\Delta\varphi$ – угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на элементе участка траектории ΔS.

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau$ $\boldsymbol{a}$ – полное ускорение при криволинейном движении;

$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ a_n, a_τ – нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.

$\mathrm{tg}\alpha = a_n/a_\tau$ α - угол между векторами полного ускорения и скорости.

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$ кинематическое уравнение равномерного движения со скоростью v_0 вдоль оси x, x_0 - начальная координата, t - время.

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$ кинематическое уравнение равнопеременного движения (a=const) вдоль оси x, v_0 - начальная скорость. Значения v_0 и a – положительны, если векторы $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{a}$ направлены в сторону положительной полуоси x, и отрицательны в противном случае.

$S = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$

$v = v_0 + a \cdot t$

S – путь и v – мгновенная скорость при равнопеременном движении, v_0 – начальная скорость, a – ускорение, t – время.

$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ кинематическое уравнение, связывающее путь S, пройденный телом за некоторое время, с начальной – v_0 и конечной – v скоростями на этом отрезке пути, с ускорением a.

$H = \frac{gt^2}{2}$; $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$;

$h(t) = H - \frac{gt^2}{2}$;

$v = gt = \sqrt{2gH}$

свободное падение ($v_0 = 0$) тела с высоты H: t – время падения; g – ускорение свободного падения; v – скорость тела в момент достижения поверхности (Земли), h(t) – высота в момент времени t.

$y(t) = H - \frac{gt^2}{2}$; — движение тела, брошенного горизонтально со скоростью v_0 с высоты H: $x_0 = 0$ и $y_0 = H$ – начальное положение тела (в момент броска); x(t) и y(t) – уравнения движения по осям; t_0 – время полета; L – дальность полета; v_x и v_y – составляющие скорости **v** тела по осям координат для любого момента времени t во время полета (до удара о поверхность).

$x(t) = v_0 \cdot t$;

$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$; $L = v_0 t_0$;

$v_x = v_0$; $v_y = gt$;

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v_{ox} = v_0 \cdot \cos\alpha$; $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$; — движение тела, брошенного со скоростью v_0 под углом α к горизонту: $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ – начальное положение тела (в момент броска); v_{ox} и v_{oy} – проекции скорости $\mathbf{v}_0$ по осям; x(t) и y(t) – уравнения движения по осям; $v_x(t)$ и $v_y(t)$ – зависимость составляющих скорости по осям от времени t; H – высота подъема, t_0 – время полета; L – дальность полета.

$x(t)=v_{ox} \cdot t$; $y(t)=v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2$;

$v_x(t)=v_{ox}$; $v_y(t) = v_{oy} - gt$;

$H = \frac{{v_{0y}}^2}{2g}$; $t_0 = \frac{2v_{0y}}{g}$;

$L = \frac{{v_0}^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$

$\nu = \frac{N}{t}$; $T = \frac{t}{N}$; — при равномерном вращательном движении: ν – частота вращения, T – период вращения, N – число оборотов за время t.

$\nu = T^{-1}$; $T = \nu^{-1}$

$\omega = \frac{\varphi}{t}$; $N = \frac{\varphi}{2\pi}$; — ω – угловая скорость при равномерном вращении: φ – угол поворота, N – число оборотов за время t; ν – частота вращения, T – период вращения.

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_t'$ — ω – угловая скорость равна производной угла поворота по времени.

$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega_t'$ — ε – угловое ускорение равно производной угловой скорости по времени.

$S=R\cdot\varphi$ — S – путь, пройденный материальной точкой при повороте на угол φ по дуге окружности радиуса R.

$v=\omega\cdot R=\dfrac{2\pi R}{T}=2\pi R\nu$ — связь между линейной и угловой скоростями при равномерном вращательном движении

$a_t=\varepsilon\cdot R$;
$a_n=\omega^2\cdot R=\dfrac{v^2}{R}=v\cdot\omega$ — a_n и a_t – нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.

$\varphi(t)=\varphi_0+\omega_0\cdot t$ — кинематическое уравнение равномерного вращения, φ_0 – начальное угловое положение.

$\varphi(t)=\varphi_0+\omega_0\cdot t+\dfrac{\varepsilon\cdot t^2}{2}$ — кинематическое уравнение равнопеременного вращения (ε=const), ω_0 – начальная угловая скорость.

$\omega(t)=\omega_0+\varepsilon\cdot t$
$\varepsilon=\dfrac{\omega-\omega_0}{t}$ — ω – мгновенная угловая скорость при равнопеременном вращении в момент времени t, ω_0 – начальная угловая скорость, ε – угловое ускорение.

$\varphi=\dfrac{\omega^2-\omega_0{}^2}{2\varepsilon}$ — кинематическое уравнение, связывающее угол поворота φ с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями и с угловым ускорением ε.

$\rho=\dfrac{m}{V}$ — ρ – плотность тела, m – масса, V – объем тела.

$\mathbf{p}=m\cdot\mathbf{v}$ — $\mathbf{p}$ – импульс тела – векторная величина, равная произведению массы m тела на его скорость $\mathbf{v}$.

$\mathbf{F}=m\boldsymbol{a}=m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$; $\mathbf{F}=\dfrac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{p}'_t$ — второй закон Ньютона: m – масса тела, $\mathbf{F}$ – равнодействующая всех приложенных к телу сил, $\boldsymbol{a}$ – ускорение, $\mathbf{p}$ – импульс тела.

$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$. принцип суперпозиции для силы – если на рассматриваемое тело действует несколько сил, то его движение будет таким же, как если бы на тело действовала результирующая сила, равная векторной сумме отдельных сил.

$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ третий закон Ньютона: силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и противоположно направлены.

$F_{упр} = - k\Delta l$; $\sigma = \varepsilon \cdot E$; $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$; $\sigma = \dfrac{F}{S}$; $\Delta l = l - l_0$

закон Гука: сила упругости $F_{упр}$ пропорциональна удлинению тела (пружины) Δl и направлена в сторону, противоположную направлению перемещений частиц тела при деформации; k – коэффициент пропорциональности (жесткость пружины); σ – механическое напряжение; S – площадь поперечного сечения образца, к которому приложена сила F; E – модуль Юнга (упругости); ε – относительное удлинение; l_0 – начальная длина.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

закон всемирного тяготения: два тела притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между их центрами масс; G – гравитационная постоянная. В такой форме записи закон справедлив для взаимодействия материальных точек и однородных тел сферической формы.

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$$

$$g(h) = g\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$$

g(h) – ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью планеты, M и R – масса и радиус планеты; g – ускорение свободного падения у поверхности планеты (без учета вращения планеты), т.е. $g = G\dfrac{M}{R^2}$.

$F_{тр.} = \mu \cdot N$ сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя $F_{тр.}$, пропорциональной силе нормального давления N (реакции опоры); μ – коэффициент трения.

$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ P – сила тяжести, m – масса тела, g – ускорение свободного падения.

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{gR}$$

v_1 – первая космическая скорость: M и R – масса и радиус планеты, G – гравитационная постоянная, g – ускорение свободного падения на поверхности планеты.

$$v = v_1\sqrt{\frac{R}{r}}$$

местная первая космическая скорость движения по окружности радиусом r. Так как $r > R$, то $v < v_1$.

$$T = 2\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}\left(\frac{R}{g}\right)^{1/2}$$

период обращения спутника по орбите радиусом r; R – радиус планеты; $r > R$.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \text{ или } \frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}$$

частная форма третьего закона Кеплера – отношение квадратов периодов вращения двух спутников равно кубу отношения радиусов круговых орбит.

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{mgR^2}{2r}.$$

полная энергия E спутника на круговой орбите радиусом r равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

$$v_2 = v_1\sqrt{2} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2G\frac{M}{R}}.$$

v_2 – вторая космическая (или параболическая) скорость, v_1 – первая космическая скорость.

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{u}\frac{dm}{dt}$$

уравнение Мещерского (уравнение движения тела с переменной массой). **F** – геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету, **u** – скорость истечения газов относительно ракеты, dm/dt – масса сгоревшего топлива, которое выбрасывается из ракеты за единицу времени.

$$v = v_0 - u \cdot \ln\frac{m}{m_0}$$

формула Циолковского. m_0 – начальная масса ракеты, m – масса в конце ускорения, скорость газовой струи **u**. Скорость ракеты в начале и в конце ускорения – v_0 и v, соответственно.

Приложение Д
(справочное)

Таблицы физических величин

Таблица Д.1 - Астрономические величины

Физические параметры	Солнце	Земля	Луна
Масса, кг	$1{,}97\cdot10^{30}$	$5{,}96\cdot10^{24}$	$7{,}33\cdot10^{22}$
Радиус, м	$6{,}95\cdot10^{8}$	$6{,}37\cdot10^{6}$	$1{,}74\cdot10^{6}$
Средняя плотность, кг/м^3	1 400	5 518	3 350
Среднее расстояние от Земли, км	$1{,}496\cdot10^{8}$	-	384 440
Период обращения вокруг оси, сутки	25,4	1,00	27,3

Планета Солнечной системы	Среднее расстояние от Солнца, 10^6 км	Период обращения вокруг Солнца, в годах	Масса в единицах массы Земли
Меркурий	57,87	0,241	0,056
Венера	108,14	0,615	0,817
Земля	149,50	1,000	1,000
Марс	227,79	1,881	0,108
Юпитер	777,8	11,862	318,35
Сатурн	1426,1	29,458	95,22
Уран	2867,7	84,013	14,58
Нептун	4494	164,79	17,26

Таблица Д.2 - Упругие постоянные. Предел прочности

Материал	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа	Коэффициент Пуассона μ	Предел прочности на разрыв $\sigma_{пч}$, ГПа	Сжимаемость β, ГПа$^{-1}$
Алюминий	70	26	0,34	0,10	0,014
Медь	130	40	0,34	0,30	0,007
Свинец	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Сталь (железо)	200	81	0,29	0,60	0,006
Стекло	60	30	0,25	0,05	0,025
Вода	-	-	-	-	0,49

Таблица Д.3 - Плотность вещества (кг/м^3)

Твердое вещество			
Алмаз	3 500	Манганин	8 400
Алюминий	2 700	Марганец	7 800
Барий	3500	Медь	8 900
Бериллий	1 840	Мрамор	2 700
Бор	2 400	Молибден	10 200
Бром	3 120	Натрий	970
Бронза	8 700	Нейзильбер	8 600
Ванадий	6 020	Никель	8 900
Висмут	9 800	Олово	7 400
Вольфрам	19 100	Парафин	900
Гранит	2 600	Платина	21 500
Графит	2 100	Пробка	240
Золото	19 300	Сахар	1 590
Исландский шпат	2 710	Свинец	11 300
Кадмий	8 650	Серебро	10 500
Калий	870	Слюда	2 900
Кварц	2 650	Соль поваренная	2 100
Кобальт	8 900	Сталь (железо)	7 800
Каменная соль	2 200	Стекло	2 400
Каменный уголь	1 350	Титан	4 500
Константан	8 800	Уран	19 000
Латунь	8 500	Фарфор	2 300
Лёд	900	Цезий	1 900
Литий	530	Цинк	7 000
Магний	1 740	Эбонит	1 800
Жидкости			
Ацетон	792	Сероуглерод	1 260
Бензол	880	Скипидар	858
Бензин	700	Спирт этиловый	789
Вода	1 000	Соленая вода	1 030
Глицерин	1 260	Толуол	870
Керосин	800	Тяжелая вода	1 100
Касторовое масло	900	Уксусная кислота	1 049
Нефть	900	Хлороформ	1 483
Ртуть	13 600	Эфир	720
Газы (при нормальных условиях)			
Азот	1,25	Кислород	1,43
Аммиак	0,77	Метан	0,72
Водород	0,09	Неон	0,9
Воздух	1,293	Углекислый газ	1,98
Гелий	0,18	Хлор	3,21