

Минобрнауки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

В.Н. Евсюков

**ОПТИМАЛЬНЫЕ, ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ,
АДАПТИВНЫЕ, КИБЕРНЕТИЧЕСКИЕ
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

Рекомендовано Ученым советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов обучающихся по программам высшего профессионального образования по техническим специальностям технических специальностей.

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2011

УДК 681.5 (7)
ББК 32.965 я 7
Е 25

Рецензент - доктор технических наук, профессор Н.З. Султанов

Евсюков В.Н.
Е 25 Оптимальные, экстремальные, адаптивные, кибернетические системы управления: учебное пособие для студентов по дисциплине «Теория автоматического управления» / В. Н. Евсюков; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 258 с.
ISBN

В учебном пособии дана классификация оптимальных систем, показаны методы анализа систем оптимального управления (ОСУ). рассмотрены экстремальные системы управления (ЭСУ), показаны различные виды адаптивных систем автоматического управления (АСАУ) и принципы их адаптации. Кибернетические системы (КС) рассмотрены не как один из видов АСАУ, а выделены в отдельную главу для более полного их анализа. Приведены примеры расчётов по некоторым видам систем, варианты заданий для самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений по курсу «Теория автоматического управления»

Е $\frac{2402000000}{6Л9-07}$

УДК 681.5(7)
ББК 32.965 я 7

ISBN

© Евсюков В. Н., 2011
© ГОУ ОГУ, 2011

Содержание

Введение.....	8
1 Системы оптимального управления (СОУ).....	11
1.1 Общие сведения об оптимальном управлении.....	11
1.2 Классический вариационный метод определения оптимального управления (уравнение Эйлера).....	17
1.2.1 Пример определения оптимального пути по уравнению Эйлера.....	19
1.2.2 Пример определения оптимального управления на условный экстремум (уравнение Эйлера-Лагранжа).....	20
1.3 Определение оптимального управления по принципу максимума Понтрягина.....	25
1.3.1 Общие положения.....	25
1.3.2 Примеры определения оптимального управления по принципу максимума Понтрягина.....	30
1.4 Определение оптимального управления методом динамического программирования Беллмана.....	35
1.4.1 Общие положения.....	35
1.4.2 Расчетные формулы по методу Беллмана.....	39
1.4.3 Пример определения оптимального управления методом динамического программирования Беллмана.....	43
1.4.4 Примеры расчёта оптимального управления по уравнениям Эйлера-Лагранжа, Понтрягина, Беллмана.....	46
1.5 Определение оптимального момента переключения управляющих сигналов.....	55
1.5.1 Общие положения.....	55
1.5.2 Примеры расчёта оптимального управления с определением моментов переключения.....	58

1.5.3	Примеры расчёта оптимального управления графоаналитическим способом.....	66
1.6	Определение оптимального управления на основе метода фазового пространства.....	71
1.6.1	Общие положения.....	71
1.6.2	Примеры расчёта оптимального управления по фазовым траекториям.....	73
1.7	Методы расчёта квазиоптимальных систем.....	80
1.7.1	Общие положения.....	81
1.7.2	Пример расчёта квазиоптимальной системы по допустимому отклонению.....	82
1.8	Метод понижения порядка характеристического уравнения.....	87
1.8.1	Общие положения.....	87
1.8.2	Предварительный анализ коэффициентов характеристического уравнения.....	88
1.8.3	Понижение порядка характеристического уравнения четвёртого порядка.....	90
1.8.4	Понижение порядка характеристического уравнения третьего порядка.....	93
1.8.5	Понижение порядка характеристического уравнения пятого порядка	95
1.9	Аналитическое конструирование регуляторов.....	99
1.9.1	Постановка задачи.....	99
1.9.2	Определение управляющего воздействия методом аналитического конструирования регулятора.....	103
1.9.3	Определение весовых констант критерия качества по методу аналитического конструирования регулятора	105
1.10	Анализ и синтез систем автоматического управления через переменные состояния системы.....	108

1.10.1	Переменные состояния системы.....	108
1.10.1.1	Уравнение состояния системы в матричной форме.....	111
1.10.1.2	Модель системы в виде сигнального графа.....	114
1.10.1.3	Получение матричного уравнения состояния системы по сигнальному графу.....	116
1.10.2	Анализ систем автоматического управления через переменные состояния.....	118
1.10.2.1	Определение управляемости системы.....	128
1.10.2.2	Определение наблюдаемости систем.....	120
1.10.2.3	Определение устойчивости систем.....	122
1.10.3	Синтез систем управления через переменные состояния.....	126
1.10.3.1	Инвариантность и ковариантность системы управления.....	127
1.10.3.2	Чувствительность системы управления.....	127
1.10.3.3	Робастные системы управления.....	128
1.10.3.4	Наблюдатели системы управления.....	130
2	Системы экстремального управления (СЭУ).....	135
2.1	Постановка задачи.....	135
2.2	Методы нахождения экстремума однопараметрической СЭУ.....	139
2.2.1	СЭУ с поиском экстремума сканированием.....	139
2.2.2	СЭУ с поиском экстремума по производной	140
2.2.3	СЭУ с поиском экстремума по приращению (шагового типа).....	144
2.2.4	СЭУ со случайным поисковым сигналом.....	145
2.2.5	СЭУ с принудительным поисковым сигналом.....	147
2.2.6	СЭУ с дрейфующей экстремальной характеристикой.....	149
2.2.7	СЭУ с инерционным объектом управления.....	152
2.2.8	Анализ качества работы СЭУ.....	157
2.3	Методы нахождения экстремума многопараметрических СЭУ.....	159
2.3.1	Постановка задачи.....	159
2.3.2	Поиск экстремума для двухмерной системы методом градиента	162

2.3.3	Поиск экстремума методом наискорейшего спуска.....	166
2.3.4	Поиск экстремума методом Гаусса-Зайделя.....	169
2.3.5	Оптимизация методов поиска экстремума.....	171
3	Адаптивные системы автоматического управления (АСАУ).....	174
3.1	Постановка задачи.....	174
3.2	Классификация адаптивных систем управления.....	177
3.3	Идентификация модели адаптивной системы.....	180
3.3.1	Понятие об идентификации.....	182
3.3.2	Методы идентификации модели системы.....	185
3.3.3	Идентификация модели САУ по переходной характеристике.....	189
3.3.4	Идентификация модели САУ по частотной характеристике.....	182
3.3.5	Идентификация модели САУ с помощью синусоидальных сигналов.....	192
3.3.6	Идентификация модели САУ по экспертным оценкам.....	194
3.4	Адаптивные системы с моделями.....	199
3.4.1	Использование модели для компенсации запаздывания.....	199
3.4.2	Использование модели для параметрической настройки регулятора.....	200
3.5	Различные виды адаптивных систем.....	202
3.5.1	Самонастраивающиеся системы автоматического управления.....	202
3.5.2	Самоорганизующиеся системы автоматического управления.....	206
3.5.3	Самообучающиеся системы автоматического управления.....	207
3.5.4	Особенности расчета адаптивных систем.....	212
4	Кибернетические системы (КС).....	214
4.1	Основные положения.....	214
4.2	Системы массового обслуживания (СМО).....	220
4.2.1	Общие положения.....	220
4.2.2	Классификация СМО.....	221
4.2.3	Пуассоновский поток поступления заявок.....	222

4.2.4	Обслуживание заявок в многоканальном СМО.....	224
4.2.5	Статистические параметры СМО.....	228
4.3	Метод распознавания образов (МРО).....	229
4.3.1	Постановка задачи.....	229
4.3.2	Распознавание образов методом секущих плоскостей.....	233
4.3.3	Евклидовый метод распознавания образов.....	234
4.3.4	Лингвистический метод распознавания образов.....	235
4.3.5	Перцептронная модель распознавания образов.....	238
4.3.6	Бейесовский метод распознавания образов.....	240
4.3.7	Статистический метод распознавания образов.....	242
4.4	Системы искусственного интеллекта (СИИ).....	247
4.4.1	Постановка задачи.....	247
4.4.2	Общие сведения о модели СИИ.....	249
4.4.3	Интеллектуальная вопросно-ответная система.....	252
4.4.4	Интеллектуальная сеть связи.....	253
4.4.5	Модель представления знаний.....	254
	Список использованных источников.....	257

Введение

До пятидесятих годов прошлого столетия теория автоматического управления (ТАУ) базировалась на рассмотрении преимущественно линейных дифференциальных уравнений. Основы теории ТАУ были заложены И.А. Вышнеградским и имели ярко выраженную инженерную направленность.

Дальнейшее развитие научно-технического прогресса потребовало нового подхода к задачам управления технологическими процессами. Повысились требования к быстрдействию, точности регулирования, обеспечению управления объектов с изменяющимися параметрами, с неполной информацией об объекте управления и т.д.

Такие системы управления выделены в самостоятельную группу так называемых *оптимальных систем управления* (ОСУ), в которых реализуется закон управления по максимуму или минимуму заданного критерия качества или критерия оптимальности. В оптимальной системе обеспечивается не просто повышение того или иного показателя качества работы, а достижение экстремально возможного его значения. Если критерий оптимальности характеризует технико-экономические потери (расход энергии или материальных средств, стоимость, время регулирования и т.п.), то оптимальным будет минимум этих показателей. Если критерий оптимальности выражает рентабельность технологического процесса (производительность, К.П.Д., дальность полёта ракеты, прибыль и т.п.), то оптимальным будет максимум этих показателей.

В начале шестидесятих годов для решения этих новых задач в теории автоматического управления появились работы Л.С. Понтрягина, Р. Беллмана, Р. Кальмана, А.М. Летова, А.А. Фельдбаумана и др., которые заложили основу оптимальной теории управления. Общее число публикаций по этим вопросам в мировой литературе исчисляется уже десятками тысяч. Но с точки зрения практики не всё обстоит благополучно. Классическая ТАУ в основном создавалась инженерами для инженеров и лишь частично математиками для инженеров. Теорию оптимального управления в основном создают математики для инженеров и всё больше математики для математиков. Работы, написанные языком

современной математики, малодоступны для специалистов с техническим образованием.

Цель данного учебного пособия рассмотреть основные положения теории оптимального управления на инженерном уровне. По сравнению с другими учебниками по ОСУ, данное учебное пособие имеет следующее отличие:

- усилена практическая направленность при изучении оптимальных систем управления, что соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС) профессионального образования третьего поколения;

- проведена классификация оптимальных систем на четыре класса (СОУ. СЭУ. АСАУ, КС), и каждый класс рассматривается подробно. Автор согласен, что нет чётких границ между выделенными классами, но такой подход к разным методам расчёта оптимальных систем способствует лучшему усвоению материала.

- рассмотрены некоторые виды кибернетических систем, как дальнейшее развитие самонастраивающихся, самоорганизующихся и самообучающихся адаптивных систем автоматического управления. Показано, что кибернетическая система должна быть комбинированной, детерминировано-самоорганизующейся системой (ДСС).

- рассмотрение каждого метода расчёта основывается на анализе принципа действия системы управления, а не на сложных математических уравнениях по доказательству адекватности полученных теоретических зависимостей. Причём, эти доказательства часто проводятся в матричной форме, что не всегда понятно студентам очно-заочной форме обучения.

- после рассмотрения почти каждого метода расчёта оптимальной системы показан конкретный пример такого расчёта с анализом возможных вариантов для более сложных систем.

- после рассмотрения каждого метода расчёта даны вопросы для самоконтроля полученных знаний.

Автор понимает, что создание учебного пособия с рассмотрением такого

разнообразия оптимальных систем – дело весьма не простое и ответственное, поскольку имеют право на существование различные взгляды на содержание такого пособия и на методику преподавания этой дисциплины. Автор с благодарностью примет любые замечания и предложения коллег. С автором можно связаться по адресу:

460018 г. Оренбург, ГСП, пр. Победы 13,
государственное образовательное учреждение
«Оренбургский государственный университет»
кафедра систем автоматизированного производства,
Евсюков Владимир Николаевич.

1 Системы оптимальные управления

1.1 Общие сведения об оптимальном управлении

В широком понятии слово «оптимальный» означает наилучший в смысле заданного критерия качества или критерия оптимальности. Эти критерии могут быть различными в зависимости от поставленных задач управления. Примерами оптимальных систем управления являются: управление полётом самолёта по данному маршруту с минимальным расходом топлива; управление курсом корабля с учётом различных ограничений по состоянию проливов и погоды; управление мощностями генераторов электростанций, обеспечивающее минимальную стоимость электроэнергии.

В настоящее время теория оптимальных систем всё шире используется в следящих системах для измерения координат летящих самолётов с разной скоростью и на разных высотах, при проектировании экстраполирующей системы (с предвидением изменения полезного сигнала), при определении оптимальной оценки сигнала на основании функции потерь по байесову критерию, при принятии оптимального решения с помощью методов теории игр. Это ещё далеко не полный список примеров, где всё шире используются теоретические основы оптимального управления [1,4,14].

Автоматическая система, которая обеспечивает наилучший показатель качества при заданных условиях работы и наложенных ограничениях, называется оптимальной системой управления (ОСУ).

В зависимости от наличия априорной (предварительной) информации о состоянии объекта управления и возможных изменениях его динамических свойств различают следующие оптимальные системы.

1 Если структура и параметры всей системы заранее заданы и в процессе управления не изменяются (система с полной априорной информацией), то задача оптимального управления сводится к определению оптимального алгоритма управления. *Это система оптимального управления (СОУ).*

2 Если при заданной структуре системы управления динамические свой-

ства объекта управления могут случайным образом изменяться (система с неполной априорной информацией), то алгоритм управления тоже будет меняться. Задача оптимального управления сводится к непрерывному поиску экстремума по управляющему воздействию. **Это системы экстремального управления (СЭУ).**

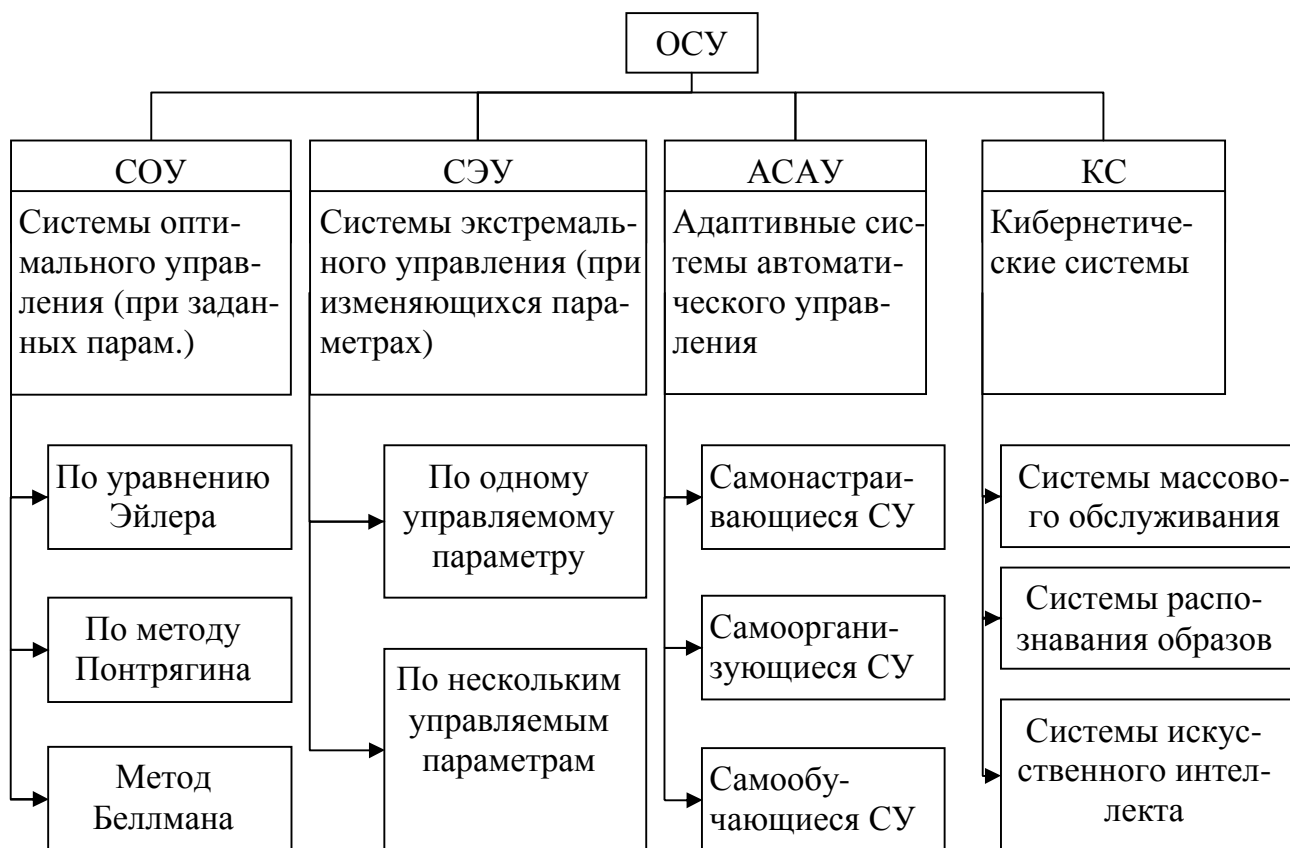
3 Если в системе случайным образом изменяются свойства объекта управления, непредсказуемо изменяются возмущающие воздействия, тогда цель управления добиться стабилизации динамических характеристик системы или обеспечить приспособление системы к работе в новых неожиданных условиях. Задача оптимального управления сводится к поиску и реализации приемов стабилизации динамических свойств системы или к анализу возникающих новых условий работы и поиску методов адаптации системы. **Это адаптивные системы автоматического управления (АСАУ).**

4 Дальнейшее развитие адаптивных систем привело к понятию **кибернетические системы управления** для особо сложных объектов с непредсказуемыми условиями работы или для управления большими системами с неожиданно изменяющимися иерархическими связями (системы с неполной информацией, с пассивным и активным способ ее накопления в процессе работы, с переработкой больших массивов информации). В результате получают неоднозначное вероятностное решение. Примеры: управление грузоперевозками в больших портах, предсказание погоды, управление финансовыми ресурсами региона и т.д.

На основании вышеизложенного можно привести следующую классификацию оптимальных систем управления (ОСУ).

Каждая из этого класса систем имеет свои специфические отличия по постановке задачи, по критерию оптимальности, по используемому математическому аппарату, по полученному результату решения.

Прежде всего определим: в чем принципиальное отличие оптимальных систем управления (ОСУ) от автоматических систем управления (АСУ).



Во-первых, в определении понятия качество регулирования. В АСУ показатели качества регулирования определяются по регулируемому параметру - это время переходного процесса, перерегулирование, установившаяся статическая ошибка и т.д. В ОСУ показатель качества регулирования - это технико-экономические показатели работы системы (быстродействие, энергоёмкость, надёжность и т.д.).

Во-вторых, по конечному результату решения. В АСУ задача считается решена, если показатели качества регулирования находятся в заданных пределах, хотя и есть возможность дальнейшего повышения качества системы. В ОСУ задача считается решена, если заданный критерий оптимальности достиг экстремума, т.е. своего предельного значения и дальнейшее повышение заданного критерия уже невозможно (с учетом наложенных ограничений).

В-третьих, это математический аппарат. Для линейных АСУ при постановке различных задач по анализу и синтезу системы широко используется преобразование Лапласа. Для ОСУ этот эффективный метод расчета, к сожалению, не всегда применим т.к. оптимальные системы обычно описыва-

ются нелинейными уравнениями и оптимальное управление является нелинейной функцией. Поэтому для каждого класса оптимальных систем разработаны свои специальные методы расчета.

В-четвертых, по наличию априорной информации о системе. В АСУ для решения поставленной задачи заранее даны исчерпывающие данные о системе. В ОСУ чаще всего полной информации о системе нет и недостающая информация определяется по мере решения задачи управления.

Таким образом, синтез оптимальных систем имеет ряд особенностей. Вопрос о синтезе оптимальной системы возникает тогда, когда выбор лучшего показателя качества регулирования вступает в противоречие с ограниченными возможностями данной системы. Когда для достижения заданного показателя качества управления необходимо использовать все резервы системы (энергетические, кинематические, механические и т.д.).

Качество данной оптимальной системы зависит от правильности выбора его критерия, который в свою очередь зависит от технико-экономического критерия работы всей системы. Трудность выбора критерия оптимальности состоит еще в том, что из целого ряда требований к критериям качества управления необходимо выбрать основной, а остальные учесть как ограничения. Требования надо предъявлять реальные, а не идеальные, зачастую неосуществимые. При этом учитывать, что некоторые требования бывают противоречивые, например: максимальная надежность (запас прочности, резервирование) и стоимость изготовления или максимальное быстродействие и минимальные затраты энергии. Различают следующие критерии оптимальности [2, 9, 14].

1) Критерий оптимальности по быстродействию

$$J = \int_{t_0}^{t_k} 1 dx = t_k - t_0 = T_{pez} \rightarrow min .$$

2) Критерий оптимальности по расходу ресурсов

$$J = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{i=1}^m C_i [U_i(t)] dt \rightarrow \min ,$$

где $i = 1 \rightarrow m$ - различные участки пути;

C_i - коэффициенты связи расхода ресурса и управляющего воздействия;

U_i - управляющие воздействия.

3) Критерий оптимальности по траектории движения

$$J = \int_{t_0}^{t_k} (a_1 x + a_2 \dot{x} + U + a_3 \dot{U})^2 dt \rightarrow \min ,$$

где a_i - весовые коэффициенты;

\dot{x} - скорость;

x - путь;

U - управляющее воздействие;

\dot{U} - скорость управляющего воздействия.

4) Критерий оптимальности по качеству переходного процесса

$$J = \int_{t_0}^{t_k} (x_{уст} - x(t))^2 dt \rightarrow \min .$$

5) Критерий оптимальности при случайных воздействиях на систему

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Delta x^2 dt \rightarrow \min .$$

В общем случае критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_{y_0}^{y_1} F(\bar{x}, \bar{U}, A, B, C, t) dy ,$$

где J - показатель качества регулирования;

F - функциональная зависимость;

U - управляющее воздействие и его производные;

x - путь и его производные;

A, B, C – ограничение по параметрам системы;

t - время;

y_i - в пределах какого параметра определяется оптимум (чаще в пределах времени).

Критерий оптимальности в каждом конкретном случае имеет вполне определенный физический смысл: минимальное время регулирования, минимум затраченной энергии, максимум перемещения за заданный промежуток времени и т.д. Сложно решать задачу одновременного и полного выполнения критериев оптимальности по двум и более показателям качества регулирования. Он определяется по одному основному показателю работы, а другие задаются в области допустимых значений и, как правило, полученное оптимальное значение параметров системы находится на границе допустимых значений. Оптимальная система - это система автоматического управления на её предельных возможностях.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.1

1 Объясните понятие: «оптимальная система автоматического управления» (ОСУ).

2 Какие системы считаются системами оптимального управления (СОУ)?

3 Какие системы считаются системами экстремального управления (СЭУ)?

4 Какие системы считаются системами адаптивного управления (АСАУ)?

5 Какие системы считаются кибернетическими системами (КС)?

6 Отличие оптимальных систем управления (ОСУ) от автоматических систем управления (АСУ):

- в определении понятия качество регулирования;
- по конечному результату решения;
- по использованию математического аппарата;
- по наличию априорной информации о системе.

7 Какие используются критерии оптимальности?

1.2 Классический вариационный метод определения оптимального управления (уравнение Эйлера)

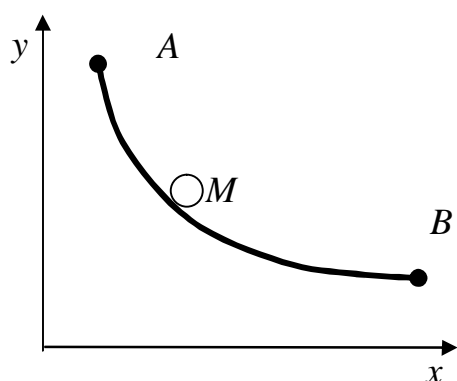


Рисунок 1.1 – К задаче И. Бернулли

В 1696 году появилась работа И. Бернулли «Новая задача, к решению которой приглашаются математики». Задача следующая: «В вертикальной плоскости даны две точки A и B (рисунок 1.1). Определить траекторию пути, опускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело M при движении от точки A дойдёт до точки B кратчайшее время».

Фактически впервые для математиков была поставлена задача определения оптимальной траектории пути.

Решение этой конкретной задачи было получено И. Бернулли, затем Г. Лейбницем и И. Ньютоном. Такой кривой является циклоида. Стали появляться другие подобные задачи. И. Бернулли поставил перед своим учеником Леонардом Эйлером проблему найти общий метод решения таких задач. В 1744 г. Л. Эйлер получил уравнение оптимального управления. В 1759 г. Лагранж эту задачу решил с учётом уравнения связи с дополнительным требованием (уравнение Эйлера-Лагранжа). Появился новый раздел математики названный Эйлером *вариационным исчислением* [11].

Основное понятие вариационного исчисления.

Переменная величина $J(x(t))$ зависящая от функции $x(t)$, где каждой функции $x(t)$ соответствует число $J(x(t))$, называется функционалом.

Функционал $J(x(t))$ при $x^*(t)$ достигается экстремума (например, минимума), если его значение при любом $x_i(t)$ близким к $x^*(t)$ больше, чем $J(x^*(t))$

$$\Delta J_i = J(x_i(t)) - J(x^*(t)) > 0,$$

где ΔJ_i – приращение функционала при изменении функции $x_i(t)$.

Функция $x(t)$ непрерывная, если малому изменению t соответствует малое изменение $x(t)$. Функционал $J(x(t), \dot{x}(t))$ непрерывен, если малому изменению $x(t)$ и ее производных соответствует малое изменение $J(x(t), \dot{x}(t))$. Функции $x(t)$, при которых вариация функционала $\Delta J=0$ называются *экстремалими*.

Методы вариационного исчисления позволяют найти условия, при котором достигается экстремум (минимум или максимум) критерия оптимальности, который записан в виде некоторого функционала.

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления. Пусть функционал $J(x(t))$ зависит от переменной величины $x(t)$ и её производной $\dot{x}(t)$

$$J(x(t)) = \int_{t_2}^{t_1} F(x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

где $F(x(t), \dot{x}(t))$ – непрерывная и трижды дифференцируемая функция, удовлетворяющая краевым (граничным) условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

где x_0 и x_1 – заданные числа.

Нахождение такого экстремума функционала $J(x(t))$ называется *вариационной задачей с закреплёнными граничными точками или с закреплёнными концами*.

Чаще всего оптимальное управление находится как функция времени, т.е. как программное управление. В общем случае оптимальное управление может быть определено как функция фазовых координат.

Для составления функционала по интегральному критерию качества необходимо иметь следующие данные:

- уравнение объекта управления (системы);
- критерий оптимальности;
- граничные условия.

Необходимые условия экстремума функционала качества регулирования определяются по уравнению Эйлера для определения оптимального пути $x(t)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Уравнение Эйлера для определения оптимального управления $U(t)$

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{U}} = 0.$$

Конечная задача расчета - определить оптимальное уравнение пути $x^*(t) = f(t)$ и уравнение оптимального управления $U^*(t) = f(t)$, при котором критерий оптимальности $J^* \rightarrow \min (\max)$.

1.2.1 Пример определения оптимального пути по уравнению Эйлера

Пример 1.1 – Дан функциональный критерий оптимальности

$$J = \int_0^{\infty} F(x) dt = \int_0^{\infty} (x^2 + T^2 \dot{x}^2) dt \rightarrow \min.$$

Необходимо определить оптимальное уравнение пути $x^*(t) = f(t)$ проходящего через точки $x(0) = x_0$ и $x(\infty) = 0$ при котором $J \rightarrow \min$.

Граничные условия: начальное при $t = 0$; $x(0) = x_0$;
 конечное при $t \rightarrow \infty$; $x(\infty) = 0$.

РЕШЕНИЕ

1 Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0.$$

2 Подставляем значение функционала $F(x)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + T_2 \dot{x}^2)}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial (x^2 + T^2 \dot{x}^2)}{\partial \dot{x}} = 2T^2 \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial (T^2 \dot{x}^2)}{\partial t} = 2T^2 \ddot{x}.$$

3 Получаем уравнение Эйлера для определения оптимального пути

$$2x - 2T^2 \ddot{x} = 0.$$

4 Решение полученного дифференциального уравнения пути

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T}} + C_2 e^{+\frac{t}{T}}.$$

5 Так как по граничному условию полученное уравнение пути убывающая функция, то $C_2 = 0$ и решение принимает вид

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T}}.$$

6 Коэффициент C_1 определяем по начальным условиям (данная задача с закрепленными концами)

$$x(0) = C_1 \cdot 1 = x_0$$

ОТВЕТ. Оптимальное уравнение пути является уравнением экстремали

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

1.2.2 Пример определения оптимального управления на условный экстремум (уравнение Эйлера-Лагранжа)

Вариационные задачи на условный или связанный экстремум называются задачи в которых помимо граничных условий, должны удовлетворяться некоторые условия связи. Например, траектория движения должна иметь заданную длину (изопериметрическая задача) или удовлетворять заданной системе дифференциальных уравнений (задача Лагранжа), либо лежать на заданной поверхности. Пусть объект управления описывается уравнением

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

где $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n, t)$ – заданные функции, которые непрерывные и необходимое число раз дифференцируемые по $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n, t$.

Управление является неизвестной функцией времени, которая определяется по начальным $x(t_0) = x_0$ и конечному $x(t_1) = x_1$ состоянию объекта с учётом ограничения ресурсов управления

$$|u_k(t)| \leq u_k^* \quad (k = \overline{1, m}).$$

Кроме этого, ограничения могут накладываться на переменные состояния объекта

$$x \in X,$$

где X – замкнутое множество в пространстве состояния.

Задача на условный экстремум формируется так: исследовать эффективность управления с помощью интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt$$

при условии, что экстремали, на которых реализуется минимум функционала, должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0, \quad (j = \overline{1, m}).$$

Эти уравнения называются *уравнениями связи*. С учётом уравнений связи задача решается путём преобразования функционала к виду

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} F^*(\bar{x}, \bar{u}, t) dt,$$

$$\text{где } F^* = F_0 + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \varphi_j,$$

λ_j – неопределённые множители Лагранжа.

Необходимое условие определения *условного экстремума* (с учётом φ_j) сводится к определению *безусловного экстремума* с помощью системы уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\begin{cases} \frac{\partial F^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_i} = 0 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{\partial F^*}{\partial u_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{u}_j} = 0 & (j = 1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

Неопределённые множители Лагранжа λ_n определяются на основании граничных условий для функций $u_j(t)$ и $x_i(t)$.

Пример 1.2 - Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + mU.$$

Критерий оптимальности

$$J = \int_0^{\infty} (a_1 x_1^2 + cU^2) dt \rightarrow \min.$$

Определить уравнение оптимального управления, переводящее систему из положения $x(0) = x_0$ при $t = 0$ в положение $x(t) = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

РЕШЕНИЕ

1 Данная задача относится к задаче на условный экстремум, в котором уравнение объекта является уравнением связи между регулируемыми параметрами системы и управляющим воздействием.

Представим уравнение объекта в виде

$$\dot{x}_1 - a_1 x_1 - mU = 0 \Rightarrow \varphi.$$

2 Для решения задачи составим функционал F^* для уравнения Эйлера – Лагранжа

$$F^* = F_0 + \lambda \varphi = (a_1 x_1^2 + cU^2 + \lambda(\dot{x}_1 - a_1 x_1 - mU)),$$

где λ - множитель Лагранжа.

Необходимо определить закон изменения управляющего воздействия $U=f(x)$, при котором критерий качества будет минимален

$$J = \int_0^{\infty} F^* dt \rightarrow \min.$$

3 По уравнению Эйлера - Лагранжа определяем уравнение оптимального пути

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right) = 0.$$

Вычислим производные

$$\frac{dF^*}{dx} = 2a_1 x_1 + 0 - 2a_1, \quad \frac{dF^*}{d\dot{x}} = 0 + 0 + \lambda.$$

Тогда уравнение оптимального пути

$$2a_1 x_1 - \lambda a_1 - \frac{d}{dt}(\lambda) = 0, \quad \frac{d\lambda}{d} = 2a_1 x_1 - \lambda a_1.$$

4 По уравнению Эйлера - Лагранжа определяем оптимальное управление

$$\frac{\partial F^*}{\partial U} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{U}} \right) = 0.$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial F}{\partial U} = 2cU - \lambda m; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{U}} = 0.$$

Тогда уравнение оптимального управления

$$2cU^* - \lambda m = 0, \quad U^* = \frac{\lambda m}{2c}.$$

5 Фактически значение оптимального управления U^* определено полученным уравнением. Но в нем есть множитель Лагранжа, который надо определить через параметры системы. Для этого составляем систему уравнений из уравнения оптимального пути и уравнения объекта управления

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = 2a_1x_1 - \lambda a_1 & (\text{уравнение оптимального пути}). \\ \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + \lambda \frac{m^2}{2c} & (\text{уравнение объекта управления}). \end{cases}$$

6 Решение полученной системы будет следующим

$$\begin{cases} \lambda = k_1 C_1 e^{p_1 t} + k_2 C_2 e^{p_2 t}; \\ x_1 = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные;

k_1 и k – коэффициенты, полученные из уравнения оптимального пути и объекта управления при подстановке решения для x_1 ;

p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения системы, причём

$$p_2 = -p_1.$$

7 Движение системы должно быть устойчивое. Тогда $C_2 = 0$ и полученные уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \lambda = k_1 C_1 e^{p_1 t}; \\ x_1 = C_1 e^{p_1 t}. \end{cases}$$

Из этой системы определяем λ

$$\lambda = k_1 \cdot x_1.$$

8 В уравнение оптимального управления подставляем значение неопределенного множителя Лагранжа и получаем значение оптимального уравнения через параметры системы

$$U^* = \frac{mk_1 x_1}{2c}.$$

ОТВЕТ. Для оптимального управления с учётом связи объекта управления с критерием оптимальности необходимо объект управления охватить жёсткой линейной обратной связью по регулируемому параметру x_1 .

Примечание – Если функция F_0 дифференцируемая по своим аргументам

необходимое число раз, то используется *уравнение Эйлера-Пуассона*. Для определения максимума или минимума уравнения Лагранжа используется *условие экстремума Лежандра*. Если допустимое управление является кусочно-линейной функцией, то такое оптимальное управление рассматривается *как задача Майера*. Необходимое условие минимума функционала называется *условием Вейерштрасса*.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.2

- 1 Что называется функционалом?
- 2 Что называется вариационной задачей?
- 3 Что такое краевые условия?
- 4 Необходимые данные для решения вариационной задачи.
- 5 Уравнение Эйлера для определения оптимального пути.
- 6 Уравнение Эйлера для определения оптимального управления.
- 7 Что дополнительно учитывается в уравнении Эйлера – Лагранжа?

1.3 Определение оптимального управления по принципу максимума

Понтрягина

1.3.1 Общие положения

Напомним, что при определении оптимального управления методом Эйлера, полученное подынтегральное выражение $F(x, u, t)$ должно быть однозначное, непрерывное, с частными производными до третьего порядка включительно. В практических расчетах эти условия редко выполняются. Например, если исполнительное устройство системы является электрический двигатель, то обычно накладываются ограничения по силе тока, а действительное оптимальное управление может быть релейным. Это значит, что нарушаются основные условия, на которых строится расчет по классическому вариационному исчислению.

Эти трудности преодолены в методе определения оптимального управления по принципу максимума Понтрягина, который он сформулировал в 1953 году как необходимое условие экстремума для задач оптимального управления.

Это положение было доказано и развито в 1956 – 1960 гг его школой в лице В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелизе, Е. Д. Мищенко [1, 4, 11].

Прежде чем излагать алгоритм решения по этому методу, сделаем несколько пояснений. Введем n -мерное Евклидово пространство, которое образовано координатой x и её производными. Такое пространство называется **фазовым пространством**. Состояние системы в любой момент можно охарактеризовать положением точки в этом фазовом пространстве или положением вектора, проведенным из начала координат в заданную точку фазового пространства. Движение объекта описывается дифференциальным уравнением n -порядка

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_n x = k \cdot u.$$

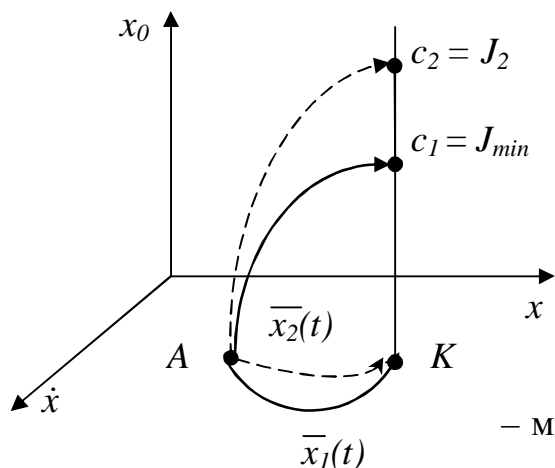
Введём обозначения $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = x_4$, Тогда уравнение объекта можно записать в виде системы n уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x, u); \\ \dot{x}_2 = f_2(x, u); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x, u). \end{cases}$$

Эти значения x_1 , x_2 , ... x_n описывают систему через координаты фазового пространства. В число фазовых координат включает ещё величину x_0 , характеризующую текущее значение функционала качества

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t_1} F(u, x) dt, \quad \text{тогда} \quad \dot{x}_0 = F(u, x).$$

В результате получаем фазовое пространство из $(n+1)$ координат. Это «новое» фазовое пространство показано на рисунке 1.2 для случая, когда объект управления описывается уравнениями второго порядка, т.е. имеет две фазовые координаты x и \dot{x} . К ним добавляется третья – x_0 .



A – начальное состояние системы;
 K – конечное состояние системы;
 $x(t)$ – фазовая траектория движения;
 J_{min} – минимальное значение критерия оптимальности;
 J_2 – другое значение критерия оптимальности.

Рисунок 1.2 - Геометрическая интерпретация принципа максимума Понтрягина

сведена к минимизации значения дополнительной фазовой координаты x_0 , если экстремум – минимум J .

Выводы

Уравнение объекта регулирования должно быть представлено через фазовые координаты;

Критерий оптимальности представляется через дополнительную фазовую координату x_0 .

Оптимальной траекторией движения соответствует минимальное значение критерия качества (согласно рисунка 1.2)

Геометрическая интерпретация этой задачи состоит в следующем. Допустим, что система второго порядка должна быть переведена из начального положения A в конечное положение K по оптимальной траектории $\bar{x}_1(t)$. В $(n+1)$ -мерном (трехмерном) пространстве (с учетом

критерия качества x_0) это перемещение соответствует фазовой траектории AK и критерию качества $KC_1 = J_{min}$.

Если перемещение произошло по другой (не оптимальной) траектории $\bar{x}_2(t)$, то такому перемещению будет соответствовать другой критерий качества $J_2 > J_{min}$ и отрезок $KC_2 > KC_1$. Следовательно, задача минимизации функционала качества может быть

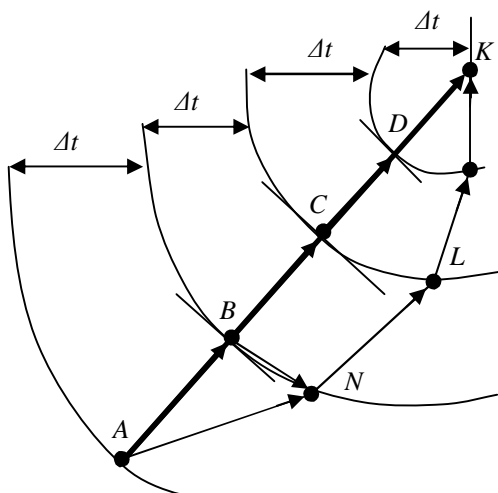


Рисунок 1.3 – Геометрическая интерпретация оптимальной траектории движения системы по принципу максимума Понтрягина

Оптимальной траекторией движения соответствует оптимальное управление.

Определим оптимальную траекторию движения.

Пусть задача оптимального управления состоит в переводе за минимальное время системы из положения A в положение K (рисунок 1.3) и пусть траектория движения $ABCDK$ является оптимальной.

Время перехода от $t = 0$ до $t = t_n$

разобьем на участки с одинаковым временем Δt_i при переходе по оптимальной траектории между каждым участком. Такие поверхности называются *изохромными*. Очевидно, что для достижения минимального времени перехода необходимо двигаться по оптимальной траектории $ABCDK$, а любое отклонение от нее (например, по $ANLMK$) приведет к увеличению времени перехода. Например, перемещение в точку N можно представить как перемещение вначале по AB , а далее по изохроме к точке N . Любые движения вдоль изохромы - это пустая потеря времени, это «кружение» вокруг заданной конечной точки без приближения к ней. Поэтому оптимальная траектория должна быть нормалью (перпендикулярна) к изохромам. Принцип максимума сводится к соблюдению этого условия.

На протяжении всей оптимальной траектории скалярное произведение вектора скорости на вектор обратной градиенту по времени должен быть максимальным.

Примечание — Скалярное произведение двух векторов должно быть максимальное. Это означает, что угол α между ними должен стремиться к 0 , так как их модуль вычисляется через произведение и косинуса угла между ними.

Обозначим вектор скорости v , градиент к изохромам $grad \Delta t_i$, вектор обратный градиенту к изохромам $\varphi_i = -grad \Delta t_i$. Тогда условия оптимального движения через все изохромы

$$H = \sum_{i=1}^n \varphi_i v \rightarrow \max$$

Это уравнение называется уравнением Гамильтона.

Сумма скалярных произведений вектора скорости на вектор обратной градиенту времени должен быть максимальна.

Это условие и есть принцип максимума Понтрягина. В общем случае при произвольном критерии оптимальности эти изохромы преобразуются в изоповерхности. Условие оптимальности при этом сохраняется прежним. Практическая методика расчета не требует определения этих изоповерхностей. Необходимые векторы φ_i или векторы управления определяются по формуле

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_1^{n+1} \frac{df_i}{dx_i} \cdot \varphi_i,$$

где $\frac{d\varphi_i}{dt}$ - производная по искомому вектору управления;

φ_i - искомый вектор управления;

f_i - уравнение объекта управления, относительно x_i координаты векторного пространства;

x_i - координата векторного пространства.

По полученным значениям производной $\frac{d\varphi_i}{dt}$ определяется значение искомого вектора уравнения φ_i и с учетом фазовой координаты φ_i составляется уравнение Гамильтона Н.

С физической точки зрения для механической системы уравнение Гамильтона Н характеризует полную энергию системы, которая должна оставаться положительной и максимально допустимой в процессе управления, а функции φ_i являются импульсами и задают направление движения. Для электрической системы функция Н – это мощность управляющего воздействия, а функ-

ции φ_i – импульсы этой мощности.

Методика определения оптимального управления по принципу максимума Понтрягина следующая.

1 Уравнение системы автоматического уравнения представляется в виде системы уравнений фазового пространства из $(n+1)$ координат. Для этого вводится дополнительная координата x_0 характеризующая значение функционала качества

$$\frac{dx_0}{dt} = f_1, \quad \frac{dx}{dt} = f_2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = f_3, \quad \dots, \quad \frac{d^n x}{dt^n} = f_n.$$

2 Определяются производные вектора управления по $\frac{d\varphi_i}{dt}$.

3 Определяются значения векторов управления φ_i .

4 Составляется уравнение Гамильтона H .

5 Определяются условия при которых $H \rightarrow \max$.

6 Из этого условия находится оптимальное управление.

1.3.2 Примеры определения оптимального управления по принципу максимума Понтрягина

Исходные данные.

1 Уравнение объекта управления.

2 Критерий оптимальности.

3 Начальное и конечное условие.

4 Ограничения.

Пример 1.3 – Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = ku(t).$$

Определить оптимальный алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ в положение $x = x_n$, $\dot{x} = 0$ за минимальное время. Ограничение на управляющие воздействия $|u| \leq u_{\max}$. Таким образом, исходные дан-

ные следующие.

1 Уравнение объекта управления.

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = ku(t).$$

2 Критерий оптимальности – быстродействие $J = \int_0^{\infty} l \cdot dt \rightarrow \min.$

Так как подынтегральное выражение критерия оптимальности равно 1, то

$\frac{dx_0}{dt} = 0$ и координаты x_0 – нет.

3 Граничные условия

$$\begin{array}{ll} \text{начальные} & \begin{cases} x(0) = 0; \\ \dot{x}(0) = 0; \end{cases} & \text{конечные} & \begin{cases} x(\infty) = x_n; \\ \dot{x}(\infty) = 0. \end{cases} \end{array}$$

4 Ограничения $|u| \leq u_{max}.$

Все необходимые данные есть.

РЕШЕНИЕ

1 Представить уравнение САУ в виде системы уравнений фазового пространства. Для этого вводим новую координату $\frac{dx}{dt} = x_1$ и уравнение объекта управления будет

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_1 = f_1; \\ \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{T}(ku - x_1) = f_2. \end{cases}$$

2 Определяем производные векторов управления

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = - \left[\frac{df_1}{dx} \varphi_1 + \frac{df_2}{dx} \varphi_2 \right] = - \left[\frac{dx_1}{dx} \varphi_1 + \frac{d\left(\frac{1}{T}(kU - x_1)\right)}{dx} \varphi_2 \right] = - [0\varphi_1 + 0\varphi_2] = 0;$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = - \left[\frac{dx_1}{dx_1} \varphi_1 + \frac{d\left(\frac{1}{T}(kU - x_1)\right)}{dx_1} \varphi_2 \right] = - \left[1\varphi_1 - \left(\frac{1}{T}\varphi_2\right) \right] = \frac{1}{T}\varphi_2 - \varphi_1.$$

3 Определяем значения векторов управления $\begin{cases} \varphi_1 = c_1 \\ \varphi_2 = c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}}. \end{cases}$

4 Составим уравнение Гамильтона $H = [f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2]$

$$H = x_1 c_1 + \frac{1}{T}(kU - x_1) \left(c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}} \right) = \frac{k}{T} U \left(c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}} \right) - \frac{x_1}{T} \left(c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}} \right) + x_1 c_1.$$

Максимальное значение уравнения Гамильтона зависит от управляющего воздействия U , которое может принять любое значение в пределах принятого ограничения. Поэтому те члены уравнения Гамильтона, которые не содержат U можно отбросить.

$$H_{max} = \frac{k}{T} \left(c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}} \right) U \rightarrow max.$$

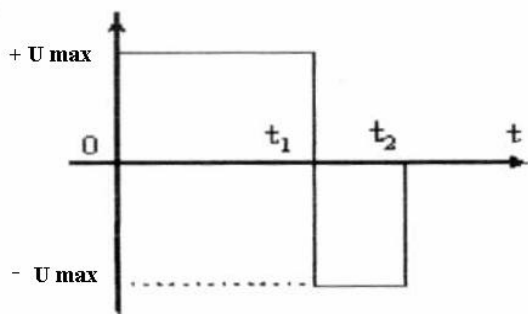


Рисунок 1.4 – График оптимального управления к примеру 1.3

5 Находим оптимальное управление по условию $H \rightarrow max$. Чтобы уравнение Гамильтона имело всегда плюс максимум, необходимо:

а) управляющее воздействие принимать равным U_{max} ;

б) если выражение в скобках положительное, то $+ U_{max}$. Если выражение в скобках отрицательное, то минус U_{max} . То есть, управляющее воздействие должно столько раз менять свой знак,

сколько раз он меняется в векторе управления $\varphi_2 = c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}}$. Для данного признака условия $H \rightarrow \max$ следующие

Пусть $c_1 > c_2$ и при $t = t_1$ $c_1 = c_2 e^{\frac{t_1}{T}}$, тогда при $0 < t < t_1$ $U = + U_{\max}$.

Если при $t_1 < t < t_2$ $c_1 < c_2 e^{\frac{t}{T}}$, тогда $U = - U_{\max}$. Смотри рисунок 1.4

ОТВЕТ $U(t) = \sigma U_{\max}$, где $\sigma = \pm 1$. По окончании управления $U = 0$.

Пример 1.4 – Определить оптимальный алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ в положение $x = x_n$, $\dot{x} = 0$ за минимальное время.

1 Уравнение ОУ
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u \end{cases}$$

2 Критерий оптимальности
$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + c|u|) dt \rightarrow \min$$

3 Граничные условия

Начальные $\begin{cases} x(0) = 0; \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$ Конечные $\begin{cases} x(\infty) = x_n; \\ \dot{x}(\infty) = 0. \end{cases}$

4 Ограничения $|U| \leq U_{\max}$

РЕШЕНИЕ

Введем дополнительную координату x_0 , которая характеризует критерий оптимальности, и получаем систему из трех уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = (x^2 + c|u|) = f_0 \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 = f_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u = f_2 \end{cases}$$

1 Определяем производную вектора управления

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = - \left[\frac{d(x^2 + c|u|)}{dx_0} \varphi_0 + \frac{dx_1}{dx_0} \varphi_1 + \frac{d(a_1x_1 + a_2x_2 + u)}{dx_0} \varphi_2 \right] = - [0 \cdot \varphi_0 + 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2] = 0$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = - \left[\frac{d(x^2 + c|u|)}{dx_1} \varphi_0 + \frac{dx_1}{dx_1} \varphi_1 + \frac{d(a_1x_1 + a_2x_2 + u)}{dx_1} \varphi_2 \right] = - [0 \cdot \varphi_0 + \varphi_1 + a_1 \cdot \varphi_2] = - a_1 \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = - \left[\frac{d(x^2 + c|u|)}{dx_2} \varphi_0 + \frac{dx_1}{dx_2} \varphi_1 + \frac{d(a_1x_1 + a_2x_2 + u)}{dx_2} \varphi_2 \right] = - [0 \cdot \varphi_0 + 0 \cdot \varphi_1 + a_2 \cdot \varphi_2] = - a_2 \varphi_2.$$

2 Определяем значение векторов управления

$$\varphi_0 = c_0, \quad \varphi_1 = c_1 e^{a_1 t} - c_2 e^t, \quad \varphi_2 = c_3 e^{a_2 t}.$$

3 Составим уравнение Гамильтона

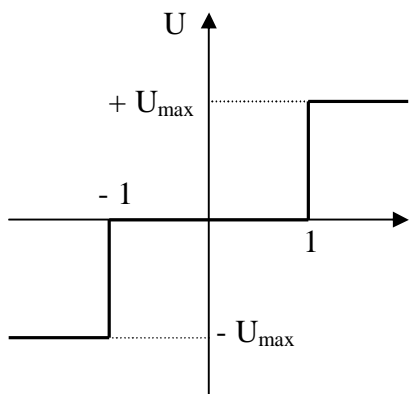
$$H = [f_0 \varphi_0 + f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2] = (x^2 + c|u|) \cdot c_0 + x_2 (c_1 e^{a_1 t} - c_2 e^t) + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + u) \cdot c_3 e^{a_2 t}.$$

4 В полученном уравнении оставляем только члены, зависящие от u

$$H = c \cdot c_0 |u| + u \cdot c_3 \cdot e^{a_2 t} = u \left(1 + \frac{c_3 e^{a_2 t}}{c \cdot c_0} \right) \rightarrow \max.$$

Найдем закон изменения u доставляющий максимум функции H .

Рассмотрим случаи



$$1) \left| \frac{c_3 e^{a_2 t}}{c \cdot c_0} \right| > 1 \text{ тогда } |u| = \pm u_{\max}$$

$$2) \left| \frac{c_3 e^{a_2 t}}{c \cdot c_0} \right| < 1 \text{ тогда } u = 0. \text{ Значение } H < 0$$

недопустимо.

По этим двум случаям очевидно, что

$$\text{sign}(u) = \text{sign} \frac{c_3 e^{a_2 t}}{c \cdot c_0}.$$

Таким образом управляющий сигнал может принимать

Рисунок 1.5 - График оптимального управления к примеру 1.4

значения минус U_{max} , 0 , $+ U_{max}$ в зависимости от $\frac{c_3 e^{a_2 t}}{c \cdot c_0}$ (рисунок 1.5).

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.3

1 Преимущество определения оптимального управления по принципу максимума Понтрягина по сравнению с уравнением Эйлера.

2 Что называют фазовым пространством?

3 Как определяются координаты фазового пространства?

4 Как определяется оптимальная траектория в фазовом пространстве?

5 Как получают уравнение Гамильтона?

6 Как определяются векторы управления φ_i ?

7 Как определяется условие, при котором уравнение Гамильтона будет максимальное?

8 С какой целью в фазовое пространство вводят дополнительную координату dx_0/dt ?

9 В каких случаях эта дополнительная координата $dx_0/dt = 0$?

10 В каких случаях управляющий сигнал $u = 0$?

1.4 Определение оптимального управления методом динамического программирования Беллмана

1.4.1 Общие положения

В послевоенные годы наряду с задачами оптимального управления в технике возникли задачи оптимального управления в экономике, в финансовой деятельности, в управлении войсками и т.д. На основе существующих методов такие задачи не имели эффективного численного решения. Это привлекло математиков к поиску оптимального решения этих задач другим методом. Было обнаружено, что процесс решения многих из них может быть представлен как некоторый многоплановый процесс принятия решений. Такой метод решения получил название *метод динамического программирования*, что означает принятие решения с учетом динамики развития исследуемой системы. Основу это-

го метода, разработанного американским математиком Р. Беллманом, составляет *принцип оптимальности*, который позволяет каждый участок процесса рассматривать отдельно от другого участка. Основой принципа такой оптимальности является следующее положение.

Любой конечный участок оптимальной траектории является тоже оптимальной траекторией.

Такое решение общей поставленной задачи позволяет составить программу на ЭВМ по решению задачи по отдельным участкам.

Поставленную задачу решают не целиком, а разбивают на некоторое семейство задач оптимизации, каждое из которых решается проще.

Часто расчет удобнее производить с конечного участка и методом «пятясь назад» дойти до начального участка. На основании вышеизложенного основу метода динамического программирования можно сформулировать так:

Поиск оптимума не зависит от предыдущего состояния системы и определяется лишь ее состоянием в рассматриваемый момент времени.

Действительно, если оптимальное решение определяется, начиная с конечного участка и дошли до какого то K -участка, то можно утверждать, что полученная траектория движения от этого K -участка до конца оптимальна и не зависит от того, какую траекторию пути определим от начала до этого K -участка. Или, полученное оптимальное решение не зависит от предыдущего состояния, от решения, которое потом получим до K -участка.

Для получения решения общей задачи оптимального управления необходимо произвести состыковку этих участков и получить «связанную цепочку» отдельно решенных задач. Количество таких участков или этапов производственной деятельности в экономике, в развитии банковской структуры, в управлении военными действиями и т. д. может быть несколько сотен, а вариантов решения на каждом участке – тысячи. Для анализа всех этих вариантов исполь-

зуются мощная ЭВМ с большим объемом памяти, чтобы обеспечить анализ всех возможных вариантов на каждом участке исследуемой системы.

Рассмотрим применение принципа динамического программирования на конкретном упрощенном примере.

Пример 1.5 – Между пунктами A и B проложить дорогу так, чтобы стоимость строительства была минимальна. Известно разбиение всего участка на шесть этапов. Известны возможные варианты на каждом этапе и стоимость каждого варианта. Определить оптимальный вариант каждого этапа, чтобы общая стоимость дороги была минимальна.

РЕШЕНИЕ

Обозначим первый этап 1-2 между пунктами A и пунктами K_1, K_2 ; второй этап 2-3 между пунктами K_1, K_2 и L_1, L_2, L_3 ; третий этап 3-4 между пунктами L_1, L_2, L_3 и N_1, N_2, N_3, N_4 ; четвертый этап 4-5 между пунктами N_1, N_2, N_3, N_4 и M_1, M_2, M_3 ; пятый этап между пунктами M_1, M_2, M_3 и C_1, C_2 ; и, наконец, шестой этап между пунктами C_1, C_2 и конечным пунктом B . Стоимость прокладки дороги от каждого пункта одного этапа до каждого пункта другого этапа известна и показана на стрелках (рисунок 1.6).

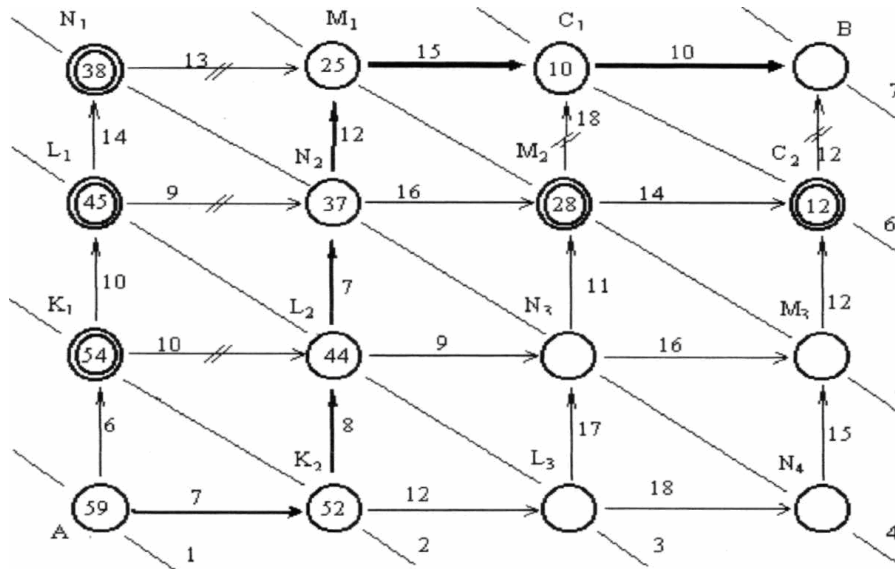
1. Решение начинаем с конца, с точки B , в которую можно попасть за последний шестой этап из точки C_1 или из C_2 . Выбираем $C_1 - B = 10$, а $C_2 - B = 12$ отбрасываем, как более дорогой путь. Обозначим в кружке $C_1 = 10$.

2. В пункт C_1 можно попасть по $M_1 - C_1 = 15$ или по $M_2 - C_1 = 18$. Выбираем $M_1 - C_1 = 15$ как более дешевый, а путь $M_2 - C_1 = 18$ - отбрасываем, как более дорогой. Обозначим пункт $M_1 = 10 + 15 = 25$.

3. В пункт M_1 можно попасть по $N_1 - M_1 = 13$ или по $N_2 - M_1 = 12$. Выбираем $N_2 - M_1 = 12$. Обозначим пункт $N_2 = 25 + 12 = 37$.

4. В пункт N_2 можно попасть по $L_1 - N_2 = 9$ или по $L_2 - N_2 = 7$. Выбираем $L_2 - N_2 = 7$. Обозначим пункт $L_2 = 44$.

5. В пункт L_2 можно попасть по $K_1 - L_2 = 10$ или по $K_2 - L_2 = 8$. Выбираем $K_2 - L_2 = 8$. Обозначим пункт $K_2 = 52$.



A, B - начальный и конечный пункт пути;

K_i, L_i, N_i, M_i, C_i - узловые пункты этапов, в которых показывается полученная



стоимость дороги начиная с конечного пункта B;

- данный узловой пункт не рассчитывался как заведомо неприемлемый;



- данный узловой пункт рассчитывался, но по критерию минимума затрат не подходит.

Рисунок 1.6 - Нахождение оптимальной траектории пути методом динамического программирования

6. В пункт L_2 можно попасть по $K_1 - L_2 = 10$ или по $K_2 - L_2 = 8$. Выбираем $K_2 - L_2 = 8$. Обозначим пункт $K_2 = 52$.

7. Однозначно выбираем путь $A - K_2 = 7$. Обозначим $A = 59$.

ОТВЕТ. Минимальная стоимость дороги 59 условных единиц.

Полученный оптимальный путь можно трактовать как оптимальную траекторию движения в такой принятой системе координат. Отметим ряд особенностей:

- 1) оптимальная траектория определяется при каждом шаге двигаясь от B назад;
- 2) «пяťся назад» отбрасываются не только рядом расположенные варианты, C_2, M_2, N_1, L_1, K_1 , но и многие другие варианты. Так пункты L_3, N_3, N_4, M_3

вообще не рассматривались, как заведомо не приемлемые;

3) в американской литературе этот метод, при котором часть вариантов вообще не рассматривается, называется «метод сожженных мостов».

1.4.2 Расчетные формулы по методу Беллмана

Выяснив основы и идеи метода динамического программирования, определим расчетные формулы этого метода, используя результаты расчета по примеру 1.5.

Пусть объект управления описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$.

Критерий оптимальности $J = \int_0^T \sigma_1(x, u) dt + \varphi(x(T)) \rightarrow \min$.

Время окончания регулирования T - задано.

Произведем дискретизацию задачи, то есть заменим непрерывную систему дискретно-непрывной. Для этого разобьем интервал времени регулирования T на N равных участков с малой продолжительностью $\Delta = T / N$. Тогда дифференциальное уравнение отдельных участков будет уравнением в конечных разностях

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta} = F[x(k), u(k)], \quad \text{или} \quad x(k+1) = x(k) + F[x(k), u(k)] \cdot \Delta,$$

где k – номер участка;

Δ – время прохождения этого участка.

Критерий оптимальности так же представим в виде суммы

$$J = \sum_0^{N-1} \sigma(x(k), u(k)) + \varphi(x(n)) \rightarrow \min.$$

Далее требуется определить дискретные значения управляющих воздействий на каждом участке, обеспечивающих минимизацию критерия оптимальности.

Рассмотрим последний участок разбиения $(n - 1)$. Определим на нем критерий оптимальности

$$J_{N-1} = \sigma(x(n-1), u(n-1) + \varphi(x(n))).$$

Таким образом, функционал качества зависит от выбранной траектории пути $x(n-1)$, от управления системы на последнем участке $u(n-1)$ и от состояния системы в конце пути $\varphi(x(n))$. Выберем такую траекторию пути $x^*(n-1)$ и такое управление $u^*(n-1)$, что бы этот функционал был минимален и равен J_{N-1}^* . Тогда

$$J_{N-1}^* = \sigma(x^*(n-1), u^*(n-1) + \varphi(x(n))) \rightarrow \min.$$

Запомним полученное значение J_{N-1}^* перейдем к предпоследнему участку $n-2$.

$$J_{N-2}^* = \sigma[x(n-2), u(n-2)] + J_{N-1}^* [\sigma(x^*(n-1), u^*(n-1) + \varphi(x(n)))].$$

Определим на этом участке такую траекторию пути $x^*(n-2)$ и такое уравнение $u^*(n-2)$ чтобы этот функционал был минимален.

$$J_{N-2}^* = \sigma[x^*(n-2), u^*(n-2)] + J_{N-1}^*.$$

Запомним полученное значение J_{N-2}^* , а величину J_{N-1}^* можно изъять из памяти, так как она вошла в J_{N-2}^* . Переходим к следующему шагу. Так последовательно переходя от шага к шагу получаем аналогичное по виду формулу для определения пути и управления на любом $(n-i)$ участке

$$J_{N-i}^* = \sigma[x^*(n-i), u^*(n-i)] + J_{N-i-1}^*.$$

Эта формула является рекуррентным соотношением для определения функционала на любом шаге.

Еще раз следует отметить, что первоначально в ЭВМ закладываются все возможные шаги искомой траектории, и для этого ЭВМ должна обладать большой емкостью запоминающего устройства. Но благодаря методу Беллмана происходит целенаправленный поиск оптимальных значений, и это сокращает объем расчета.

Не все задачи оптимального управления, решаемые методом Беллмана, можно представлять в дискретной форме. Некоторые задачи проще решаются по *непрерывной формуле уравнения динамического программирования*. Определим это уравнение для определения оптимального пути и управления. Пусть исходные данные те же. Объект управления описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u).$$

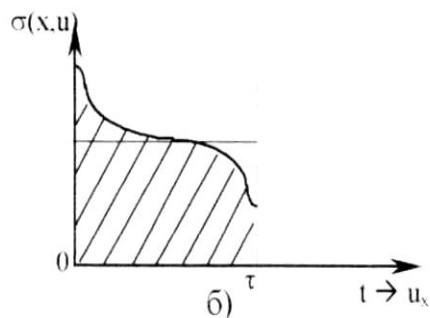
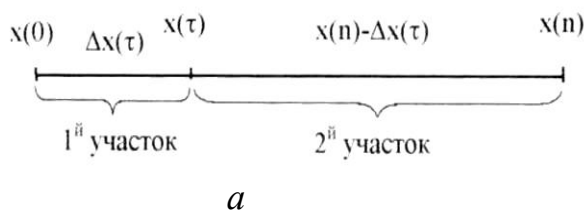
Критерии оптимальности $J = \int_0^T \sigma(x, u) dt + 0 \rightarrow \min.$

Независимые затраты в конечном пункте примем равным 0. Необходимо определить уравнение для нахождения оптимального пути и оптимального управления по непрерывной формуле метода Беллмана.

РЕШЕНИЕ. Допустим, что поставленная задача решена и имеется оптимальная траектория пути $x^*(t)$, которая обеспечивает минимум критерия оптимальности. Разобьем эту траекторию на два участка. Первый участок $\Delta x(\tau)$ от $x = x(0)$ до $x = x(\tau)$, второй участок $x(n) - \Delta x(\tau)$ от $x = x(\tau)$ до $x = x(n)$ (рисунок 1.7 а). Принимаем, что $\tau \rightarrow 0$. Тогда общий критерий оптимальности будет равен сумме критериев оптимальности по каждому участку

$$J^*(x_n) = \int_0^{\tau} \sigma(x, u) dt + \int_{\tau}^T \sigma(x, u) dt.$$

Согласно принципу Беллмана оптимальное движение по каждому участку не зависит друг от друга.



а - участки траектории движения;

б - изменение критерия оптимальности на участке $0 - \tau$;

Рисунок 1.7 – Определение непрерывной формулы уравнения Беллмана

Определим критерий оптимальности на первом участке. Считая что $\tau \rightarrow 0$, можно принять, что за это время величина $\sigma(x, u)$ (подынтегральное выражение критерия оптимальности) изменяется незначительно и можно считать ее постоянной и равной $\sigma(x, u)$ (рисунок 1.7 б). Тогда

$$\int_0^{\tau} \sigma(x, u) dt \approx \sigma(x, u) \cdot \tau.$$

Определим критерий оптимальности на втором участке. Критерий оптимальности по траектории движения на этом участке с учетом первого участка

$$J_2^*(x_n - \Delta x(\tau)) = J(x_n - f(x, u) \cdot \tau),$$

где $\Delta x(\tau) = \frac{dx}{dt} \cdot \tau = f(x, u) \cdot \tau$ - траектория пути на первом участке.

Разложим это выражение на конечные приращения, считая, что членами разложения второго и выше порядка можно пренебречь

$$J^*(x_n - f(x, u)\tau) = J^*(x_n) + f(x, u) \cdot \tau \cdot \frac{dJ^*}{dx}.$$

Полученные значения критерия оптимальности на первом и втором участке подставляем в формулу общего критерия оптимальности

$$\begin{aligned} \cancel{J^*(x_n)} &= \int_0^{\tau} \sigma(x, u) dt + \int_{\tau}^{\infty} \sigma(x, u) dt = \\ &= \sigma(x, u) \cdot \tau + \cancel{J^*(x_n)} + f(x, u) \cdot \frac{dJ^*}{dx} \cdot \tau \end{aligned}$$

Левая часть уравнения равна 0, поэтому величину $\tau \rightarrow 0$ можно сократить

$$\sigma(x, u) + f(x, u) \frac{dJ^*}{dx} = 0,$$

где $\sigma(x, u)$ - подынтегральная функция критерия оптимальности;

$f(x, u)$ - уравнение объекта управления;

J^* - критерий оптимальности по регулируемому параметру;

x - регулируемый параметр.

Получили непрерывную форму уравнения Беллмана для определения оптимального пути.

Уравнение объекта управления может состоять из системы уравнений и еще добавляется условие на ограничение регулируемой координаты. Поэтому второе слагаемое в общем случае может состоять из суммы $\sum_1^i f_i(x, u) \frac{dJ_i^*}{dx}$.

Возьмем в полученной формуле Беллмана производную по управлению

$$\frac{d\sigma(x, u)}{du} + \frac{df(x, u)}{du} \cdot \frac{dJ^*}{dx} = 0.$$

Получили непрерывную формулу уравнения Беллмана для определения оптимального управления.

Эти два уравнения Беллмана являются основными для определения оптимального пути и управления. Заметим, что критерий оптимальности J^* должен быть дифференцируемый по регулируемому параметру, что не всегда выполняется. Но и в этом случае можно определить оптимальное управление.

1.4.3 Пример определения оптимально управления методом динамического программирования Беллмана

При расчете по методу Беллмана исходные данные для расчета те же, что по Понтрягину, то есть берутся уравнения в фазовом пространстве.

Пример 1.6 – Объект управления описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ku \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

Критерий оптимальности - минимум время переходного процесса

$$J = \int_0^{\infty} 1 \cdot dt \rightarrow \min .$$

Ограничения
$$Q = \int_0^{t_{\text{пл}}} k_1 u^2 dt \leq Q_0.$$

Граничные условия: начальные $\begin{cases} x(0) = 0; \\ \dot{x}(0) = 0; \end{cases}$ конечные $\begin{cases} x(t_m) = x_n; \\ \dot{x}(t_m) = 0. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

1 Представим исходные данные этого примера в фазовых координатах

$$\frac{dx_1}{dt} = ku = f_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 = f_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = k_1 u^2 = f_3.$$

2 Составим уравнение Беллмана для определения оптимальной траектории пути

$$\begin{aligned} \sigma(x, u) + f_1 \frac{dJ^*}{dx_1} + f_2 \frac{dJ^*}{dx_2} + f_3 \frac{dJ^*}{dx_3} &= 0; \\ 1 + ku \frac{dJ^*}{dx_1} - x_1 \frac{dJ^*}{dx_2} + k_1 u^2 \frac{dJ^*}{dx_3} &= 0, \end{aligned}$$

где $\sigma(x, u) = 1$ (критерии оптимальности – быстродействие).

3 Для определения оптимального управления возьмем производную по управлению

$$k \frac{dJ^*}{dx_1} + 2k_1 u^* \frac{dJ^*}{dx_3} = 0.$$

4 Из этого уравнения определяем u^*

$$u^* = -\frac{k}{2k_1} \cdot \frac{dJ^*/dx_1}{dJ^*/dx_3}.$$

5 Полученное значение u подставляем в уравнение оптимальной траектории

$$1 + k \left(-\frac{k}{2k_1} \cdot \frac{dJ^*/dx_1}{dJ^*/dx_3} \right) \cdot \frac{dJ^*}{dx_1} - x_1 \frac{dJ^*}{dx_2} + k_1 \left(-\frac{k}{2k_1} \cdot \frac{dJ^*/dx_1}{dJ^*/dx_3} \right)^2 \cdot \frac{dJ^*}{dx_3} = 0.$$

После преобразований получаем

$$\frac{dJ^*}{dx_3} - x_1 \frac{dJ^*}{dx_2} \cdot \frac{dJ^*}{dx_3} - \frac{k^2}{4k_1} \left(\frac{dJ^*}{dx_1} \right)^2 = 0.$$

6 Критерий оптимальности представим в следующем виде

$$J^* = (1 + a_1 x)^{3/2} + a_2 x_2 + a_3 x_3.$$

Такое представление критерия оптимальности позволяет рассматривать его как линейную зависимость по параметрам фазового пространства.

7 Определим производные для J^* по всем координатам фазового пространства

$$\frac{dJ^*}{dx_1} = \frac{3}{2} a_1 \sqrt{1 + a_1 x_1}, \quad \frac{dJ^*}{dx_2} = a_2, \quad \frac{dJ^*}{dx_3} = a_3.$$

8 Полученные значения $\frac{dJ^*}{dx_i}$ через a_1, a_2, a_3 подставляем в уравнение оптимально управления и определяем u^*

$$u^* = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k \cdot a_1 \cdot \sqrt{1 + a_1 x}}{2 \cdot k_2 \cdot a_3}.$$

9 Теперь необходимо определить значение введенных коэффициентов a_1, a_2, a_3 через параметры системы. Для этого полученные значения частных производных подставляем в уравнение оптимальной траектории пути и после преобразования имеем

$$a_3 - x a_2 a_3 = \frac{9k^2}{16k_1} a_1^2 + \frac{9k^2}{16k_1} a_1^3 x_1.$$

10 Приняв значение $a_3 = 1$ определим a_1, a_2 через параметры системы

$$a_1 = \frac{4}{3k} \sqrt{k_1}, \quad a_2 = \frac{-4}{3k} \sqrt{k_1}.$$

11 Подставляем найденное значение частных производных a_1, a_2 в уравнение управления. Окончательно получаем оптимальный алгоритм управления

$$u^* = -\frac{1}{\sqrt{k_1}} \sqrt{1 + \frac{4}{3k} \sqrt{k_1 x_1}} = -c_1 \sqrt{1 + c_2 \cdot x_1},$$

где $c_1 = \frac{1}{\sqrt{k_1}}, \quad c_2 = \frac{4}{3k} \sqrt{k_1}.$

ВЫВОД. Алгоритм оптимального управления получен в функции фазовой координаты системы x_1 .

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.3

1 Почему метод разработанный Беллманом назван методом динамического программирования?

2 Основной принцип метода Беллмана.

3 Основное отличие метода Беллмана от метода Понтрягина.

4 Почему поиск оптимума не зависит от предыдущего состояния системы?

5 Почему метод Беллмана называют «метод пятясь назад»?

6 Почему метод Беллмана еще называют «метод сожженных мостов»?

7 Почему для метода Беллмана нужна ЭВМ с большим объемом памяти?

8 Что значит «рекуррентное соотношение» в методе Беллмана?

9 В непрерывной формуле уравнения Беллмана что означают следующие ее составляющие: $\sigma(x, u), f(x, u), J^*, x, u$?

10 Как задаются производные по J^* по координатам фазового пространства?

11 Как определяются заданные производные по J^* через параметры системы?

1.4.4 Примеры расчета оптимального управления по уравнениям Эйлера-Лагранжа, Понтрягина, Беллмана

Рассмотрим случай, когда требуется определить экстремум функционала

$$J_1 = \int_0^t F(x, \dot{x}, u) dt$$

при условии, что другой функционал, связанный с заданным, должен находиться в определенных пределах

$$J_2 = \int_0^t \sigma(x, \dot{x}, u) dt \leq L.$$

В этом случае нужно искать экстремум для обобщенного функционала:

$$J = \int_0^t (F + \lambda \sigma) dt,$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа и определяется из условия

$$J_2 = L.$$

Примером такой задачи может служить управление двигателем постоянного тока. Ускорение ω , развиваемое двигателем, пропорционально току якоря; одновременно сила тока связана с нагревом двигателя. Задача: определить закон управления при отработки максимального поворота вала двигателя за время T ($\varphi = \int_0^t \omega dt \rightarrow \max$) при ограничении на нагрев двигателя ($Q_{нагр} \leq Q_{доп}$) [12].

Практически такие задачи возникают в приводе прокатных станов, в мощных следящих системах, при управлении технологическими процессами, например, в химии, когда реакция идет с выделением тепла и т. д.

Пример 1.7 – Расчет по уравнению Эйлера-Лагранжа.

Определить оптимальное управление по току двигателя постоянного тока. Дифференциальное уравнение двигателя

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_q - M_c,$$

где J - момент инерции якоря двигателя;

M_c - момент сопротивления нагрузки;

M_q - момент развиваемый двигателем.

Критерий оптимальности $J_1 = \int_0^T \omega dt \rightarrow \max$.

Ограничение $J_2 = Q = \int_0^T Ri^2 dt < Q_{\text{дон}}.$

Начальные условия $\omega(0) = 0, \quad i(0) = i_0.$

Конечные условия $\omega(T) = 0, \quad i(T) = -i_0.$

РЕШЕНИЕ

1 Выразим момент развиваемый двигателем через силу тока в якоре двигателя

$$M_q = i \cdot C_m.$$

Принимаем, что $M_c = 0$, тогда

$$i = \frac{J}{C_m} \frac{d\omega}{dt}.$$

2 Значение i подставляем в функционал J_2

$$J_2 = \frac{i^2 R}{C_m^2} \int_0^T \dot{\omega}^2 dt = k \int_0^T \dot{\omega}^2 dt,$$

где $k = \frac{i^2 R}{C_m^2}.$

3 Находим экстремум для обобщенного функционала с учетом неопределенного множителя Лагранжа

$$J = J_1 + J_2 = \int_0^T F^* dt = \int_0^T (\omega + \lambda k \dot{\omega}^2) dt.$$

4 Составляем уравнение Эйлера-Лагранжа для этого функционала

$$\frac{\partial F^*}{\partial \omega} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\omega}} = 1 - 2k\lambda \ddot{\omega} = 0.$$

5 Решение полученного уравнения

$$\omega(t) = \frac{1}{4\lambda k} \cdot t^2 + C_1 t + C_0; \quad (\text{A})$$

$$\dot{\omega}(t) = \frac{1}{2\lambda k} \cdot t + C_1. \quad (\text{B})$$

6 Учитывая что $i = \frac{J\dot{\omega}}{C_m}$, определяем i через $\dot{\omega}$

$$i(t) = \frac{J \cdot \dot{\omega}}{C_m} = \frac{J}{2\lambda k C_m} t + \frac{J \cdot C_1}{C_m}. \quad (C)$$

7 Определяем постоянные интегрирования согласно граничным условиям (начальным и конечным)

По уравнению (A) $\omega(0) = 0$, тогда $C_0 = 0$.

По уравнению (C) $i(0) = i_0$, тогда $C_1 = \frac{i_0 \cdot C_m}{J}$.

По уравнению (C) $i(T) = -i_0$, тогда

$$-i_0 = \frac{JT}{2\lambda k C_m} + \frac{Ji_0 C_m}{JC_m} = \frac{JT}{2\lambda k C_m} + i_0 \quad \text{или} \quad i_0 = -\frac{JT}{4\lambda k C_m}.$$

8 Определим закон изменения силы тока. Для этого из последнего уравнения определяем J и подставляем в уравнение силы тока

$$J = \frac{-4\lambda k C_m i_0}{T}, \quad i(t) = \frac{-i_0 4\lambda k C_m}{T 2\lambda k C_m} t + i_0 = \frac{-2i_0}{T} t + i_0.$$

При $t = 0$ $i(t) = \frac{-2i_0}{T} \cdot 0 + i_0 = i_0$.

При $t = T$ $i(t) = \frac{-2i_0 \cdot T}{T} + i_0 = -i_0$.

ВЫВОД. Сила тока изменяется по линейному закону от $i_0(0)$ до минус $i_0(T)$.

9 Начальное значение тока $i_0(0)$ определим по допустимому нагреву двигателя Q_{don} согласно наложенного ограничения

$$Q = \int_0^T Ri^2 dt \leq Q_{don},$$

$$Q = \int_0^T R \left(\frac{-2i_0}{T} t + i_0 \right)^2 dt = \frac{Ri_0^2 T}{3}, \quad i_0 \leq \sqrt{\frac{3Q_{don}}{RT}}.$$

10 Определим закон изменения частоты вращения двигателя $\omega(t)$.

Для этого надо определить значение неопределенного множителя Лагранжа λ и подставить его в уравнение (A), учитывая, что $C_0=0$.

Значение λ определим через i_0

$$i_0 = \frac{-JT}{4\lambda k C_m}, \quad \lambda = \frac{-JT}{4i_0 k C_m}.$$

$$\omega(t) = \frac{4i_0 k C_m}{-JT 4k} t^2 + \frac{i_0 C_m}{J} t = \frac{-i_0 C_m}{JT} t^2 + \frac{i_0 C_m}{J} t.$$

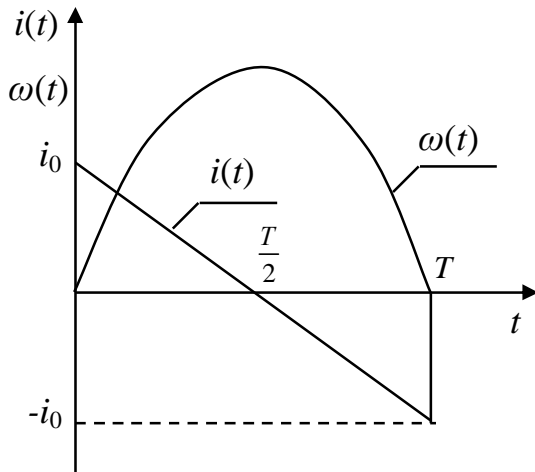


Рисунок 1.8 – График изменения силы тока и частоты вращения двигателя по уравнению Эйлера-Лагранжа

При $t = 0$

$$\omega(t) = \frac{-i_0 C_m}{JT} \cdot 0 + \frac{i_0 C_m}{J} \cdot 0 = 0.$$

При $t = T/2$

$$\omega(t) = \frac{-i_0 C_m T^2}{4JT} + \frac{i_0 C_m T}{2J} = \frac{i_0 C_m T}{4J}.$$

При $t = T$

$$\omega(t) = \frac{-i_0 C_m T^2}{JT} + \frac{i_0 C_m T}{J} = 0.$$

ВЫВОД. Частота вращения изменяется по квадратичной зависимости от $\omega(0) = 0$ до $\omega(T) = 0$ (рисунок 1.8).

Обратите внимание! Этот метод определения оптимального управления разработан в 1759 г. и до сих пор широко используется благодаря простоте расчета и конкретности в определении параметров системы.

Пример 1.8 – Расчет по принципу максимума Понтрячина.

Определить оптимальное управление по току двигателя постоянного тока. Исходные данные те же, что в примере 1.7

РЕШЕНИЕ

1 Систему уравнений, характеризующий объект управления представим в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = k_1 i = f_1;$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = f_2;$$

$$\frac{dx_1}{dt} = Ri^2 = f_3,$$

где $k_1 = \frac{C_m}{J}$.

2 Определяем функции управления ψ_i

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega}\psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \omega}\psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial \omega}\psi_3\right) = -\left(\frac{\partial k_1 i}{\partial \omega}\psi_1 + \frac{\partial \omega}{\partial \omega}\psi_2 + \frac{\partial Ri^2}{\partial \omega}\psi_3\right) = -\psi_2$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\left(\frac{\partial k_1 i}{\partial \varphi}\psi_1 + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\psi_2 + \frac{\partial Ri^2}{\partial \varphi}\psi_3\right) = 0$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\left(\frac{\partial k_1 i}{\partial x_1}\psi_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_1}\psi_2 + \frac{\partial Ri^2}{\partial x_1}\psi_3\right) = 0$$

Решение этих уравнений $\psi_3 = C_3$, $\psi_2 = C_2$, $\psi_1 = C_1 - C_2 t$.

Согласно принципу максимума принимаем $C_3 = 1$.

3 Составляем функцию Гамильтона

$$H = f_1\psi_1 + f_2\psi_2 + f_3\psi_3 = k_1 i \psi_1 + \omega C_2 - Ri^2 \rightarrow \max.$$

4 Определим максимальное значение тока, взяв частную производную от H по i

$$\frac{\partial H}{\partial i} = k_1 \psi_1 - 2Ri_{\max}, \quad i_{\max} = \frac{k_1 \psi_1}{2R}.$$

5 Для определения условия $H \rightarrow \max$ преобразуем полученную функцию

Гамильтона. Для этого прибавим и отнимем $\frac{k_1^2 \psi_1^2}{4R}$

$$\begin{aligned} H &= -Ri^2 + k_1 \psi_1 i - \frac{k_1^2 \psi_1^2}{4R} + \frac{k_1^2 \psi_1^2}{4R} + \psi_2 \omega = \\ &= -R \left(i^2 - \frac{k_1 \psi_1 i}{R} + \frac{k_1^2 \psi_1^2}{4R} \right) + \frac{k_1^2 \psi_1^2}{4R} + \psi_2 \omega = \end{aligned}$$

Пример 1.9 – Расчет методом динамического программирования Беллмана

Определить оптимальное управление по току двигателя постоянного тока при отработки за минимальное время перемещения $\varphi = \int_0^T \omega dt$. Нагрев двигателя

не должен превышать $Q = \int_0^T i^2 R dt \leq Q_{don}$.

Критерий оптимальности минимум времени регулирования

$$J(u) = \int_0^T V dt \rightarrow \min, \quad V = 1.$$

РЕШЕНИЕ

1 Обозначим $x_1 = \omega$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = \int_0^T i^2 dt$, полагая $R = 1$.

Запишем систему нормальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = i = f_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 = f_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = i^2 = f_3.$$

2 Составим уравнение Беллмана по оптимальному пути

$$V + \sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial S}{\partial x_i} = 1 + i \frac{\partial S}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} + i^2 \frac{\partial S}{\partial x_3} = 0.$$

3 Составим уравнение Беллмана по оптимальному управлению

$$\frac{\partial V}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0 + \frac{\partial S}{\partial x_1} + 0 + 2i \frac{\partial S}{\partial x_3} = 0.$$

4 Из последнего уравнения определяем оптимальное управление по току

$$i^* = - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_1} / \frac{\partial S}{\partial x_3}.$$

5 Это значение тока подставляет в уравнение пути

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 / \frac{\partial S}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 / \frac{\partial S}{\partial x_3} = 0$$

Это уравнение умножаем на $\frac{\partial S}{\partial x_3}$

$$\frac{\partial S}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_3} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_3} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2$$

6 Необходимо определить оптимальность по каждой координате. Принимаем

$$S = (1 + a_1 x_1)^{\frac{3}{2}} + a_2 x_2 + a_3 x_3.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{3}{2} \cdot a_1 \sqrt{1 + a_1 x_1}; \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = a_2; \quad \frac{\partial S}{\partial x_3} = a_3.$$

7 Получим значения $\frac{\partial S}{\partial x_1}$, $\frac{\partial S}{\partial x_2}$, $\frac{\partial S}{\partial x_3}$ подставляем в уравнение пути

$$a_3 + x_1 a_2 a_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} a_1 \sqrt{1 + a_1 x_1} \right)^2 = \frac{9}{16} a_1 + \frac{9}{16} a_1^2 x$$

Это равенство выполняется, если

$$a_3 = \frac{9}{16} a_1, \quad a_2 a_3 = \frac{9}{16} a_1^2$$

Принимаем $a_3 = 1$, тогда

$$1 = \frac{9}{16} a_1, \quad a_1 = \frac{16}{9}$$

$$a_2 = \frac{9}{16} a_1^2, \quad a_2 = \frac{9}{16} \left(\frac{16}{9} \right)^2 = \frac{16}{9}$$

8 Полученные значения a_1 и a_2 подставляем в уравнение оптимального управления по току (пункт 4)

$$i = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_1} \bigg/ \frac{\partial S}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} \sqrt{1 + \frac{16}{9} x_1} = -1,33 \sqrt{1 + 1,77 \omega}.$$

ВЫВОД. Закон изменения тока связан с частотой вращения двигателя через обратную отрицательную связь.

1.5 Определение оптимального момента переключения управляющих сигналов

1.5.1 Общие положения

Вполне очевидно, что для оптимальной по скорости системы управления вначале необходимо разогнать систему до предельно допустимого ускорения, а затем в определённый момент времени переключить сигнал управления с разгона на торможение и также с предельно допустимым, но отрицательным ускорением. При правильно выбранном моменте переключения скорость измерения регулируемой координаты станет равна нулю, когда она достигнет заданного значения x_n [11,12]

Пусть система описывается дифференциальным уравнением первого порядка

$$T \frac{dx}{dt} + x = K \cdot U(t)$$

Если сигнал управления единичная ступенчатая функция, тогда переходная функция

$$x(t) = x_n \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Графики управляющего сигнала и переходной функции показаны на рисунке 1.10.

На рисунке 1.10 а показана переходная функция при номинальном входном сигнале ($U_{ном}$) и время регулирования заканчивается при t_p . На рисунке 1.10 б показана переходная функция при увеличенном входном сигнале в K раз ($U_{max} = K \cdot U_{ном}$). Соответственно значение переходной функции увеличивается в Kx_n раз при том же времени регулирования, так как постоянная времени осталась та же. В точке N в момент $t = t_l$ переходная функция достигает значения x_n . В этот момент t_l отключается $U_{max} = KU_{ном}$ и остается $U_{ном}$. Переходная функция остаётся при значении x_n , так как она не обладает запасом энергии для

продолжения движения. Входной сигнал U_H только поддерживает нахождение системы при x_H . Это выполняется при любых значениях K, T, U_{max} и для любого звена первого порядка.

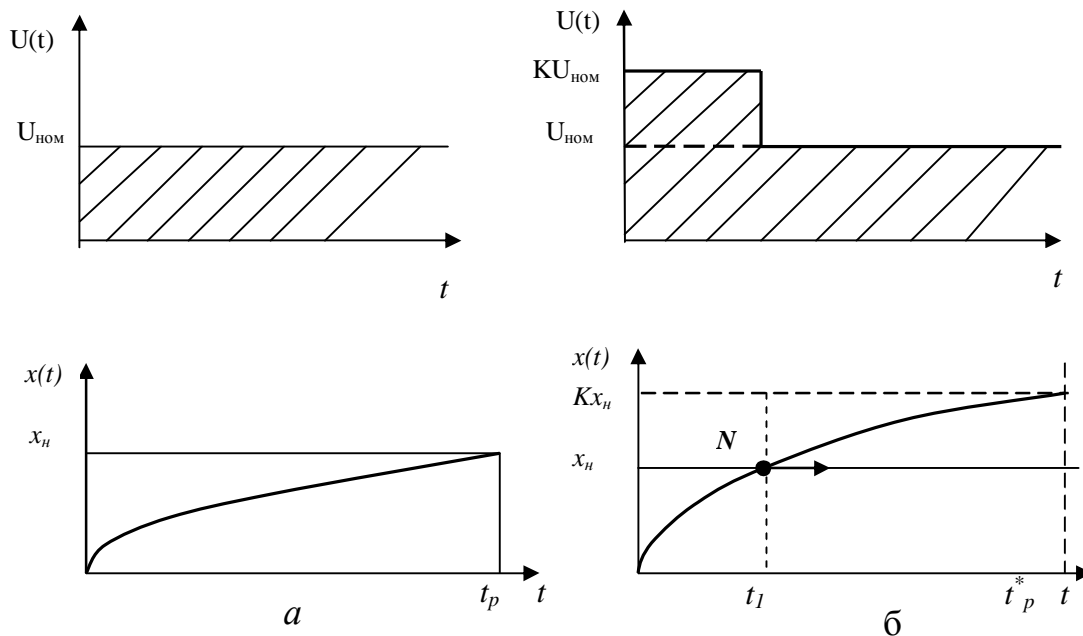


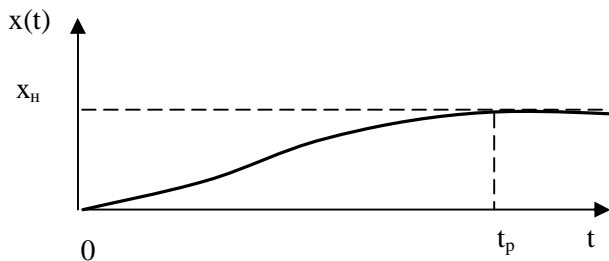
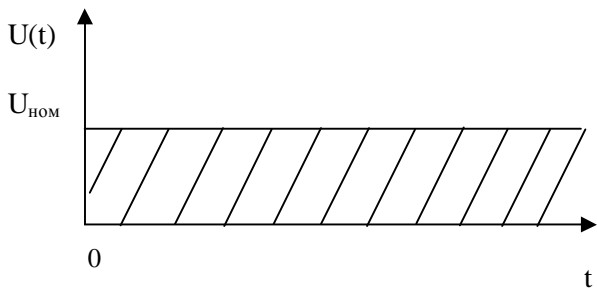
Рисунок 1.10 – Управляющие сигналы и графики переходных функций апериодического звена

Рассмотрим график переходной функции оптимальной по быстродействию системы, описываемой двойным апериодическим звеном

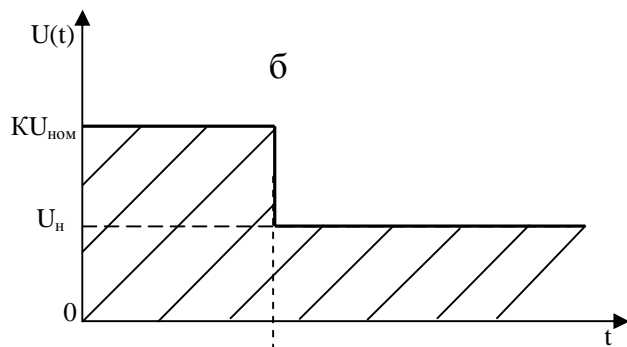
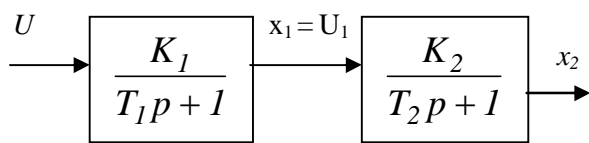
$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = K \cdot U(t).$$

Уравнение переходной функции

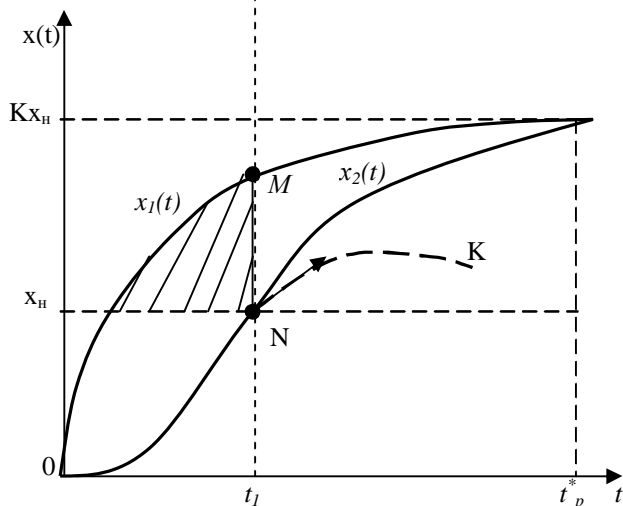
$$x(t) = x_H \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$



а



б



в

Графики управляющих сигналов и переходных функций показаны на рисунке 1.11.

На рисунке 1.11 а показана переходная функция при номинальном входном сигнале и время регулирования заканчивается при t_p . На рисунке 1.11 б показано последовательное соединение двух аperiodических звеньев. Выходной сигнал первого звена x_1 является входным сигналом для второго звена ($U_1 = x_1$).

Учитывая, что сигнал первого звена не сразу достигает своего номинального значения, а изменяется по экспоненте, то изменение выходного сигнала второго звена и особенно в начале переходного процесса задерживается. Это видно по графику переходной функции $x_2(t)$ (рисунок 1.11 в). На этом рисунке показана переходная функция при увеличении входного сигнала в K раз ($U_{max} = KU_{ном}$). Выходной сигнал первого звена $x_1(t)$ изменяется по экспоненте и в момент t_1 достигает значения M . Выходной сигнал второго звена $x_2(t)$ изменяется с задержкой из-за первого аperiodического

Рисунок 1.11 - Управляющие сигналы и графики переходных функций двойного аperiodического звена

звена и в момент t_1 достигает значения N . В этот момент t_1 отключается $U_{max} =$

$KU_{ном}$ и остаётся $U_{ном}$ для поддержания значения x_n . Первое апериодическое звено к моменту t_1 получило запас энергии. Это на рисунке 1.11 в показано заштрихованной областью. После отключения этот запас энергии будет продолжать действовать на второе апериодическое звено и оно не остановится при значении x_n , а будет увеличивать своё значение по кривой НК. Чтобы система остановилась в точке N , необходимо до момента t_1 дать отрицательный входной сигнал и погасить запас энергии в первом звене. Таким образом, оптимальный процесс управления состоит из двух интервалов: в первом интервале $U = + U_{max}$, во втором $U = - U_{max}$.

Аналогично можно показать, что при последовательном соединении трёх апериодических звеньев оптимальное управление будет состоять из трёх интервалов, в каждом из которых управляющий сигнал будет принимать своё максимальное значение с изменением его знака на границе каждого интервала. В общем случае при n последовательно соединённых линейных звеньев первого порядка с действительными отрицательными корнями выполняется теорема об n интервалах Фельдбаумана.

Оптимальное по быстродействию управление для системы n -го порядка с вещественными отрицательным корнями состоит из n - интервалов максимального воздействия с последовательным изменением знака управляющего сигнала.

В случае если есть ограничение на производные по регулируемой величине или корни характеристического уравнения комплексные, то количество интервалов может быть увеличено.

1.5.2 Примеры расчета оптимального управления с определением моментов переключения

Пример 1.10 [12] – Определить оптимальное управление по быстродействию для разомкнутой системы, структура которой показана на рисунке 1.12.

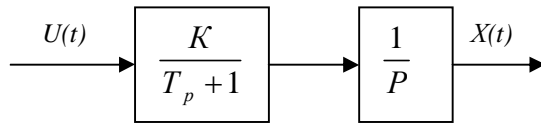


Рисунок 1.12 - Структурная схема системы к примеру 1.10

Начальные условия $X(0) = 0; \quad \dot{X}(0) = 0.$

Конечные условия $X(t_2) = X_n; \quad \dot{X}(t_2) = 0.$

Критерий оптимальности $t_2(\text{рег}) \rightarrow \min$

Параметры системы $X = 0,0023; \quad U_{\max} = 220.$

$T = 0,63(a = 1,6); \quad X_{\text{ном}} = 2,9.$

РЕШЕНИЕ

1 Дифференциальное уравнение этой системы

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = KU(t).$$

Уравнение переходной функции

$$X(t) = C_0 t + C_1 + C_2 e^{-at}.$$

Это уравнение пути разбиваем на два участка:

1-й участок – уравнение ускоренного движения под действием $+U_{\max}$.

2-й участок – уравнение торможения под действием минус U_{\max} .

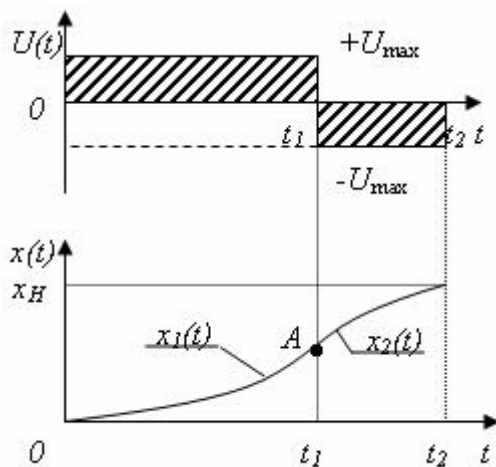


Рисунок 1.13 – Сигналы управления и траектория пути к примеру 1.10

Решение задачи фактически сводится к определению времени ускоренного движения $0 - t_1$ и времени торможения $t_1 - t_2$, где t_2 окончание переходного процесса. Это показано на рисунке 1.13.

2 Уравнение пути и скорости для

1-го участка (ускорение).

$$\begin{cases} X_1(t) = C_0 t + C_1 + C_2 e^{-at}; \\ \dot{X}_1(t) = C_0 + aC_2 e^{-at}. \end{cases}$$

Уравнение пути и скорости для 2-го участка (торможения)

$$\begin{cases} X_2(t) = C'_0 t + C'_1 + C'_2 e^{-at}; \\ \dot{X}_2(t) = C'_0 + aC'_2 e^{-at}. \end{cases}$$

3 В этих уравнениях шесть постоянных коэффициентов интегрирования $C_0, C_1, C_2, C'_0, C'_1, C'_2$. Учитывая, что $C_0 = KU$ и $C'_0 = -KU$ определим эти коэффициенты по начальным и конечным условиям работы системы. На участке ускорения по начальным условиям

$$\begin{aligned} X_1(0) = 0 = KU - aC_2; & \quad C_2 = \frac{KU}{a}; \\ X_1(0) = 0 = C_1 + C_2; & \quad C_2 = \frac{-KU}{a}. \end{aligned}$$

На участке торможения определим коэффициенты C'_1, C'_2 по конечным условиям

$$\begin{aligned} \dot{X}_2(t_2) = 0 = -KU - aC'_2 e^{-at_2}; & \quad C'_2 = \frac{KU}{at^{-at_2}}; \\ X(t_2) = X_n = -KU t_2 + C'_1 + C'_2 e^{-at_2}; & \quad C'_1 = X_n + KU t_2 - \frac{KU}{a}. \end{aligned}$$

4 Момент переключения t_1 определим по уравнению стыковки. Учитывая, что при $t = t_1$ система продолжает непрерывное движение и переходит с участка ускорения на участок торможения (точка А), поэтому

$$\begin{cases} X_1(t_1) = X_2(t_1); \\ \dot{X}_1(t_1) = \dot{X}_2(t_1); \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} C_0 t_1 + C_1 + C_2 e^{-at_1} = C'_0 t_1 + C'_1 + C'_2 e^{-at_1}; \\ C_0 - aC_2 e^{-at_1} = C'_0 - aC'_2 e^{-at_1}. \end{cases}$$

После подстановки значений C_i в уравнение стыковки получаем

$$\begin{cases} KU t_1 - \frac{KU}{a} + \frac{KU}{a} e^{-at_1} = -KU t_1 + (X_n + KU t_2 - \frac{KU}{a}) + \frac{KU e^{-at_1}}{a e^{-at_2}}; \\ KU - aKU e^{-at_1} = -KU - \frac{aKU e^{-at_1}}{a e^{-at_2}}. \end{cases}$$

В результате алгебраических преобразований эта система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} e^{at_2} - 2e^{at_1} + 1 = 0; \\ t_2 - 2t_1 + \frac{X_{ном}}{KU} = 0. \end{cases}$$

5 Определим из каждого уравнения значений t_1 (момент переключения).

Обозначим:

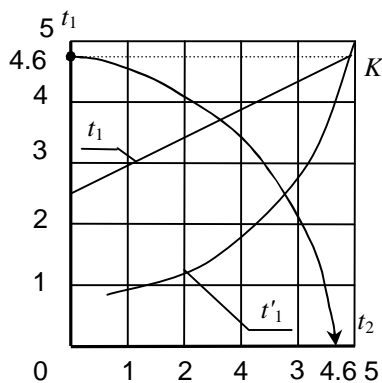
t_1 – значение момента переключения через уравнение пути;

t'_1 – значение момента переключения через уравнение скорости.

Очевидно, что $t_1 = t'_1$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{at_2} + 1}{2}; \\ t'_1 = \frac{t_2 + \frac{X_{ном}}{KU}}{2}. \end{cases}$$

Подставим численные значения параметров



системы

$$\begin{cases} t_1 = 0,63 \ln \frac{e^{1,6t_2} + 1}{2}; \\ t'_1 = \frac{t_2 + \frac{2,9}{0,0023 \cdot 220}}{2}. \end{cases}$$

Рисунок 1.14 – Графики

зависимости $t_1 = \oint(t_2)$

и $t'_1 = \oint(t_2)$

По полученным уравнениям и построим графики $t_1 = \oint(t_2)$ и $t'_1 = \oint(t_2)$, которые показаны на рисунке 1.14.

В точке K это графики пересекаются. Эта точка и есть решение системы урав-

нений графическим способом. Можно его решить и алгебраическим, путем $t_1 = t'_1$. В результате получаем, что при $t_2 = 5$ с значение $t_1 = 4,6$ с. Переносим значение $t_1 = 4,6$ с с оси ординат на ось абсцисс и определяем время разгона $0 - t_1$ и время торможения $t_1 - t_2$.

ОТВЕТ. Время разгона от 0 до 4,6. Время торможения от 4,6 с до 5 с.

Учитывая особенность работы конкретной системы, могут быть даны ограничения на допустимую скорость движения. Например, скорость движения руки робота ограничена из-за размеров золотника. Такие ОСУ рассчитываются другим способом. Покажем это на конкретном примере.

Пример 1.11 [12] – Определить моменты переключения управляющего воздействия ОСУ при ограничении на максимально допустимую скорость изменения регулируемого параметра. Смена знака управляющего воздействия допустима.

Объект регулирования описывается уравнением

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = ku(t).$$

Начальные условия $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$

Конечные условия $x(t_3) = x_n, \quad \dot{x}(t_3) = 0.$

Критерий оптимальности $t_p \rightarrow \min.$

Управляющее воздействие $|\pm U| \leq U_{\text{дон}}.$

Ограничение на скорость изменения регулируемого параметра $|\dot{x}(t)| \leq \dot{x}_{\text{дон}}.$

РЕШЕНИЕ

Уравнения движения участка разгона

$$\begin{cases} x_1(t) = C_0 t + C_1 + C_2 e^{-at}; \\ \dot{x}_1(t) = C_0 - a C_2 e^{-at}. \end{cases}$$

Используя начальные условия, определяем постоянные интегрирования C_0, C_1, C_2

$$C_0 = +kU_{\partial on}; \quad C_1 = -\frac{kU_{\partial on}}{a}; \quad C_2 = \frac{kU_{\partial on}}{a}.$$

При достижении максимально допустимой скорости $X_{\text{доп}}$ время разгона t_1 заканчивается. Определяем это время t_1 по уравнению скорости с учетом значений C_0, C_1

$$kU_{\partial on} - kU_{\partial on}e^{-at_1} = x_{\partial on}; \quad t_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{kU_{\partial on}}{kU_{\partial on} - x_{\partial on}}.$$

Путь пройденный за время разгона t_1

$$x_1(t) = C_0 t + C_1 + C_2 e^{-at_1} = kU_{\partial on} t_1 - \frac{kU_{\partial on}}{a} + \frac{kU_{\partial on}}{a} e^{-at_1}.$$

Уравнение движения участка торможения (рисунок 1.15)

$$\begin{cases} x_3(t) = C'_0 t + C'_1 + C'_2 e^{-at}; \\ \dot{x}_3(t) = C'_0 - aC'_2 e^{-at}. \end{cases}$$

Для упрощения расчета примем, что торможение начинается со временем $t_1 = 0$. Тогда коэффициенты C'_0, C'_1, C'_2 будут численно равны коэффициентам C_0, C_1, C_2 , но с противоположным знаком т.к $U = -U_{\partial on}$

$$C'_0 = -kU_{\partial on}; \quad C'_1 = +\frac{kU_{\partial on}}{a}; \quad C'_2 = -\frac{kU_{\partial on}}{a}.$$

Учитывая, что вначале торможения $\dot{x}(t) = \dot{x}_{\partial on}$, а в конце $x(t) = 0$, тогда по уравнению скорости движения по участку торможения определяем время торможения t_3

$$\dot{x}_{\partial on} = \dot{x}_3(t_3) = -kU_{\partial on} + kU_{\partial on}e^{-at_3}; \quad t_3 = \frac{1}{a} \ln \frac{kU_{\partial on} + \dot{x}_{\partial on}}{kU_{\partial on}}.$$

Определяем путь пройденный за время торможения t_3 , согласно принятого условия, что начало торможения принято при $t_3 = 0$. Значение пути $X_3(t)$ определим через интеграл по скорости торможения

$$x_3(t_3) = \int_0^{t_3} x_3(t) dt = \int_0^{t_3} (-kU_{\partial on} + (kU_{\partial on} + \dot{x}_{\partial on}) e^{-at}) dt =$$

$$= -kU_{\text{дон}}t_3 + \frac{kU + \dot{x}_{\text{дон}}}{a} - \frac{kU + \dot{x}_{\text{дон}}}{a} e^{-at_3}.$$

За время разгона t_1 и торможения t_3 пройдено часть пути $x_1(t) + x_3(t)$ из заданного по конечному условию x_n . Тогда путь движения с постоянной скоростью $x_{\text{дон}}$ равен

$$x_2(t) = x_n - (x_1(t_1) + x_3(t_3)).$$

Время движения с постоянной скоростью

$$t_2 = \frac{x_2(t_2)}{\dot{x}_{\text{дон}}}.$$

Общее время переходного процесса t_{mn}

$$t_n = t_1 + t_2 + t_3.$$

Таким образом, время разгона при $+U_{\text{дон}}$ равно t_1 , время движения с постоянной скоростью $U_{\text{дон}}/k$ равно t_2 , время торможения при минус $U_{\text{дон}}$ равно t_3 .

Определим моменты переключения управляющего устройства при следующих параметрах системы

$$K = 0,0023, \quad T = 0,62(a = 1,6), \quad U_{\text{дон}} = 220, \quad x_n = 2,08, \quad \dot{x}_{\text{дон}} = 0,4.$$

1 Время разгона t_1

$$t_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{kU_{\text{дон}}}{kU_{\text{дон}} - \dot{x}_{\text{дон}}} = 0,62 \ln \frac{0,0023 \cdot 220}{0,0023 \cdot 220 - 0,4} = 1 \text{ с.}$$

2 Путь пройденный за время разгона

$$x_1(t_1) = kU_{\text{дон}} \left(t - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{-at_1} \right) = 0,0023 \cdot 220 (1 - 0,62 + 0,62 e^{-1,6}) = 0,25.$$

3 Время торможения t_3

$$t_3 = \frac{1}{a} \ln \frac{kU_{\text{дон}} + \dot{x}_{\text{дон}}}{kU_{\text{дон}}} = 0,62 \ln \frac{0,5 + 0,4}{0,5} = 0,37.$$

4 Путь пройденный за время торможения

$$x_3 = -kU_{\text{дон}}t_3 + \frac{kU_{\text{дон}} + \dot{x}_{\text{дон}}}{a} - \frac{kU_{\text{дон}} + \dot{x}_{\text{дон}}}{a} e^{-at_3} =$$

$$= -0,0023 \cdot 220 \cdot 0,37 + \frac{0,5+0,4}{1,6} - \frac{0,5+0,4}{1,6} e^{-1,6 \cdot 0,37} = 0,07 .$$

5 Величина пути движения с постоянной скоростью

$$\dot{x}_2(t_2) = x_n - (x_1(t_1) + x_3(t_3)) = 2,09 - (0,25 + 0,07) = 1,77.$$

6 Время движения с постоянной скоростью

$$t_2 = \frac{x_2(t_2)}{\dot{x}_{дон}} = \frac{1,77}{0,4} = 4,43 \text{ с.}$$

7 Общее время переходного процесса

$$t_{nn} = 1 + 0,37 + 4,43 = 5,8 \text{ с.}$$

Таким образом, время разгона $t_1 = 1$ с (при этом $U_{разг} = 220$). Время движения с допустимой скоростью $t_2 = 4,43$ с (при этом $U_{оп} = \dot{x}_{дон}/k = 0,4/0,0023 = 174$), время торможения $t_3 = 0,37$ с (при этом $U_{тор} = -220$).

Построим графики алгоритма управления и переходного процесса при заданных параметрах системы.

Согласно расчета : $x_1(1) = 0,25$; $x_2(4,43) = 1,77$; $x_3(0,37) = 0,06$.

Графики алгоритма управления и переходного процесса на рисунке 1.15.

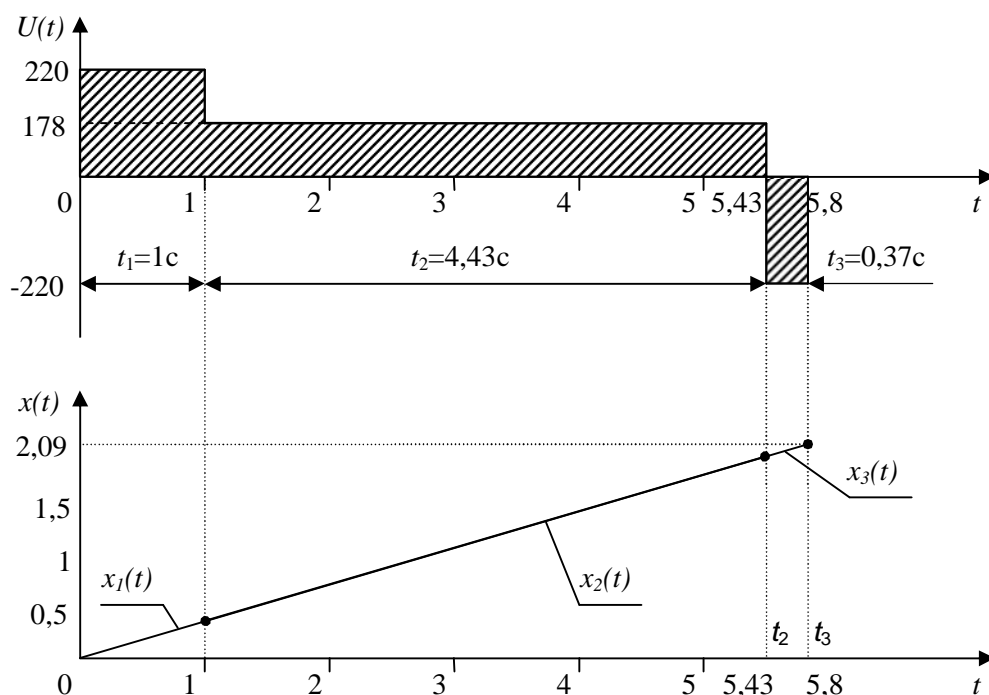


Рисунок 1.15 - Алгоритм управления и график переходного процесса

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.5.2

- 1 В уравнении переходной функции система второго порядка как определяются коэффициенты C_0 и C'_0 ?
- 2 По каким условиям определяются коэффициенты C_1 и C_2 ?
- 3 По каким условиям определяются коэффициенты C'_1 и C'_2 ?
- 4 Физическая основа составления уравнения стыковки.
- 5 Как находятся зависимости $t_1 = f(t_2)$ и $t'_1 = f(t'_2)$?
- 6 Что характеризует время $0 - t_1$ и $t_1 - t_2$?
- 7 Сколько сигналов управления при ограничении на допустимую скорость изменения регулируемого параметра для системы второго порядка?
- 8 Как определяется управляющее воздействие при движении системы с постоянной (допустимой) скоростью?
- 9 Как определяется время движения системы с постоянной скоростью?
- 10 Как определяется путь движения с постоянной скоростью?
- 11 Почему при ограничении на допустимую скорость изменения регулируемого параметра каждый участок пути рассчитывается отдельно?

1.5.3 Расчёт оптимального управления графоаналитическим способом

Необходимое количество переключений управляющего сигнала в линейных системах без ограничений согласно теореме А.А. Фельбаума должно быть не больше n , где n – порядок системы дифференциального уравнения. В реальных системах для повышения надёжности её работы вводятся дополнительные ограничения на скорость перемещения рабочего органа, на величину ускорения и т.д. При этом количество переключений может увеличиваться [4, 10].

Для упрощения расчёта примем, что начальные условия нулевые, зона нечувствительности в элементах системы отсутствует. Рассмотрим безынерционную систему, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = KU(t).$$

Начальные условия нулевые и задано одно ограничение

$$\frac{d^2x}{dt^2} \leq M,$$

где M – максимальное значение ускорения.

В безынерционной системе нет накопления запаса энергии, поэтому управляющие сигналы на «разгон» и на «торможение» будут одинаковы. Фактически рассматривается идеализированная система, чтобы удобнее рассмотреть сочетание положительных и отрицательных управляющих сигналов согласно теоремы Фельбаума.

Пусть необходимо систему второго порядка перевести из положения $X(0) = 0$ положение $X(T) = X_n$ за минимальное время переходного процесса T . Очевидно, в начале надо создать максимальный уровень управляющего воздействия ($+M$) с учетом ограничения (рисунок 1.16).

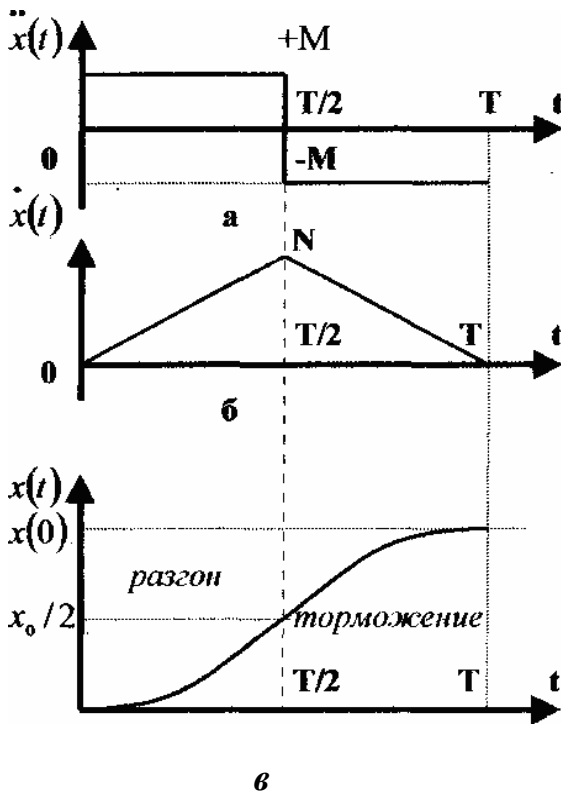


Рисунок 1.16 – Оптимальное управление системой 2-го порядка

При этом скорость будет нарастать по уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t M dt = M \cdot t, \quad 0 < t < T/2$$

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t M dt = M \cdot t, \quad 0 < t < T/2.$$

Выходная координата системы (путь) при возрастании скорости определяется по уравнению

$$x(t) = \int_0^t M dt = \frac{Mt^2}{2}, \quad 0 < t < T/2.$$

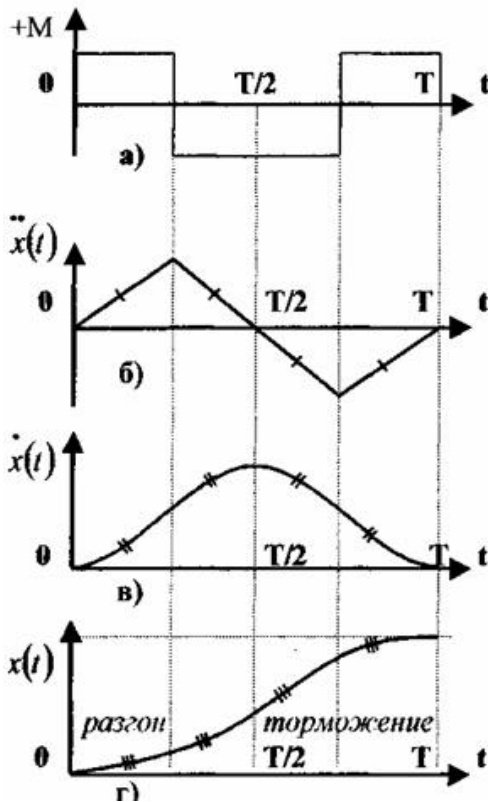
При достижении максимальной скорости (точка N, рисунок 1.16 б) ее необходимо погасить и поэтому подается отрицательный управляющий сигнал M . Скорость убывания будет равна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{MT}{2} - M(t - T/2), \quad T/2 < t < T.$$

Скорость при любом значении t остается положительной, поэтому выходная координата $x(t)$ будет продолжать увеличиваться

$$x(t) = \frac{MT^2}{4} - \frac{MT}{2}(T - t), \quad T/2 < t < T.$$

При этом скорость изменяется по линейному закону, а путь по квадратичной зависимости от времени. Таким образом, при оптимальном управлении по быстродействию безынерционной системой второго порядка необходимо подать два одинаковых управляющих воздействия $+M$ и $-M$. Если линейная система оптимизируется дифференциальным уравнением третьего порядка,



то при оптимальном управлении по быстродействию необходимо подать три управляющих воздействия $+M$, $-M$, $+M$. Это показано на рисунке 1.17.

Условные обозначения в рисунке 1.17

- ⊕ - линейная зависимость;
- ⊕⊕ - квадратичная зависимость;
- ⊕⊕⊕ - кубическая зависимость.

Тогда ускорение (вторая производная по $x(t)$) будет изменяться по линейному закону от времени. Скорость (первая производная по $x(t)$) - по квадратичной зависимости от времени. Путь (или значение $x(t)$) - по кубической зависимости от времени. Очевидно, что для системы четвертого порядка (без ограничений на производные по регулируемой координате) необходимо подать четыре управляющих воздействия, где каждый следующий управляющий сигнал меняет свой знак на обратный. Для системы пятого порядка необходимо подавать пять управляющих воздей-

ствий и так далее.

В рассмотренных примерах система описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^n x}{dt^n} = KU(t).$$

Это позволяет иметь одинаковые по величине управляющее воздействие +М и минус М в начале и в конце процессов управления. Если система описывается дифференциальным уравнением с различными постоянными времени, вида

$$T_0 \frac{d^n x}{dt^n} + T_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + T_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + 1 = KU(t),$$

то количество управляющих сигналов и последовательность смены знака не изменяется. Но продолжительность каждого сигнала, особенно в конце процессов регулирования, резко уменьшается.

Рассмотрим случай, когда кроме ограничения на величину управляющего сигнала наложены ограничения на производную по $x(t)$. Например, для безынерционной системы третьего порядка введены ограничения

$$|\dot{x}| < \dot{x}_{\text{дон}} \quad |\ddot{x}| < \ddot{x}_{\text{дон}}$$

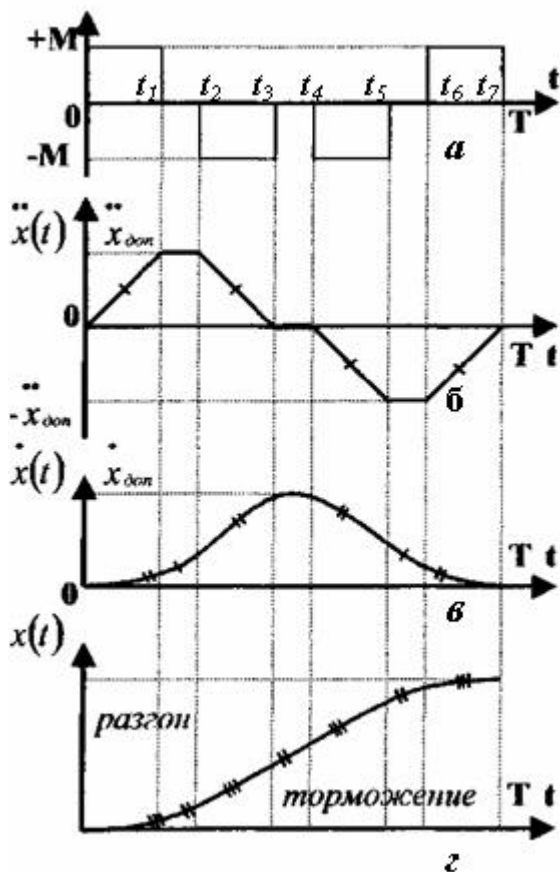
Оптимальное управление по быстродействию такой системы 3-го порядка показана на рисунке 1.18. Алгоритм построения оптимального управления состоит из следующих циклов.

1) Сигнал управления +М продолжительностью от 0 до t_1 , когда ускорение движения системы доходит до своего допустимого значения $\ddot{x}_{\text{дон}}$.

2) Отсутствие сигнала управления М (пауза) от t_1 до t_2 когда стабилизировано значение на уровне $\ddot{x}_{\text{дон}}$.

3) Сигнал управления минус М продолжительностью t_2-t_3 и $\ddot{x}(t)$ доходит до $\ddot{x}(t) = 0$.

4) Отсутствие сигнала управления (пауза) продолжительностью t_3-t_4 при котором стабилизировано значение скорости равной $\dot{x}_{\text{дон}}$.



- а) график сигналов управления;
- б) график изменения ускорения;
- в) график изменения скорости;
- г) график изменения пути.

Рисунок 1.17 - Оптимальное управление системой 3-го порядка без ограничений на $|\dot{x}|$ и $|\ddot{x}|$

управления могут быть меньше M или иметь криволинейную форму.

- 5) Сигнал управления минус M продолжительностью t_4-t_5 когда ускорение движения доходит до своего допустимого значения минус $\ddot{x}_{дон}$.
- 6) Отсутствие сигнала управления (пауза) продолжительностью t_5-t_6 для стабилизации значения $\ddot{x}_{дон}$.
- 7) Сигнал управления M продолжительностью t_6-t_7 для уменьшения $\ddot{x}(t)$ и $\dot{x}(t)$ до нуля. Это обеспечит стабилизацию управляемой величины $x(t)$ в новом установившемся состоянии.

Если дифференциальное уравнение системы более высокого порядка, то последовательность построения алгоритма оптимального управления по быстрдействию остается такой же.

Примечание - Если дифференциальное уравнение системы нелинейное или есть специальное ограничение на производные по регулируемой координате, то некоторые сигналы

1.6 Определение оптимального управления на основе метода фазового пространства

1.6.1 Общее положение

Метод фазового пространства в сочетании с принципом максимума Понтрягина получил достаточно широкое применение при анализе оптимальных систем, когда движение управляемого объекта описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Из принципа максимума следует, что оптимальное управление представляет кусочно-непрерывную функцию времени, имеющую некоторое число разрывов 1-го рода (скачков). Каждый участок кусочно-непрерывной функции может иметь сложную зависимость от времени. Рассмотрим случаи, когда эта зависимость прямолинейная.

Для определения оптимального управления необходимо определить границы участков, на которых происходят скачки (переключения). Эта задача является достаточно сложной. При использовании функции Гамильтона момент переключения определяется по изменению знака вектора управления $\varphi(t)$, где t – продолжительность управления при данном значении управляющего воздействия. По методу фазового пространства моменты переключения определяются по положению системы на фазовой траектории. В результате, после движения по одной фазовой траектории или по одному оптимальному закону, система переходит на другую фазовую траекторию, на другой оптимальный закон движения, затем на третью траекторию, на четвёртую и т.д. в зависимости от порядка дифференциального уравнения [1,2,5,9]

Необходимое количество таких переключений зависит от вида корней характеристического уравнения системы. Для случая отрицательных вещественных корней справедлива теорема А.А. Фельтбаума об n - интервалов. Согласно этой теореме количество интервалов движения, на которых оптимальное управление непрерывно, должно быть не больше n , где n – количество вещественных корней или порядок дифференциального уравнения объекта управления. В случае комплексных корней или при дополнительных ограничениях на

управляющие воздействия количество n интервалов может быть больше. Полная фазовая траектория состоит из ряда участков, соответствующих движению между скачками управления. Обычно за начало движения принимают некоторое заданное положение системы. Если фазовая траектория ведёт в начало координат, то управление считается устойчивым. При разных заданных начальных условиях движения будет происходить по разным непересекающимися фазовым траекториям, но все они должны кончаться (при устойчивом движении) в начале координат или на оси абсцисс x , а значение $y = dx/dt = 0$.

Рассмотрим решение поставленной задачи для системы второго порядка в виде последовательного соединения релейного элемента и линейной части системы. Линейная часть включает в себя все элементы системы, за исключением релейного элемента и описывается передаточной функцией $W_{л.ч.}(p)$ (рисунок 1.19). Релейный элемент описывается уравнением статической характеристики (рисунок 1.20).

Для анализа процесса регулирования по фазовой траектории уравнение системы второго порядка представляют в виде двух уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y, F(x)),$$

где x – регулируемая величина;

y – скорость изменения регулируемой величины;

$F(x)$ – характеристика реле.

Чтобы изобразить динамику процесса на фазовой плоскости, из этих двух уравнений исключают время. Для этого первое уравнение делят на второе

$$\frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{y}{f(x, y, F(x))}, \quad \partial x = \frac{y \partial y}{f(x, y, F(x))}.$$

Интегрируя это выражение, получаем уравнение траектории на фазовой плоскости в виде зависимости регулируемой величины x от скорости ее изменения y

$$x = \int \frac{y \partial y}{f(x, y, F(x))}.$$

Необходимо отметить, что задача построения фазовой траектории системы третьего и более высокого порядка оказывается сложной. В связи с этим в ряде случаев целесообразно ограничиться анализом квазиоптимальных систем (квази – приближённая, ненастоящая). Согласно правилу А.Ю. Ишлинского [10] система сколь угодно высокого порядка ведёт себя в переходном режиме в основном так же, как система второго порядка по упрощённому уравнению.

1.6.2 Пример расчёта оптимального управления по фазовым траекториям

Пример 1.12 - Получить уравнения фазовых траекторий и определить моменты переключения в релейной следящей системы показана на рисунке 1.19. В качестве регулятора используется реле без зоны нечувствительности (рисунок 1.20)

1 Уравнение объекта управления (ОУ) $T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k \cdot U(t)$.

2 Критерий оптимальности $t_{рег} \rightarrow \min$.

3 Граничные условия начальные $\begin{cases} x(0) = 0; \\ \dot{x}(0) = 0; \end{cases}$ конечные $\begin{cases} x(\infty) = x_n; \\ \dot{x}(\infty) = 0. \end{cases}$

4 Исполнительное устройство (ИУ) релейного типа $F(x)$.

5 Ограничений на $U_{упр}$ – нет.

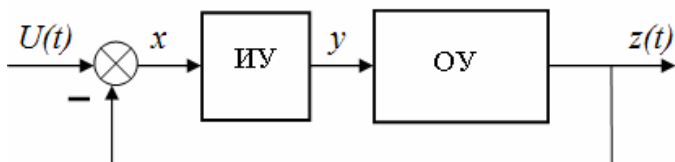


Рисунок 1.19 – Функциональная схема релейной следящей системы к примеру 1.9

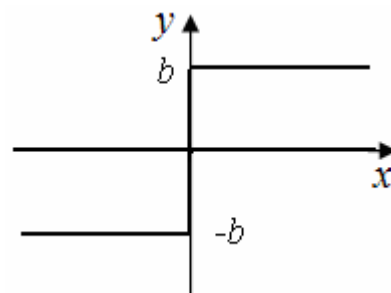


Рисунок 1.20 – Статическая характеристика релейного элемента

РЕШЕНИЕ

1 Определяется общая передаточная функция системы

$$W_{\text{общ.}}(p) = \frac{\frac{F(x)k}{P(Tp+1)}}{1 + \frac{F(x)k}{P(Tp+1)}} = \frac{F(x)k}{Tp^2 + p + F(x)k}.$$

2 Собственное движение системы по характеристическому уравнению

$$Tp^2 + p + F(x)k = 0.$$

Представим это уравнение в виде дифференциального уравнения и введем уравнение по скорости изменения x . Тогда получается система двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ T \frac{dy}{dt} + y + F(x)k = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -(y + F(x)k)/T. \end{cases}$$

3 Первое уравнение делится на второе и определяется значение ∂x

$$\frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{Ty}{-(y + F(x)k)},$$

$$\partial x = \frac{-Ty \cdot \partial y}{y + F(x)k} = \frac{-T[y + F(x)k - F(x)k] \partial y}{y + F(x)k} = -T \partial y + \frac{TF(x)k \cdot \partial y}{y + F(x)k}.$$

4 Интегрируется полученное уравнение, и получается уравнение фазовой траектории

$$x = -T \cdot y + TkF(x) \ln|y + k \cdot F(x)| + C_n,$$

где C_n – постоянная интегрирования, характеризующая начальные условия движения системы;

x – изменение регулируемой величины;

y – изменение скорости движения регулируемой величины.

5 Начальное значение фазовой траектории зависит от заданных начальных условий C_n . Пусть при $t = 0$ начальное значение фазовой траектории равно x_n и y_n . Определим C_n .

$$x_n = -Ty_n + TkF(x) \ln|y_n + kF(x)| + C_n;$$

$$C_n = x_n + Ty_n - TkF(x) \ln|y_n + kF(x)|.$$

Тогда уравнение фазовой траектории с учетом начальных условий

$$x = x_n + T(y_n - y) + TkF(x) \ln \left| \frac{y + kF(x)}{y_n + kF(x)} \right|.$$

6 В полученном уравнении фазовой траектории характеристика релейного элемента в зависимости от величины входного сигнала x может иметь два различных значения

$$F(x) = \begin{cases} -b, & \text{при } x \leq 0; \\ b, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение фазовой траектории можно разделить на два участка

$$x_1 = x_k + T(y_k - y) - Tkb \cdot \ln \left| \frac{y - kb}{y_n - kb} \right|, \quad \text{при } b \leq 0.$$

$$x_2 = x_n + T(y_n - y) + Tkb \cdot \ln \left| \frac{y + kb}{y_n + kb} \right|, \quad \text{при } b \geq 0.$$

Переход фазовой траектории с одного участка на другой происходит при срабатывании реле. На фазовой плоскости значения, при которых срабатывает реле, называются *линиями переключения*. На этих линиях переключения производится «сшивание» фазовых траекторий между участками. При этом конечное значение предыдущей фазовой траектории становится начальным условием для следующей фазовой траектории.

Покажем построение фазовой траектории при следующих значениях параметров системы (рисунок 1.21)

$$k = 1; \quad T = 10; \quad b = \pm 3.$$

Начальное значение движения системы при $x_1 = 0; y_1 = 0$.

7 Движение системы начинается при включенном реле ($b = +3$)

$$x_1 = x_1 + T(y_1 - y) - Tkb \cdot \ln \left| \frac{y - kb}{y_1 - kb} \right| = 0 + 10(0 - y) + 10 \cdot 3 \cdot \ln \left| \frac{y + 3}{0 + 3} \right|.$$

Результаты расчёта показаны в таблице 1.1

Таблица 1.1 – Расчёт фазовой траектории при $x_1 = 0, y_1 = 0, b = 3$

y	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
x	4,4	3,3	1,8	0,4	0	0,8	3,4	6,8

Изменяя начальное значение x_1 (-2, -4, -6 и т.д.) можно получить семейство фазовых траекторий при $b = 3$.

8 Определяется фазовая траектория при конечном значении $x_2 = 6, y_2 = 1$ и $b = -3$

$$x_2 = x_2 + T(y_2 - y) - Tkb \cdot \ln \left| \frac{y - kb}{y_{n2} - kb} \right| = +6 + 10 \cdot (0 - y) - 10 \cdot 3 \cdot \ln \left| \frac{y - 3}{0 - 3} \right|$$

Результаты расчёта показаны в таблице 1.2

Таблица 1.2 - Расчёт фазовой траектории при $x_2 = 6, y_2 = 0, b = -3$

y	3	2	1	0,5	0	-0,5	-1	-1,5
x	-2,8	1,2	4,2	5,6	6	5,4	3,2	-2,7

Изменяя значение x_2 (4, 2, 0 и т.д.) можно получить семейство фазовых траектории при $b = -3$.

Пусть движение системы по фазовой плоскости вначале определяется по фазовой траекторией при $x_1 = 0, y_1 = 0, b = 3$, которая в точке N переключается на фазовую траекторию при $x_2 = 6, y_2 = 0, b = -3$ (рисунок 1.21).

Для системы описываемой дифференциальным уравнением второго порядка фазовая траектория, которая проходит через начало координат, называется линией переключения.

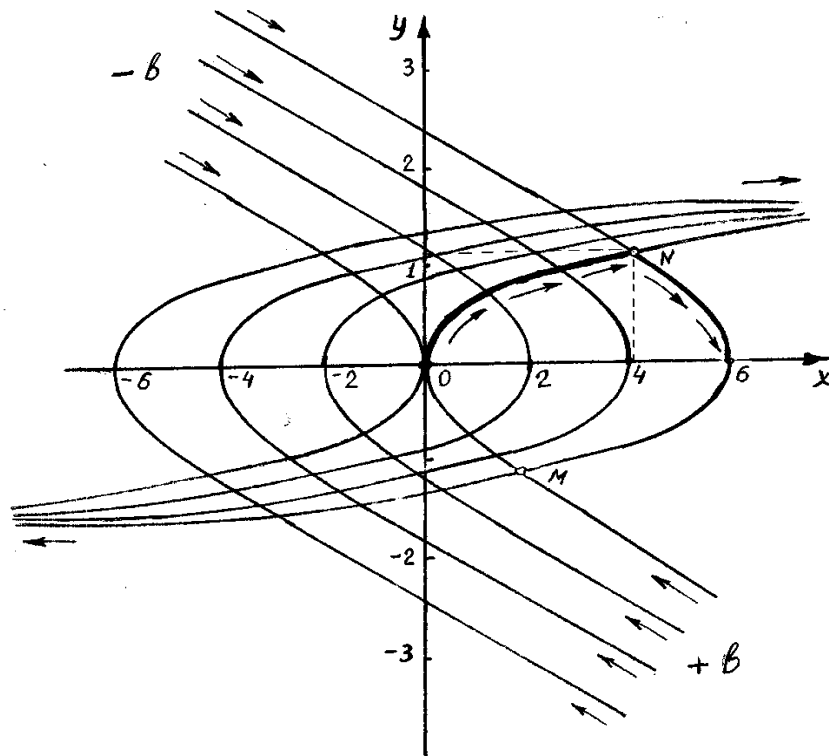


Рисунок 1.21 – Фазовые траектории к примеру 1.9

Для данных условиях примера линия переключения показана жирной линией. Момент переключения реле с $b = 3$ на $b = -3$ показан точкой N.

Обратите внимание! По методу фазового пространства (в нашем частном случае метод фазовой плоскости) момент переключения определяется не как функция времени, а как функция состояния системы по совпадению траекторий при $+b$ и минус b при заданных начальных и конечных условиях. В результате получаем решение

- реле должно переключиться при $x_1 = x_2 = 4,1$ и $y_1 = y_2 = 1,2$;
- реле должно отключиться при $x_2(\infty) = 6$ и $y_2(\infty) = 0$.

Если условия задачи изменить, например, начало движения при $x_2(0) = 6$ и $y_1(0) = 0$ и конец движения при $x_2(\infty) = 0$, $y_2(\infty) = 0$, то по полученному портрету фазовых траекторий видно, что система должна двигаться по фазовой траектории $x_2(0) = 6$ и $b = -3$ (движение будет оптимально тормозиться) и в точке M переключиться на фазовую траекторию $x_2 = 0$ и $b = 3$ (действие тормоза оптимально уменьшается до нуля). Выбор точки M на линии переключения обеспечивает переход системы точно в значение $x_2(\infty) = 0$,

$y_2(\infty) = 0$. Любой другой момент переключения уведёт систему от значения $x_2(\infty) = 0, y_2(\infty) = 0$.

Этот метод оптимального управления по быстродействию широко используется на практике. С помощью вычислительного устройства ВУ одновременно рассчитываются фазовые траектории при $+b$ и при $-b$ с заданными начальными и конечными условиями. При совпадении значений y_{n1} и y_{n2} срабатывает переключающее устройство. При достижении установившегося значения $x(\infty)$ управление заканчивается.

Составим структурную схему релейной следящей системы с ВУ (рисунок 1.22), которое рассчитывает момент и переключения и момент отключения исполнительного устройства в виде реле. Уравнение фазовой траектории представим в виде

$$x = x_i + T(y_0 - y) + \sigma T k b \ln \left| \frac{y + \sigma k b}{y_i + \sigma k b} \right|,$$

где $\sigma = +1$ при $b > 0$;

$\sigma = -1$ при $b < 0$;

x_1 - начальные условия пути;

y_2 - начальные условия скорости;

x_2 - конечное условие пути;

y_2 - конечное условие скорости;

$x_{n1} = x_{n2}$ - момент переключения по пути;

$y_{n1} = y_{n2}$ - момент переключения по скорости.

Вычислительное устройство по начальным условиям x_1 и y_1 рассчитывает фазовую траекторию первого этапа движения, задаваясь значениями y_j . Одновременно ВУ рассчитывает фазовую траекторию второго этапа движения по y_j . При совпадении значений $y_{n1} = y_{n2}$ при заданных начальных и конечных условиях задачи, срабатывает переключающее устройство (рисунок 1.22). Условие срабатывания переключающего устройства: $\mu_2 = y_{n1} - y_{n2} = 0$.

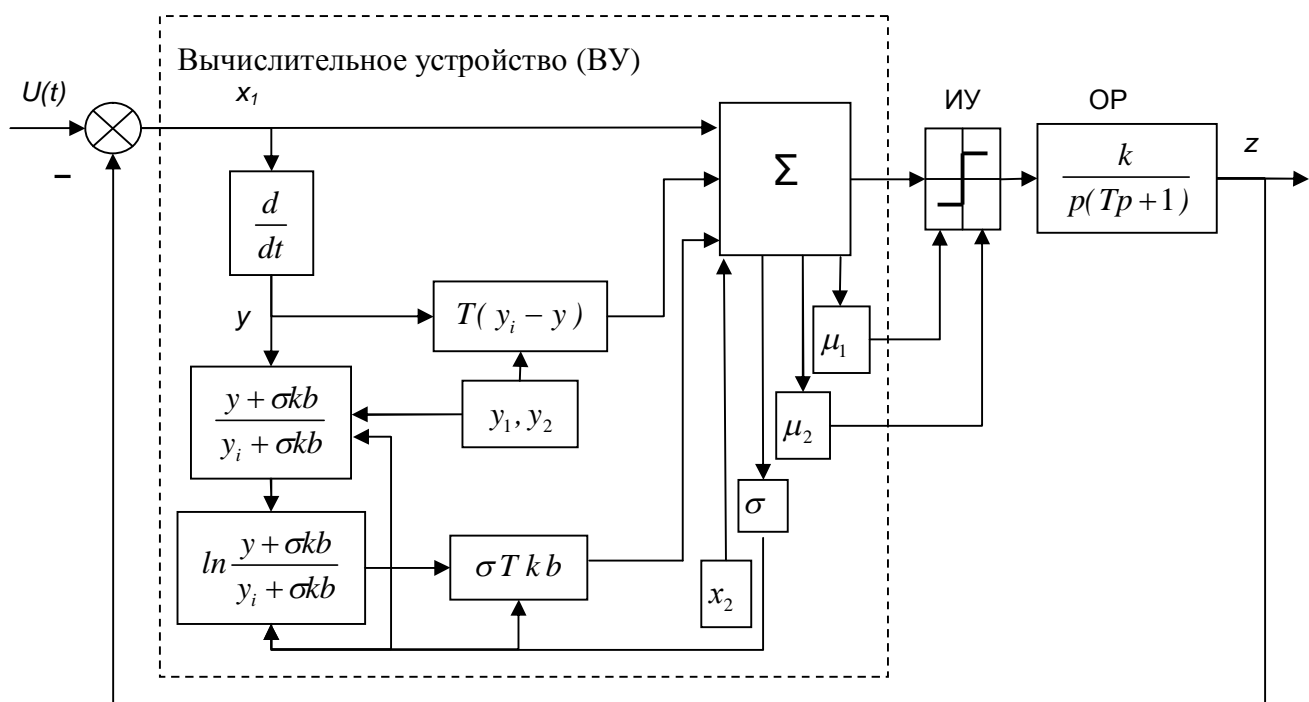


Рисунок 1.22 – Структурная схема релейной следящей системы с вычислительным устройством

Пояснение к рисунку 1.22. Для расчёта оптимальной системы по фазовой траектории в вычислительное устройство заносятся параметры системы: k , T , b . Затем задаются начальные условия x_1 и y_1 и конечные условия x_2 и y_2 . ВУ производит одновременный расчёт обеих траекторий, определяет момент переключения μ_1 и, соответственно, σ затем определяется момент отключения μ_2 . С помощью этих двух параметров (μ_1 и μ_2) происходит управление исполнительным устройством (реле).

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.6

- 1 Как образовано фазовое пространство?
- 2 Как образована фазовая плоскость?
- 3 Что характеризует фазовая траектория?
- 4 Может ли система переходить с одной фазовой траектории на другую?
- 5 Как получается уравнение фазовой траектории для системы второго порядка?
- 6 Какое реле считается идеальным?
- 7 Условие срабатывания переключающего устройства.

1.7 Методы расчета квазиоптимальных систем

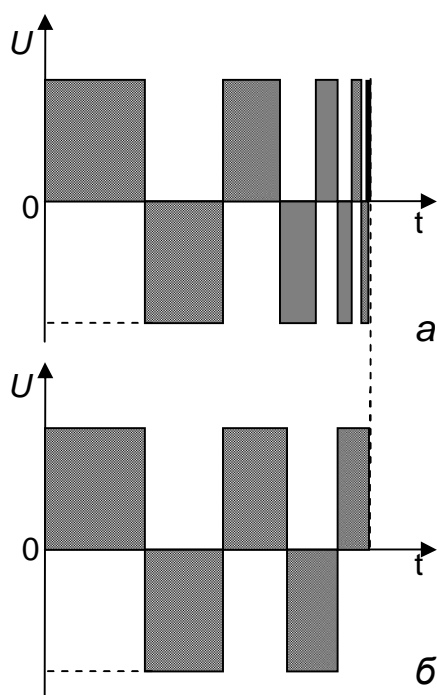
1.7.1 Общие положения

Теоретически расчетные оптимальные системы управления практически полностью реализовать достаточно трудно. Это объясняется многими причинами:

- моменты переключения реле невозможно осуществить с заданной точностью, так как современные реле имеют зону нечувствительности, гистерезис, конечное время срабатывания. Таким образом, это не идеальный элемент для теоретически рассчитанной системы;

- при математическом описании объектов управления неизбежно допускается идеализация исследуемого процесса. Поэтому моменты переключения не всегда соответствуют действительным значениям;

- средства измерения имеют определенные погрешности, которые при расчете не учитываются;



а - оптимальный алгоритм,
б - квазиоптимальный алгоритм.

Рисунок 1.23 - Алгоритмы управления системой

- реализация оптимально рассчитанной системы бывает настолько сложная, что ее изготовление и эксплуатация экономически невыгодна.

Поэтому, иногда лучше сразу рассчитывать не оптимальную систему, а систему, близкую к оптимальной или *квазиоптимальную*. Тогда экономический выигрыш от некоторого упрощения закона управления может превзойти проигрыш от упрощения алгоритма управления.

В чем принципиальное отличие алгоритма работы оптимальной и квазиоптимальной системы по быстродействию? Оптимальная система позволяет перевести ее

за минимальное время в *точно заданное значение регулируемого параметра*. Квазиоптимальная система позволяет перевести ее за минимальное время в *допустимую область заданных значений*. Поэтому для квазиоптимальных систем задается это допустимое отклонение.

Рассмотрим следующие варианты расчета квазиоптимальных систем.

Первый вариант связан с преобразованием отдельных достаточно малых интервалов переключения. Например, в десятые и сотые доли секунды. Такие теоретически полученные интервалы за такой малый промежуток времени практически не влияют на состояние системы. Кроме этого, реализовать импульсы в таких долях секунды практически трудно или даже невозможно существующей аппаратурой.

Можно пойти таким путем: объединить малые положительные импульсы в один положительный, а малые отрицательные импульсы в один отрицательный. Такой способ получения квазиоптимального алгоритма работы показан на рисунке 1.23. На рисунке 1.23 а показан оптимальный алгоритм работы системы 9 порядка. Последние интервалы переключения очень малы. На рисунке 1.23 б показан квазиоптимальный алгоритм работы системы, где последние интервалы суммированы в три интервала, которые успешно могут реализовать современные реле.

Второй вариант допускает перерегулирование. При таком управлении возникает нежелательное отклонение регулируемой величины от заданной. Поэтому необходимо так рассчитать управляющие воздействия, чтобы это отклонение не превышало допустимую границу. Для определения момента переключения за конечное состояние принимается $x_n + \Delta x$, где, например, $\Delta x = 0,05x_n$. При этом система рассчитывается при $x_n^* = 1,05x_n$. При достижении x_n^* значения $\dot{x} = 0$. Такой переходной процесс не является оптимальным, так как теоретически он заканчивается (возвращается к x_n) за бесконечно большое время. Но практически будем считать такую систему квазиоптимальной, и время оконча-

ние переходного процесса принимаем за время попадания в область допустимых значений $x_n + \Delta x$.

Третий вариант предусматривает понижение порядка дифференциального уравнения.

Любой объект или систему можно разбить на элементарные звенья и каждое звено будет иметь свою постоянную времени, которая вносит «свой вклад» в количество импульсов и в продолжительность каждого импульса. Некоторые постоянные времени могут быть значительно меньше остальных и характеризовать относительно малое количество запасенной энергии, что незначительно будет сказываться на динамику системы. Поэтому такими элементарными звеньями можно пренебречь. Малая величина постоянной времени соответствует большой величине корня характеристического уравнения. Если данный корень характеристического уравнения n -го порядка больше других корней в 10 раз, то его влияние, например, его на время переходного процесса в пределах 1 %. Таким образом, исключая из характеристического уравнения корни с большой абсолютной величиной, можно понизить порядок дифференциального уравнения, что упростит реализацию алгоритма управления.

1.7.2 Пример расчета квазиоптимальной системы по допустимому отклонению

Особенность такого расчета квазиоптимальных систем второго порядка в том, что при составлении уравнения движения на участке торможения вместо точного значения x_n берется его максимально допустимое значение. Так, если допустимое отклонение $\pm 5\%$, то для расчёта принимается $x_{\max} = 1,05 x_n$. В остальном расчет, как и для оптимальных систем.

Очевидно, что при увеличении значений x_{\max} время разгона будет больше и система быстрее достигает значения x_n . В момент достижения x_n скорость движения не будет полностью погашена и система будет продолжать двигаться дальше, но в пределах допустимого перерегулирования. Рассмотрим это на конкретном примере.

Пример 1.10 - Определить время переходного процесса при $C' = 0$ для квазиоптимальной системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = ku(t).$$

Допустимое перерегулирование + 5 %.

Начальные условия $x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0.$

Конечные условия $x(t_2) = 1.05 \cdot x_n; \quad \dot{x}(t_2) = 0.$

Управляющее воздействие $|u| \leq u_{\max}.$

Ограничение $-U_{\max} = 0$ или $C'_0 = 0.$

Критерий оптимальности $t_{nn} \rightarrow \min.$

РЕШЕНИЕ

Уравнение пути и скорости для участка разгона (или первый интервал управления).

$$\begin{cases} x_1(t) = C_0 + C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} ; \\ \dot{x}_1(t) = 0 - a_1 C_1 e^{-a_1 t} - a_2 C_2 e^{-a_2 t}, \end{cases}$$

где $a_1 = \frac{1}{T_1}, a_2 = \frac{1}{T_2}$ - корни характеристического уравнения;

C_0, C_1, C_2 – постоянные интегрирования на первом участке.

Используя начальные условия при $t = 0$, определяем C_0, C_1, C_2

$$C_0 = kU_{\text{дон}}; \quad C_1 = \frac{kU_{\text{дон}} T_1}{T_2 - T_1}; \quad C_2 = \frac{-kU_{\text{дон}} T_2}{T_2 - T_1}.$$

Уравнение пути и скорости для участка торможения

$$\begin{cases} x_2(t) = C'_0 + C'_1 e^{-a_1 t} + C'_2 e^{-a_2 t}; \\ \dot{x}_2(t) = -a_1 C'_1 e^{-a_1 t} - a_2 C'_2 e^{-a_2 t}. \end{cases}$$

Примечание - На втором участке $C'_0 = 0$ согласно введенным ограничениям.

Используя конечные условия определяем C'_1 и C'_2

$$C_1' = \frac{1,05x_n e^{a_1 t_2} T_1}{T_1 - T_2}; \quad C_2' = \frac{-1,05x_n e^{a_2 t_2} T_2}{T_1 - T_2}.$$

Производим стыкование решений на границе отключения положительно-го управляющего сигнала и получаем уравнение стыковки

$$\begin{cases} C_0 + C_1 e^{-a_1 t_1} + C_2 e^{-a_2 t_1} = C_1' e^{-a_1 t_1} + C_2' e^{-a_2 t_1} & (\text{по пути}); \\ -a_1 C_1 e^{-a_1 t_1} - a_2 C_2 e^{-a_2 t_1} = -a_1 C_1' e^{-a_1 t_1} - a_2 C_2' e^{-a_2 t_1} & (\text{по скорости}). \end{cases}$$

Подставляем значения $C_0, C_1, C_2, C_1', C_2'$ и после преобразования определяем значение t_1 в функции от t_2

$$\begin{cases} \frac{1,05x_n}{kU_{\text{дон}}} e^{a_1 t_2} - e^{a_1 t_1} + 1 = 0 & \text{или} & t_1 = T_1 \ln\left(\frac{1,05x_n}{kU_{\text{дон}}} + 1\right); \\ \frac{1,05x_n}{kU_{\text{дон}}} e^{a_2 t_2} - e^{a_2 t_1} + 1 = 0 & \text{или} & t_1 = T_2 \ln\left(\frac{1,05x_n}{kU_{\text{дон}}} + 1\right). \end{cases}$$

Чтобы оценить быстродействия квазиоптимальной системы определим время t_1 отключения положительного управляющего сигнала и время t_2 достижения $1,05 x_n$ при следующих параметрах объекта регулирования

$$T_1 = 0,5c (\alpha_1 = 2); \quad T_2 = 1c (\alpha_2 = 1); \quad k = 1; \quad x_n = 1; \quad U_{\text{дон}} = 2.$$

Значение t_1 в зависимости от t_2 имеет вид

$$\begin{cases} t_1 = 0,5 \cdot \ln(0,525 \cdot e^{2t_2} + 1); \\ t_1 = \ln(0,525 \cdot e^{t_2} + 1). \end{cases}$$

Эту систему уравнений можно решить графически (смотри пример 1.6). В результате получаем

$$\begin{cases} t_1 = 1,168; \\ t_2 = 1,44. \end{cases}$$

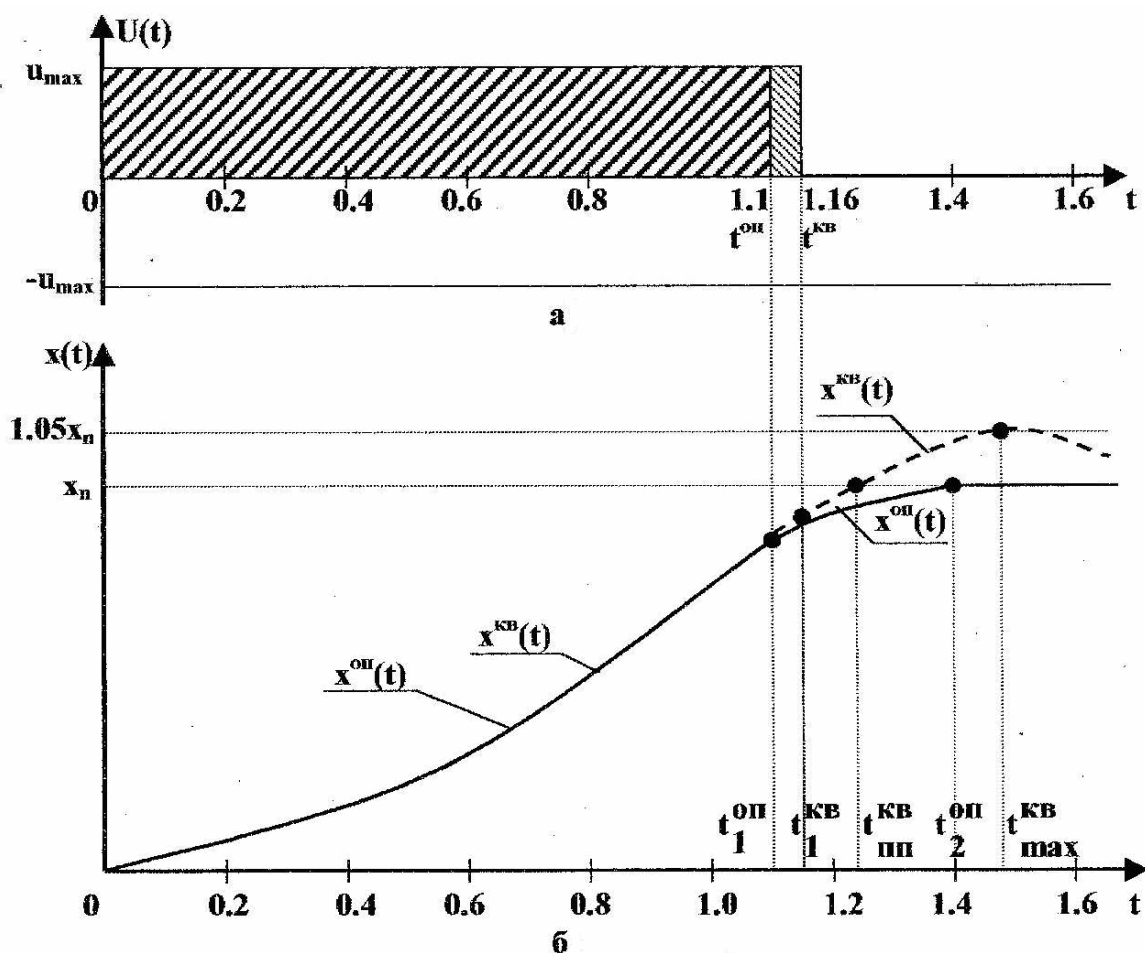
Квазиоптимальная система через $1,44 c$ достигает значения $1,05 x_n$. А за какое время она дойдет до заданного значения x_n ?

Для определения этого построим графики переходного процесса для квазиоптимальной системы $x^{KB}(t)$ при $x_n^* = 1,05$ и для оптимальной системы $x^{OP}(t)$ и $x_n = 1,0$ По этим графикам определим время достижения x_n квазиоптимальной

системы и оптимальной системы. Это показано на рисунке 1.24. Результаты вычисления показаны в таблице 1.4.

Таблица 1.4 — Результат вычисления $x^{KB}(t)$ и $x^{OI}(t)$

t	0	0.4	0.8	1.1	1.108	1.24	1.34	1.40	1.44	1.5
$x^{KB}(t)$	0	0.22	0.62	0.88	0.95	1.00	1.03	1.04	1.05	1.04
$x^{OI}(t)$	0	0.22	0.62	0.88	0.92	0.96	0.98	1.00	1.00	1.00



а - алгоритм управления;

б - переходной процесс;

(—) переходной процесс оптимальной системы;

(---) переходной процесс квазиоптимальной системы.

Рисунок 1.24 - Алгоритм управления и графики переходного процесса оптимальной и квазиоптимальной систем

Как видно по полученным графикам оптимальная система точно достигает заданного значения x_n за время 1.4 с, а квазиоптимальная система достигает значения x_n за время 1.24 с, то есть на 0.16 с раньше, за счет увеличения време-

ни разгона на 0.068 с. На рисунке 1.24 это дополнительное воздействие показано мелкой штриховкой. Если допустимое отклонение от минус 5 % до 5 %, то зону допустимого значения x_n система достигает за 1,108 с, (смотри таблицу 1.4) то есть на 0,29 2 с раньше, чем быстродействие системы увеличится более чем на 20 %. В дальнейшем значение квазиоптимальной системы продолжает увеличиваться до 1.05 x_n и затем постепенно возвращается до x_n . Получаем выигрыш в скорости, но теряем в точности управления за счет допустимого отклонения от x_n .

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.7

1 Почему теоретически рассчитанную оптимальную систему управления для системы высокого порядка практически полностью реализовать достаточно трудно?

2 В чем принципиальное отличие алгоритма работы рассчитанной оптимальной и практически реализуемой квазиоптимальной системы?

3 Как можно преобразовать отдельные достаточно малые интервалы переключения для получения квазиоптимальной системы?

4 Если есть ограничения на допустимую скорость изменения регулируемой величины, то такая система оптимальная или квазиоптимальная?

5 Если есть ограничения на подачу отрицательного управляющего сигнала или на торможение системы при достижении x_n , то такая система оптимальная или квазиоптимальная?

6 Как рассчитывается квазиоптимальная система по допустимому отклонению?

7 Как определяется время достижения квазиоптимальной системы допустимого значения x_n ?

8 Почему квазиоптимальная система по допустимому отклонению более быстродействующая, чем оптимальная с теми же параметрами?

1.8 Метод понижения порядка характеристического уравнения

1.8.1 Общие положения

Известны различные методы понижения порядка характеристического уравнения. Метод А.А. Кардашова по частотным характеристикам, метод В.А. Климова по подобию переходного процесса, метод И.А. Огурка с помощью уравнения Вольтера второго рода, метод В.В. Калашникова по интегральной квадратичной оценке и другие. Эти методы достаточно сложные при расчёте и некоторые из них требуют приближенной аппроксимации мнимой частотной характеристики, или отображению полюсов передаточной функции, или работоспособные для систем невысокого порядка, или допускают снижение только на один или два порядка.

По нашему мнению наиболее эффективный метод понижения порядка характеристического уравнения предложен Валентином Ипатьевичем Жилиным [8], который имеет ряд преимуществ.

Во-первых, позволяет задать любой порядок понижения характеристического уравнения вплоть до первого.

Во-вторых, расчет производится по простым алгебраическим формулам методом итерации и позволяет получить точное значение коэффициентов пониженного характеристического уравнения до 1%.

В-третьих, понижение порядка происходит «избирательно». Характеристическое уравнение «освобождается» от самых больших по абсолютной величине корней, которые меньше остальных влияют на динамику процесса.

При понижении порядка характеристического уравнения любым методом встает вопрос: насколько полученное характеристическое уравнение по своим динамическим характеристикам будет адекватно заданному характеристическому уравнению? Это зависит в основном от двух факторов:

- нахождение в заданном характеристическом уравнении достаточно удаленных корней;
- нахождение в заданном характеристическом уравнении комплексного корня, при котором характеристическое уравнение, например, первого порядка

не может характеризовать колебательный процесс.

1.8.2 Предварительный анализ коэффициентов характеристического уравнения

Для предварительного анализа заданного характеристического уравнения по этим показателям предлагается использовать критерий апериодического регулирования предложенный автором [7].

Пусть дано характеристическое уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Необходимое условие апериодического регулирования

$$k_1 > k_2 > k_3 > \dots > k_{n-1},$$

где
$$k_1 = \frac{a_1}{a_0}; \quad k_2 = \frac{a_2}{a_1}; \quad \dots; \quad k_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Это необходимое условие апериодического регулирования может выполняться при наличии комплексных корней, если есть достаточно удаленный вещественный корень или комплексный корень с большим коэффициентом демпфирования.

Достаточное условие апериодического регулирования или условие отсутствия в характеристическом уравнении комплексных корней

$$m_j < m_{0j}.$$

где
$$m_1 = \frac{k_2}{k_1}; \quad m_2 = \frac{k_3}{k_2}; \quad \dots; \quad m_j = \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}};$$

m_{0j} - максимально допустимое значение коэффициента, при котором в характеристическом уравнении не будет комплексных корней.

Это значение m_{0j} определяется при условии, что коэффициенты характеристического уравнения соответствуют биному Ньютона. Значение этих коэффициентов m_{0j} показано в таблице 1.5.

Таблица 1.25 - Значение коэффициентов m_{0j}

Порядок характеристического уравнения	m_{01}	m_{02}	m_{03}	m_{04}	m_{05}
Второй	0,25				
Третий	0,333	0,333			
Четвертый	0,375	0,444	0,375		
Пятый	0,400	0,500	0,500	0,400	
Шестой	0,416	0,533	0,562	0,533	0,416

Наличие в характеристическом уравнении достаточно удаленного корня (более, чем в 10 раз, относительно других корней) определяется по коэффициенту C

$$C = \frac{m_2}{m_1} > 1,8.$$

Это неравенство работоспособно для характеристического уравнения с действительными корнями. Если есть комплексные корни, то $C > 3,6$. Тогда адекватность полученного характеристического уравнения пониженного порядка по динамическим характеристикам будет в пределах 1 %.

Если в характеристическом уравнении с вещественными корнями удаленность корня менее чем в 5 раз, относительно других корней, то $C < 1,4$. В таком случае адекватность полученного характеристического уравнения в пределах 15 %.

Последовательность предварительного анализа характеристического уравнения следующая:

1) определяется наличие в характеристическом уравнении корня с большой мнимой частью, при невыполнении необходимого условия апериодического регулирования;

2) определяется отсутствие в характеристическом уравнении комплексных корней при выполнении достаточного условия апериодического регулирования;

3) определяется в характеристическом уравнении достаточно удаленный

вещественный корень с помощью коэффициента C .

4) делается предварительный вывод об адекватности получаемого характеристического уравнения пониженного порядка по методу В.И. Жилина.

1.8.3 Понижение порядка характеристического уравнения четвертого порядка

Пусть дано характеристическое уравнение

$$p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Необходимо понизить порядка это уравнение до третьего

$$p^3 + a_2^* p^2 + a_1^* p + a_0^* = 0.$$

По методу В.И. Жилина нахождение коэффициентов с пониженным порядком производится поэтапно.

Определяем коэффициенты в первом приближении

$$a_0^* = \frac{a_0}{a_3}; \quad a_1^* = \frac{a_1}{a_3}; \quad a_2^* = \frac{a_2}{a_3}.$$

Определяем коэффициенты во втором приближении

$$a_0^{**} = \frac{1}{a_3} (a_0 - a_0^* a_2^*);$$

$$a_1^{**} = \frac{1}{a_3} (a_1 - a_0^* + a_1^* a_2^*);$$

$$a_2^{**} = \frac{1}{a_3} (a_2 - a_1^* + (a_2^*)^2).$$

Определяем коэффициенты в третьем приближении

$$a_0^{***} = \frac{1}{a_3} (a_0 - a_0^{**} a_2^{**});$$

$$a_1^{***} = \frac{1}{a_3} (a_1 - a_0^{**} + a_1^{**} a_2^{**});$$

$$a_2^{***} = \frac{1}{a_3} (a_2 - a_1^{**} + (a_2^{**})^2).$$

Расчет продолжается до тех пор, пока каждое значение $a_i^n - a_i^{n-1} \ll \Delta a_i$, рекомендуемая точность расчета $(\Delta a_i / a_i^n) \cdot 100 \% < 1 \%$.

Пример 1.20 - Дано характеристическое уравнение

$$p^4 + 25p^3 + 140p^2 + 421p + 270 = 0.$$

Представить его в виде уравнения третьего порядка.

РЕШЕНИЕ

1 Проведем предварительный анализ коэффициентов заданного характеристического уравнения

$$k_1 = \frac{25}{1} = 25; \quad k_2 = \frac{140}{25} = 5,6; \quad k_3 = \frac{421}{140} = 3,0; \quad k_4 = \frac{270}{421} = 0,64.$$

Достаточные условия аperiodического регулирования

$$m_1 = \frac{5,6}{25} = 0,224; \quad m_2 = \frac{3}{5,6} = 0,535 > \mathbf{0,444}; \quad m_3 = \frac{0,64}{3,0} = 0,213.$$

Определяем коэффициент удаленности C

$$C = \frac{0,535}{0,224} = 2,38.$$

ВЫВОД. Характеристическое уравнение имеет комплексные корни и достаточно удаленный вещественный корень. Ожидаемая ошибка аппроксимации получаемого уравнения третьего порядка более 1%.

Действительно, корни этого уравнения

$$\lambda_1 = -0,843; \quad \lambda_{2,3} = -2,744 \pm 3,10j; \quad \lambda_4 = -18,666;$$

удаленность корня $C_{уд} = \frac{-18,666}{-2,744} = 6,8.$

2 Определяем коэффициенты в первом приближении

$$a_0^* = \frac{270}{25} = 10,8; \quad a_1^* = \frac{421}{25} = 16,84; \quad a_2^* = \frac{140}{25} = 5,6.$$

3 Определяем коэффициенты во втором приближении

$$a_0^{**} = \frac{1}{25}(270 - 10,8 \cdot 5,6) = 8,38;$$

$$a_1^{**} = \frac{1}{25}(421 - 10,8 + 16,84 \cdot 5,6) = 20,18;$$

$$a_2^{**} = \frac{1}{25}(140 - 16,84 + (5,6)^2) = 6,18.$$

4 После десятого приближения получим

$$a_0^{10*} = 14,46; \quad a_1^{10*} = 21,77; \quad a_2^{10*} = 6,33.$$

Уравнение третьего порядка имеет вид

$$p^3 + 6,33p^2 + 21,77p + 14,46 = 0.$$

5 Корни полученного уравнения

$$\lambda_1 = -0,843; \quad \lambda_{2,3} = -2,744 \pm 3,10j.$$

ОТВЕТ. Остались без изменения корни, которые наиболее существенно влияют на динамические показатели системы и удален максимальный вещественный корень $\lambda_4 = -18,666$.

Пример 1.21 - Дано характеристическое уравнение

$$p^4 + 112p^3 + 500p^2 + 1393p + 1562 = 0.$$

Представить его в виде уравнения третьего порядка.

РЕШЕНИЕ

1 Проведем предварительный анализ коэффициентов заданного характеристического уравнения

$$k_1 = \frac{112}{1} = 112; \quad k_2 = \frac{500}{112} = 4,46; \quad k_3 = \frac{1393}{500} = 2,78; \quad k_4 = \frac{1562}{1393} = 1,16.$$

$$m_1 = \frac{4,46}{112} = 0,039; \quad m_2 = \frac{2,78}{4,46} = 0,623 > \mathbf{0,444};$$

$$m_3 = \frac{1,16}{2,78} = 0,417 > 0,375; \quad C = \frac{0,623}{0,039} = 15,98.$$

ВЫВОД. Характеристическое уравнение имеет существенный комплекс-

ный корень, но при этом значительное удаление вещественного корня. Ожидаемая ошибка аппроксимации полученного уравнения третьего порядка будет меньше 1 %.

Действительно, корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -1,343 \pm 2,462j; \lambda_3 = -1,848; \lambda_4 = 107,467; C_{y0} = \frac{-107,467}{-1,848} = 58,15!$$

2 Проведя первое, второе и так далее преобразования, аналогично примеру 1.20 получаем уравнение третьего порядка

$$p^3 + 4,538p^2 + 12,832p + 14,533 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = -1,343 \pm 2,462j; \lambda_3 = -1,848$.

Удален максимальный вещественный корень $\lambda_4 = 107,467$.

1.8.4 Понижение порядка характеристического уравнения третьего порядка

Дано характеристическое уравнение

$$p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Необходимо понизить порядок этого уравнение до второго.

По методу В.И. Жилина нахождение коэффициентов второго порядка производится в первом этапе

$$a_0^* = \frac{a_0}{a_2}; \quad a_1^* = \frac{a_1}{a_2}.$$

Нахождение коэффициентов во втором и в следующих этапах производится по формулам

$$a_0^{**} = \frac{1}{a_2} (a_0 + a_0^* a_1^*);$$

$$a_1^{**} = \frac{1}{a_2} (a_1 + (a_1^*)^2 - a_0^*).$$

Пример 1.22 – Дано характеристическое уравнение

$$p^3 + 7,53p^2 + 8,41p + 5,03 = 0.$$

Представить его в виде уравнения второго порядка.

РЕШЕНИЕ

1 Проведем предварительный анализ коэффициентов

$$k_1 = \frac{7,53}{1} = 7,53; \quad k_2 = \frac{8,41}{7,53} = 1,11; \quad k_3 = \frac{5,03}{8,41} = 0,598.$$

Достаточные условия апериодического регулирования

$$m_1 = \frac{1,11}{7,53} = 0,147; \quad m_2 = \frac{5,98}{1,11} = 0,53 > \mathbf{0,333}.$$

Коэффициент удаленности

$$C = \frac{0,53}{0,224} = 2,38.$$

ВЫВОД. Характеристическое уравнение имеет комплексные корни и достаточно удаленный вещественный корень. Ожидаемая ошибка аппроксимации полученного уравнения второго порядка более 1% (есть комплексный корень).

Действительно, корни заданного уравнения

$$\lambda_{1,2} = -0,601 \pm 0,658j; \quad \lambda_3 = -6,33; \quad C_{y0} = \frac{-6,33}{-0,601} = 10,5.$$

2 Определяем коэффициенты в первом приближении

$$a_0^* = \frac{5,03}{7,53} = 0,668; \quad a_1^* = \frac{8,41}{7,53} = 1,11.$$

3 Определяем коэффициенты во втором приближении

$$a_0^{**} = \frac{1}{7,53} (5,03 + 0,668 \cdot 1,11) = 0,7679;$$

$$a_1^{**} = \frac{1}{7,53} (8,41 + (1,11)^2 - 0,668) = 1,193.$$

4 После четвертого приближения получаем

$$a_0^{4*} = 0.7958; \quad a_1^{4*} = 1,204.$$

Уравнение второго порядка имеет вид

$$p^2 + 1,204p + 0,7958 = 0.$$

5 Корни полученного уравнения

$$\lambda_{1,2} = -0,602 \pm 0.659j.$$

ОТВЕТ. Фактически остались без изменения комплексные корни и удален максимальный вещественный корень $\lambda_3 = -6,33$.

Произвести понижение характеристического уравнения с третьего до первого порядка возможно, если все корни вещественные. Это осуществляется по формулам

$$a_0^* = \frac{a_0}{a_1}; \quad a_0^{**} = \frac{1}{a_1} (a_0 + a_2 (a_0^*)^2 - (a_0^*)^3).$$

Пример 1.23 – Дано характеристическое уравнение

$$p^3 + 7,143p^2 + 12,448p + 5,712 = 0.$$

Представить его в виде уравнения первого порядка.

РЕШЕНИЕ

1 Проведем предварительный анализ коэффициентов

$$k_1 = \frac{7,143}{1} = 7,143; \quad k_2 = \frac{12,448}{7,143} = 1,742; \quad k_3 = \frac{5,712}{12,448} = 0,458.$$

$$m_1 = \frac{1,742}{7,143} = 0,243; \quad m_2 = 0,262; \quad C = \frac{0,262}{0,243} = 1,07.$$

ВЫВОД. Достаточные условия апериодического регулирования выполняются. В уравнении нет комплексных корней. Это характеристическое уравнение можно понизить до 1-го порядка. Ошибка аппроксимации более 10% ($C < 1,4$).

2 Определяем коэффициент в первом приближении

$$a_0^* = \frac{5,712}{12,448} = 0,458.$$

3 Определяем коэффициент во втором и третьем приближении

$$a_0^{**} = \frac{1}{12,448} (5,712 + 7,143(0,458)^2 - (0,458)^3) = 0,572;$$

$$a_0^{***} = \frac{1}{12,448} (5,712 + 7,143(0,572)^2 - (0,572)^3) = 0,631.$$

После десятого приближения получаем

$$a_0^{10*} = 0,7418.$$

Корни уравнения третьего порядка

$$\lambda_1 = -4,798; \quad \lambda_2 = -1,605; \quad \lambda_3 = -0,7418.$$

Фактически в полученном уравнении первого порядка остался самый малый корень $\lambda_3 = -0,7418$.

Примечание - Снизить порядок характеристического уравнения третьего порядка по примеру 1.22 до первого порядка невозможно, так как там есть комплексные корни. Коэффициент a_0^* после второго приближения начинает неограниченно увеличиваться.

1.8.5 Понижение порядка характеристического уравнения пятого порядка

Дано характеристическое уравнение

$$p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Необходимо понизить это уравнение до второго порядка. По методу В.И. Жилина нахождение коэффициентов второго порядка производится в первом этапе

$$a_0^* = \frac{a_0}{a_2}; \quad a_1^* = \frac{a_1}{a_2}.$$

Во втором и следующих этапах производится по формуле

$$a_0^{**} = \frac{1}{a_2} [a_0 + a_3 a_0^* a_1^* + a_4 (a_0^*)^2 - a_4 a_0^* (a_1^*)^2 - 2(a_0^*)^2 a_1^* + a_0^* (a_1^*)^3];$$

$$a_1^{**} = \frac{1}{a_2} [a_1 - a_3 a_0^* + a_3 (a_1^*)^2 + 2a_4 a_0^* (a_1^*)^3 + (a_0^*)^2 - 3a_0^* (a_1^*)^2 + (a_1^*)^4].$$

Эти коэффициенты продолжают рассчитывать до тех пор, пока разница между полученным и предыдущим коэффициентом не станет меньше 1 %.

Пример 1.24 - Понизить порядок характеристического уравнения с 5-го до 2-го порядка

$$p^5 + 27p^4 + 190p^3 + 508p^2 + 557p + 204 = 0.$$

РЕШЕНИЕ

1 Проведем предварительный анализ коэффициентов

$$k_1 = \frac{27}{1} = 27; k_2 = \frac{190}{27} = 7,03; k_3 = \frac{508}{190} = 2,67; k_4 = \frac{557}{508} = 1,09; k_5 = \frac{204}{557} = 0,366.$$

$$m_1 = \frac{7,03}{27} = 0,26; m_2 = 0,38; m_3 = 0,408; m_4 = 0,335; C = \frac{0,38}{0,26} = 1,46.$$

Достаточные условия аperiodического регулирования выполняются. В уравнении нет комплексных корней. Можно понизить порядок характеристического уравнения вплоть до первого порядка. Ошибка аппроксимации в пределах 15 %.

$$2 \text{ Первый этап } a_0^* = \frac{204}{508} = 0,4015; a_1^* = \frac{557}{208} = 1,0964.$$

3 Второй этап

$$a_0^{**} = \frac{1}{508} [204 + 190 \cdot 0,4015 \cdot 1,0964 + 27(0,4015)^2 - 27 \cdot 0,4015(1,0964)^2 - 2(0,4015)^2 1,0964 + 0,4015(1,0964)^3] = 0,621366;$$

$$a_1^{**} = \frac{1}{508} [1,0964 - 190 \cdot 0,4015 + 190(1,0964)^2 + 2 \cdot 27 \cdot 0,4015(1,0964)^2 + (0,4015)^2 - 3 \cdot 0,4015(1,964)^2 + (1,0964)^4] = 0,850681.$$

4 После десятого этапа получаем

$$a_0^{10*} = 1,1494; \quad a_1^{10*} = 2,2803.$$

Уравнение второго порядка имеет вид

$$p^2 + 2,2803p + 1,1494 = 0.$$

5 Проверка адекватности полученного решения.

Корни заданного характеристического уравнения

$$p_1 = -17,8573; \quad p_2 = -4,7852; \quad p_3 = -2,0769; \quad p_4 = -1,5283; \quad p_5 = -0,7520.$$

Корни полученного характеристического уравнения 2-го порядка

$$p_1 = -1,5283; \quad p_5 = -0,7520.$$

ВЫВОД. В результате понижения порядка остались минимальные по абсолютной величине вещественные корни.

Примечание - Если в заданном характеристическом уравнении имеются корни с положительной вещественной частью, то в полученном характеристическом уравнении с пониженным порядком тоже будут корни с положительной вещественной частью.

Пример 1.25 – Понизить порядок характеристического уравнения с 3-го до 2-го порядка

$$p^3 + 0,8p^2 + 1,2p + 2 = 0.$$

РЕШЕНИЕ

1 Определяем коэффициенты в первом приближении

$$a_0^* = \frac{2}{0,8} = 2,5; \quad a_1^* = \frac{1,2}{0,8} = 1,5.$$

2 Определяем коэффициенты во втором и третьем приближении

$$a_0^{**} = \frac{1}{0,8} (2 + 2,5 \cdot 1,5) = 7,18;$$

$$a_1^{**} = \frac{1}{0,8} (1,2 + (1,5)^2 - 2,5) = 1,18;$$

$$a_0^{***} = \frac{1}{0,8} (2 + 7,18 \cdot 1,18) = 13,1;$$

$$a_1^{**} = \frac{1}{0,8} (1,2 + (1,18)^2 - 7,18) = -5,7.$$

ОТВЕТ. Уравнение 2-го порядка имеет отрицательный коэффициент, значит система неустойчивая. Действительно, заданное уравнение 3-го порядка соответствовало неустойчивой системе. Покажем это по критерию Гурвица

$$0,8 \cdot 1,2 - 1 \cdot 2 = -1,04.$$

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.8

1 Что значит понизить порядок характеристического уравнения?

2 Как можно определить наличие в характеристическом уравнении комплексных корней?

3 Как можно определить наличие в характеристическом уравнении достаточно удаленный вещественный корень?

4 При понижении порядка характеристического уравнения по методу В.И. Жилина какие корни остаются в полученном характеристическом уравнении?

5 Какое характеристическое уравнение можно понизить до первого порядка?

6 Если данное характеристическое уравнение имеет корни с положительной вещественной частью, то можно ли понизить порядок такого уравнения по методу В.И. Жилина?

1.9 Аналитическое конструирование регуляторов

1.9.1 Постановка задачи

Существующая традиционная схема синтеза системы управления сводится к следующему. По уравнению объекта и по заданным показателям качества регулирования (время регулирования, перерегулирования, статическая ошибка

и т.д.) выбирается регулятор. Если какие-либо из показателей качества регулирования не выполняются, то в систему управления вводится корректирующие звенья. Синтез системы сводился к выбору корректирующих звеньев. Такой метод синтеза непрерывно совершенствуется и выпускаются промышленные регуляторы с различными законами регулирования (П, ПИ, ПИД и т.д.). Разрабатывается методика синтеза таких регуляторов для нелинейных, импульсных систем, систем с запаздыванием, стохастических систем и т.д.

В 1960 г. появилась работа профессора А.М. Летова, в которой было получено аналитическое решение по оптимальной стабилизации линейных стационарных объектов при квадратичном функционале качества регулирования. В этой работе были преодолены трудности решения краевой задачи принципа максимума и метода динамического программирования. Это направление получило название *аналитическое конструирование регулятора*. Сущность этого метода.

Закон изменение управляющего воздействия задаётся аналитически в виде некоторого функционала, который нужно минимизировать подбором управляющего воздействия.

Нахождение такого управляющего воздействия осуществляется вариационными методами. Особое значение при этом принимает выбор критерия оптимальности. Общих критериев оптимальности для любого объекта быть не может. Каждый объект имеет свой критерий оптимальности, который должен полностью соответствовать управляемому технологическому процессу и в тоже время быть достаточно простым, чтобы вариационная задача нахождения управляющего воздействия не оказалась слишком сложной. Выбор критерия оптимальности является самостоятельной задачей и достаточно сложной. Сейчас наиболее широко применяются квадратичные критерии оптимальности, с которыми ознакомимся более подробно.

Интегральная квадратичная оценка (ИКО)

$$J_1 = \int_0^{\infty} V \cdot dt = \int_0^{\infty} x^2 \cdot dt \rightarrow \min.$$

Проанализируем её по уравнению Эйлера

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = 0,$$

откуда получаем $x = 0$.

Физически это соответствует, что регулируемая координата должна скачком измениться от заданного значения x_0 до $x = 0$. Такой процесс можно получить только в безынерционной системе. Если система имеет инерционность, если она способна запасаться энергией (или веществом), то получить такой скачкообразный переходной процесс невозможно.

Улучшенная интегральная квадратичная оценка (УИКО)

$$J_2 = \int_0^{\infty} V \cdot dt = \int_0^{\infty} (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dt \rightarrow \min,$$

где τ – характеризует инерционность процесса.

Составим для неё уравнение Эйлера.

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = 2x - 2\tau^2 \ddot{x} = 0.$$

Откуда получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\tau^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения

$$x(t) = C_1 e^{-t/\tau} + C_2 e^{+t/\tau}.$$

При конечных условиях $t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$, то $C_2 = 0$.

При начальных условиях $t = 0, x = x_0, C_1 = x_0$.

Окончательное решение $x(t) = x_0 \cdot e^{-t/\tau}$.

Таким образом, согласно УИКО экстремаль для J_2 будет экспонента, а любая другая кривая не обеспечивает требование $J_2 \rightarrow \min$

Обобщённая интегральная квадратичная оценка (ОИКО)

$$J_3 = \int_0^{\infty} V \cdot dt = \int_0^{\infty} (x^2 + \tau_1 \dot{x}^2 + \tau_2 \ddot{x}^2) dt \rightarrow \min.$$

Составим для неё уравнение Эйлера-Пуассона

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d}{dt^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} = 2x - 2\tau_1 \ddot{x} + 2\tau_2 \ddot{\ddot{x}} = 0.$$

Откуда получаем дифференциальное уравнение четвёртого порядка:

$$\tau_2^2 \frac{d^4 x}{dt^4} - \tau_1^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0.$$

Решая его, получаем четыре корня ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$), из которых два корня (α_3 и α_4) с положительной действительной частью, которые не соответствуют устойчивой системе. Два корня (α_1 и α_2) с отрицательной действительной частью, которые соответствуют устойчивой системе (устойчивая система – значит работоспособная). Таким образом, решение уравнение Эйлера-Пуассона для устойчивой системы имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t},$$

где
$$C_1 = \frac{x_0 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}; \quad C_2 = \frac{-x_0 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Отметим, что в зависимости от принятых значений τ_1 и τ_2 корни α_1 и α_2 могут быть комплексно сопряжённые и экстремаль может иметь колебательный характер.

Если рассматривать ОИКО, содержащую производные более высокого порядка, то ей соответствует экстремаль n -го порядка

$$x(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} + \dots + C_n e^{-\alpha_n t}.$$

В зависимости от принятых значений τ_i можно получить поле экстремалей и выбрать желаемую.

1.9.2 Определение управляющего воздействия методом аналитического конструирования регулятора

Рассмотренные критерии оптимальности не учитывают, что в реальных системах имеет место ограничение мощности управляющего сигнала. Например, в системе электропривода необходимо ограничить нагрев двигателя при интенсивном (повторно-кратковременном) режиме работы; при управлении самолётом необходимо обеспечить переход на новое направление движения с минимальным расходом топлива. Эти ограничения можно задать в интегральном виде по ограничению управляющего воздействия

$$J(u) = \int_0^{\infty} u^2 dt \leq L,$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} |u| dt \leq L.$$

Известно, что скорость и ускорение объекта управления не могут измениться мгновенно вследствие инерционности объекта. Это накладывает ограничение на скорость и ускорение управляющего воздействия. Минимизация критериев оптимальности при условии наложенных ограничений относится к решению задач на условный экстремум вариационного исчисления. В результате два интегральных условия приводятся к одному функционалу

$$J(u) = \int_0^{\infty} (|x| + C|u|) dt;$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^2 + Cu^2) dt;$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} [x^2 + C_1 u^2 + C_2 \dot{u}^2 + \dots + C_n (\ddot{u})^2] dt,$$

где C – множители Лагранжа.

Покажем, что при введении в функционал управляющего сигнала фактически приводит этот функционал к обобщённой интегральной квадратичной оценке (ОИКО). Пусть дифференциальное уравнение объекта

$$\alpha_n \frac{d^n x}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \alpha_{n-2} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + \alpha_1 x = u.$$

Это дифференциальное уравнение объекта подставим в функционал

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^2 + Cu^2) dt.$$

Получаем

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^{\infty} \left[x^2 + C(\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x)^2 \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} [x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \dots + \tau_n^2 (x^n)^2] dt + const. \end{aligned}$$

В результате ограничение на управляющий сигнал приводит к ограничению всех координат объекта управления. Такое ограничение обеспечивает плавный переход к новому установившемуся режиму. Таким образом, критерий оптимальности в виде ОИКО с помощью коэффициентов τ_i учитывает ограничение на допустимое управляющее воздействие.

Пример 1.26 – Определить управляющее воздействие методом аналитического конструирования регулятора с минимизацией критерия

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^2 + C|u|) dt.$$

Система описывается уравнением

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + u, \quad |u| \leq u_{max}.\end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ

1 Для решения этого примера используем принципа максимума Понтрягина. Введём дополнительную (третью) координату, которая характеризует критерий качества:

$$\dot{x}_0 = (x^2 + C|u|).$$

2 Пусть известным методом определены функции управления $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$.

3 Составим функцию Гамильтона

$$H = \varphi_0 \dot{x}_0 + \varphi_1 \dot{x}_1 + \varphi_2 \dot{x}_2 = -I(x^2 + C|u|) + \varphi_1 x_2 + \varphi_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + u),$$

где $\varphi_0 = -I$.

4 Выделим члены, содержащие u

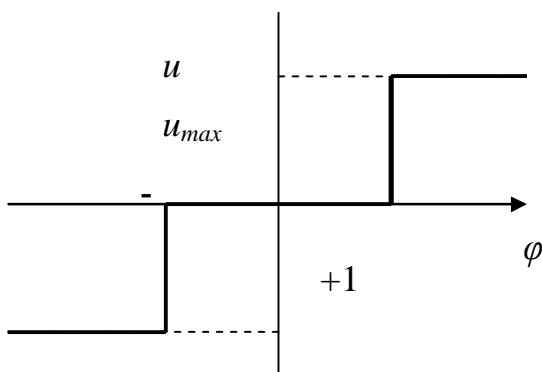
$$H^* = -C|u| + \varphi_2 u.$$

5 Функция Гамильтона будет достигать максимум одновременно с H^* .

Определим закон изменения u , доставляющей максимум H^*

$$|\varphi_2 / C| > 1, \text{ тогда } |u| = \pm u_{max};$$

$$|\varphi_2 / C| < 1, \text{ тогда } u = 0.$$



Функция H^* не может быть меньше нуля (отрицательная).

Таким образом, в зависимости от величины φ_2 / C управляющий сигнал может принимать значения 0, +1, минус 1 (рисунок 1.25). Наличие в законе управления участка $u = 0$ является следствием того, что в ОИКО наложены ограничения на величину $u < u_{max}$.

Рисунок 1.25 – Зависимость $u = f(\varphi_2)$ к примеру 20

Если использовать другой функционал $J_1 = \int_0^{\infty} x^2 dt$, то такого участка $u =$

0 не будет, тогда $H^* = 0|u| + \varphi_2 u$.

1.9.3 Определение весовых констант критерия качества по методу аналитического конструирования регулятора

По методу аналитического конструирования регулятора задаётся функционал (чаще в квадратичной форме), который нужно минимизировать подбором управляющих воздействий. Для этого согласно функционалу качества определяется дифференциальное уравнение системы и находится его решение.

Поставим обратную задачу. Задано дифференциальное уравнение системы, характеризующее данный переходной процесс. Нужно определить вид функционала в виде

$$J_3(x) = \int_0^{\infty} [x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \tau_2^2 \ddot{x}^2 + \dots + \tau_n^2 (\ddot{x})^2] dt.$$

Фактически необходимо определить его константы $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ так, чтобы заданная экстремаль наиболее соответствовала искомому. Для этого надо это дифференциальное уравнение привести к уравнению Эйлера-Пуассона и через него определить константы $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ [13].

Пример 1.27 – По заданному дифференциальному уравнению

$$\alpha_3 \frac{d^3 x}{dt^3} + \alpha_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

определить константы τ_1, τ_2, τ_3 квадратичного функционала. Коэффициенты дифференциального уравнения: $\alpha_3 = 0,2; \alpha_2 = 1,6; \alpha_1 = 2,5$.

РЕШЕНИЕ

1 Данному дифференциальному уравнению будет соответствовать характеристическое уравнение с корнями в левой полуплоскости

$$\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + 1 = 0.$$

Для характеристического уравнения

$$-\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 - \alpha_1 p + 1 = 0$$

корни будут в правой полуплоскости.

2 Общее уравнение системы с учётом всех корней

$$(\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + 1)(-\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + 1) = \\ -\alpha_3^2 p^6 + (\alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_3) p^4 - (\alpha_1^2 - 2\alpha_2) p^2 + 1 = 0.$$

Обратите внимание! При определении оптимального управления по методу Эйлера-Пуассона получаем два решения: с положительными и с отрицательными корнями. Затем решение с положительными корнями отбрасываем. Оно характеризует неустойчивый процесс. Оставляем уравнение с отрицательными корнями, которое характеризует устойчивый процесс. Полное полученное характеристическое уравнение по методу Эйлера-Пуассона имеет и положительные и отрицательные корни.

3 Записываем уравнение Эйлера-Пуассона

$$-\tau_3^2 \frac{d^6 x}{dt^6} + \tau_2^2 \frac{d^4 x}{dt^4} - \tau_1^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$-\tau_3^2 p^6 + \tau_2^2 p^4 - \tau_1^2 p^2 + 1 = 0.$$

4 Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях полного характеристического уравнения системы и характеристического уравнения Эйлера-Пуассона. В результате получаем

$$\tau_3^2 = \alpha_3^2; \quad \tau_2^2 = \alpha_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_3; \quad \tau_1^2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_2.$$

5 Подставляем численные значения коэффициентов

$$\tau_3^2 = 0,2^2 = 0,04; \quad \tau_2^2 = 1,6^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 0,2 = 1,56;$$

$$\tau_1^2 = 2,5^2 - 2 \cdot 1,6 = 3,05.$$

ОТВЕТ. Заданному дифференциальному уравнению соответствует функционал

$$J_3(x) = \int_0^{\infty} (x^2 + 3,05\dot{x}^2 + 1,56\ddot{x}^2 + 0,04\ddot{x}^2) dt.$$

Разработаны различные способы определения уравнения регулятора по

выбранному функционалу качества: методом динамического программирования, с помощью корневого годографа. С использованием функции Ляпунова и другие в зависимости от критерия оптимальности согласно аналитическому конструированию регулятора и поставленных граничных условий.

1.10 Анализ и синтез систем автоматического управления через переменные состояния системы

1.10.1 Переменные состояния системы

Передаточные функции описывают динамику стационарной системы управления, в которой параметры системы не зависят от времени. Адаптивные системы нестационарные, многие параметры системы в процессе регулирования в течение времени изменяются. Например, повышается (или понижается) температура деталей, изменяется скорость движения отдельных элементов. Передаточная функция не показывает такое изменение характеристик отдельных элементов САУ. Она фактически характеризует динамику только выходной регулируемой величины; она не показывает, что делается внутри системы, как изменилась энергетика отдельных её элементов.

Зная, как изменилось её состояние, можно предвидеть, как будет в дальнейшем изменяться выходная регулируемая величина. Такая полная информация о системе основана на понятии *переменные состояния системы* [3].

Переменные состояния системы определяются совокупностью переменных характеризующих её энергетические показатели с учётом



Рисунок 1.26 – Динамическая система

внешних воздействий, которые позволяют определить её будущие состояния и выходные регулируемые величины.

Такую математическую модель динамической системы можно представить в следующем виде (рисунок 1.26).

Рассмотрим понятие *начальные условия* через понятие переменные состояния системы на примере любой электрической цепи, содержащей емкостное и индуктивное сопротивление. Если известно входное воздействие в начальный момент времени t_0 , то для определения выходной величины необходимо знать токи, протекающие через индуктивность и напряжения на емкостях в начальный момент t_0 . Эти токи и напряжения характеризуют начальное состояние электрической цепи. В этом смысле состояние электрической цепи связывается с её памятью о накопленной предыдущей энергии, о начальных условиях движения.

Начальные условия определяются накопленной энергией в системе в момент воздействия на неё возмущающих сигналов.

Аналогично можно рассмотреть понятие *граничных условий* через понятие переменные состояния системы. В электрической цепи количество накопленной энергии зависит от емкости конденсатора и индуктивности магнитных катушек и не может быть беспредельно большой. Она ограничена энергетическими возможностями этих элементов или граничными условиями. В механических системах граничные условия могут быть заданы допустимым значением ускорения из условия механической прочности деталей. Чаще всего (это удобно при расчёте) граничные условия определяются допустимым сигналом управления или максимально допустимой нагрузкой. На основании этого можно дать такую энергетическую трактовку понятия граничных условий.

Граничные условия определяются максимальным значением энергии, которую может принять данная система.

Преимущество расчета по анализу переменных состояний системы ещё и в том, что эта модель вполне пригодна для компьютерного анализа, что значительно повышает точность расчёта.

Дифференциальные уравнения системы можно рассматривать как количество информации о состоянии элементов системы. Тогда понятие переменные состояния системы определяется следующим образом.

Переменные состояния системы в момент времени t_0 – это количество информации, которая вместе с входными переменными однозначно определяют поведение системы в будущем.

Набор переменных состояния системы обозначают $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$. Они выбираются исследователем в зависимости от поставленной задачи. В одной и той же системе можно выбрать разный набор переменных состояния и получить разные уравнения системы. Каждое уравнение правомочно, но получено относительно разных переменных состояния. Входные переменные обозначают $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$. Они характеризуют воздействие на систему. Выходные переменные $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$. Они характеризуют изменение регулируемых параметров. Общий вид такой динамической системы показан на рисунке 1.27.

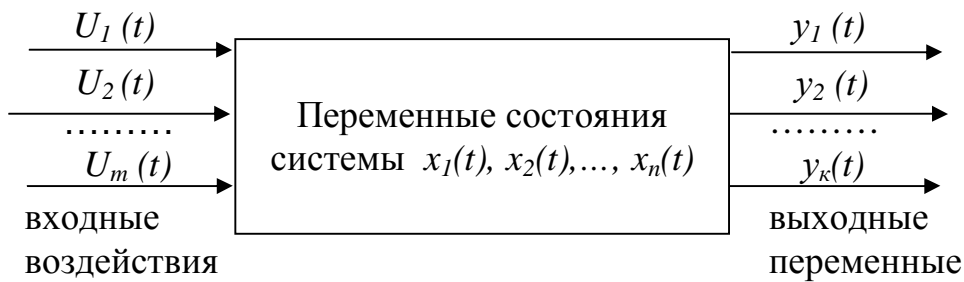


Рисунок 1.27 – Динамическая система

Простым примером переменной состояния системы может служить выключатель электролампы. У него два положения состояния: «включено» или «выключено».

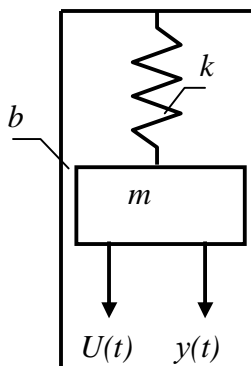


Рисунок 1.28 – Система «масса-пружина»

Если известно в каком положении находится выключатель в момент t_0 и какое приложено входное воздействие, то всегда можно определить будущее состояние этой системы.

Пример 1.28 [3] - Определить переменные состояния системы на примере механической системы "масса-пружина" (рисунок 1.28). Параметры системы

k – коэффициент упругости пружины;

b – трение о стенки цилиндра;

m – масса груза;

$U(t)$ – входное воздействие;

$y(t)$ – выходное воздействие;

Дифференциальное уравнение этой системы

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = U(t).$$

Число переменных состояний должно быть по возможности минимальным. Примем в качестве переменных состояний

$x_1(t) = y(t)$ - положение груза),

$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ - скорость движения груза.

Тогда дифференциальное уравнение системы примет вид

$$m \frac{dx_2}{dt} + bx_2 + kx_1 = U.$$

Из этого уравнения определяем $\frac{dx_2}{dt}$ и $\frac{dx_1}{dt}$

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}U; \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2. \end{cases}$$

Первое уравнение получено из дифференциального уравнения. Второе уравнение получено по условию принятых переменных состояния. Эти уравнения описывают поведение системы в терминах изменения положения груза по каждой переменной состояния.

1.10.1.1 Уравнения состояния системы в матричной форме

Пусть известны $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ – изменение переменных состояния;

U_1, U_2, \dots, U_m – входные воздействия.

Тогда состояния системы в общем случае описываются системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}U_1 + b_{12}U_2 + \dots + b_{1m}U_m, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}U_1 + b_{22}U_2 + \dots + b_{2m}U_m, \\ & \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}U_1 + b_{n2}U_2 + \dots + b_{nm}U_m. \end{aligned}$$

Эта система дифференциальных уравнений в матричной форме имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{12} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

\Downarrow
 X – вектор
состояния

\Downarrow
 $A(t)$ - матрица
состояния

\Downarrow
 X – вектор
состояния

\Downarrow
 $B(t)$ - матрица
входных
состояния

\Downarrow
 U – вектор
входных
сигналов

Полученную систему можно записать в компактном виде

$$\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t) \cdot U$$

Матрица $A(t)$ является квадратной матрицей $n \times n$, а матрица $B(t)$ имеет размерность $n \times m$ (n - состояние, m - входные воздействия). Полученные уравнения состояния в матричной форме связывает скорость изменения состояния с самим состоянием в данный момент и входными сигналами.

Система, в которой коэффициенты матрицы $A(t)$ и $B(t)$ зависят от времени t , называется *нестационарной системой*.

Система, в которой коэффициенты матрицы A и B не зависят от времени t , называется *стационарной системой*.

Поведение системы (её движение) характеризуется фазовой траекторией в фазовом пространстве.

Фазовое пространство системы n -го порядка называется n – мерное пространство, координаты которого представляют собой производные по времени переменных состояний $x_i(t)$.

Число координат пространства состояний равно порядку системы дифференциальных уравнений. Эти координаты могут быть абстрактными величинами

ми, лишенными физического смысла. Они могут и не соответствовать реальным физическим величинам исследуемого процесса и получены искусственным путём. Но это обеспечивает адекватность математической модели САУ.

Пусть в данной системе известны переменные состояния x_1, x_2, \dots, x_n , которые связаны с выходными сигналами $y_i(t)$ через коэффициенты C_i . Тогда уравнение выхода в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + \dots + C_{1n}x_n, \\
 y_2(t) &= C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + \dots + C_{2n}x_n, \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_k(t) &= C_{k1}x_1 + C_{k2}x_2 + \dots + C_{kn}x_n.
 \end{aligned}$$

Эту систему дифференциальных уравнений представим в матричной форме

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|} \hline y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline \vdots \\ \hline y_k \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|cccc|} \hline C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ \hline C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline C_{k1} & C_{k2} & \dots & C_{kn} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \vdots \\ \hline x_n \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

\Downarrow \Downarrow \Downarrow
y – вектор измерения *C(t)* – матрицы выходных состояний *x* – вектор состояний

Полученную систему можно записать в компактном виде

$$y(t) = C(t) \cdot x, \quad \text{где матрица } C(t) \text{ имеет размерность } k \times n.$$

Получение дифференциальных уравнений многомерной системы в матричной форме можно представить в следующем виде (рисунок 1.29).

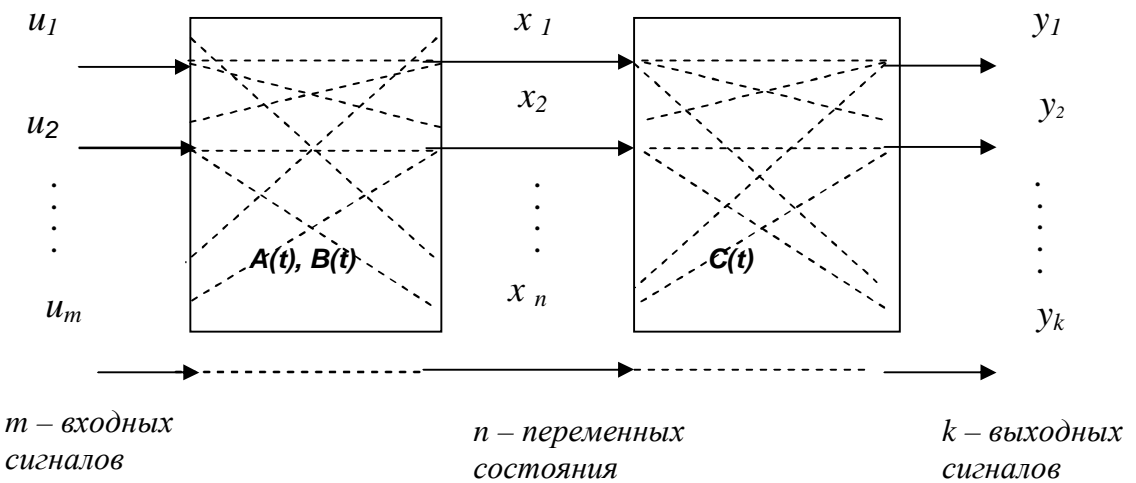


Рисунок 1.23 – Многомерная система уравнений в матричной форме

1.10.1.2 Модель системы в виде сигнального графа

Многие задачи анализа системы сводятся к рассмотрению взаимосвязи элементов и от этого существенно зависят свойства системы. Например, при анализе электрических цепей на первый план может выступать характер соединений её элементов: ёмкостей, индуктивностей, резисторов, источников питания и т.д. Так же и в системе управления динамическая характеристика может существенно зависеть от взаимосвязей между её элементами, которые характеризуются сигнальным графом.

Сигнальный граф является графическим средством описания количественных соотношений между переменными состояниями в САУ.

Сигнальный граф представляет собой диаграмму, состоящую из вершин соединенных отдельными направляющими дугами.

Вершина – означает некоторую функцию, характеризующую изменения состояние системы (функция времени или другая, соответствующая функция).

Дуга – однонаправленный отрезок, который отражает связь между вершинами. Эта связь показывается на каждой дуге в виде переменной состояния системы.

Путь – это дуги, проведенные от одной вершины к другой.

Контур – это замкнутый путь, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине, причем ни одна вершина не встречается дважды.

Для построения сигнального графа по передаточной функции необходимо числитель и знаменатель передаточной функции, которые даны в виде преобразования по Лапласу *дифференциального уравнения*, перевести в *интегральные уравнения*.

Если заданы начальные условия, то их воздействие на систему показывается через дополнительные сумматоры. Последовательность построения сигнального графа по дифференциальному уравнению:

1) выразить член со старшей производной из заданного дифференциального уравнения;

2) сумматор A располагается в начале графа. Выход из этого сумматора соответствует старшей производной данного уравнения;

3) входом на сумматор A является входной сигнал $u(t)$. Остальные входы соответствуют коэффициентам при низших производных регулируемой величины;

4) члены уравнения с низшими производных получаются как сигналы с соответствующих выходов интегратора (вершины), соединённых последовательно друг с другом;

5) начальные условия показываются как постоянные во времени воздействия, приложенные на выходах соответствующих интегрирующих звеньев.

Пример 1.29 - Построить сигнальный граф по дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + 3\dot{x} - 4x = 5u(t).$$

Начальные условия $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$

РЕШЕНИЕ

1 Выразим член со старшей производной $\ddot{x} = 5u(t) - 3\dot{x} + 4x.$

2 Покажем на графе сумматор A (рисунок 1.30).

3 Входной сигнал на сумматор A покажем как $u(t)$ умноженное на 5.

Выходной сигнал из сумматора A соответствует старшей производной $\ddot{x}.$

4 Затем ставим три интегратора последовательно, так как дифференциальное уравнение третьего порядка.

5 Согласно уравнению на сумматор A поступают входные сигналы $5u(t)$ и сигналы обратной связи соответствующие низшим производным с коэффициентами минус 3, 4, минус 2.

6 Начальные условия показаны сигналами \dot{x}_0 и x_0 , которые суммируются с соответствующими сигналами в прямой цепи \dot{x} и $x.$

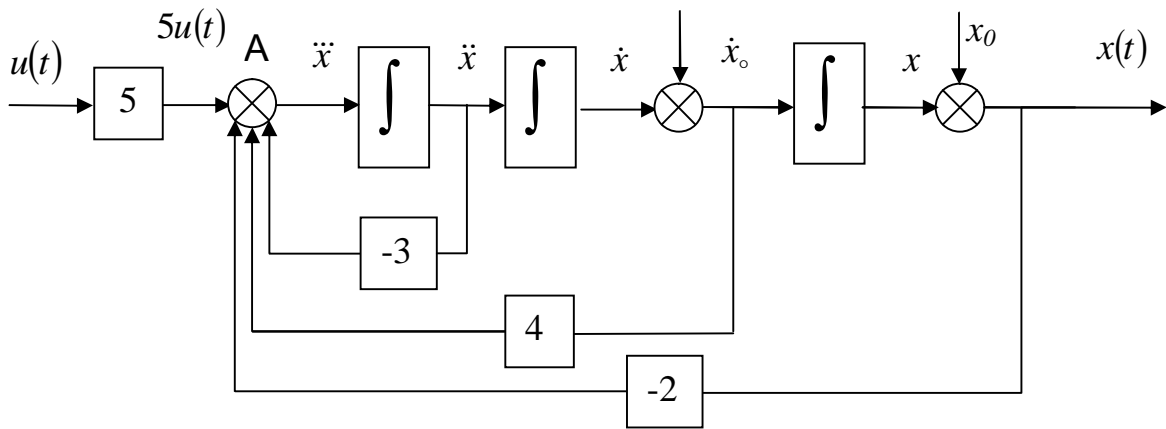


Рисунок 1.30 – Сигнальный граф для дифференциального уравнения третьего порядка к примеру 1.21

1.10.1.3 Получение матричного уравнения состояния системы по сигнальному графу

Рассмотрим первый участок сигнального графа с сумматором A (рисунок 1.30) На этот сумматор подается сигнал прямой цепи от входного воздействия $5 u(p)$ и сигналы передачи контуров с обратной связью. Эти сигналы поступают на сумматор A через ветви обратной связи. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение выхода сигнала с сумматора A , который обозначим \dot{x}_3

$$\dot{x}_3 = -3\ddot{x}_1 + 4\dot{x}_2 - 2x_3 + 5 \cdot u .$$

Рассмотрим второй участок графа (после первого интегратора). Обозначим выходной сигнал с первого интегратора x_3 . Этот сигнал одновременно является входом на второй интегратор, который обозначим \dot{x}_2 . Таким образом $\dot{x}_2 = x_3$. Обозначим выходной сигнал со второго интегратора x_2 , который является входным на третий интегратор, который обозначим \dot{x}_1 . Таким образом $\dot{x}_1 = x_2$. Выходной сигнал с третьего интегратора x_1 . Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2 ;$$

$$\dot{x}_2 = x_3 ;$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + 4x_2 - 3x_1 + 5 \cdot u .$$

В этих уравнениях значения x_1, x_2, x_3 - фазовые переменные, характеризующие состояние системы. Эти дифференциальные уравнения записываем в матричном виде, где строки соответствуют производным по фазовым переменным, а столбцы соответствующим фазовым переменным

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} u, \text{ или } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}.$$

Значение выходной координаты $y(x)$ определяется как сумма сигналов прямой цепи

$$y(x) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 + b_3 x_4.$$

Полученное уравнение записываем в матричном виде

$$y(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \text{ или } y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}.$$

Примечание – Полученное дифференциальное уравнение в переменных состояния системы не является единственно возможным. В данном примере в качестве переменных состояний взяты фазовые переменные или производные по регулируемой величине. Математически так проще получить матричную модель системы. Но для экспериментального исследования такие переменные состояния не всегда удобны. Поэтому, для исследования системы можно взять другие переменные состояния. Это зависит от конкретно поставленной задачи.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.10.1

- 1 Как определяются переменные состояния системы?
- 2 Как определяются начальные условия через переменные состояния системы?
- 3 Как определяются граничные условия через переменные состояния системы?

темы?

4 Как определяется дифференциальное уравнение через переменные состояния системы?

5 При составлении дифференциального уравнения в матричной форме что характеризует матрица A , матрица B и матрица C ?

6 Что характеризует сигнальный граф?

7 Как составляется сигнальный граф?

1.10.2 Анализ систем автоматического управления через переменные состояния

1.10.2.1 Определение управляемости системы

Для решения задач управления важно знать, обладает ли данный объект свойством управляемости в смысле возможности перевода управляемых величин из заданных начальных значений в новые конечные значения. Ранее предполагалось, что объект таким свойством обладает, иначе какой смысл ставить задачу управления? Но, возможно, что не все переменные состояния реагируют на сигнал управления. При сложных вариантах управления, или при ошибке в выборе структурной схемы управления, или в выборе параметров регулятора и объект может терять свойство управляемости.

Система является вполне управляемой, если существует такое допустимое управление, которое может перевести систему из произвольного начального состояния $x(t_0)$ в другое заданное состояние $x(t_k)$ на конечном интервале времени (t_0, t_k) .

Условие управляемости определяется по рангу матрицы управляемости P_c

$$\text{rang } P_c = [B, AB, A^2B \dots A^{n-1}B] = n,$$

где n - это ранг матрицы A .

Для одномерной системы (с одним входом и одним выходом) условие управляемости определяется по уравнению

$$\Delta P_c = [B \ AB \ A^2B \dots A^{n-1}B] \neq 0,$$

где ΔP_c - определитель матрицы P_c .

Этот определитель может быть и положительным и отрицательным, но *не должен быть равным нулю*. Для системы, изображенной в виде графа, управляемость можно определить по анализу пути от управляемого сигнала к каждой из переменных состояний. Если такие пути существуют, то система является управляемой. Напоминаем, что ранг матрицы определяется по наибольшему минору данной матрицы.

Пример 1.30 - Определить управляемость системы по заданной передаточной функции третьего порядка

$$W(p) = \frac{b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{b_0 \cdot p^{-3}}{1 + a_2 p^{-1} + a_1 p^{-2} + a_0 p^{-3}}.$$

Примечание - Передаточная функция через интеграторы записывается как p^{-n} , где n - количество интеграторов

РЕШЕНИЕ

1 Составляется граф системы третьего порядка (рисунок 1.31).

2 По графу этой системы видно, что существуют пути из $u(t)$ ко всем переменным состояниям (x_3, x_2, x_1). Следовательно, система вполне управляемая.

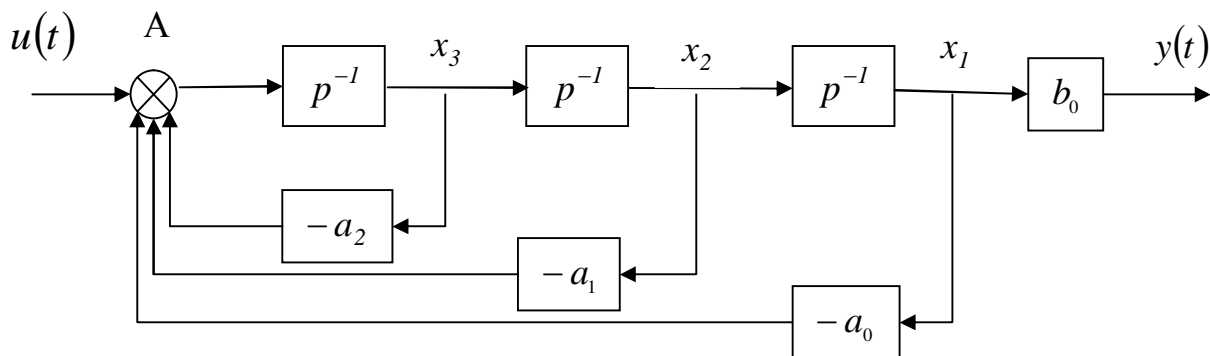


Рисунок 1.31 – Граф системы третьего порядка

3 Дополнительно проверим управляемость этой системы по матричному уравнению. Матричное уравнение этой системы имеет вид

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}}_B + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}}_C u, \quad y = \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

Определяется значение B, AB, A^2B

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad AB = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{vmatrix}$$

$$A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \\ a_0 a_2 & a_1 a_2 & (a_2^2 - a_1) \end{vmatrix}$$

$$A^2 B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \\ a_0 a_2 & a_1 a_2 & (a_2^2 - a_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -a_2 \\ a_2^2 - a_1 \end{vmatrix}$$

В результате получаем матрицу управляемости

$$P_c = \begin{vmatrix} A & AB & A^2 B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & (a_2^2 - a_1) \end{vmatrix}$$

Находим определитель матрицы ΔP_c

$$\Delta P_c = 0 \cdot 1 \cdot (a_2^2 - a_1) + 0 \cdot (-a_2) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (-a_2) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - a_2^2 \cdot 0 - (a_2^2 - a_1) \cdot 0 \cdot 0 = -1$$

ВЫВОД Определитель отличен от нуля. Система управляемая.

1.10.2.2 Определение наблюдаемости системы

Наблюдаемость системы связана со способностью оценивать переменные состояния. Считается, что система может быть наблюдаемой, если каждая переменная состояния вносит свой вклад в выходной сигнал системы. Если составлен граф системы, и от каждой переменной состояния существует путь к

выходной переменной, значит она наблюдаемая.

Система является вполне наблюдаемой, если по $y(t)$ на выходе системы можно оценить начальное значение переменных состояний $x(t_0)$ на конечном интервале времени (t_0, t_k) .

Пусть многомерная система, описывается матричным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx .$$

Условие наблюдаемости определяется по рангу матрицы наблюдаемости Q

$$\text{rang } Q = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix} = n ,$$

где n - это ранг матрицы A .

Для одномерной системы условие наблюдаемости определяется по определителю матрицы ΔQ , который не должен быть равен нулю.

$$\Delta Q = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

Примечания

- 1 Управляемость системы определяется с помощью матриц A и B .
- 2 Наблюдаемость системы определяется с помощью матриц A и C .
- 3 Система, которая описывается передаточной функцией всегда наблюдаемая и управляемая.

Пример 1.31 - Определить наблюдаемость системы по примеру 1.30.

РЕШЕНИЕ

1 Согласно графа этой системы (рисунок 1.31) от всех переменных состояний существует путь к выходному сигналу системы $y(t)$. Следовательно,

система наблюдаемая.

2 Дополнительно проверим наблюдаемость по матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & C & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Определяем значение C , CA , CA^2 . $C = [1 \ 0 \ 0]$, $CA = [0 \ 1 \ 0]$,

$$CA^2 = (1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \\ a_0 a_2 & a_1 a_2 & (a_2^2 - a_1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta Q = 1.$$

ВЫВОД. Система наблюдаемая.

1.10.2.3 Определение устойчивости системы

Рассмотрим систему в уравнениях состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx$$

Преобразуем это уравнение по Лапласу $p \cdot x(p) = A \cdot x(p) + B \cdot u(p);$

$$(\lambda \cdot I - A) x(p) = B \cdot u(p); \quad x(p) = \frac{B \cdot u(p)}{(\lambda \cdot I - A)},$$

где I - единичная матрица;

λ - корень характеристического уравнения.

Полученное значение $x(p)$ подставляется в уравнение выхода, тоже преобразованного по Лапласу

$$y(p) = C \cdot x(p); \quad y(p) = \frac{C \cdot B \cdot u(p)}{(\lambda \cdot I - A)}.$$

Определяется передаточная функция системы $W(p)$ заданная в уравнениях состояния. Напоминаем, что передаточная функция – это отношение выход-

ного сигнала $y(p)$ к входному сигналу $u(p)$ в преобразовании по Лапласу и при нулевых начальных условиях

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{C \cdot B}{(\lambda \cdot I - A)}$$

Таким образом, $(\lambda \cdot I - A)$ является характеристическим полиномом передаточной функции $W(p)$. Напоминаем, что условие устойчивости по Ляпунову заключается в отрицательности вещественной части корней характеристического уравнения $(\lambda \cdot I - A) = 0$.

Пример 1.32 - Определить устойчивость системы заданного уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 + u; \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ

1 Представим это уравнение в матричном виде

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot u.$$

2 Определяется характеристическое уравнение

$$\det(\lambda I - A) = \det \left\{ \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \det \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 = 0.$$

3 Определяются корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{+2}{2} \pm \frac{\sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = +1 \pm j2.$$

ОТВЕТ. Вещественная часть корней положительная, следовательно, система не устойчивая.

Понятие «наблюдаемость» и «управляемость» не связаны друг с другом. Они определяются с помощью разных матриц. Система может быть наблюдае-

мая, но не полностью управляемая. Обратите внимание, что совсем неуправляемых или ненаблюдаемых систем практически не бывает. Вопрос стоит в том, чтобы определить систему вполне (или полностью), по всем переменным ее состояния и наблюдаемой, и управляемой. Если по какой то переменной состояния это не соответствует, то считается, что система не полностью наблюдаемая или не вполне управляемая.

При этом не надо смешивать два понятия: управляемость и устойчивость системы. Управляемость характеризуется способностью перевода системы по всем переменным состояния в другое состояние. Устойчивость характеризуется способностью системы самостоятельно восстанавливать исходное состояние после снятия всех воздействий. Если система устойчивая, то она может неограниченное время находиться в другом состоянии, в другом режиме работы.

Система может быть управляемой, ее можно перевести в другое состояние, но она может быть неустойчивой, не способная выдержать новый режим работы. Математически эти два понятия определяются разными методами. Устойчивость определяется по Ляпунову: если корни характеристического уравнения отрицательные, то система устойчивая [4]. Управляемость определяется с помощью матриц A и B . Если в одномерной системе определитель полученной матрицы управляемости ΔP не равен нулю, значит система управляемая, но при этом она может быть неустойчивой. Система может быть наблюдаемой и определители матрицы наблюдаемости ΔQ не равны нулю, но она может быть неустойчивой. Чтобы автоматическая система надежно работала, она должна быть наблюдаемой, управляемой, устойчивой.

Пример 1.33 - Определить устойчивость, наблюдаемость и управляемость системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2; \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + 3x_2 + u; \quad y = x_2.\end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ

1 Представим эту систему в матричном виде

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

2 Определяются корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0; \quad \lambda_1 = 5; \quad \lambda_2 = -1.$$

Один корень положительный. Система неустойчивая.

3 Определяется управляемость (система одномерная)

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{AB} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}; \quad \Delta P_c = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

$\Delta P_c \neq 0$. Система вполне управляемая.

4 Определяется наблюдаемость

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{CA} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \Delta Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

$\Delta Q_c \neq 0$. Система полностью наблюдаемая.

ВЫВОД

Система не устойчивая, но полностью управляемая и наблюдаемая.

Пример 1.34 - Определить пределы изменения коэффициента k , при котором данная система устойчива.

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot u$$

РЕШЕНИЕ

В данном примере представлена система уравнений примера 1.32, в котором перед x_2 во втором уравнении поставлен коэффициент k .

1 Определяем характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & k-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(k-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda(1+k) + k + 4 = 0$$

2 Для устойчивости системы второго порядка согласно критерия Гурвица необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными

$$\begin{aligned} \text{Поэтому:} \quad & 1+k < 0, \quad k < -1, \\ & k+4 > 0, \quad k > -4, \quad -4 < k < -1. \end{aligned}$$

3 Проверим полученное решение при $k = -2$

$$\lambda^2 - \lambda(1-2) - 2 + 4 = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{1^2 - 4 \cdot 2}}{2} = -0,5 \pm j 1,12.$$

ОТВЕТ Вещественная часть корня отрицательная, следовательно, при $-4 < k < -1$ система устойчивая.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.10.2

- 1 Какая система является вполне управляемой?
- 2 Условие управляемости через матрицу управляемости.
- 3 Какая система является вполне наблюдаемой?
- 4 Условие наблюдаемости через матрицу наблюдаемости.
- 5 Как определяется как определяется характеристическое уравнение через матрицу A?
- 6 Как определяется устойчивость системы в матричной форме?
- 7 Как связаны между собой управляемость, наблюдаемость, устойчивость системы?

1.10.3 Синтез системы управления через переменные состояния

Для синтеза системы управления обычно используют три основных показателя: время переходного процесса, перерегулирование, статическая ошибка. Развитие современной науки и техники требует интенсификации производственных процессов и резкое повышение требований к качеству процесса управления. По-

этому, так сказать, «классические» показатели качества по параметрам переходного процесса уже не отвечают этим новым требованиям. Разрабатываются новые показатели, такие, как инвариантность, чувствительность, робастность системы управления.

1.10.3.1 Инвариантность и ковариантность системы управления

Инвариантность системы управления - это независимость регулируемой величины от внешних возмущающих воздействий.

Изображение выходной величины системы управления $x(p)$ при нулевых начальных условиях имеет вид

$$x(p) = W_y(p) \cdot U(p) + W_f(p) \cdot f(p),$$

где $W_y(p)$ - передаточная функция по управлению;

$U(p)$ - управляющее воздействие;

$W_f(p)$ - передаточная функция по возмущению;

$f(p)$ - возмущающее воздействие.

Основным в теории инвариантности является случай, когда о возмущениях нет никакой информации. Тогда для *абсолютной инвариантности* должно выполняться условие $W_f(p) = 0$ [3,6,15].

Для идеальной работы системы управляющее воздействие $U(p)$ должно без искажения проходить через систему. Такое свойство системы называется *абсолютная ковариантность*. Она достигается при $W_y(p) = 1$

Ковариантность системы управления – это зависимость регулируемой величины от управляющего воздействия.

Итак, система автоматического управления должна максимально гасить возмущающие воздействия или быть инвариантна. Она должна воспроизводить управляющие воздействия или быть ковариантна.

1.10.3.2 Чувствительность системы управления

Ранее были рассмотрены основные положения, обеспечивающие заданное качество процесса управления при различных *внешних возмущающих воз-*

действиях. Эта проблема решалась с помощью теории инвариантности. Качество процесса управления может быть нарушено и под действием *внутренних возмущающих воздействий.*

Чувствительность системы управления – это зависимость регулируемой величины от изменения параметров системы.

Если инвариантность (или ковариантность) характеризует реакцию системы на внешние возмущения, то чувствительность характеризует систему при малом изменении ее внутренних параметров. Для системы управления важно, чтобы малые отклонения параметров в звеньях системы не приводили к существенным изменениям в её работе. Причины внутренней неустойчивости системы управления:

- нелинейные характеристики звеньев системы;
- отсутствие повторяемости статических характеристик из-за наличия трения, петли гистерезиса, насыщения и т.д.;
- наличие резонанса в системе, который вызывает перерегулирование, то есть динамическую ошибку.

Резонанс возникает, когда частотная характеристика управляющего воздействия совпадает с собственной частотой системы. Изменения параметров системы в процессе ее работы приводят к тому, что система становится *нестационарной*. Если такое изменение параметров системы происходит значительно медленнее вынужденных процессов, то говорят о *квазистационарности системы* (квази – приближенно, не полностью). Чувствительность системы управления количественно характеризует влияние малых изменений свойств элементов на работу системы. Например, влияние износа шатунно-поршневой группы двигателя внутреннего сгорания на изменение его мощности.

1.10.3.3 Робастные системы управления

Синтез систем, обладающих заданными показателями качества регулирования в условиях отсутствия полной априорной информации об объекте управления, о возмущающих воздействиях, о возможных отклонениях параметров в

самой системы – все это является *классической проблемой теории управления*. Но даже если система рассчитана при наличии всей необходимой информации, то в процессе заводского изготовления деталей системы, в процессе сборки неизбежны отклонения от проекта. Затем при обкатке, регулировке, возникают дополнительные отклонения от проекта. Проблема заключается в том, чтобы система сохраняла заданную работоспособность при этих неконтролируемых изменениях параметров системы. Считается, что система, которая обладает достаточной надежностью при различных условиях работы является *робастной системой*.

Робастная система управления обладает требуемым качеством работы при случайным характере возмущающих воздействий.

От робастной системы требуется, чтобы она:

- обладала *инвариантностью* к внешним возмущениям;
- обладала *низкой чувствительностью* к изменению ее параметров;
- сохраняла *устойчивость* при различных режимах работы.

По сути, робастность характеризуется нечувствительностью системы к тем факторам, которые не были учтены на этапе проектирования. Например, зазоры в механических системах, изменение трения при нагреве деталей, шумы в датчиках электрических систем, нелинейность характеристик при различных режимах работы и т. д. Дополнительно к этому, робастные системы должны быть инвариантны к внешним воздействиям: к изменению нагрузки, к вибрации; должны надежно работать в различных климатических условиях, при изменении влажности и атмосферного давления, а также при других изменениях внешних условия работы. Простейшим примером такой робастной системы являются швейцарские ручные часы моего деда, которые точно ходят зимой и летом, в жару и в дождь, без какого-либо ремонта уже более 60 лет.

В принципе, робастные системы – это адаптивные, самонастраивающиеся системы. Но экономически целесообразно иметь обычные системы, которые без контура самонастройки достаточно нечувствительны к различным видам

возмущения.

Пример 1.35 - По примеру 1.34 повысить робастность системы с помощью коэффициента K . Необходимо добиться, чтобы при изменении его на $\Delta K = \pm 0,9$ система оставалась устойчивой.

Характеристическое уравнение этой системы

$$\lambda^2 - \lambda(K + 1) + K + 4 = 0.$$

РЕШЕНИЕ

Задача сводится к обеспечению робастности системы, то есть к сохранению ее работоспособности при заданных колебаниях коэффициента K путем минимизации ее чувствительности.

1 Согласно критериям апериодического регулирования, предложенного автором, максимально устойчивая система второго порядка имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \text{ корни которого } \lambda_1 = \lambda_2 = -1 (t_p = 3c)$$

2 Приравняем коэффициенты заданного характеристического уравнения и характеристического уравнения с максимальной устойчивостью. В результате получим $K + 1 = -2, K = -3; -K + 4 = 1, K = -3.$

3 При любом другом значении коэффициента K система может оказаться на границе устойчивости, а при изменении K на $\Delta K = 0,9$ стать неустойчивой. Так при $K = -1,5$ система устойчивая, но при изменении этого коэффициента на $0,9$ система становится неустойчивой. При $K = 3$ и $\Delta K = 0,9$ система остается устойчивой.

1.10.3.4 Наблюдатели системы управления

Наблюдающие устройства или наблюдатели предназначены для оценки состояния системы по результатам изменения ее промежуточных и выходных параметров работы для обеспечения заданного качества управления.

Проводить такую оценку состояния системы, и на этой основе определять

структуру и параметры наблюдателя возможно только в том случае, если система *наблюдаемая* и *управляемая*.

Синтез наблюдателя проводится в несколько этапов.

Первый этап. Определяется вид наблюдателя.

Наблюдателем полного порядка считается такой, который определяет все переменные состояния системы в любой момент времени.

Наблюдателем не полного порядка считается такой, который определяет лишь часть переменных состояний системы.

Наиболее благоприятный случай, когда имеется наблюдатель полного порядка, который способен определять и изменять любой коэффициент характеристического полинома. Более реальный случай, когда наблюдатель определяет только переменные выхода системы, число которых меньше порядка дифференциального уравнения.

Второй этап. Определяется структура наблюдателя, которая зависит от места включения наблюдателя в систему и способа его работы. Он может быть включенным до объекта управления (рисунок 1.32). Чаще всего это система с ПИД-законом регулирования. В большинстве систем невозможно измерить все переменные состояния. Тогда они могут быть оценены в результате наблюдения за выходной координатой объекта с учетом управляющих воздействий (рисунок 1.33)

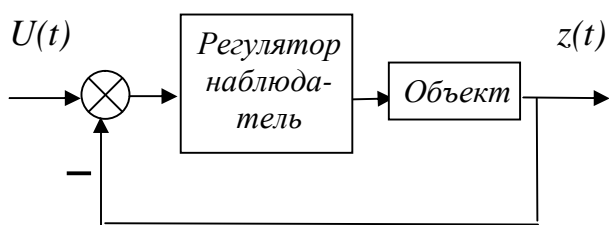


Рисунок 1.32 – Система с регулятором – наблюдателем

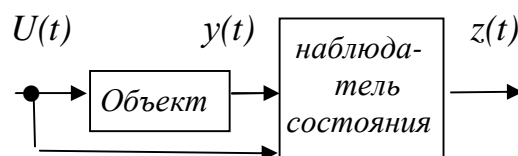


Рисунок 1.33 – Система с наблюдателем состояния объекта

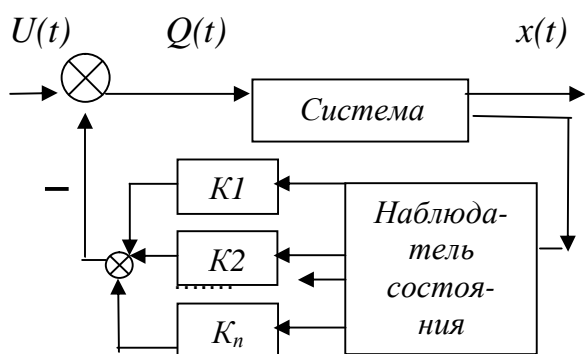


Рисунок 1.34 – Система с наблюдателем в цепи обратной связи

Чаще всего наблюдатель включается в цепь обратной связи. Такое включение дает наиболее эффективное воздействие на систему (рисунок 1.34). Уточняем, одна из главных целей наблюдателя – оценить те переменные состояния системы, которые невозможно непосредственно измерить.

Третий этап. Выбор метода расчета. Одним из наиболее разработанных методов расчета наблюдателя является метод размещения полюсов. Очевидно, что для полного решения поставленной задачи необходимо иметь наблюдатель полного порядка, что не всегда возможно. Второй, широко используемый метод расчета, когда наблюдатель является регулятором - наблюдателем в прямой цепи. Стабилизирующее воздействие на систему происходит за счет введения дополнительных нулей путем подключения форсирующих звеньев. Третий метод, когда наблюдатель является оптимальной моделью системы, и, путем сравнения действительно системы с оптимальной ее моделью, определяется регулирующее воздействие наблюдателя.

Пример 1.36 - Объект управления $W_o=1/p^2$. Провести синтез наблюдателя для обеспечения любого размещения полюсов (рисунок 1.35)

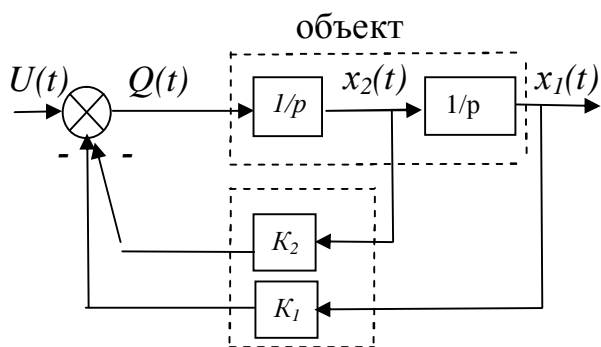


Рисунок 1.35 – Система управления к примеру 1.28

РЕШЕНИЕ

В данном примере закон управления может быть записан в виде

$$Q(t) = -K_2 x_2(t) - K_1 x_1(t),$$

где $x_2(t)$ – сигнал по скорости,

$x_1(t)$ – сигнал по положению.

Сигналы в обратной связи будут

представлять собой сумму переменных состояний объекта с весовыми коэффициентами наблюдателей K_2 и K_1 .

Определим передаточную функцию первого контура

$$W_1(p) = \frac{1/p}{1 + K_2/p} = \frac{1}{p + K_2}.$$

Это контур дополнительно охвачен вторым контуром с наблюдателем K_1

$$W_2(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot K_1/p} = \frac{\frac{1}{p + K_2}}{1 + \frac{1}{(p + K_2)} \cdot K_1/p} = \frac{\frac{1}{p + K_2}}{\frac{p^2 + K_2p + K_1}{p(p + K_2)}} = \frac{p}{p^2 + K_2p + K_1}$$

Таким образом, общее характеристическое уравнение системы

$$A(p) = p^2 + K_2p + K_1 = 0.$$

Предположим, что по условию синтеза системы необходимо, чтобы два корня характеристического уравнения были расположены в точках λ_1 и λ_2 на комплексной плоскости корней. Тогда желаемое характеристическое уравнение $A^*(p)$ будет иметь вид

$$A^*(p) = (p + \lambda_1)(p + \lambda_2) = p^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)p + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

Первый вариант решения

Из условия $A(p) = A^*(p)$ следует $K_2 = \lambda_1 + \lambda_2$; $K_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

Пусть по условию синтеза необходимо, чтобы система имела коэффициент колебательности $\xi = 1$ и время регулирования $t_p = 1c$. При $\xi = 1$ корни будут вещественные и равные. По формуле $t_p = 3/\lambda_1$, определяем $\lambda_1 = 3/1 = 3$. Тогда желаемое характеристическое уравнение

$$A(p) = (p + 4)^2 = p^2 + 8p + 16 \quad \text{или} \quad K_2 = 8; \quad K_1 = 16.$$

Второй вариант решения

Пусть по условию синтеза необходимо увеличить быстродействие систе-

мы при $\xi = 1$, тогда $t_p = 0,5c$ и по формуле $t_p = 3 / \lambda_1 = 0,5$ получаем $\lambda_1 = 6$.

Желаемое характеристическое уравнение

$$A^*(p) = (p + 6)^2 = p^2 + 12p + 36 \quad \text{или} \quad K_2 = 12; \quad K_1 = 36.$$

Может создаться мнение, что с помощью наблюдателя можно вещественную часть корня выбрать сколь угодно большую и этим добиться максимального быстродействия системы. Теоретически это верно. Но при больших сигналах велика вероятность, что *реальная система будет работать как нелинейная*. Следовательно, теоретически полученный расчет для линейной системы не всегда соответствуют реальной системе. Поэтому значение коэффициентов $K_1, K_2 \dots K_n$ имеют ограничение по max.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.10.3

- 1 Как определяется инвариантность системы управления?
- 2 Как определяется ковариантность системы управления?
- 3 Как определяется чувствительность системы управления?
- 4 Причины внутренней неустойчивости системы управления.
- 5 Как определяется робастность системы управления?
- 6 Требование к робастной системе.
- 7 Можно ли считать старинные, хорошо сохранившиеся и нормально работающие устройства робастными?
- 8 Назначение наблюдателей в системе управления.
- 9 Датчики – это наблюдатели?
- 10 Почему наблюдатели, включенные в цепь обратной связи, дают больший эффект, чем при включении в прямую цепь системы управления?
- 11 Как включаются наблюдатели?
- 12 Методы расчёта наблюдателей.
- 13 Этапы синтеза наблюдателей.
- 14 Способы включения наблюдателей в систему управления.

2 Системы экстремального управления (СЭУ)

2.1 Постановки задачи

Для многих технологических процессов характерным является наличие экстремума по регулируемому параметру. Объекты с такими характеристиками называются *экстремальными*. Примерами таких объектов могут быть двигатель внутреннего сгорания, имеющий максимальный КПД при определенном отношении нагрузки и мощности двигателя; отопительные котлы, имеющие максимальную температуру в топке при определенном соотношении подаваемого газа и воздуха; аппараты химической промышленности, имеющих оптимальный ход реакции при определенном соотношении реагируемых веществ. Анализ таких технологических процессов показывает, что экстремальную характеристику процесса можно ожидать там, где одновременно протекают процессы ведущие к противоположным результатам. Например, температура в топке определяется количеством сжигаемого топлива и подаваемого воздуха. При недостатке воздуха топливо сгорает не полностью и, следовательно, выделяется меньше тепла. При избытке воздуха топливо полностью сгорает, но часть тепла идет на нагрев избытка воздуха и уносится из топки. Очевидно, что существует такое соотношение между количеством сжигаемого топлива и количеством подаваемого воздуха, когда температура в топке будет максимальной или регулируемый параметр достигнет своего экстремального значения. Если нагрузка отопительного котла случайным образом меняется, соответственно, меняется количество подаваемого топлива. Если качество топлива (например, уголь) случайным образом меняется, если при этом температура и относительная влажность воздуха случайным образом меняется, то для разных сочетаний этих величин будет различное значение температуры в топке. Система управления должна при каждом изменении режима горения топлива обеспечить максимальную температуру в топке, то есть максимальное значение КПД отопительного котла.

Системы, осуществляющие постоянный автоматический поиск оп-

тимального управляющего воздействия при заданной структуре системы и случайным образом изменяющихся ее параметрах, называются системами экстремального управления.

Системы оптимального управления (СОУ), которые рассмотрены в первой части этого учебного пособия, и системы экстремального управления (СЭУ), которые рассматриваются в этой второй части пособия в принципе имеют одинаковую цель управления – обеспечить оптимальное управление по заданному критерию качества. В чем заключается существенное различие этих двух систем управления?

Первое отличие. Структура и параметры системы в СОУ заранее заданы и в процессе регулирования не изменяются (система с полной априорной информацией). Параметры системы в СЭУ изменяются случайным образом (система с не полной априорной информацией).

Второе отличие. Возмущающие воздействия в СОУ (например, нагрузка) заранее известны и в процессе управления не изменяются. Возмущающие воздействия в СЭУ заранее не известны и могут случайным образом изменяться.

Третье отличие. Граничные условия (начало и конец) в СОУ конкретно заданы в задачах с закрепленными концами или заданны в виде уравнений линий (или поверхностей). Граничные условия в СЭУ неизвестны, могут случайным образом изменяться и, более того, задача точного определения полученного экстремального значения регулируемого параметра – не ставится. Это значение через некоторое время при изменении условий работы системы может оказаться другим, но всегда должно быть экстремально соответствовать критерию качества регулирования.

Четвертое отличие. Полученное оптимальное управление в СОУ остается неизменным в течении всего процесса управления. Полученное экстремальное управление в СЭУ для данного момента времени может оказаться другим через сколь угодно малый промежуток времени. Более того, даже при установившемся режиме работы экстремальное управление не устанавливается на каком определенном значении, а происходит колебания этого значения, которое в

СЭУ называется *процессом рысканья*. Образно говоря, в СЭУ «покой нам только снится».

Чтобы кратко охарактеризовать отличие СОУ от СЭУ можно поставленные задачи управления сравнить с задачами, которые решают Иван - царевич и Василиса - премудрая в русских народных сказаниях. Задание Ивану - царевичу: пойти в тридесятое царство и достань молодильное яблоко. Его задача: найти оптимальный путь и оптимальное управление. Такая проблема решается в СОУ. Задача Василисе - премудрой: пойти туда, не зная куда и принести то, не зная что, но это должно быть самое-самое, не зная какое. Такая проблема решается в СЭУ.

Некоторые авторы учебников по теории автоматического управления рассматривают СЭУ как один из видов адаптивных систем автоматического управления (АСАУ). На наш взгляд адаптивные системы – это дальнейшее развитие экстремальных систем и они отличаются следующими дополнительными признаками.

Во-первых. В СЭУ при управлении процессом структуру и параметры системы не изменяют, в АСАУ адаптивное управление системы проводится путем изменения параметров и даже структуры системы.

Во-вторых. В СЭУ полученное экстремальное управление даже при постоянстве всех возмущающих воздействиях не остается постоянным, а всегда колеблется около экстремального значения (рысканье). В АСАУ полученное оптимальное управление может быть постоянным при постоянстве всех видов возмущений.

В-третьих. Основные методы экстремального управления: поиск экстремума по производной, по приращению и д.р. В АСАУ эти методы используют редко, а чаще для управления процессом используют амплитудно-частотные методы и различные методы с эталонной моделью. Поэтому в данном пособии СЭУ выделено в отдельный класс систем.

СЭУ можно классифицировать по следующим признакам.

По числу управляемых параметров:

- однопараметрические, качество работы которых зависит от одного управляющего параметра;

- многопараметрические, качество работы которых зависит от нескольких управляющих параметров.

По числу экстремумов в характеристике объекта:

- экстремальная характеристика имеет один экстремум;

- экстремальная характеристика имеет несколько экстремумов, в том числе локальных, не основных.

По степени инерционности объекта:

- объект управления малоинерционный и постоянной времени объекта можно пренебречь;

- объект управления достаточно инерционный и постоянную времени необходимо учитывать.

По формированию сигнала управления:

- пропорциональные СЭУ, в которых сигнал управления пропорционален величине рассогласования между экстремальным и действительным значением критерия оптимальности;

- релейные СЭУ, в которых сигнал управления всегда постоянен по величине и изменяется только по знаку. Такие системы более простые, надежные и более устойчивые к различным помехам. Они получили широкое применение в промышленности и поэтому будут рассмотрены в основном релейные системы.

По способу поиска экстремума:

- поиск экстремума сканированием;

- поиск экстремума по производной;

- поиск экстремума по приращению;

- поиск экстремума с принудительным сигналом.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.1

1 Какие объекты называются экстремальными? Примеры.

2 В чем физическая причина экстремальности технологического процесса?

3 Объясните экстремальность технологического процесса – сгорание угля в топке котла.

4 В чем заключается существенное различие систем оптимального управления (СОУ) и систем экстремального управления (СЭУ)? Назовите четыре отличия.

5 По каким признакам можно показать, что адаптивные системы автоматического управления (АСАУ) являются дальнейшим развитием систем экстремального управления (СЭУ)?

6 Как классифицируются СЭУ по числу управляемых параметров?

7 Как классифицируются СЭУ по числу экстремумов в характеристике объекта?

8 Как классифицируются СЭУ по степени инерционности объекта?

9 Как классифицируются СЭУ по формированию сигналов управления?

10 Как классифицируются СЭУ по способу поиска экстремума?

2.2 Методы нахождения экстремума однопараметрических СЭУ

2.2.1 СЭУ с поиском экстремума сканированием

Если о данной СЭУ есть информация только о том, что данная система имеет экстремум и нет возможности (или экономически не целесообразно) проверять состояние системы после каждого управляющего сигнала, то поиск экстремума производится сканированием или полным перебором возможных управляющих воздействий. Последовательность такого перебора может быть различная: вначале крайние значения управляющих воздействий и потом центральные или по порядку с первого до последнего значения. Принципиально не важна последовательность перебора, главное — охватить все заданные значения управляющего воздействия и только потом проанализировать и выбрать оптимальное значение. Количество точек перебора обычно не велико и определяется по формуле

$$n = \frac{A}{\varepsilon} + 1,$$

где n - количество точек перебора;

A - допустимый интервал изменения управляющего воздействия;

ε - заданная точность регулирования.

Длительность процедуры поиска в основном определяется заданной точностью регулирования ε . Например, при допустимом интервале изменения $A = 5$ единиц и заданной точности 10 % необходимо сделать замеры в $n = A/\varepsilon + 1 = 5/0.1 + 1 = 51$ точках.

В основном метод сканирования применяется при настройке одномерных многоэкстремальных систем для поиска глобального экстремума. Он позволяет определить экстремум за один цикл поиска. Для поиска экстремума в многомерных системах сканирование применяется редко. В основном для дискретных систем с небольшим числом возможных состояний.

2.2.2 СЭУ с поиском экстремума по производной (по чувствительности)

Экстремальную характеристику системы в первом приближении можно аппроксимировать параболой вида

$$y = f(x) = a x^2 + b x + c .$$

Приведенное уравнение не учитывает дрейф этой характеристики, который происходит при изменении динамических свойств системы. Сделаем допущение, что эти изменения по времени незначительны и можно считать, что коэффициенты a, b, c - постоянные величины. Наличие экстремума математически определяется равенством нулю производной экстремальной характеристики т.е. $dy/dx = 0$. Направление движения к экстремуму определяется знаком производной.

Преобразуем экстремальную характеристику

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a^2} = a(x - x_{\text{э}})^2 + y_{\text{э}},$$

где x - текущее значение управляющего сигнала;

$x_{\text{э}} = -b/2a$ - значение управляющего сигнала, при котором характеристика имеет экстремум;

$y_{\text{э}} = c - b^2 / 4a^2$ - экстремум характеристики.

Если $a < 0$, то экстремальное значение - максимум, если $a > 0$, то экстремальное значение – минимум.

Пусть $a < 0$, тогда экстремальная характеристика имеет вид, показанный на рисунке 2.1. При $x = x_1$ выражение в круглых скобках отрицательное, так как $x_1 < x_{\text{э}}$, но производная $dy/dx = -2a(x_1 - x_{\text{э}})$ будет положительная (так как $a < 0$). Режим работы системы расположен на возрастающей ветви (т. N на рисунке 2.1) и для достижения экстремума необходимо увеличивать значение управляющего сигнала x .

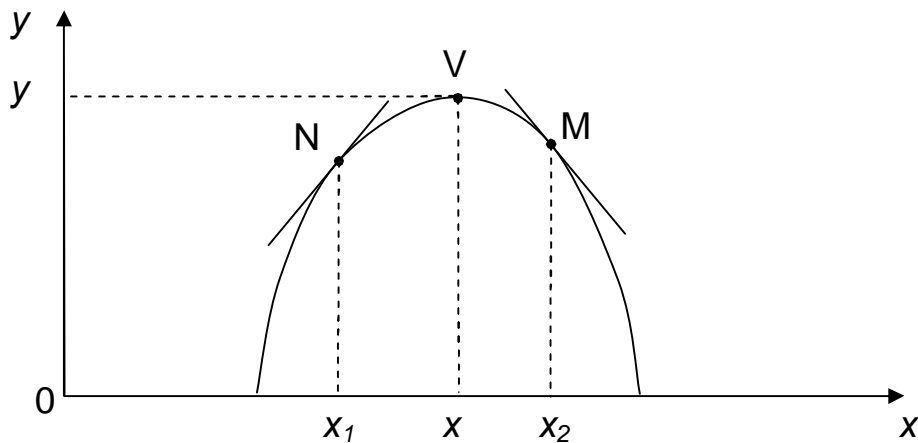


Рисунок 2.1 - Поиск экстремума по чувствительности

При $x = x_2$ выражение в круглых скобках положительное, так как $x_2 > x_{\text{э}}$, но производная $dy/dx = -2a(x_2 - x_{\text{э}})$ будет отрицательная. Режим работы системы соответствует спадающей ветви (т. M на рисунке 2.1) и для достижения экстремума необходимо уменьшить значение управляющего сигнала.

Рассмотрим схему автоматического управления СЭУ по чувствительности.

Производная по экстремальной характеристике

$$dy/dx = 2a(x - x_{\text{э}})$$

Величина производной зависит от разности между x и $x_{\text{э}}$. Для релейной СЭУ с сигнум-реле, которое выдает сигнал на исполнительное устройство того знака, с которым приходит сигнал на сигнум-реле. Величина этого сигнала всегда постоянная и равна U_0 . изменяется только знак сигнала ($+ U_0$ или $- U_0$).

Величина dy/dx определяется поэтапно.

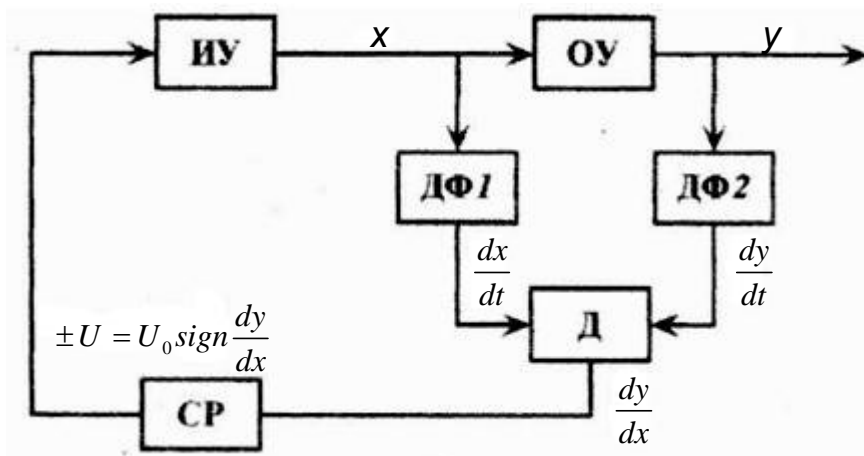
1-й этап. Определяется скорость изменения управляющего воздействия по времени dy/dt .

2-й этап. Определяется скорость изменения критерия качества по времени согласно экстремальной характеристики dy/dt .

3-й этап. Определяется производная экстремальной характеристики по управляющему воздействию.

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$$

Если при увеличении x знак производной управляющего воздействия по времени dx/dt и знак производной экстремальной характеристики по времени dy/dt - совпали, (пусть $a < 0$), то $dy/dx > 0$ и управляющее воздействие x продолжает движение в сторону увеличения x . Если знаки этих производных не совпали, то $dy/dx < 0$, то управляющее воздействие x изменяет направление движения на обратное. Схема такой СЭУ показана на рисунке 2.2.



ИУ — исполнительное устройство,

ОУ — объект управления с экстремальной характеристикой,

ДФ — дифференцирующий блок,

Д — блок деления,

СП — сигнум-реле.

Рисунок 2.2 - Схема управления СЭУ по чувствительности

Алгоритм работы. Сигнал управления x с исполнительного устройства (ИУ) подается на дифференцирующий блок (ДФ1) и определяется направление изменения этого сигнала dx/dt . Значение экстремальной характеристики y в этот момент времени подается на ДФ2 и определяется производная по времени критерия качества (dy/dt). Затем в блоке деления (Д) рассчитывается производная экстремальной характеристики по управляющему воздействию dy/dx и этот сигнал подается на сигнум-реле, где в зависимости от знака dy/dx вырабатывается сигнал управления на исполнительное устройство (ИУ). Если производная dy/dx положительна, то режим работы СЭУ находится слева от экстремума и сигнал управления $+u$. Если производная отрицательна, то режим работы справа от экстремума и сигнал управления минус u . При достижении экстремума $dy/dx = 0$, значение управляющего сигнала $u = 0$.

Существенный недостаток такой системы в том, что ее нормальная работа может быть нарушена, если на входе системы появится случайная помеха и сигнум-реле будет срабатывать на сигнал помехи. Для устранения этого недостатка в систему вводят дополнительный контур, позволяющий периодически производить самоконтроль работы СЭУ.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.2.2

1 Как преобразуется экстремальная характеристика в виде параболы через коэффициенты $x_э$ и $y_э$?

2 Что характеризуют коэффициенты $x_э$ и $y_э$?

3 Что характеризует знак коэффициента a ?

4 Как определяется значение x на возрастающей или убывающей характеристике СЭУ?

5 Как определяется значение x на возрастающей или убывающей характеристике СЭУ, при автоматическом управлении?

6 В чем недостаток такой СЭУ?

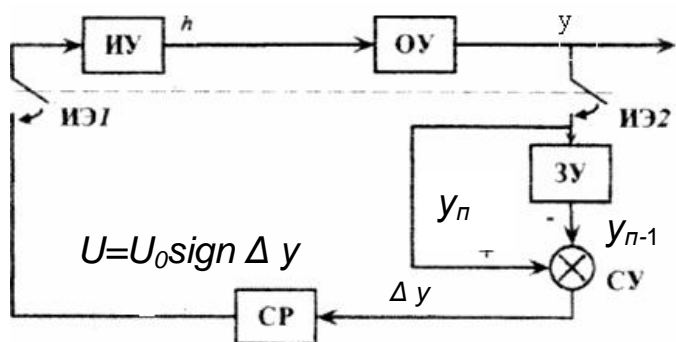
2.2.3 СЭУ с поиском экстремума по приращению (шагового типа)

Известно, что экстремумом функции $y(x)$ называется такое ее значение, когда выполняются неравенство $y(x_{\text{э}} \pm h) < y(x_{\text{э}})$ при $a < 0$, тогда $y(x_{\text{э}}) = y_{\text{max}}$.

Определим приращение экстремальной функции Δy при увеличении управляющего сигнала x на величину h :

$$\begin{aligned} y(x+h) &= a(x+h-x_{\text{э}})^2 + y_{\text{э}} = a((x-x_{\text{э}})^2 + 2h(x-x_{\text{э}}) + h^2) + y_{\text{э}} = \\ &= a(x-x_{\text{э}})^2 + y_{\text{э}} + 2ah(x-x_{\text{э}}) + ah^2. \end{aligned}$$

Откуда
$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = 2ah\left(x + \frac{h}{2} - x_{\text{э}}\right).$$



- ИУ – исполнительное устройство;
 - ОУ – объект управления;
 - ЗУ – запоминающее устройство;
 - СП – сигнум-реле, реагирует на знак поданного сигнала;
 - ИЭ – импульс элемента;
 - У – показатель качества работы системы;
 - СУ – сравнивающее устройство.
- Рисунок 2.3 - Схема управления СЭУ шагового типа

Знак приращения Δy зависит от знака коэффициента a и от текущего значения x . Так при $a < 0$, $x > x_{\text{э}}$, $h > 0$, то $\Delta y < 0$, значит функция $y(x)$ находится на спадающей ветви и необходимо сделать шаг $(-h)$. При $a < 0$, $x < x_{\text{э}}$, $h > 0$, то $\Delta y > 0$, значит необходимо повторить шаг $(+h)$.

Величина приращения Δy зависит от величины шага h и от расстояния от x до $x_{\text{э}}$. Для релейной системы абсолютная величина Δy не имеет существенного значения, т.к. сигнал с сигнум-реле всегда постоянен и отличается только знаком. Схема такого СЭУ показана на рисунке 2.3

Алгоритм работы. Импульсный элемент ИЭ2 преобразует непрерывно изменяющийся показатель качества работы системы $y(x)$ в последовательность импульсов в дискретные моменты времени, когда ИЭ2 замыкается. Значение y в этот момент одновременно поступает на ЗУ (запоминающее устройство) и на СУ (сравнивающее устройство). Одновременно на СУ поступает предыдущее значение y_{n-1} с ЗУ. Их разность $\Delta y = y_n - y_{n-1}$ подается на сигнум-реле (СР). Если $\Delta y > 0$, то сигнал с СР на исполнительное устройство ИУ определяется $u = u_0 \text{sign} \Delta y$, где $\text{sign} \Delta y$ - функция, принимающая значение +1, если $\Delta y > 0$ и значение минус 1, если $\Delta y < 0$. Если $\Delta y > 0$ значение $\text{sign} \Delta y = +1$ и $u = +u_0$. Если $\Delta y < 0$, то $\text{sign} \Delta y = -1$ и $u = -u_0$ и при этом осуществляется реверс (изменение направления движения) ИУ. Команда на новый шаг исполнительного устройства (ИУ) подается через второй импульсный элемент ИЭ1, который работает синхронно с ИЭ2. Таким образом, СЭУ двигается к своему экстремальному значению шагами и в каждом шаге снова определяется направление движения к экстремуму.

Основное преимущество СЭУ шагового типа в высокой помехоустойчивости.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.2.3

- 1 Как подается пробный сигнал по приращению (шагового типа)?
- 2 Как определяется направление изменения управляющего сигнала?
- 3 Как автоматически определяется направление изменения управляющего сигнала по схеме управления СЭУ шагового типа?
- 4 В чем основное преимущество СЭУ шагового типа?

2.2.4 СЭУ со случайным поисковым сигналом

В таких системах шаг первоначально производится в случайно выбранном направлении. Если критерий качества после этого шага улучшился, т.е. случайный выбор оказался удачным, то следующий шаг делается уже из нового состояния, но снова в случайно выбранном направлении. Если после этого шага

критерий качества ухудшился, то-есть случайный выбор оказался неудачным, то система не переходит в новое состояние, а возвращается в исходное. В дальнейшем снова и снова делаются случайные шаги и после каждого шага система или улучшает или остается с таким же критерием качества. Но ухудшения ее качества после любого случайного шага не происходит. Система проверяет результат каждого случайного шага.

На рисунке 2.4 представлена схема такого алгоритма работы системы.

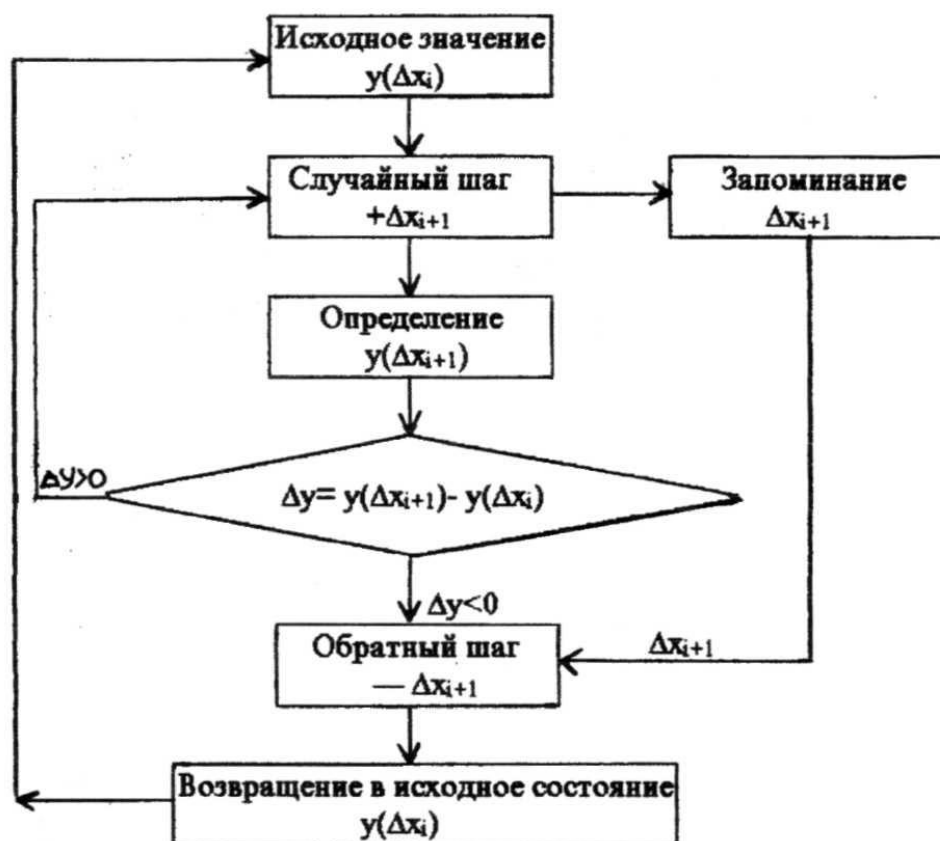


Рисунок 2.4 - Схема алгоритма СЭУ со случайным шагом и возвратом

Алгоритм работы. В начальный момент система делает шаг Δx_{i+1} в случайном направлении и запоминает его. Затем определяется новое значение критерия качества $Y(\Delta x_{i+1})$, причем в памяти находится предыдущее значение критерия качества $Y(\Delta x_i)$. В блоке сравнения эти два значения критерия качества сравниваются между собой. Если $\Delta y > 0$ (критерий качества улучшился), то в память заносится новое значение $Y(\Delta x_{i+1})$ и случайный шаг повторяется, определяется новое значение $Y(\Delta x_{i+2})$. Если $\Delta y < 0$ (критерий ка-

чества ухудшился), то производится обратный шаг ($-\Delta x_{i+1}$). Система возвращается в исходное состояние.

Такой алгоритм работы экстремальной системы эффективен даже в случае, когда сам критерий качества изменяется по случайному закону, но отсутствие информации о том, в каком направлении искать экстремальный режим работы, делает этот поиск достаточно продолжительным.

2.2.5 СЭУ с принудительным поисковым сигналом

Особенность таких систем в том, что для определения направления движения к экстремуму используется дополнительный поисковый сигнал, например, $x_n = A \sin \omega t$. Определим величину выходного сигнала после экстремальной характеристики:

$$y(x + x_n) = a(x + A \sin \omega t - x_{\text{э}})^2 + y_{\text{э}} = y_1 + y_2 + y_3 = a(x - x_{\text{э}})^2 + y_{\text{э}} + 2a(x - x_{\text{э}})A \sin \omega t + aA^2 \sin^2 \omega t,$$

где $y_1 = a(x - x_{\text{э}})^2 + y_{\text{э}}$ основной сигнал;

$$y_2 = 2a(x - x_{\text{э}})A \sin \omega t = \frac{dy}{dx} A \sin \omega t \quad \text{поисковый сигнал;}$$

$$y_3 = aA^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} aA^2 (1 - \cos 2\omega t) \quad \text{шумовой сигнал.}$$

При подаче на вход СЭУ гармонического поискового сигнала в виде синусоиды на выходе экстремальной характеристики появляется выходной поисковый сигнал такой же частоты с амплитудой пропорционально производной. Поскольку производная меняет знак при прохождении экстремума, то знак поискового сигнала меняет свою фазу и однозначно определяет направление к экстремуму характеристики. На рисунке 2.5 показаны три входных синусоидальных сигнала, каждому из которых соответствует определенный режим работы СЭУ.

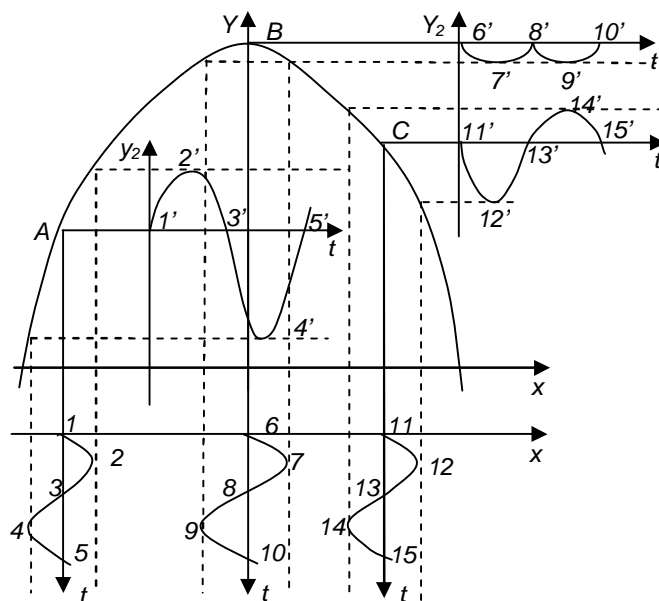


Рисунок 2.5 - Поиск экстремума с синусоидальным сигналом

В режиме А (на возрастающей ветви характеристики) при подаче синусоидального сигнала выходной поисковый сигнал не изменяет свою фазу. В режиме В (в точке экстремума) входной синусоидальный сигнал при положительной полуволне изменяет свою фазу на выходе на 180° (точки 6'-7'-8'), а при отрицательной полуволне не изменяет свою фазу (точки 8'-9'-10'). В режиме С (на спадающей ветви характеристики) входной синусоидальный сигнал полностью изменяет свою фазу на 180° (точки 11'-12'-13'-14'-15').

Вторая особенность в определении направления к экстремуму в следующем. По мере приближения к экстремуму амплитуда выходного поискового сигнала уменьшается. Так в режиме точки А амплитуда выходного сигнала 1'-2'-3' расположена ближе к экстремуму и имеет амплитуду выходного сигнала меньшего размера, чем амплитуда 3'-4'-5', расположенная дальше от экстремума. Самые маленькие амплитуды в точке экстремума (6'-7'-8'-9'-10')

Третья особенность в определении направления к экстремуму в том, что при любом режиме работы частота входного сигнала на экстремальную характеристику и частота выходного сигнала с экстремальной характеристики остается одна и та же.

Схема управления СЭУ с синусоидальным поисковым сигналом достаточ-

но сложная. Она имеет полосовой фильтр через который проходит только поисковый сигнал y_2 , а шумовой сигнал y_3 там гасится. Она имеет частотный фильтр, который пропускает только постоянную составляющую поискового сигнала и на выходе его $y^* = Aa(dy/dx)$. В зависимости от знака производной dy/dx сигнум-реле дает команду на исполнительное устройство $U = +U_0$ или $U = -U_0$.

Достоинство СЭУ с принудительным поисковым сигналом в повышении устойчивости и особенно к низкочастотным возмущениям. Кроме этого, такая система работает более устойчиво при значительном дрейфе экстремальной характеристики.

В качестве поисковых периодических колебаний используется так же прямоугольные, трапецеидальные, треугольные и другие формы сигналов.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.2.5

1 По подачи на экстремальную характеристику синусоидального сигнала как он изменяется в зависимости от попадания на возрастающую или на убывающую ветвь характеристики?

2 Как изменяется синусоидальный сигнал после попадания на максимум экстремальной характеристики?

3 В зависимости от какого показателя выходного сигнала с экстремальной характеристики сигнум-реле дает сигнал на ИУ?

4 В чем основное преимущество СЭУ с синусоидальным принудительным сигналом?

2.2.6 СЭУ с дрейфующей экстремальной характеристикой

Экстремальные характеристики большинства объектов управления с течением времени не остаются неизменными. Эти изменения экстремальной характеристики могут превысить изменение Δu в СЭУ шагового типа после подачи сигнала h . Как в таком случае правильно определить направление движения к экстремуму?

Пусть экстремальная характеристика при $a < 0$ имеет вид

$$y(t, x) = a(t)(x - x_{\text{э}}(t))^2 + y_{\text{э}}(t),$$

где $a(t) = a_1 + \Delta a(\tau)$;

$$x_{\text{э}}(t) = x_{\text{э}1} + \Delta x_{\text{э}}(\tau);$$

$$y_{\text{э}}(t) = y_{\text{э}1} + \Delta y_{\text{э}}(\tau).$$

$\Delta a(\tau)$, $\Delta x_{\text{э}}(\tau)$, $\Delta y_{\text{э}}(\tau)$ – изменение параметров экстремальной характеристики за время τ .

С учетом такого обозначения $a(t)$, $x_{\text{э}}(t)$, $y_{\text{э}}(t)$ определим приращение экстремальной функции Δy после подачи сигнала $+h$ с учетом дрейфа экстремальной характеристики за промежуток времени τ

$$\Delta y(x, h, \tau) = y(x + h, \tau) - y(x).$$

Это приращение экстремальной функции представим в виде

$$\Delta y(x, h, \tau) = \Delta y(x, h) \pm \Delta y(x, \tau),$$

где $\Delta y(x, h)$ - изменение величины $y(x)$ после подачи сигнала $+h$;

$\Delta y(x, \tau)$ - изменение величины $y(x)$ за счет дрейфа экстремальной характеристики.

Сравнивая эти два направления изменения ($\Delta y(x, h)$ и $\Delta y(x, \tau)$) можно сделать вывод, что правильное направление движения к экстремуму характеристики $y(x)$ можно точно определить, если $\Delta y(x, h) > \Delta y(x, \tau)$ или, если величина приращения от заданного шага h будет больше, чем дрейф характеристики за время τ , который может существенно изменить значение $x_{\text{э}}$.

На рисунке 2.6 показана дрейфующая экстремальная характеристика.

Рассмотрим три варианта поиска направления движения при дрейфе экстремальной характеристики.

1-й вариант. Дрейф характеристики отсутствует. Пусть исходное состояние системы соответствует точка A_1 на экстремальной характеристике и при шаге $+h$ она переместится в т. A_2 . Величина приращения $+\Delta y(x, h)$ соответствует подачи сигнала $+h$ на возрастающей ветви экстремальной характеристики. При этом правильно определяется направление к экстремуму (x надо увеличи-

вать).

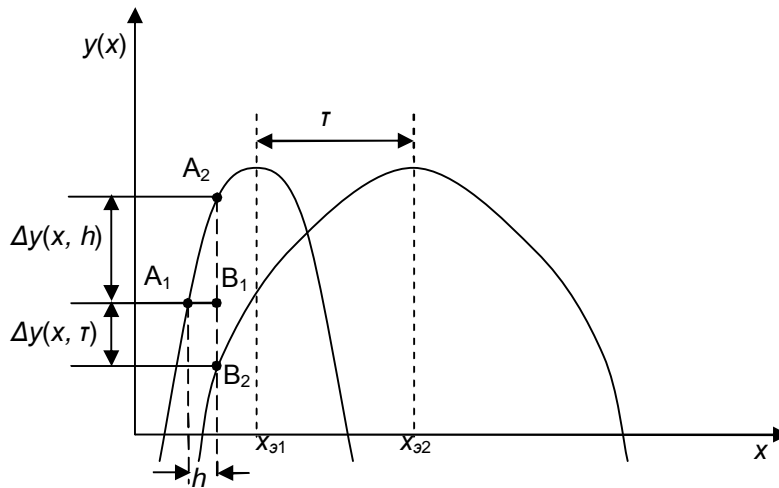


Рисунок 2.6 - Поиск экстремума при дрейфе экстремальной характеристики

2-й вариант. Величина дрейфа достаточно мала и за время τ характеристика незначительно изменится. При шаге h величина приращения Δy будет положительна $+\Delta y(x, h, \tau) = \Delta y(x, h) - \Delta y(x, \tau)$. Знак приращения $+\Delta y(x, h, \tau_1)$ однозначно определяет направление к экстремуму.

3-й вариант. Величина дрейфа значительна и характеристика $y(x, \tau)$ существенно изменяется значение $x_{э1}$ переместится в $x_{э2}$. Тогда за время τ величина приращения при шаге h будет отрицательна $-\Delta y(x, h, \tau) = \Delta y(x, h,) - \Delta y(x, \tau)$, что соответствует отрезку B_1B_2 , то есть при увеличении управляющего сигнала на величину h на возрастающей ветви значение показателя качества уменьшилось! Такое реверсирование исполнительного устройства в данном третьем варианте неверное, (в действительности x надо увеличивать).

Для правильного определения направления движения к экстремуму в этом случае делается два шага. Один с сигналом $+h$, второй сигналом с минус h и берется разность полученных приращений

$$1\text{-ый шаг: } \Delta y(x, h, \tau) = +\Delta y(x, h) - \Delta y(x, \tau),$$

$$2\text{-ой шаг: } \Delta y(x, -h, \tau) = -\Delta y(x, h) - \Delta y(x, \tau).$$

Разность

$$\Delta y(x, h, \tau) - \Delta y(x, -h, \tau) = +\Delta y(x, h) - \Delta y(x, \tau) - (-\Delta y(x, h) - \Delta y(x, \tau)) = 2\Delta y(x, h).$$

При этом величины приращения экстремальной характеристики от дрейфа за время τ взаимно уничтожаются, что позволяет правильно определить направление движения к экстремуму.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.2.6

1 Что значит: «дрейфующая» экстремальная характеристика СЭУ? Какие коэффициенты характеристики СЭУ могут изменяться?

2 Под действием каких факторов происходит дрейф характеристики СЭУ?

3 В каких случаях дрейфующая характеристика СЭУ не оказывает существенного влияния на правильность определения изменения управляющего воздействия с поиском по приращению?

4 В каких случаях дрейфующая характеристика СЭУ может дать ложный сигнал с поиском по приращению?

5 Как определяются правильное направление управляющего сигнала при существенном дрейфе характеристики СЭУ?

6 Почему СЭУ с поиском по производной более устойчива к дрейфу экстремальной характеристики, чем СЭУ с поиском по приращению?

2.2.7 СЭУ с инерционным объектом управления

Ранее были рассмотрены СЭУ с безынерционным объектом управления, в котором выходная координата экстремальной характеристики не вносит запаздывание в процесс управления системой. При инерционном объекте управления его выходная координата достигает своего нового установившегося значения после завершения переходного процесса и с увеличением инерционности объекта это запаздывание увеличивается. Поэтому при подаче на экстремальную характеристику сигнала x , его выходная координата $y(x)$, поданная затем на ОУ, будет отклоняться от зависимости $y = f(x)$ и будет иметь другую траекторию движения $Z = f(x)$ [12].

Пример 2.1 - Определить траекторию движения экстремальной системы управления с инерционным объектом.

Структурная схема СЭУ с инерционным ОУ показана на рисунке 2.7

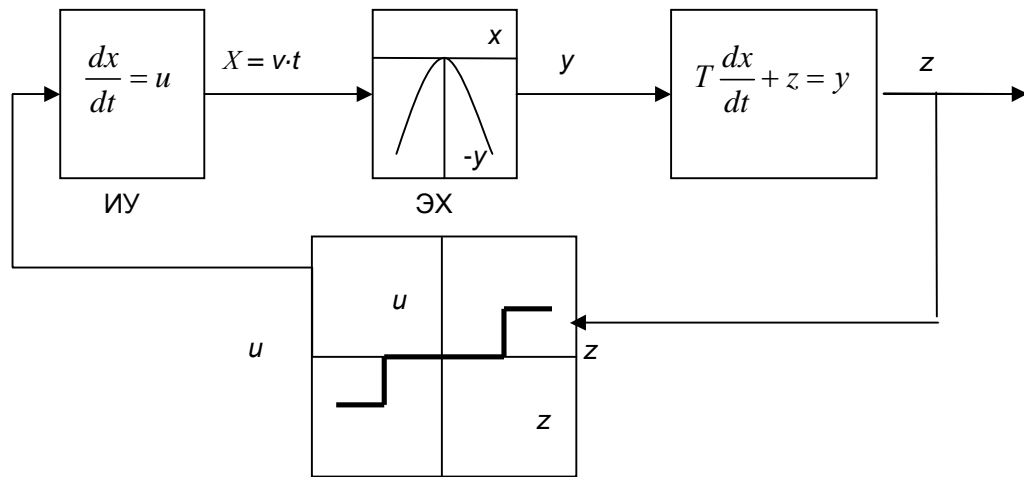


Рисунок 2.7 – Структурная схема СЭУ с инерционным объектом управления

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Объект управления (ОУ) $T \frac{dz}{dt} + z = y.$

Экстремальная характеристика (ЭХ) $y = -kx^2.$

Исполнительное устройство (ИУ) $\frac{dx}{dt} = u.$

Сигнум-реле (СР) $u = \begin{cases} +u, & \text{при } \Delta z > 0; \\ -u, & \text{при } \Delta z < 0. \end{cases}$

Зона нечувствительности Δz

Начальные условия при $t = 0$ $\begin{cases} x(0) = x_0; \\ z(0) = z_0. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

1 Значение y из уравнения ОУ подставим в уравнение ЭХ

$$\frac{dz}{dt} + \frac{z}{T} = -\frac{k}{T}x^2.$$

2 Полученное уравнение разделим на уравнение ИУ

$$\frac{dz/dt}{dx/dt} + \frac{z}{Tu} = -\frac{k}{Tu}x^2 \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} + \frac{z}{Tu} = -\frac{k}{Tu}x^2.$$

3 Решение дифференциального уравнения первой степени с правой частью имеет вид

$$z = -ku^2T^2 - k(x - uT)^2 + Ce^{\frac{-x}{Tu}}.$$

4 Определим C по начальным условиям

$$C = (z_0 + k(x_0 - uT)^2 + ku^2T^2)e^{\frac{x_0}{Tu}}.$$

5 Значение C подставим в полученное уравнение траектории движения и после преобразования получаем

$$z = -ku^2T^2 - k(x_0 - uT)^2 + (z_0 + k(x_0 - uT)^2 + ku^2T^2)e^{\frac{-(x-x_0)}{Tu}}.$$

Для анализа динамики СЭУ с инерционным объектом построим кривую по полученному уравнению при следующих параметрах системы:

- коэффициент усиления $k = 1$;
- сигнал сигнум-реле $u = \pm 1$;
- постоянная времени $T = 1$;
- зона нечувствительности СР $\Delta z = 0,2$;
- начальные условия $x_0 = -2$; $z_0 = -4$.

Подставим эти значения в уравнение траектория движения с учетом начальных условий ($x_0 = -2$, $z_0 = -4$) и сигнала СР ($u = +1$).

$$z_1 = -1 \cdot 1^2 \cdot 1^2 - (x - 1 \cdot 1)^2 + ((-4) + 1(-2) - 1 \cdot 1)^2 + 1 \cdot 1^2 \cdot 1^2 e^{\frac{x - (-2)}{1 \cdot 1}} = -(x - 1)^2 - 1 + 6e^{-(x+2)}.$$

В результате построения кривой $z_1 = f(x)$ (рисунок 2.8) получаем точку А с координатами $x = +0,91$ $z = -0,71$. Но движение не останавливается в этой точке, а за счет инерционности объекта продолжает движение и достигает точку В с координатами $x = +1,3$, $z = -0,92$. При движении от точки А к точке В значение экстремальной характеристики уменьшилось на $\Delta z = 0,21$, что больше зоны нечувствительности сигнум-реле. Оно переключается (делает реверс) и подает сигнал $u = -1$.

Для получения уравнения обратного движения $z_2 = f(x)$ при $u = -1$ подставим в уравнение движения координаты т. В, то есть новые начальные условия ($x_B = +1,3$, $z_B = -0,92$). Получаем уравнение обратного движения

$$z_2 = -(x+1)^2 - 1 + 5,39e^{x-1,3}.$$

При обратном движении получаем точку D с координатами $z_D = -0,66$, $x_D = -1,19$. Снова происходит реверс сигнум-реле и исполнительное устройство дает сигнал $u = +1$.

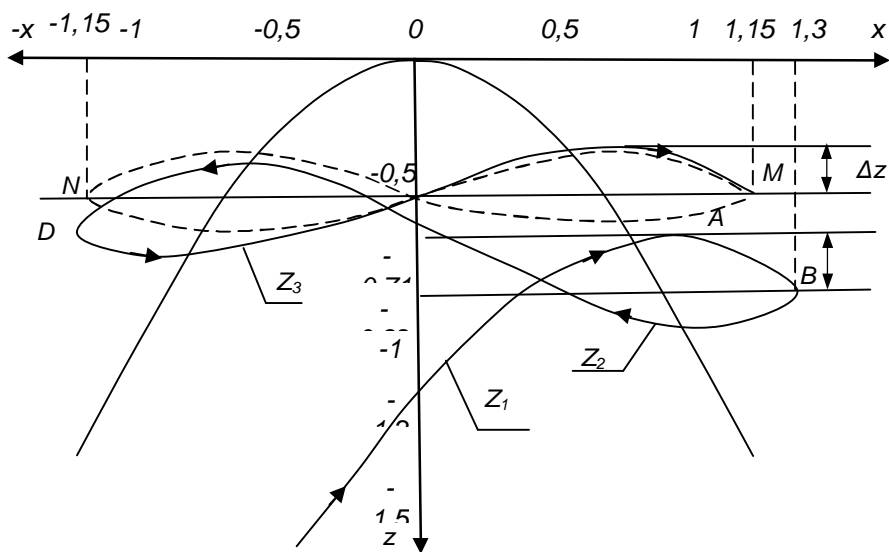


Рисунок 2.8 – Траектория движения СЭУ с инерционным объектом

Для получения уравнения третьего движения подставим в уравнение движения координаты точки D ($x_D = -1,19$, $z_D = -0,66$) и получаем

$$z_3 = -(x-1)^2 - 1 + 5,1e^{-(x+1,19)}$$

После ряда переключений получаем предельный (установившийся) цикл колебаний около экстремума, когда прямое и обратное движение происходит по одинаковым траекториям NM.

При $u = -1$ уравнение установившегося движения

$$z_n = -(x-1)^2 - 1 + 5e^{-(x+1,15)}.$$

При $u = +1$ уравнение установившегося движения

$$z_n = -(x+1)^2 - 1 + 5e^{x-1,15}.$$

Установившейся режим работы экстремальной системы характеризуется следующими показателями.

Процесс периодического нарушения и восстановления экстремума называется рысканьем.

Среднее значение отклонения экстремальной характеристики от теоретического экстремума называется потерей на рысканье.

Для безынерционного объекта потери на рысканье определяются зоной нечувствительности сигнал-реле.

Для инерциального объекта потери на рысканье дополнительно зависят от постоянной времени T .

Инерционные объекты имеют предельный (установившейся) цикл в виде двух «лепестков». Длина «лепестка» зависит от инерционности объекта. Ширина «лепестка» зависит от зоны нечувствительности сигнал-реле.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.2.7

1 Почему в СЭУ с инерционным объектом выходная величина приходит на сигнал-реле с запаздыванием? От какого параметра зависит величина запаздывания?

2 Почему до прихода СЭУ в установившийся режим работы происходит несколько переключений сигнал-реле?

3 Что называется рысканьем? Может ли этот процесс возникнуть в СЭУ если объект безынерционный?

4 От какого параметра в инерционном объекте зависит длина «лепестка»?

5 От какого параметра в инерционном объекте зависит ширина «лепестка»?

6 От какого параметра в инерционном объекте зависит период колебаний?

2.2.8 Анализ качества работы СЭУ

Требования, предъявляемые к работе СЭУ аналогичны требованиям к обычным системам автоматического управления:

- *устойчивость* – процесс поиска экстремального управления с течением времени должен сходиться к некоторой окрестности экстремума;

- *точность* – процесс поиска должен попадать в достаточно малую область экстремума;

- *быстродействие* – процесс поиска должен быть по возможности меньшим.

Это позволяет задачи исследования экстремальных систем поставить аналогично с задачами исследования автоматических систем:

- провести анализ динамических свойств СЭУ;
- определить оптимальные параметры СЭУ;
- провести синтез системы, который максимально обеспечивает заданные оптимальные параметры СЭУ.

Главное требование к СЭУ – *устойчивость ее работы*.

Объекты управления в СЭУ испытывают возмущающее воздействие, различные по амплитуде и частоте. Помехи высокой частоты могут быть ослаблены применением фильтров (например RC - цепочки) и подбором сигнум-реле с зоной нечувствительности шире, чем амплитуда этих помех, иначе возможно ложное срабатывание сигнум-реле. Помехи низкой частоты и особенно монотонные возмущения приводят к дрейфу экстремальной характеристики объекта и может возникнуть ситуация, когда управляющее воздействие ошибочно дает сигнал u , который приводит к уменьшению экстремума, вместо того, чтобы произвести реверсирование и приближаться к $x_{экстр}$. Такой процесс управления считается *потерей устойчивости СЭУ*.

Для обеспечения устойчивой работы СЭУ в условиях дрейфа экстремальной характеристики необходимо делать «обратный ход», то есть периодически подавать управляющее воздействие противоположного направления. Один из широко используемых методов, который комплексно улучшает качество работы СЭУ – это *метод коммутатора поверочных реверсов (МК)*, который застав-

ляет систему как бы «обернуться» и «просмотреть пройденный путь». Коммутатор увеличивает время поиска экстремума, но он обеспечивает устойчивую работу СЭУ. Коммутатор срабатывает через равные промежутки времени или через периоды T_k . Команда на включение коммутатора идет от сигнум-реле, и периоды его включения должны быть больше, чем время срабатывания сигнум-реле, чтобы действие на систему управляющего сигнала через сигнум-реле было чаще и интенсивнее, чем действие проверочного сигнала от коммутатора [12].

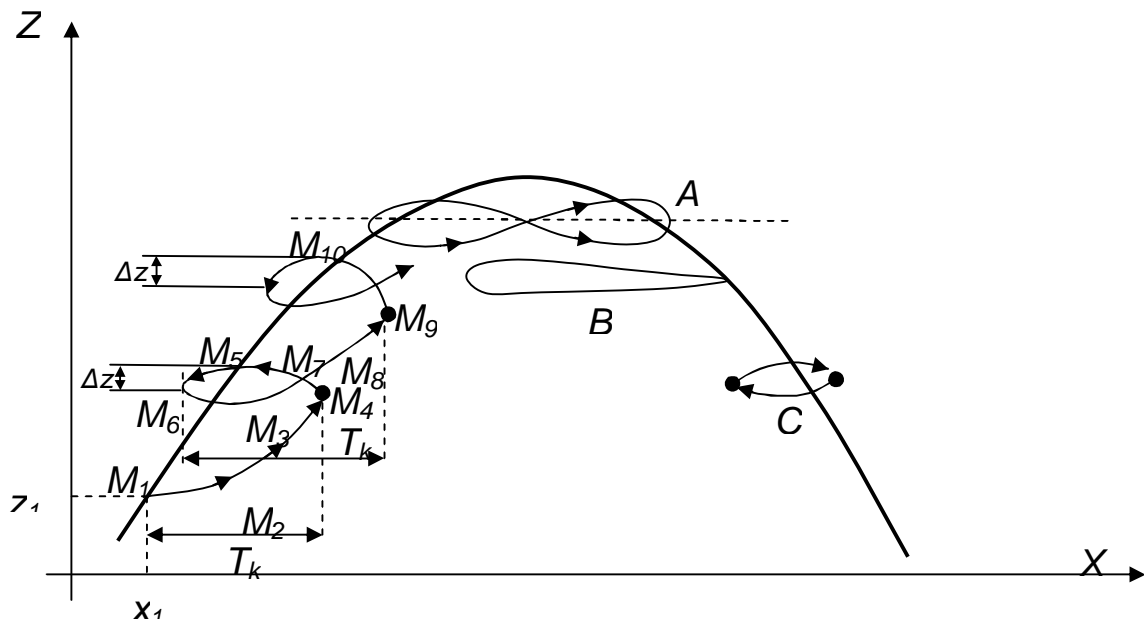


Рисунок 2.9 - Поиск экстремума с применением коммутатора

Рассмотрим, как протекает процесс поиска экстремума в СЭУ с инерционным объектом управления и с использованием коммутатора (рисунок 2.9)

Пусть начальное состояние СЭУ характеризуется точкой M_1 , и под действием управляющего сигнала изменяется по траектории $M_1M_2M_3M_4$ (отклонение за счет инерционности объекта). В точке M_4 через время T_k сработал коммутатор, произошло реверсирование и последующее движение СЭУ пошло в обратном направлении $M_4M_5M_6$. В момент, когда разница между точками M_5 и M_6 стала больше зоны нечувствительности сигнум-реле ΔZ , коммутатор срабатывает, снова происходит реверс и СЭУ продолжило движение по траектории $M_6M_7M_8M_9$. В точке M_9 (через время T_k) коммутатор снова провел реверс и

все повторяется. На рисунке 2.8 видно, что движение к экстремальному значению происходит вдоль одной ветви экстремальной характеристики. Если выбран правильно, то СЭУ достигает экстремум и устанавливаются периодические колебания типа «восьмерки» (кривая А). Если T_k мало, то установившиеся колебания может возникнуть в виде замкнутой кривой и дальше от экстремума (кривая В). Более того, при малых T_k система может и не достигнуть экстремума, и замкнутая кривая может возникнуть и «зависнуть» на возрастающей (или убывающей) ветви экстремальной характеристики (например, кривая С).

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.2.8

- 1 Основные требования к качеству работы СЭУ?
- 2 Основные задачи исследования СЭУ?
- 3 Какой процесс в СЭУ называется потерей устойчивости?
- 4 Назначение коммутатора поверочных реверсов (МК)?
- 5 Принцип работы МК?
- 6 Что может произойти в СЭУ при малых значениях T_k ?
- 7 Ускоряется или замедляется процесс выхода на максимальное значение экстремальной характеристики при использовании МК?

2.3 Методы нахождения экстремума многопараметрических СЭУ

2.3.1 Постановка задачи

Многие технологические процессы имеют не одну, а несколько управляемых параметров и, соответственно, несколько управляющих воздействий. Для анализа и синтеза таких объектов существенное значение имеет структура связей внутри такой СЭУ между управляющими воздействиями и управляемыми параметрами. Рассмотрим различные варианты таких связей.

Первый вариант. Каждое управляющее воздействие действует только на «свой» управляемый параметр. При этом никаких проблем не возникает. Поставленная задача разделяется на несколько однопараметрических задач.

Второй вариант. Каждое управляющее воздействие действует не только

на «свой» управляемый параметр, но и оказывает влияние на другие управляемые параметры. При этом в СЭУ не возникают новые замкнутые контуры и не усложняется проблема устойчивости. Такие управляющие воздействия на другие параметры можно рассматривать как добавочное возмущение и его влияние можно уменьшить методами компенсации возмущения.

Третий вариант. Каждое воздействие существенно влияет на любой управляемый параметр и при этом трудно отделить «свой» и «чужой» управляемый параметр. При этом нельзя выбирать алгоритм функционирования регулятора по каждому регулируемому параметру отдельно, его надо рассматривать в комплексе, в взаимодействии со всеми управляющими воздействиями. Задача усложняется еще тем, что в таких системах появляются взаимопересекающиеся связи от управляющих воздействий на регулируемые параметры. Такие СЭУ называются *многомерными*. Если регулирование происходит через один регулятор, то такой регулятор называется *многомерным*. В таких системах с отрицательными обратными связями могут возникать взаимопересекающиеся положительные обратные связи, что увеличивает опасность потери устойчивости, особенно при нестабильных свойствах объекта.

Для анализа наиболее широко используемых методов поиска экстремума в многомерных СЭУ примем допущения:

- СЭУ имеет два управляющих воздействия и один регулируемый параметр;
- управление происходит через двухмерный регулятор;
- в СЭУ есть обратная связь по каждому управляющему воздействию, но нет взаимопересекающихся связей;
- величиной дрейфа экстремальной характеристики можно пренебречь;
- инерционность объекта учитывается по каждому управляющему воздействию известным методом.

Все это позволяет полученные результаты распространить на многомерные СЭУ с несколькими входными воздействиями ($n = 2, 3, \dots k$) и одним регулирующим параметром.

Прежде чем начать расчет двухмерной системы, рассмотрим способ аппроксимации экстремальной двухмерной характеристики. В простейшем случае ее можно аппроксимировать параболоидом вращения, предполагая, что начало координат выбрано в вершине параболоиды и соответствует экстремуму:

$$y = k(x_1^2 + x_2^2),$$

где при $k < 0$ вершина соответствует максимуму;

при $k > 0$ вершина соответствует минимуму.

В общем случае параболоид может иметь сложную поверхность:

$$y = k(f_1(x_1) + f_2(x_2)).$$

Возьмем на поверхности параболоида линии равных значений, т.е. такие линии, на которых значение y везде одинаково. Эти линии получаются сечением параболоида плоскостями, параллельными плоскости $x_1 O x_2$ и спроектируем эти линии равного значения на плоскость $x_1 O x_2$. Пусть расстояние между этими линиями будет одинаковое Δy (это не имеет принципиального значения).

Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции нескольких независимых переменных является равенство нулю в точке экстремума частных производных:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0.$$

Введем понятие о градиенте функции, представленной в виде суммы векторов:

$$\text{grad } y = k_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial y}{\partial x_2},$$

где k_i – единичный вектор осей, по которым отсчитываются независимые переменные.

Градиентом называется вектор, направленный по нормали к поверхности линий постоянных значений (уровней) критерий качества (или функции цели) и численной равной скорости изменения функции

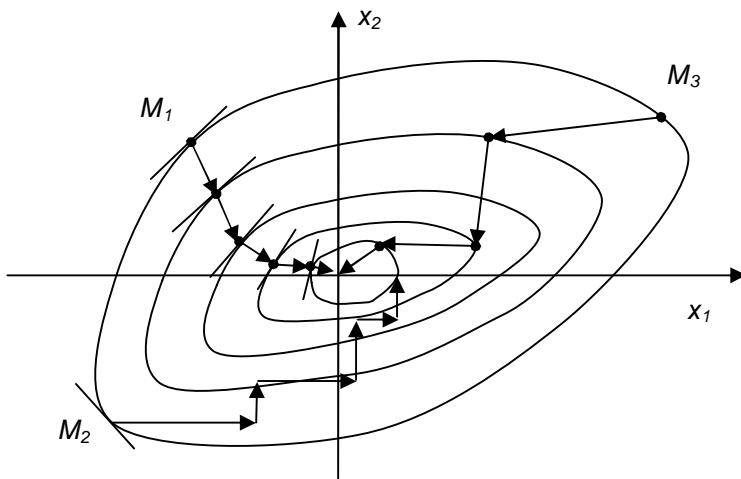
в этой точке.

В точке экстремума $grad\ y = 0$. Если в какой либо точке $grad\ y \neq 0$, то это указывает на отклонение y от экстремума. Задача поиска экстремума разбивается на два этапа:

- определить градиент или направление движения к экстремуму;
- организовать движение к экстремуму.

В зависимости от выбранного способа движения к экстремуму, для случая когда x_1 и x_2 независимые переменные, рассмотрим метод градиента, метод наискорейшего спуска и метод Гаусса-Зайделя.

2.3.2 Поиск экстремума для двухмерной системы методом градиента



M_1 – поиск экстремума методом градиента;

M_2 – поиск экстремума методом наискорейшего спуска;

M_3 – поиск экстремума методом Гаусса-Зайделя.

Рисунок 2.10 - Траектории движения к экс-

Геометрически, градиент - это перпендикуляр к касательной к линиям постоянных уровней экстремальной характеристики.

Физически, градиент- это движения безынерционного шарика по боковой поверхности ямы (где $y_{opt} \rightarrow \min$).

Метод нахождения экстремума J путём одновременного изменения координат x , таким образом, что движение осуществляется строго по градиенту, называется методом градиента.

Благодаря этому в каждый момент времени скорость движения к экстремуму пропорциональна модулю градиента, а направление движения совпадает с направлением вектора градиента. Это показано на рисунке 2.10.

Математически, градиент - это движение пропорциональное производным по всем изменяемым параметрам экстремальной характеристики.

Как правило, при поиске экстремума методом градиента производят пошаговое (дискретное) вычисление и на каждом шаге снова и снова определяют направление градиента. Конец движения к экстремуму определяется равенством нулю всех производных по всем изменяемым параметрам. Практически вектор состояния экстремальной системы будет совершать колебания около полученной экстремальной точки с переменным изменением значений x_i . Это связано с нелинейностью системы, зазорами, силами трения, зоной нечувствительности, например, сигнум-реле. Преимущество этого метода в высокой точности выхода на экстремум. Недостаток в сложности постоянного вычисления градиента движения.

Пример 2.2 [12] - Определить траекторию движения экстремальной двумерной системы с инерционным объектом с поиском экстремума по градиенту. Структурная схема показана на рисунке 2.11 (смотри также рисунок 2.6).

Исходные данные:

– уравнение объекта управления

$$T \frac{dz}{dt} + z = k_1 y;$$

– уравнение экстремальной характеристики

$$y = k_2 (x_1^2 + x_2^2);$$

– уравнение исполнительных механизмов

$$\frac{dx_1}{dt} = k_3 u, \quad \frac{dx_2}{dt} = k_4 u;$$

– критерий оптимальности

$$J = t_{pez} \rightarrow \min ;$$

– начальные условия

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}.$$

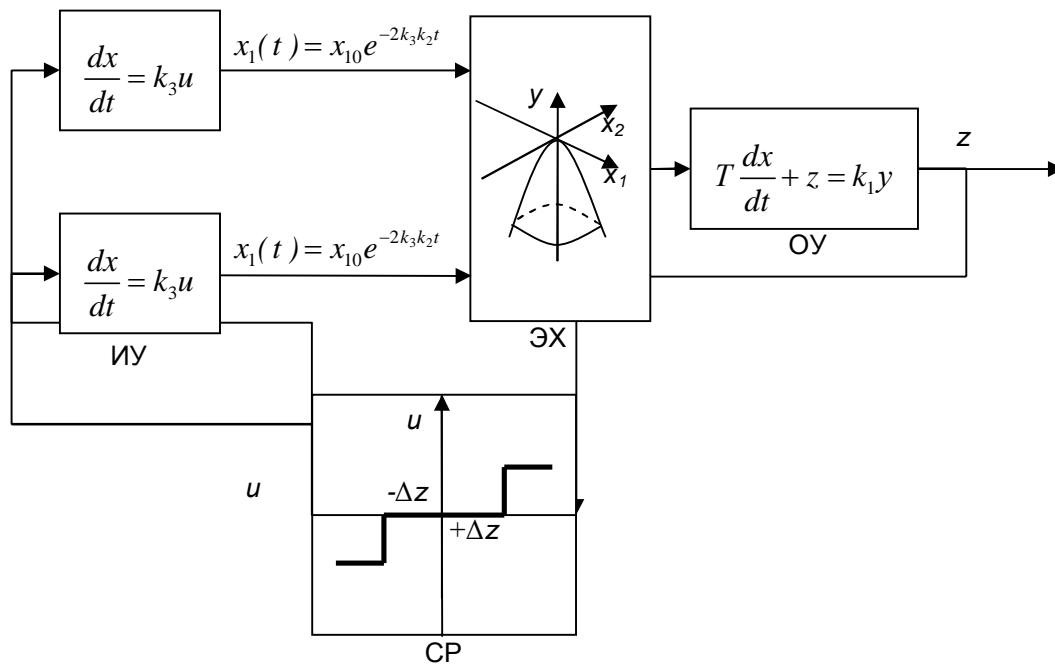


Рисунок 2.11 - Структурная схема двухмерной системы с поиском экстремума по градиенту

РЕШЕНИЕ

1 Управляющее воздействие по x_1 и x_2 должно меняться одновременно и пропорционально проекциям градиента по функции цели. Определяем градиенты согласно уравнению экстремальной характеристики по осям x_1 и x_2

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2k_2 x_1; \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2k_2 x_2. \end{cases}$$

2 Найденное значение градиентов подставим в уравнение исполнительного механизма с обратным знаком, так как движение производится в сторону уменьшения экстремальной характеристики ($k_2 > 0$). Получаем уравнение скорости движения исполнительного механизма

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2k_3 k_2 x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2k_4 k_2 x_2. \end{cases}$$

3 Определяем уравнение движения к экстремуму исполнительных меха-

низмов путём решения уравнения скорости движения исполнительного механизма

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} e^{-2k_3 k_2 t}; \\ x_2(t) = x_{20} e^{-2k_4 k_2 t}. \end{cases}$$

4 Уравнение объект управления с учетом уравнения экстремальной характеристики

$$T \frac{dz_\varphi}{dt} + z = k_1 k_2 (x_1^2 + x_2^2).$$

5 Подставляем значения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, которые характеризуют пошаговое движение по методу градиента. Получаем уравнение объекта управления с учетом пошагового движения к экстремуму

$$\frac{dz}{dt} + \frac{z}{T} = \frac{k_1 k_2}{T} (x_{10} e^{-4k_3 k_2 t} + x_{20} e^{-4k_4 k_2 t}).$$

6 Определяем изменение регулируемого параметра $z(t)$ в зависимости от времени, т. е. находим решение уравнения объекта управления (учитывая, что $k_3 = k_4$)

$$z(t) = \frac{k_1 k_2 (x_{10}^2 + x_{20}^2)}{1 - 4T k_2 k_3} e^{-4k_3 k_2 t} + C e^{-\frac{1}{T} t}.$$

7 Коэффициент C находим по начальным условия. При $t = 0$, $z_0 = k_1 (x_{10}^2 + x_{20}^2)$.

8 В полученное уравнение движения к экстремуму подставим численное значение параметров:

$$k_1 = 0,8, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = k_4 = 0,01, \quad x_{10} = 2, \quad x_{20} = 1, \quad T = 20c, \quad \Delta z = 0.4.$$

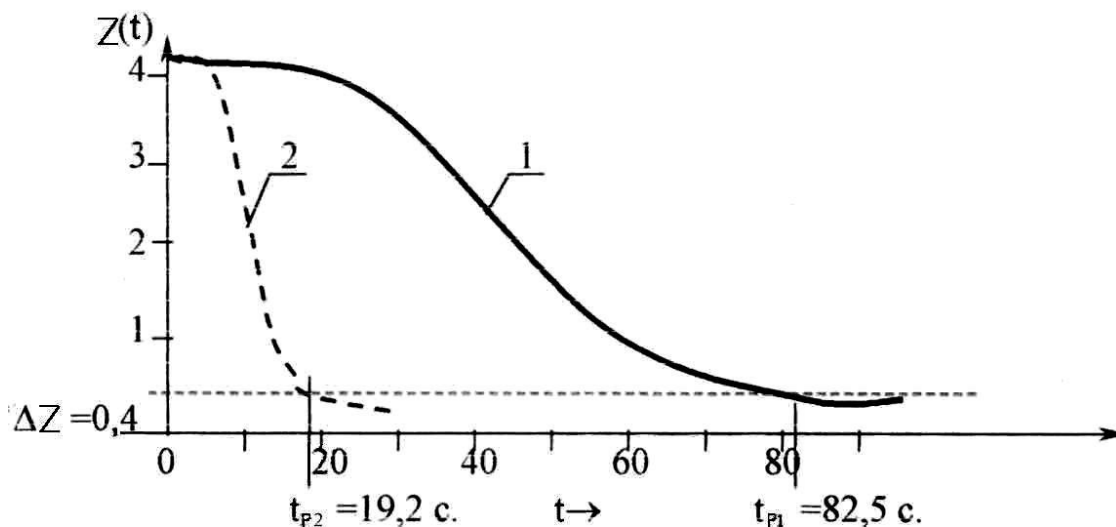
После подстановки численных значений параметров системы, имеем

$$z(t) = 13,9e^{-0,03t} - 9,9e^{-0,05t}.$$

9 Задаваясь временем t строим переходной процесс (рисунок 2.12).

Процесс выхода на экстремум закончится, тогда $z(t)$ примет значение, равное зоне нечувствительности $\Delta z = 0,4$. Из рисунок 2.12 определяем время вы-

хода в экстремум $t_p = 82,5$ с.



1 - метод градиента;

2 - методы наискорейшего спуска.

Рисунок 2.12 - Переходные процессы выхода управляемой координаты к экстремуму

2.3.3 Поиск экстремума методом наискорейшего спуска

При этом методе из начальной точки состояния системы определяется направление движения по методу градиента. Таким образом, определение направления и скорости движения из начальной точки такое же, как по рассмотренному выше методу градиента. Отличие этого метода - в коррекции по мере приближения к оптимуму. По методу наискорейшего спуска коррекции (или изменение направления движения) происходит только тогда, когда изменение z экстремальной характеристики по линиям равных значений не прекратит своё уменьшение (в случае поиска минимума) г. е. когда производная dz/dx относительно линии равных значений обратиться в ноль. Очевидно, что после этого функция цели начнёт снова увеличиваться (при поиске минимума) и необходимо изменить направление движения (рисунок 2.9).

Если движение методом наискорейшего спуска рассмотреть геометрически, то начало каждого движения начинается по градиенту и продолжается

прямолинейно до тех пор, пока это направление не станет касательной к линии равных значений, после чего направление движения изменяется.

Физически - это прямолинейное движение безынерционного шарика по боковой поверхности ямы ($z \rightarrow$ минимуму) с остановкой, когда в заданном направлении спуск закончится и тогда происходит изменение направления движения.

Математически - это движение по экстремальной характеристике до тех пор, пока величина изменения функции цели не сменит свой знак на противоположный, и только после этого вновь определяется направление градиента движения.

Практически - это движение по заданному направлению до тех пор, пока есть хоть какое-то приближение к оптимальному, и только потом направление движения меняется.

Таким образом, метод наискорейшего спуска во многих случаях позволяет значительно сократить время поиска экстремума за счёт уменьшения остановок и поправок в изменении движения. Это его основное преимущество. «Остановки» на изменения движения делаются только тогда, когда в данном направлении двигаться уже бесполезно.

Пример 2.3 [12] - Определить траекторию движения двухмерной экстремальной системы с инерционным объектом методом наискорейшего спуска. Условия примера те же, что в примере 2.2. Структурная схема принципиально такая же, что в примере 2.2.

РЕШЕНИЕ

1 Начало движения по методу наискорейшего спуска осуществляется с постоянной скоростью, равной значению градиента в начальной точке. Это определяется через проекцию градиента по функции цели по осям x_1 и x_2

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2k_2 x_1; \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2k_2 x_2. \end{cases}$$

Уравнения скорости движения исполнительного механизма в начальный момент те же, что были методом градиента.

2 Определяем значение градиента в уравнениях исполнительного механизма с обратным знаком, так как экстремум стремится к минимуму.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2k_3k_2x_{10} = -c_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2k_4k_2x_{20} = -c_2 \end{cases}$$

Примечание - В правой части этих уравнений постоянные числа (c_1 и c_2). Уравнение направления движения определённо относительно заданных конкретных начальных координат x_{10} и x_{20} и в методе наискорейшего спуска остаётся постоянным. В методе градиента уравнение направления движения изменялось с изменением x_1 и x_2 .

3 Определяем уравнение движения к экстремуму исполнительного механизма путём решения уравнения скорости движения

$$\begin{cases} dx_1 = -c_1 dt; & x_1 = \int (-c_1) dt; & x_1 = x_{10} - c_1 t; \\ dx_2 = -c_2 dt; & x_2 = \int (-c_2) dt; & x_2 = x_{20} - c_2 t, \end{cases}$$

где x_{10} и x_{20} - постоянный коэффициент при интегрировании и определяется по начальным условиям движения.

4 Уравнение объекта управления с учётом экстремальной характеристики

$$T \frac{dz}{dt} + z = k_1 k_2 (x_1^2 + x_2^2) = k_1 k_2 ((x_{10} - c_1 t)^2 + (x_{20} - c_2 t)^2)$$

5 Определяем изменение регулируемого параметра $z(t)$ в зависимости от времени, т. е. находим решение уравнения объекта управления при движении по методу наискорейшего спуска (с учётом $k_3 = k_4$)

$$z(t) = A_0 - A_1 t + A_2 t^2,$$

где $A_0 = (k_1 k_2)(x_{10}^2 + x_{20}^2)/T;$

$$A_1 = -4k_2k_3(x_{10}^2 + x_{20}^2) - 2k_2^2k_3^2(x_{10}^2 + x_{20}^2);$$

$$A_2 = 4k_1^2k_3^2(x_{10}^2 + x_{20}^2).$$

6 После подстановки тех же числовых значений, что в примере 2.2, получаем

$$z(t) = 4 - 0,31t + 0.0012t^2.$$

Кривая переходного процесса показана на рисунке 2.12 пунктирной линией. Время переходного процесса, при $\Delta z = 0,4$ равно всего 19,2 с. Оно уменьшилось почти в 9 раз по сравнению с методом градиента.

2.3.4 Поиск экстремума методом Гаусса-Зайделя

Этот метод заключается в поочерёдном изменении каждой из координаты x_i до момента обращения в нуль соответствующей частной производной, это показано на рисунке 2.9. Для этого из начальной точки M_3 вначале осуществляется движение только по одной координате до тех пор, пока не будет достигнут экстремум по этой координате. Затем начинается изменение по другой координате до достижения экстремума по этой другой координате. Потом снова начинается изменение по первой координате и так далее, пока не закончится проверка поочерёдно на экстремум этих координат, или пока дальнейшие изменения координат не дадут улучшение заданной функции цели. Особенность этого метода состоит в том, что движение из заданной точки M_3 происходит параллельно осям по заданной координате. Время движения существенно зависит от удачного выбора первого направления движения.

Преимущество этого метода в простоте реализации алгоритма управления и в конечном числе этапов движения. Недостаток в значительном увеличении времени на поиск экстремума и вероятность попадания в локальный экстремум.

Пример 2.4 [12] - Дано уравнение системы

$$y = (x_1 + 3x_2)^2 + (x_2 + 4)^2.$$

Начальные условия $x_{10} = 3, x_{20} = 3.$

Функция цели $y(x_1, x_2) \rightarrow \min$.

РЕШЕНИЕ

Изменение параметров начинаем с x_2 , приняв $x_1 = 3$ - постоянная величина.

1 этап

$$x_2 = 2 \quad y = (3 + 3 \cdot 2)^2 + (2 + 4)^2 = 117.$$

$$x_2 = 1 \quad y = (3 + 3)^2 + (1 + 4)^2 = 61.$$

$$x_2 = 0 \quad y = (3 + 0)^2 + (0 + 4)^2 = 25.$$

$$x_2 = -1 \quad y = (3 - 3)^2 + (-1 + 4)^2 = 9 \rightarrow \min.$$

$$x_2 = -2 \quad y = (3 - 6)^2 + (-2 + 4)^2 = 13.$$

2 этап. Принимает $x_2 = -1$, а значение x_1 изменяется

$$x_1 = 3 \quad y = (3 - 3)^2 + (-1 + 4)^2 = 9 \rightarrow \min.$$

$$x_1 = 2 \quad y = (2 - 3)^2 + (-1 + 4)^2 = 10.$$

$$x_1 = 1 \quad y = (1 - 3)^2 + (-1 + 4)^2 = 13.$$

ОТВЕТ y_{\min} при $x_1 = 3, x_2 = -1$.

Примечание—Если выбрать начало движения с координатами x_1 , то потребуется девять этапов движения, по сравнению с двумя этапами при начале движения с x_2 . Кроме этого, при движении с x_1 можно попасть на локальный (местный) экстремум при $x_1 = x_2 = 0, y = 16$, хотя глобальный (общий) экстремум этой функции при $x_1 = 3, x_2 = -1$ и $y_{\min} = 9$. Это ещё раз показывает недостаток данного метода поиска экстремума.

2.3.5 Оптимизация методов поиска экстремума

Одно из требований, предъявляемых к СЭУ, является быстрое действие системы, которое определяется двумя факторами: инерционностью части системы до экстремального объекта, которая замедляет движение к экстремуму; инерционность другой части системы после экстремального объекта, которая увеличивает время на определение положения экстремума. Уменьшить время движения к экстремуму можно, если на исполнительное устройство сразу приходит сигнал пропорциональный отклонению от экстремума. Уменьшить инерционность

части системы после экстремального объекта можно, если объект охватить корректирующим звеном с обратной передаточной функцией.

Оптимизация метода поиска экстремума производят так. Совершается несколько пробных случайных шагов из исходной точки. Для каждого случайного шага определить приращение Δu . Затем определяется направление наиболее интенсивного изменения u . В этом направлении делается не один шаг, а несколько шагов подряд, пока приращение Δu не изменит свой знак. Такой метод называется *метод статистического наискорейшего спуска*. Этот метод наиболее эффективно используется при большом числе регулируемых параметров. Так, если число регулируемых параметров больше трёх, то этот метод более эффективен и проще реализуется, чем метод градиента. В системах распознавания образа этот метод в силу случайности выбора очередного состояния не попадает в ловушку, типа «седло», что может случиться с методом градиента или методом Гаусса-Зайделя.

Выбор метода поиска экстремума зависит от конкретных условий задачи. Часто оптимальным решением оказывается комбинация нескольких методов. Так, например, вдали от экстремума используют метод наискорейшего спуска, а при попадании в район экстремума, переходят к методу градиента. Или, когда система имеет несколько локальных экстремумов, то, определив один экстремум, затем делается случайный шаг и ищется второй экстремум. Снова случайный шаг и ищется третий экстремум и т. д. Число таких циклов по поиску экстремумов выбирают заранее исходя из априорных данных о числе экстремумов. Затем сравнивается значение каждого экстремума и определяется глобальный экстремум, а локальные отбрасываются.

Все рассмотренные методы поиска экстремума основаны на предположении, что находимые текущие значения u полностью зависят только от координат x_i , а время переходного процесса в системе значительно меньше, чем время на изменение координаты x_i . Однако во многих экстремальных системах случайное изменение её параметров (например, в дрейфующей СЭУ) бывает соизмеримо со временем её переходного процесса и даже изменяется ещё быст-

рее. В этих случаях рассмотренные выше методы поиска экстремума не применимы.

Рассмотрим систему экстремального управления паровой котел - турбина – генератор. Необходимо с помощью регуляторов обеспечить:

- уровень воды в барабане;
- регулирование давления пара;
- разрежение воздуха в топке;
- соотношение топливо/воздух в топке;
- скорость вращения турбины;
- напряжение тока в генераторе.

Управлять всеми этими процессами можно с помощью универсальной управляющей машины (УМ) с использованием управления по возмущению и по отклонению. Но при этом трудно своевременно обеспечить экстремум по всем параметрам работы. Кроме этого, прекращение подачи одного из регулирующих воздействий при возникновении стационарного режима может затруднить поиск остальных экстремальных воздействий. Второй вариант - обеспечить экстремальное управление отдельно каждого агрегата с помощью простых аналоговых или цифровых регуляторов. Тогда число одновременно регулируемых параметров будет в пределах двух - трех. При этом не срабатывание или запаздывание в работе одного экстремального регулятора не отразится на работе остальных регуляторов. При таком экстремальном регулировании каждый регулятор действует самостоятельно не ожидая работы предыдущего регулятора. Это обеспечивает своевременность и надежность работы системы.

Основное требование при определении экстремума раздельно по агрегатам.

Экстремальная характеристика всей системы в допустимых пределах соответствует экстремальной характеристике отдельных агрегатов.

Это не всегда выполняется. Поэтому дополнительно используют управляющую машину (УМ), которая корректирует параметры экстремальных харак-

теристик, не вмешиваясь в поиск экстремума.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.3

- 1 Какие бывают связи между управляющими воздействиями и управляющими воздействиями и управляемыми параметрами?
- 2 Когда в многомерной системе может возникнуть опасность потери устойчивости?
- 3 Что такое градиент функции?
- 4 Как находится экстремум методом градиента?
- 5 Физическая аналогия движения по градиенту.
- 6 Как находится экстремум методом наискорейшего спуска.
- 7 Физическая аналогия метода наискорейшего спуска.
- 8 Как находится экстремум методом Гаусса-Зайделя?
- 9 В чём преимущество и недостаток этого метода?
- 10 В каких случаях поиск экстремума в системе управления можно разделить на поиск экстремума в отдельных агрегатах этой системы?

3 Адаптивные системы автоматического управления (АСАУ)

3.1 Постановка задачи

Термин «адаптации» заимствована из биологии, где им обозначают свойство организма приспособиться к изменениям внешней среды.

Вообще-то элементы приспособления существуют в любой автоматической системе, как в замкнутой, так и разомкнутой. При расчете систем автоматического управления (САУ) исходят из того, что характер внешнего воздействия известен, что параметры системы при работе не изменяются или изменяются в малых пределах, что априорная (начальная) информация о динамических свойствах САУ и о возможных возмущениях достаточна для ее расчета, что система является полностью наблюдаемой (т.е. по данным изменения ее прямых и косвенных параметров работы можно определить значение регулируемых параметров). При таком объеме априорной информации и допущениях задачи анализа и синтеза решаются достаточно просто. Система описывается передаточной функцией с постоянными коэффициентами, воздействие на систему аппроксимируется полиномом n -ой степени, задаются требуемые показатели качества и в результате расчета определяют или управляющие воздействия, или ее параметры, или вид коррекции.

С развитием техники появились объекты управления, которые отличаются непредвиденным изменением своих внутренних характеристик в широких пределах (атомные реакторы, химические процессы, металлургическое производство и т.д.). Для таких объектов получить адекватную математическую модель системы управления с постоянными параметрами практически невозможно. Характер возмущающих воздействий, как внешних, так и внутренних происходит в условиях большой неопределенности и непредсказуемости (т.е. система не полностью наблюдаемая). Например, самолет на автопилоте летит через грозовую облачность. При полете изменяется его масса вследствие сгорания топлива, положения центра тяжести, трение плоскости об окружающую среду и т.д. Процесс управления происходит в условиях неопределенности. Сами задачи управления становятся достаточно сложными. Это соблюдение многих требо-

ваний к системе, в том числе и противоречивых: компенсация случайных возмущений, стабилизация динамических характеристик, обеспечение оптимальных режимов работы по многим показателям и при этом гарантированное обеспечение безаварийной работы. Все это должно быть обеспечено в условиях недостающей информации о возмущающих воздействиях и об изменении параметров в объекте управления. Эта информация должна автоматически пополняться самой системой в процессе ее нормальной эксплуатации.

Кроме этого, бурное развитие автоматизированного управления технологическими процессами приводит к тому, что оператору всё труднее управлять работой автоматов. Поэтому необходимо разрабатывать такие системы управления, которые сами могут анализировать ход технологического процесса и сами обеспечивать оптимальное адаптивное управление. Адаптированное - это значит с учётом случайных внешних и внутренних возмущений.

Таким образом, адаптивные системы характеризуются следующими свойствами:

- 1) автоматически приспосабливаются к случайным изменениям условий работы
- 2) автоматически корректируют внутренние параметры системы при их случайных изменениях
- 3) автоматически получают недостающую информацию в процессе работы и совершенствуют алгоритм управления.

Адаптивные или приспособляющиеся САУ - это системы, которые автоматически приспособляются к изменению внешних условий и свойств объекта управления, обеспечивая при этом необходимое качество управления путем изменения параметров управляющего устройства, структуры системы, а так же путем совершенствования алгоритма управления.

Такие системы, обычно состоящие из двух частей (рисунок 3.1).



- ОУ - объект управления;
- РЕГ - автоматический регулятор;
- ОС - главная обратная связь (или датчик);
- УАА - устройство автоматической адаптации;
- $x(t)$ - регулируемый параметр;
- $u(t)$ - управляющее воздействие.

Рисунок 3.1- Обобщенная функциональная схема адаптивной системы управления

Основная часть системы управления - это объект управления (ОУ), регулятор (РЕГ), главная обратная связь (ОС). В зависимости от назначения система решает определенную задачу управления (стабилизация регулируемого параметра, программное управление, следящая система и др.) Вторая часть - устройство автоматической адаптации (УАА), которое осуществляется настройку регулятора или изменяется его структура с целью обеспечения необходимого качества процесса управления.

Если уход системы от расчетного режима вызван отклонением параметров системы (чаще всего это происходит с ОУ), то УАА-1 по величине входного, выходного и возмущающего воздействия анализирует качество управления и вырабатывает новое управляющее воздействия путем изменения параметров

регулятора или другой части системы, чтобы значение критерия качества управления максимально соответствовало заданному критерию. Таким образом, контур адаптации является вторичным контуром управления, который *управляет качеством процесса управления* в основном контуре. Можно организовать и следующий, второй уровень адаптации УАА-2, который будет управлять качеством адаптации в УАА-1 согласно дополнительному требованию к качеству управления.

Возможное построение многоступенчатых иерархических адаптивных контуров, в котором каждый последующий контур может обеспечить более глубокий анализ алгоритма управления, имеет более широкие возможности маневрирования при возникновении нештатных ситуаций. Устройство автоматической адаптации может «запоминать» свои лучшие решения и использовать в дальнейшей работе, т.е. в процессе работы «набираться опытом».

Таким образом, УАА решает следующие задачи:

- получение информации о воздействиях и динамических свойствах объекта управления в процессе его работы. Получение этой текущей информации - это задача идентификации (опознания);

- формирование на основе полученной информации заданного критерия качества для каждого состояния системы (алгоритмическая задача).

- сравнение заданного критерия качества с получаемым в системе и определение соответствующего воздействия на систему (решение алгоритмической задачи);

- изменение параметров или структуры регулятора (системы) для обеспечения заданного критерия качества (энергетическая задача).

3.2 Классификация адаптивных систем управления

Любая классификация ставит своей целью некоторое упорядочивание разнообразных свойств в рассматриваемом явлении. В данном случае - среди разнообразных адаптивных систем. Как уже отмечалось, адаптивная система состоит из двух контуров управления: основного - для автоматического управ-

ления технологическим процессом и из вторичного контура для обеспечения заданного качества процесса управления.

Классификацию поведем по самым различным показателям процесса адаптации.

1 По степени адаптации:

- *самонастраивающиеся* - в которых адаптация производится путем изменения параметров регулятора или управляющих воздействии. В качестве таких управляемых параметров чаще всего используются коэффициенты усиления и постоянных времени. Реже, так как это намного сложнее, изменяются параметры объекта управления. Это наиболее простая АСАУ;

- *самоорганизующиеся* - в которых адаптация осуществляется не только за счет изменения параметров или управляющих воздействий, но изменяется сама структура АСАУ путем автоматического подключения или отключения ее звеньев. Такая АСАУ может работать с меньшим объемом априорной информации, то есть в условии большей неопределенности. Она является более сложной по конструкции и по алгоритму получения недостающей информации;

- *самообучающиеся* системы в которых адаптация осуществляется за счет изменения параметров и структуры, а также дополнительно за счет совершенствования алгоритма управления путем автоматического поиска оптимальных решений и запоминания алгоритма таких решений. Это система с несколькими уровнями адаптации, с искусственным интеллектом, с использованием базы данных, блока программных средств и с блоком принятия решений. Очевидно, для ее работы необходима мощная компьютерная основа.

2 По критериям качества:

- *стабилизация динамических свойств* - для промышленных объектов, где переходные процессы являются основными режимами работы, а изменение внутренних параметров объектов нарушают эти режимы. Это энергетические системы, электроприводы и др.;

- *обеспечение максимальной производительности* (или *быстродействие*) для промышленных объектов, где производительность - решающий показатель. Это оружейное производство, машиностроение, прокатка стали и др.;

- *обеспечение максимальной экономичности* для промышленных объектов, где экономия материала и особенно энергоресурсов является главным показателем. Это тепловые электростанции, автопилоты самолета и др.;

- *минимизация ошибок* для промышленных объектов, где имеется большой спектр возмущающих воздействий и при этом необходимо точно выполнять поставленную задачу. Это интеллектуальные роботы, применяемые при сборке сложных изделий, военные ракеты самонаведения и др.

3 По обеспечению заданного критерия качества:

- *стабилизация заданного критерия качества управления*, то есть удержание критерия качества на определенном уровне или в определенном диапазоне;

- *непрерывная оптимизация критерия качества*, то есть обеспечение поиска и поддержания оптимального режима работы.

4 По способу получения информации:

- по входному сигналу;
- по выходному сигналу;
- комбинированные;
- по динамическим характеристикам.

5 По способу обработки информации:

- поисковые (экстремальные) системы;
- беспойсковые (аналитические) системы.

6 По виду модели-эталона:

- модель-эталон с постоянными параметрами;
- модель-эталон с большим коэффициентом усиления;
- модель с самонастройкой своих параметров;

- неидеальная модель-эталон системы;
- квазиоптимальная модель-эталон.

7 По методу синтеза системы:

- синтез системы с сигнальной настройкой;
- синтез системы с параметрической настройкой;
- синтез системы по амплитудно-фазовой настройкой;
- синтез системы по минимуму суммарной ошибки.

8 По методу анализа критерия качества:

- по динамическим характеристикам системы;
- по статистическим оценкам точности управления;
- по косвенным показателям качества переходного процесса

Введение контура адаптации в данную систему - это дорогостоящее мероприятие. Оно оправдывается только после анализа целесообразности такого способа повышения эффективности ее работы, который определяется с учетом социальных, экологических, психологических и других последствий, а не только по себестоимости продукции.

На практике могут встретиться адаптивные системы, где одновременно требуются обеспечить разные критерии качества, где взяв за основу один критерий, необходимо учесть и другие показатели качества управления. Это обычно делается через систему ограничений. Есть и другие методы.

3.3 Идентификация модели адаптивной системы

3.3.1 Понятие об идентификации

Синтез САУ с детерминированным объектом на стадии проектирования позволяет дать предварительную оценку работоспособности системы. Заключительный этап синтеза проводится на этапе ввода системы управления в действие на реальном объекте. Этот этап синтеза будет называться *адаптацией*.

В адаптивной системе объект управления описывается уравнением с частично неизвестными параметрами. Для построения адаптивной системы управ-

ления необходимо определить (идентифицировать) его параметры. Природа неопределённости его параметров может быть различной:

- неполная информация о динамике движения объекта;
- возможный разброс параметров в пределах технологического допуска;
- износ элементов объекта;
- «старение» материалов и т.д.

Если упорядочить эти сведения, то можно различить следующие случаи неопределённости параметров:

1) параметры заранее неизвестны, однако могут быть определены в процессе работы системы;

2) параметры являются случайными функциями времени, известен закон распределения и границы разброса параметров;

3) параметры являются случайными функциями времени, известен только закон распределения;

4) параметры - неизвестные произвольные функции, но ограничены по модулю.

Обычно параметры объекта изменяются медленнее, чем переменные состояния объекта в интервале (t_0, t_n) . Этот интервал функционирования объекта разделим на N подинтервалов, в течении которых параметры объекта принимаются *квазистационарными*, т.е. неизменяемыми в течении этого интервала. В соответствии с такой гипотезой о квазистационарности параметров объекта, процессы протекающие в объекте разделяются на «быстрые» (изменение переменных состояния системы) и «медленные» (изменение параметров объекта) В дальнейшем будем использовать модель объекта в пределах этого подинтервала или квазистационарную.

Следует различать два принципа организации адаптивного управления: поисковую и по математической модели системы.

При поисковом методе адаптивного управления производится варьирование численных параметров настройки и поиска оптимальной настройки с использованием методов Гаусса-Зайделя, наискорейшего спуска и других. Такой

поиск адаптивного управления нарушает нормальную работу объекта и может применяться на окончательной стадии достаточно близкой к оптимуму настройки регулятора.

Синтез системы по математической модели позволяет определить пределы изменения неизвестных параметров объекта и более целенаправленно определять оптимальное управление. Такой принцип синтеза САУ находит все большее применение.

3.3.2 Методы идентификации модели системы

Теория идентификации модели системы, по существу, приобрела самостоятельное значение и в значительной мере абстрагировалась от своего системного подчинения (абстракция — мысленное отвлечение от частных свойств для выделения существенных признаков). Это привело к потере системного подхода задачи идентификации, и появились удобные для расчёта, но неудобные для реального решения рекомендации.

Рассмотрим стационарную, обычно принятую в теории идентификации структурную схему для определения параметров объекта (рисунок 3.1 а).

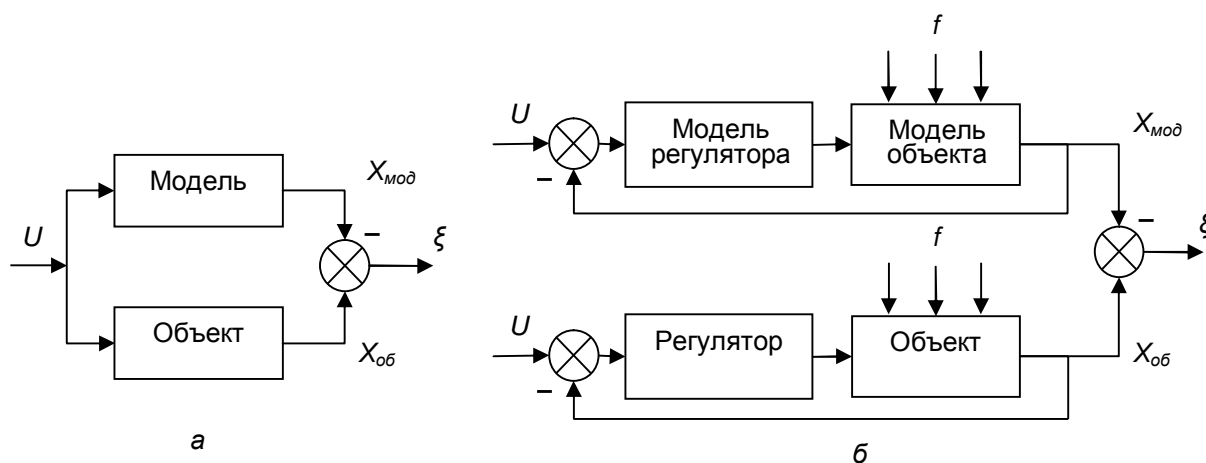


Рисунок 3.1 - Структурные схемы идентификации объекта

На вход реального объекта и его модели подаётся один и тот же входной сигнал U регистрируется разность ξ на выходе объекта $X_{\text{об}}$ и модели $X_{\text{мод}}$. Функционал от этой разности - критерий адекватности модели. Если значение этого

функционала будет достаточно малым, то считается, что модель адекватно описывает объект.

Первая проблема: в выборе такого функционала; Разные функционалы по-разному идентифицируют объект. Вторая проблема: какое значение ζ считать достаточно малым? Третья проблема: критерий адекватности модели характеризуется показателями функционирования объекта в системе автоматического управления. Но как будет функционировать объект в системе управления? Этот вопрос оказался не решённый. Возникает «системный парадокс».

Модель объекта зависит от управляющего устройства, а управляющее устройство зависит от модели объекта.

Возникает замкнутый круг. Выход: модель объекта надо рассматривать как часть адаптивной системы регулирования с учётом его функционирования под действием управляющих и возмущающих воздействий. Это показано на рисунке 3.1 б. Здесь получают модель не отдельно взятого объекта, а как часть системы регулирования в целом и регистрируют разность ζ как ошибку регулирования. Показатель адекватности (степени совпадения) модели системы регулирования к действительной системе регулирования в этом случае является показателем точности функционирования модели объекта, который измеряется тем же функционалом, что и показатель точности функционирования реальной системы.

Теоретически всё правильно. Но практически сразу получить такую полную модель адаптивной системы очень трудно. Получение математической модели объекта можно провести по результатам измерения управляющего, возмущающего воздействия и оценки полученных выходных параметров с использованием *апостериорной информации*. Пусть известен вид матричного управления через вектор его переменных состояния и необходимо определить коэффициенты матриц. По известным физическим законам (законы Кирхгофа, Максвелла, закон сохранения энергии и т.д.) получают нелинейные уравнения в частных производных, затем линеаризуют до обыкновенных дифференциальных

уравнений и полученный результат сравнивают с результатом опыта. Такая функциональная схема получения математической модели объекта показана на рисунке 3.2.

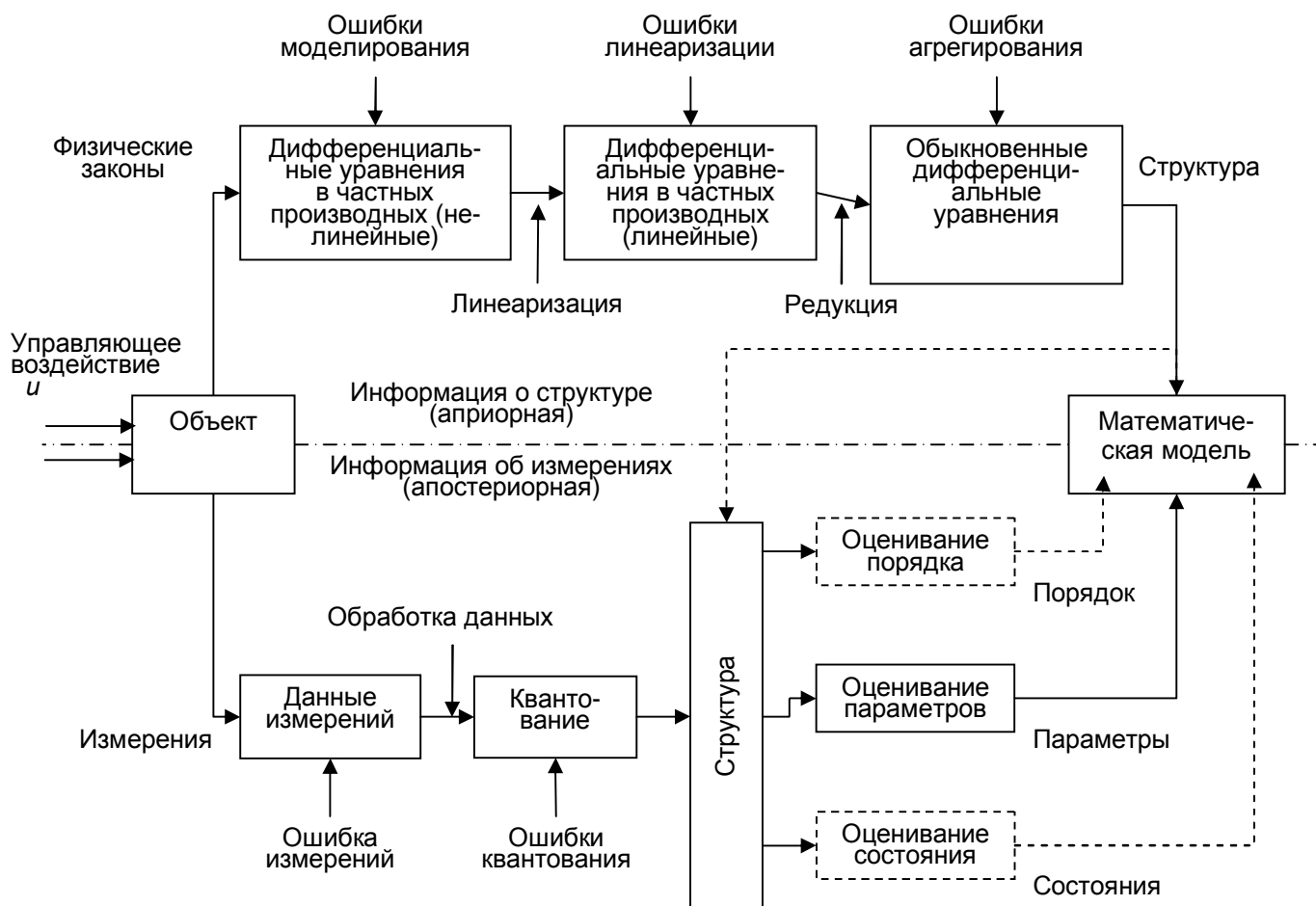


Рисунок 3.2 - Функциональная схема получения математической модели объекта

Методы идентификации объекта могут быть пассивными и активными.

При пассивном методе используются воздействия в процессе ее нормальной эксплуатации, то есть без вмешательства в работу объекта.

При активной идентификации организуются специальные воздействия на объект, которые могут быть сигнальными, параметрическими, алгоритмическими, структурными.

Сигнальное воздействие подается на объект в виде различных задающих сигналов.

Параметрическое воздействие состоит в изменении параметров настройки регулятора.

Алгоритмическое воздействие связано с изменением функционирования регулятора, например, алгоритм функционирования может стать нелинейным.

Структурное воздействие предполагает изменение структуры системы, например, введение дополнительных обратных связей или корректирующих звеньев.

Методы идентификации предполагает участие в ней человека-наладчика. В настоящее время разработаны и такие методы идентификации, которые полностью автоматические.

3.3.3 Идентификация модели САУ по переходной характеристике

Автоматические регуляторы приходилось настраивать перед началом их работы, когда не было никакой теории адаптации. Эту работу выполнял наладчик и настройка осуществлялась по реакции системы на ступенчатое воздействие, то есть по переходной характеристике системы. По виду этой характеристики и по представлению о характере влияния параметров регулятора на изменение характеристики производилась настройка регулятора. Затем анализировалась полученная переходная характеристика и процесс настройки регулятора продолжался пока не был достигнут оптимальный результат (с учетом ограничений).

Естественно, что первые автоматизированные методы настройки адаптивных регуляторов проводились с таким подходом [6].

Рассмотрим основные параметры колебательно звена. Передаточная функция (ПФ) и частотная передаточная функция (ЧПФ):

$$W(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad W(j\omega) = \frac{K \cdot e^{-j \arctg \varphi(\omega)}}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}},$$

$$\text{где } \varphi(\omega) = \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}.$$

При $T_1 < 2T_2$ корни характеристического уравнения комплексные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta, \quad \alpha = \frac{T_1}{2T_2^2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\sqrt{1 - (T_1/2T_2^2)^2}}{T_2}.$$

Корневой показатель колебательности m определяется отношением вещественной части корня α к его мнимой части β , $m = \alpha/\beta$.

Тогда $\alpha = m\beta$ или $\alpha = m\omega$ при расчете колебательного звена по ЧПФ.

Частотный показатель колебательности M определяется отношением максимального значения амплитудной характеристики при резонансной частоте $A(\omega_{рез})$ к ее значению при нулевой частоте $A(0)$

$$M = A(\omega_{рез})/A(0) = (1 + m^2)/2m$$

Период собственных колебаний T_0 определяется $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Степень затухания колебаний ψ определяется относительным уменьшением соседних амплитуд A_{i+1} и A_i в переходной функции. Учитывая, что $A_{i+1} = A_i \cdot e^{-\alpha T_0}$, где T_0 - период собственных колебаний, тогда

$$\psi = (A_i - A_{i+1})/A_i = 1 - e^{-\alpha T_0} = 1 - e^{-\alpha \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} = 1 - e^{-m2\pi}.$$

Эти параметры колебательного звена связаны однозначной зависимостью. Например, при $\psi = 0,9$ значения: $m = 0,336$; $\sigma \% = 34,8 \%$; $M = 1,547$; $\omega_{рез}/\omega_0 = 0,93$; $T_1/T_2 = 0,688$.

Рассмотрим основные параметры ПИ-регулятора, который широко используется в системах автоматического регулирования технологических объектов. Передаточная функция ПИ-регулятора и частотная передаточная функция

$$R_p(p) = K_n \left(1 + \frac{1}{T_u p} \right), \quad R_p(j\omega) = K_n \left(1 - j \frac{1}{T_u \omega} \right) = K_n R(\omega),$$

где K_n - коэффициент передачи регулятора;

T_u - постоянная интегрирования.

Модуль и аргумент ПИ- регулятора

$$A_p = K_n \sqrt{1 + (1/T_u \omega)^2}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg(1/T_u \omega).$$

Формализованная настройка модели в УАА согласно структурной схеме на рисунке 3.1 начинается при произвольной, но устойчивой работе системы [13]. По экспериментально полученному графику колебательной переходной характеристики определяется период колебаний T_0 , степень затухания ψ , корневой показатель колебательности m . Передаточную функцию модели обычно выбирают в виде

$$W_{\text{мод}} = \frac{K_{\text{мод}} \cdot e^{-\tau p}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_n p + 1)} = K_{\text{мод}} \cdot e^{-\tau p} \cdot W_0(p),$$

где τ - величина запаздывания;

$$W_0(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_n p + 1)} - \text{ПФ апериодических звеньев.}$$

ев.

Если предположить, что колебательный процесс формируется в основном парой ближайших к мнимой оси сопряжено-комплексных доминирующих корней, то условие существования колебательного процесса для расширенной ЧПФ регулятора и модели объекта

$$W_{\text{мод}}(-m + j\omega) \cdot R_p(-m + j\omega) = -1,$$

$$\text{или } K_{\text{мод}} K_n W_0(-m + j\omega) R(-m + j\omega) \cdot e^{m\omega\tau} \cdot e^{-j\omega\tau} = -1.$$

Это уравнение можно представить в виде двух уравнений для аргумента и модуля

$$\arg|W_0(-m\omega + j\omega)| - \tau_{\text{мод}}\omega + \arg[R(-m\omega + j\omega)] + \pi = 0;$$

$$K_{\text{мод}} K_n |W_0(-m\omega + j\omega)| \cdot |R(-m\omega + j\omega)| \cdot e^{m\omega\tau} - 1 = 0,$$

Первое уравнение не зависит от коэффициентов передачи $K_{\text{мод}}$ и K_n . По полученным значениям m и ω находим значение $\tau_{\text{мод}}$. Затем по второму уравнению определяем $K_{\text{мод}}$ и K_n . Так происходит адаптивная настройка регулятора. Очевидно, что численные значения параметров настраиваемой модели меняются в процессе движения к оптимуму настройки регулятора и, наконец, уста-

навливаются на некотором стабильном значении. Таким образом, образуется итерационная многошаговая процедура движения к оптимуму настройки.

Качество полученной модели зависит не только от правильно выбранной её структуры относительно структуры объекта, но и от выбранного критерия оптимальности. При данном методе настройки происходит последовательное приближение к оптимуму в области существенных для системы частот, и в результате структура модели может оказаться на много проще, чем первоначально принятая.

При практическом применении этого метода настройки регулятора начальное значение K_n в ПИ-регуляторе принимают минимальным, а T_u достаточно большим. В частности при $T_u \rightarrow \infty$ ПИ-регулятор становится П-регулятором и могут возникнуть незатухающие колебания с частотой $\omega_{кр}$ и с коэффициентом передачи П-регулятора $K_{р.кр.}$. Тогда при итерационной процедуре настройки рекомендуется использовать имперические формулы: $T_{u\text{ опт}} = 0,83T_{кр}$, $K_n = 0,54 K_{р.кр.}$

В дальнейшем увеличивая $K_{мод}$ и изменяя K_n и T_u при принятом корневом показателе колебательности (рекомендуется $m = 0,366$) добиваются увеличения степени затухания (рекомендуется $\psi \rightarrow 0,9$).

При данном методе поиска оптимальной настройки регулятора принят следующий критерий окончания настройки.

Процесс настройки модели можно считать окончанным, если степень затухания ψ и отношение периода колебаний T_0 к постоянной интегрирования регулятора T_u , стало равно заранее заданному числу.

При этом необходимо учесть, что этот метод ориентирован на линейную модель объекта, в то время как реальные объекты нелинейные. Поэтому полученные результаты являются приближенными и требуют экспериментальной проверки.

3.3.4 Идентификация модели САУ по частотной характеристике

Ранее было показано (подраздел 3.3.3), что для адаптации модели в САУ по переходной характеристике вначале рассматривалась система с практически незатухающими колебаниями, как переходная характеристика с П - регулятором. Однако можно рассматривать такой колебательный процесс, как искусственно созданный и на его основе провести идентификацию модели САУ.

Согласно критерия устойчивости Найквиста система находится на границе устойчивости, если комплексная частотная характеристика (КЧХ) разомкнутого контура системы проходит через точку $-1, j0$. При выполнении идентификации в общей процедуре адаптации модели системы целесообразно это объединить с расчетом оптимальных параметров регулятора. Это называется *процедура идентификации-оптимизации* [13]. Так при настройке ПИ-регулятора производится адаптация реального объекта с характеристикой на границе устойчивости. Найденное оптимальное значение постоянной интегрирования T_u устанавливается в регуляторе и путем изменения коэффициента передачи K_n система вновь выводится на границу устойчивости. Возникшие колебания будут иметь новую частоту. Это позволяет уточнить коэффициенты модели объекта и произвести следующий расчет оптимума настройки. Такая процедура продолжается, пока не будут получены совпадающие результаты на очередных шагах итерации.

Вывод работающей системы на границу устойчивости - это достаточно кропотливая операция. Такой режим работы не может существовать длительное время. Реально эти колебания либо медленно затухают, либо увеличиваются и

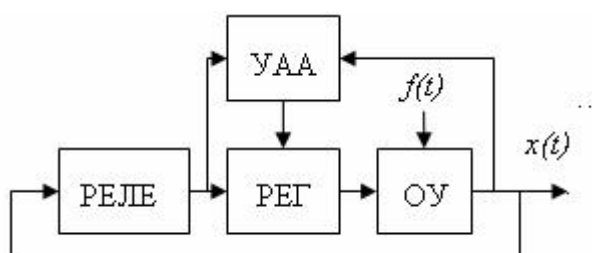


Рисунок 3.3 – Функциональная схема системы с реле на входе

система становится полностью неустойчивой. Значение этих амплитуд может изменяться в зависимости от начального воздействия. Все эти проблемы снимаются, если на вход системы подключить идеальное реле

(двухпозиционное, без зоны нечувствительности). Это показано на рисунке 3.3.

В результате воздействия в системе создается:

- устойчивый автоколебательный режим;
- амплитуда незатухающих колебаний имеет определенное фиксированное значение;
- частота незатухающих колебаний постоянная.

В общем случае в системе кроме основной гармонике ω_1 , могут образовываться и другие гармоники: $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$, и так далее. Принимается, что линейная часть системы обладает ярко выраженным фильтрующим свойством по отношению к высокочастотным гармоникам и на выходе ОУ практически остается только первая гармоника ω_1 , которая снова подается на вход реле. Если частота колебаний в ОУ, которая подается на вход реле совпадают с частотой колебания на выходе реле, то считается, что в системе возник автоколебательный режим, и расчет производится по формуле

$$x(t) = f(A \sin \omega_1 t).$$

Характеристику нелинейного звена будем называть *эквивалентной комплексной амплитудно-частотной характеристикой (КАЧХ)* и в общем случае обозначать

$$W_{н.э}(\omega, A) = A_{н.э}(\omega, A) e^{j\varphi_{н.э}(\omega, A)},$$

где $A_{н.э}(\omega, A)$ - модуль характеристики;

$\varphi_{н.э}(\omega, A)$ - аргумент характеристики.

Для частных случаев эквивалентная КАЧХ упрощается. Так, для безинерционных нелинейных звеньев с однозначными статическими характеристиками фазовый сдвиг отсутствует ($\varphi_{н.э}(\omega, A) = 0$), а модуль не зависит от частоты колебаний. Он зависит от амплитуды входного сигнала. Следовательно, для идеального реле

$$W_{н.э}(A_y) = \frac{4C}{\pi A_y},$$

где C - амплитудное значение сигнала на выходе;

A_y - амплитуда входного сигнала

Условие возможности возникновения автоколебаний определяется согласно критерия устойчивости Найквиста по частотной передаточной функции разомкнутой системы

$$W_{н.э.}(A_y)R(j\omega)W_{об.}(j\omega) = -1,$$

где $W_{н.э.}(A_y)$ - КАЧХ идеального реле;

$R(j\omega)$ - ЧПФ ПИ- регулятора;

$W_{об.}(j\omega)$ - ЧПФ объекта управления.

Если настраиваемая модель выбрана в виде n апериодических звеньев с запаздыванием, тогда время запаздывания $\tau_{мод}$ и коэффициент передачи $K_{мод}$ модели определяется по уравнениям

$$n \cdot \arctg(\beta\tau_{мод}\omega_0) + \arg[R(j\omega_0)] - \tau_{мод}\omega_0 = -\pi;$$

$$\tau_{мод} = \frac{n \cdot \arctg(\beta\tau_{мод}\omega_0) + \arg[R(j\omega_0)] + \pi}{\omega_0};$$

$$K_{мод} \cdot K_p \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\beta^2\tau_{мод}^2\omega_0^2 + 1}} \right]^n W_{н.э.}(A_y) |R(j\omega_0)| = 1;$$

$$K_{мод} = \frac{(\beta^2\tau_{мод}^2\omega_0^2 + 1)^{0.5n}}{W_{н.э.}(A_y) |R(j\omega)| K_p}.$$

Время запаздывания в модели $\tau_{мод}$ связывают с постоянной времени $T_{мод}$ апериодического звена с помощью коэффициента β

$$\beta = T_{мод} / \tau_{мод} \quad \text{или} \quad T_{мод} = \beta\tau_{мод}.$$

Предварительно принимают $\beta = 4$. Передаточную функцию настраивающей модели объекта выбирают в виде одинаковых апериодических звеньев

$$\omega_{\text{mod}}(p) = \frac{1}{(T_{\text{mod}}p + 1)^n}.$$

Предварительный анализ адекватности получают при $n = 2$. Тогда модель в виде апериодических звеньев определяется:

$$\omega_{\text{mod}}(p) = \frac{1}{(4\tau_{\text{mod}}p + 1)^2}.$$

При практических расчетах удобнее оперировать не с частотой ω_0 , а с периодом автоколебаний T_0 . В результате получаем отношение

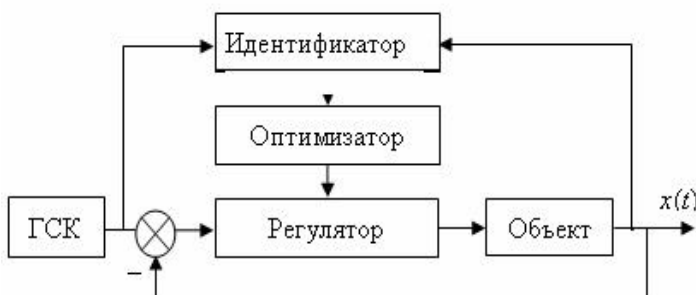
$$T_0/T_{\text{уст}} = 2\pi/\beta.$$

Настройка модели считается законченной, если отношение $T_0/T_{\text{уст}}$ соответствует приведенной формуле. Коэффициент β зависит от выбранного корневого показателя колебательности.

Преимущество данного метода настройки модели является ее устойчивость. Даже если система оказалась неустойчивой, то реле не позволит возникшим автоколебаниям усилиться. Второе преимущество - не возникает проблема выбора частоты колебаний, система сама начинает генерировать автоколебания собственной частоты.

Главный недостаток - неприменимость методов математической статистики в условиях действия случайных возмущений, которые могут привести к срыву автоколебаний [13].

3.3.5 Идентификация модели САУ с помощью синусоидальных сигналов



Если система подвержена действию заметных случайных помех, то введение ее в режим колебаний проводится принудительно, с помощью внешнего генератора

Рисунок 3.4 – Функциональная схема адаптивной системы с ГСК на входе

синусоидальных колебаний (ГСК).

Порядок проведения процедуры адаптации модели в САУ зависит от того, известна ли частота автоколебаний. Если она известна, тогда начальная настройка ГСК проводится в этих пределах. Если частота автоколебаний неизвестна, то надо каким либо образом ее определить (например, методом «проб и ошибок»). При этом убедиться в устойчивости системы. Если система линейная, то на выходе установятся синусоидальные колебания той же частоты, но с другой амплитудой и со сдвигом по фазе

$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi_x).$$

Значение амплитуды и фазы замкнутого контура определяются по вещественной и мнимой частотной характеристики объекта и регулятора

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Процедура настройки модели САУ осуществляется по принципу «идентификация – оптимизация» по экспериментально полученной оценке $A_x(\omega)$ и $\varphi_x(\omega)$ и сравнением с $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ полученных согласно параметрам системы. Это позволяет выбирать частоту в ГСК и снова повторять расчет. В результате такой итерационной процедуры определяется оптимум настройки модели.

Структурой передаточной функции модели необходимо задаться. Выберем ее в виде апериодических звеньев (смотри подраздел 3.3.4):

$$W_{\text{мод}}(p) = \frac{K_{\text{мод}} \cdot e^{-\tau p}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_n p + 1)} = K_{\text{мод}} \cdot e^{-\tau p} \cdot W_0(p).$$

Параметры этой модели находятся из уравнения:

$$W_{\text{экс}}(j\omega) = K_{\text{мод}} W_0(j\omega) e^{-j\tau\omega}.$$

Время запаздывания определяется по фазовой характеристике:

$$-n \cdot \operatorname{arctg}(\beta \tau_{\text{мод}} \omega) - \tau_{\text{мод}} \omega = \varphi_{\text{экс}}(\omega),$$

где $\beta = T_{\text{мод}} / \tau_{\text{мод}}$;

$\varphi_{\text{экс}}(\omega)$ - фазовый сдвиг в экстремальной характеристики.

Коэффициент передачи модели:

$$K_{\text{мод}} = A_{\text{экс}}(\omega)(1 + \beta^2 \tau^2 \omega^2)^{0,5n}$$

Повторение подобных экспериментов продолжается, пока параметры модели не установятся на некотором постоянном уровне.

3.3.6 Идентификация модели САУ по экспертным оценкам

Пред решением задачи синтеза САУ и особенно на начальном этапе необходимо учитывать мнение опытных экспертов. От эксперта требуется дать общую формулировку алгоритма управления и обеспечить правильное направление в решении поставленной задачи. В последнее время наметилась тенденция передать экспертам полное решение задачи синтеза АСАУ.

Своеобразие экспертных оценок в том, что они обычно выражаются словами, которые принято называть *термами*. Ими определяются некоторые количественные оценки (мало, много, большая и т.п.). Проблема состоит в том, чтобы эти нечетные термины выразить в буквах, а лучше в цифрах для ввода в ЭВМ. Например, ошибка управления может быть определена экспертами так:

- ошибка близка к нулю;
- ошибка положительна большая;
- ошибка отрицательная средняя и т.п.

В публикациях по экспертным системам принято обозначать указанные термины английскими буквами:

- P, N - положительный, отрицательный;
- S, M, И - малый, средний, большой;
- ZO - близко к нулю.

Например, эксперт, скорее всего, не сможет точно ответить на вопрос о действительном значении данного параметра. Его ответ будет звучать так: «я не

смогу назвать точное значение, но могу утверждать, что оно расположено на отрезке x_{min} и x_{max} , причем **наиболее вероятно** его значение находится примерно на середине этого отрезка.». Все это можно заменить одним термином - РМ. Таким образом, эксперт пользуется терминологией теории вероятности.

Основные положения теории вероятности.

Описание любой случайной величины x в теории вероятности производится с помощью *функции плотности вероятности* $P(x)$.

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} P(x) dx .$$

Более простой характеристикой случайной величины является *математическое ожидание*, которое определяется по ее плотности распределения:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x) dx$$

В теории вероятности появление того или иного значения случайной величины является *случайным событием*. События образуют *полную группу*, если хотя бы одно из них должно произойти. Два события являются *несовместными*, если их совместное появление не возможно. Два события являются *независимые*, если вероятность появления одного из них не зависит от другого. Два события являются *зависимые*, если появление одного из них при условии появления другого. Вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий, входящих в полную группу, *равна сумме вероятностей появления каждого из них* (теорема умножения вероятностей). Рассмотрим случай когда два рассматриваемых события зависят от некоторого третьего события (которое принято называть *гипотезой*). Тогда вероятность появления одного из двух событий будет равна сумме условных вероятностей этих событий, каждая из которых должна быть умножена на вероятность появления гипотезы. Это называется *формулой полной вероятности*. Таким образом, каждой переменной на входе регулятора может соответствовать несколько соседних терминов с различными плотностями вероятностей.

На практике для определения математического ожидания используют ме-

ханическую аналогию: m_x равно центру тяжести фигуры, образованной графиком плотности распределения. Для упрощения расчета график плотности распределения для каждого термина выбирается в виде равнобедренного треугольника, основание которого соответствует диапазону изменения соответствующей переменной, а положение вершины удовлетворяет требованию равенства площади треугольника единице.

Каждый сигнал может содержать несколько термов или несколько мнений экспертов. Эти термы группируются на одной оси соответствующей базовой переменной в ансамбле термов (рисунок 3.5). По оси абсцисс показана вероятность случайного события x , которое в терминах отклонения может быть положительное близко к нулю (ZO), малое (PS), среднее (PM), большое (PB). Они образуют полную группу ($x_{max} = 1$), так вероятность ZO от 0 до 0,33; вероятность PS от 0 до 0,66; вероятность PM от 0,33 до 1; вероятность PB от 0,66 до 1.

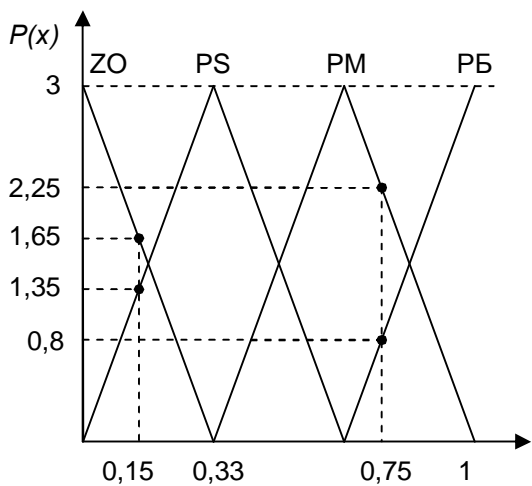


Рисунок 3.5 - Нормализованный ансамбль функций плотности распределения для четырех терминов

Эти термы группируются на одной оси соответствующей базовой переменной в ансамбле термов (рисунок 3.5). По оси абсцисс показана вероятность случайного события x , которое в терминах отклонения может быть положительное близко к нулю (ZO), малое (PS), среднее (PM), большое (PB). Они образуют полную группу ($x_{max} = 1$), так вероятность ZO от 0 до 0,33; вероятность PS от 0 до 0,66; вероятность PM от 0,33 до 1; вероятность PB от 0,66 до 1.

На оси ординат показана функция плотности вероятности появления события на выходе АСАУ при данной вероятности на входе. Принято максимальное значение плотности вероятности $P_{max}(x) = 3$.

Примечание - Значение x (по оси абсцисс) и значение $P(x)$ (по оси ординат) даны в относительных единицах, которые по окончании расчета нужно перевести в именованные единицы.

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 3.1 [16] - Определить математическое ожидание условной вероятности разброса в отклонении выходного сигнала в АСАУ, если по мнению эксперта «Вероятность отклонения входной величины достаточно мала, но

разброс такого отклонения может быть значителен».

РЕШЕНИЕ

1 Примем вероятность отклонения входного сигнала достаточно малым ($x = 0,15$); вероятность разброса входного сигнала значительным ($\Delta x = 0,75$).

2 Функция плотности распределения вероятности отклонения сигнала на выходе при ZO равна $P(x_1) = 1,65$, при PS равна $P(x_2) = 1,35$ (смотри рисунок 3.5).

3 Функция плотности распределения вероятности разброса отклонения сигнала на выходе при PM равна $P(\Delta x_1) = 2,25$, при PB равна $P(\Delta x_2) = 0,8$.

4 Функция плотности распределения вероятности разброса может быть PM или PB при отклонении сигналов ZO и PS.

Рассмотрим все четыре варианта одновременного появления двух независимых событий.

Условная вероятность PM (разброс) при ZO (сигнал) будет соответствовать термину PS (положительное малое отклонение) $P_{01}(PS) = 2,25 \cdot 1,65 = 3,71$.

Условная вероятность PM (разброс) при PS (сигнал) соответствует термину PM (положительное малое отклонение) $P_{02}(PM) = 2,25 \cdot 1,35 = 3,01$.

Условная вероятность PB (разброс) при ZO (сигнал) соответствует $P_{03}(PM) = 0,8 \cdot 1,65 = 1,32$.

Условная вероятность PB (разброс) при PS (сигнал) соответствует $P_{04}(PM) = 0,8 \cdot 1,35 = 1,08$.

Таким образом общая условная вероятность $P(PS) = 3,71$, общая условная вероятность $P(PM) = 3,03 + 1,32 + 1,08 = 5,7$.

5 По нормированному ансамблю функция плотности распределения (рисунок 3.5) было принято максимальное значение плотности вероятности $P_{max}(x) = 3$. Определим приведенную условную вероятность.

Для термина $P(PS)$ $\mu_1 = 2,25/3 = 0,75$.

Для термина $P(PM)$ $\mu_2 = 0,8/3 = 0,25$.

6 Математическое ожидание приведенной условной вероятности разброса

ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

$$m_{\Delta x} = \frac{\mu_1 P(PS) + \mu_2 P(PM)}{P(PS) + P(PM)} = \frac{0.75 \cdot 3.71 + 0.25 \cdot 5.7}{3.71 + 5.7} = 0.45$$

Примечание - Можно дать более простое, но приближенное решение.

Условная вероятность математического ожидания максимального разброса

$$m_{\Delta x_{max}} = 3,71/3 = 1,23.$$

Условная вероятность математического ожидания минимального разброса

$$m_{\Delta x_{min}} = 1,08/3 = 0,36.$$

Среднее значение или математическое ожидание

$$m_{\Delta x_{сред}} = (1,23 + 0,36)/2 = 0,79.$$

Метод экспертных оценок дает более обоснованное решение.

Изложенный порядок синтеза экспертных оценок широко излагается в технической литературе и называется *теория нечетких множеств*. Синтезируемый таким способом регулятор называется *фази-регулятором* («fuzzy»(анг.) - нечеткий).

В теории нечетких множеств при описании лингвистических переменных (термов) вместо плотности распределения вероятности используют *функцию принадлежности*, которая представляет собой функцию базовой переменной, заключенную между нулем и единицей. Нуль соответствует базовой переменной, которая не принадлежит данному терму, единице - которая принадлежит данному терму. Ансамбль функции принадлежности соответствует рисунку 3.5, только вершины равны единице [16].

В структуру фази-регулятора входят следующие блоки:

- 1) блок преобразования входных сигналов в соответствующие термы;
- 2) блок формирования термов приращения от термов входных сигналов;
- 3) блок вычисления математического ожидания условной вероятности приращения выходного сигнала;
- 4) интегрирующий исполнительный механизм.

Этот синтез широко используется для многомерных фази-П-регуляторов. Для фази-ПИ-регуляторов и для фази-ПИД-регуляторов его использование не

дает нужного эффекта.

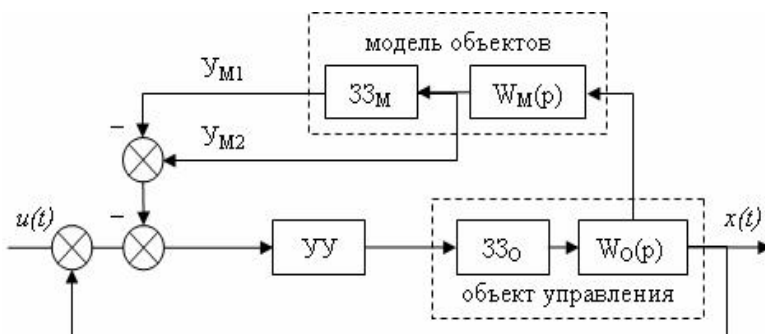
Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.3.6

- 1 Что такое термы?
- 2 Объясните значения: P, N, S, M.
- 3 Что обозначает ZO, PS?
- 4 Когда случайные события образуют полную группу?
- 5 Отличие зависимых и независимых событий.
- 6 Как определяется формула полной вероятности?
- 7 Как составляется механическая аналогия ансамбля функции плотности распределения?
- 8 Что такое фази-регулятор?

3.4 Адаптивные системы с моделями

3.4.1 Использование модели для компенсации запаздывания

В настоящее время наметилось два пути использования моделей для решения задач адаптивного управления: в качестве датчика состояния объекта и в качестве корректирующего устройства.



33_o - звено запаздывания объекта;

33_M - звено запаздывания модели объекта;

$W_M(p)$ - ПФ модель объекта управления;

УУ - управляющее устройство.

Рисунок 3.6 - Функциональная схема адаптивной системы с запаздыванием

Модель, как датчик динамического состояния объекта [14] используется для прогнозирования поведения системы и позволяет выбрать оптимальные управляющие функции. Например, для компенсации вредного влияния запаздывания (рисунок 3.6).

В этой системе кроме главной обратной связи параллельно объекту с запаздыванием включена его динамическая

модель $W_M(p)$ с запаздывающим звеном $ЗЗ_M$. Происходит сравнение сигналов до запаздывания $У_{M2}$ и после запаздывания $У_{M1}$ и полученная величина с обратным знаком подается на вход системы. Вредное влияние запаздывания компенсируется при равенстве запаздывания в объекте и модели. При изменении режима работы системы может изменяться характеристика объекта $W_O(p)$. Поэтому необходимо постоянно подстраивать модель, чтобы $W_O(p) = W_M(p)$.

Для компенсации запаздывания все шире применяется *двухшкальная модель*, которая позволяет прогнозировать поведение объекта при заданных возмущениях. На эту модель поступает два потока информации. Априорная информация для идентификации модель объекта и информация о текущем состоянии объекта. Модель объекта работает в ускоренном масштабе времени по сравнению с динамикой объекта. Это позволяет периодически проводить решение задачи управления с учетом будущего поведения объекта.

Такие адаптивные системы используются для управления технологическими процессами, где приборы выдают информацию в дискретные моменты времени и поэтому с задержкой. Например, анализаторы газовой смеси, инфракрасные спектрографы, измерители влажности сыпучих продуктов.

3.4.2 Использование модели для параметрической настройки регулятора

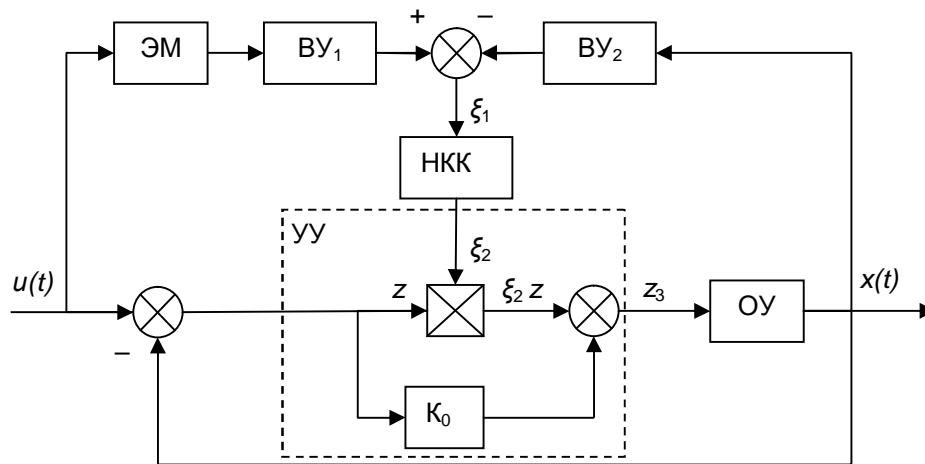
Функциональная схема, в которой настройка осуществляется изменением закона управления управляющего устройства [14], представлена на рисунке 3.7.

Критерием параметрической настройки является степень соответствия выходного сигнала системы сигналу эталонной модели (ЭМ). Модуль сигнала эталонной модели определяется по входному сигналу $u(t)$ и с помощью ВУ₁.

Модуль выходного сигнала $x(t)$ определяется с помощью ВУ₂.

С помощью логического устройства находится отклонение ξ_1 . В зависимости от величины этого отклонения происходит настройка сигнала управле-

ния в блоке НКК по закону
$$\xi_2 = K_\xi \xi_1 + K_u \int_{t_0}^{t_u} \xi_1 dt + K_\xi \dot{\xi}_1.$$



- ЭМ - эталонная модель;
 ВУ - вычислительное устройство модуля сигнала;
 НКК - настройка критерия качества;
 УУ - управляющее устройство;
 K_0 - постоянный коэффициент;
 ОУ - объект управления;
 ⊗ - множительное устройство.

Рисунок 3.7 – Функциональная схема настройки регулятора

Затем с учетом сигнала рассогласования z вырабатывается управляющее воздействие на объект управления

$$z_3 = K_0 z_3 + \xi_2 z.$$

В общем случае могут использоваться различные критерии качества при настройке регулятора

$$\xi_2 = K_\xi \xi_1; \quad \xi_2 = K_\xi \xi_1 + K_{\dot{\xi}} \dot{\xi}_1; \quad \xi_2 = K_u \int_{t_0}^{t_u} \xi_1 dt \quad \text{и т.д.}$$

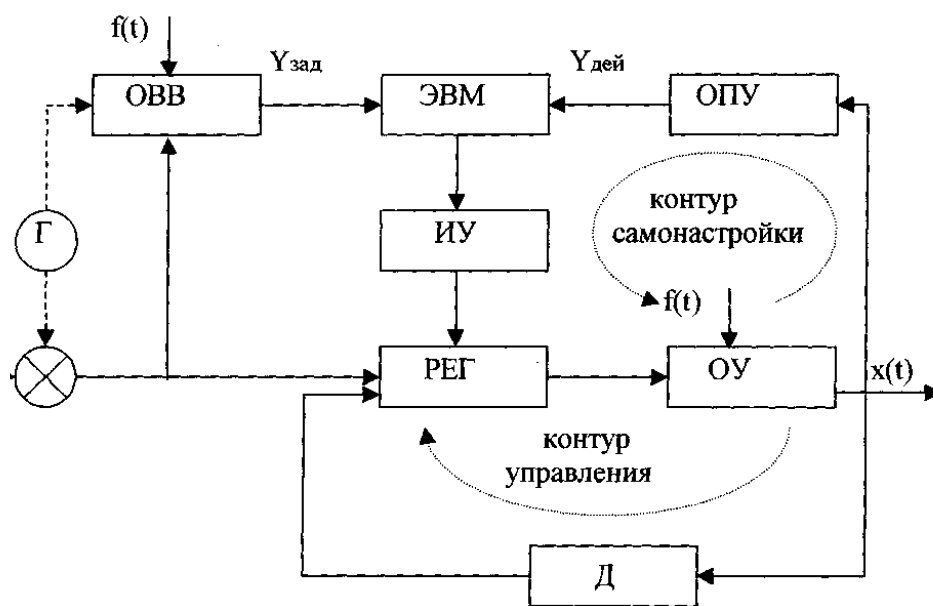
Интегральная составляющая улучшает качество настройки в установившемся режиме, а составляющая по скорости изменения отклонения $\dot{\xi}_1$ улучшает динамику переходного процесса. Обычно $K_{\dot{\xi}} \ll K_\xi$, чтобы сделать настройку менее чувствительную к шумам и к высокочастотным составляющим ВУ. Коэффициент K_0 обычно принимают равным единице.

3.5 Различные виды адаптивных систем

3.5.1 Самонастраивающиеся системы автоматического управления (СНС)

Такие системы применяются для стабилизации динамических характеристик системы путем изменения его настроенных параметров (например, регулятора). Вначале настройка производится вручную, а затем поддерживается контуром адаптации.

Критерием качества поддержания динамических характеристик системы обычно являются косвенные показатели качества (среднеквадратичное отклонение, интегральные показатели, частотные характеристики). На рисунке 3.8 показана функциональная схема СНС со стабилизацией динамических свойств системы.



ОВВ - оценка внешних воздействий;

ОПУ - оценка процесса управления;

ЭВМ - электронная вычислительная машина;

ИУ - исполнительное устройство контура самонастройки;

Г - генератор пробных сигналов.

Рисунок 3.8 - Функциональная схема СНС

СНС имеет два контура: основной контур управления и контур адаптации или самонастройки. В регуляторе есть параметры, которые всегда постоянные; есть часть параметров, которые изменяются, например, параметры корректирующих звеньев.

Работа системы. Входной сигнал $u(t)$ подается в основной контур управления (на регулятор) и на контур адаптации (на блок оценки внешних воздействий (ОВВ)). Одновременно на ОВВ поступают сигналы тех возмущающих воздействий, которые действуют на объект управления, и определяется оптимальной заданный критерий качества $U_{зад}$.

Выходной сигнал с основного контура $x(t)$ подается на блок оценки процесса управления (ОПУ) и определяется действительный показатель качества $U_{дей}$. Эти два показателя качества регулирования поступающей на ЭВМ, которая анализирует полученные данные и дает команду в виде $\pm\Delta U$ на исполнительное устройство (ИУ), которое производит изменения параметров регулятора. Это исполнительное устройство (ИУ) обычно представляет собой звено интегрирующего типа. Оно изменяет настройку регулятора в направлении соответствующем знаку отклонения ΔU . В качестве настроенных параметров регулятора, обычно используются коэффициенты усиления и постоянные времени корректирующих звеньев.

Работа контура адаптации еще более упрощается и качество её работы улучшается, если для анализа динамических характеристик регулятора применить специальные *пробные сигналы*. В качестве пробных сигналов применяются ступенчатые, импульсные, гармонические сигналы. Выбор пробного сигнала определяется видом критерия качества, то есть теми динамическим характеристикам, которые необходимо контролировать. Например, колебательность системы может быть оценена числом колебаний за время переходного процесса, или степенью затухания колебаний, или периодом колебаний.

Функциональная схема такой СНС принципиально остается такой же, как на рисунке 3.8. Отличие в том, что имеется генератор пробных сигналов (Г), который подает сигналы на ОВВ и на вход системы. Сигнал управления

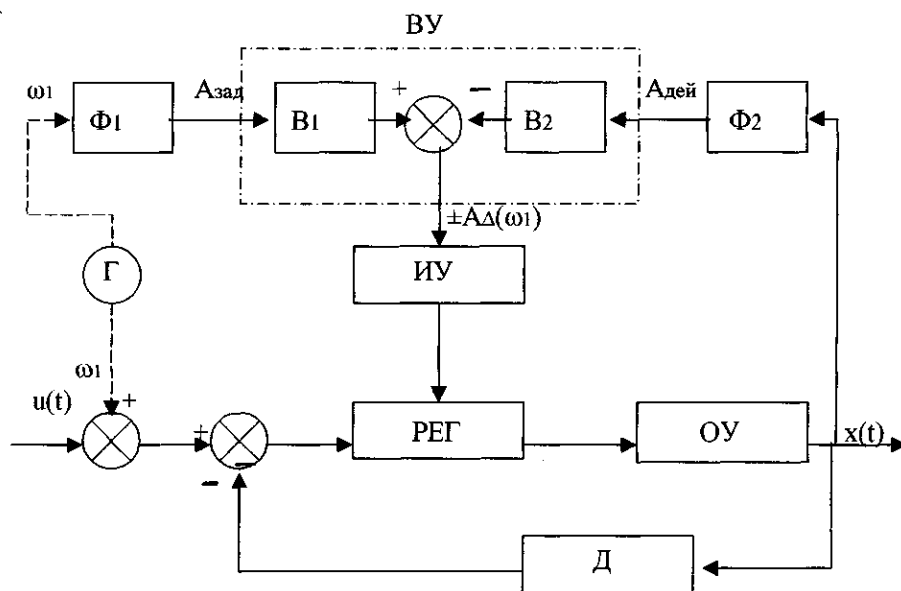
$u(t)$ на ОВВ не подастся, так как заданный критерий качества $U_{зад}$ определяется в ОВВ по параметрам пробного сигнала. С выхода системы сигнал подаётся на ОПУ и определяется $U_{дей}$. Для этого в ОПУ имеется детектор для выделения из общего выходного сигнала составляющей пробного сигнала. Контур адаптации работает периодически и выдает сигналы на ИУ с определенной частотой следования.

Вместо косвенных показателей качества переходного процесса стабилизацию параметров системы можно проводить по амплитудно-частотным характеристикам (АЧХ). В этом случае стабилизируют частотную характеристику в отдельных, заранее определенных точках. Для каждой точки имеется заданная частота, например, частота, соответствующая максимуму АЧХ, или частота пропускания, или предельная частота и т.д. Иногда бывает достаточно провести стабилизацию только по одной частоте. Можно стабилизировать параметры регулятора по фазо-частотной характеристике (ФЧХ), но технически это сложнее и используется реже. Необходимость контролировать сразу обе частотные характеристики (амплитудную и фазовую) возникает в случае неминимально-фазовых систем. В минимально-фазовых системах амплитудная и фазовая характеристика однозначно связана. Поэтому достаточно знать значение амплитуды при данной частоте и однозначно определяется фаза. В неминимально-фазовых системах, которая описывается неустойчивым звеном, эта связь неоднозначна и в таких системах необходимо контролировать и фазу, и амплитуду.

На рисунке 3.9 показана функциональная схема СМС со стабилизацией динамической системы по одной точке амплитудно-частотной характеристике, соответствующей частоте ω_1 .

Работа системы. Генератор пробных сигналов подает сигналы с частотой ω_1 на Φ_1 и в систему управления. Фильтр Φ_1 представляет собой эталонную модель, ордината амплитудной характеристики которой на частоте ω_1 соответствует требуемой величине ($A_{зад}$). Выходной сигнал $x(t)$ подается на узкополосный фильтр Φ_2 , где происходит выделение амплитуды колебательной составляющей выходного сигнала ($A_{дей}$) с частотой ω_1 . Вычислительное устройство

(ВУ) состоит из двух выпрямителей (B_1 и B_2) и элемента сравнения, на выходе которого получается сигнал, пропорциональный отклонению ординаты действительной амплитудной характеристики $A_{дей}$ от ординаты эталонной амплитудной характеристики $A_{зад}$. Исполнительное устройство (ИУ) изменяет параметры регулятора согласно величине отклонения $\Delta A(\omega_1)$ амплитудной характеристики.



Γ - генератор пробных сигналов;

Φ_1 - эталонная модель;

Φ_2 - узкополосный фильтр;

B_1 и B_2 – выпрямители;

ВУ - вычислительное устройство;

ИУ - исполнительное устройство.

Рисунок 3.9 - Функциональная схема СНС со стабилизацией по амплитудной характеристике

Для стабилизации нескольких точек амплитудной характеристики применяют соответствующее количество таких контуров адаптации, каждый из которых работает на своей частоте. И каждый контур имеет свое исполнительное устройство, которое воздействует на свой встроенный параметр. Таким образом, общее число контуров адаптации равно числу контролируемых точек по амплитудной характеристике.

Для работы все системы иногда можно ограничиться стабилизацией части системы. Это значительно проще и контур адаптации работает надежнее.

К контуру адаптации предъявляются следующие требования:

- быстродействие контура самонастройки должно быть значительно больше, чем быстродействие контура управления;
- пробные сигналы должны быть достаточно малы, так как то фактически помехи для работы основной САУ;

- для обеспечения надежности работы системы регулятор имеет кроме варьировемы параметров так же и неизменяемую часть своих параметров. Это позволяет системе при выходе из строя контура адаптации сохранить свою работоспособность. Пусть даже с отклонением от оптимального режима.

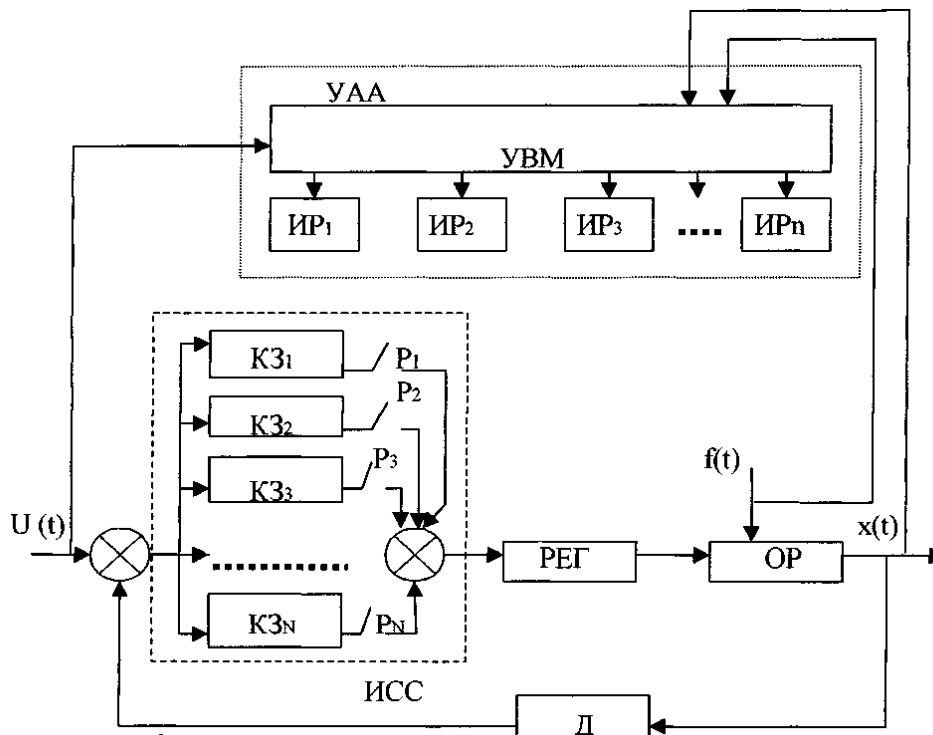
3.5.2 Самоорганизующиеся системы автоматического управления (СОС)

Самоорганизующиеся САУ - это системы, в которых адаптация осуществляется путем изменения структурной схемы основного контура управления. Такое структурное изменение производится путем отключения некоторых корректирующих звеньев и включение других звеньев (рисунок 3.10). Таким образом, в самоорганизующихся системах сигналы управления являются дискретными сигналами, и каждому значению дискретного сигнала соответствует определенная структура основного контура управления. Очевидно, что пределы изменения алгоритма управления в таких системах намного шире, чем в самонастраивающейся системе и для выбора каждого варианта структуры необходимо подходить более строго. В таких системах имеется управляющая вычислительная машина (УВМ) с анализатором качества управления, оптимизатор поиска структуры с банком данных, блок принятия решений, логическое устройство и др. Функциональная схема самоорганизующейся САУ показана на рисунке 3.10.

В общем, случаи возможно последовательное, параллельное подключение и комплексное. Самая сильная коррекция происходит, если корректирую-

щие звенья включены в главную обратную связь. Возможна комбинация в работе самоорганизующейся системы, когда после выбора корректирующего звена происходит самонастройка параметров этого звена. Таким образом, адаптация системы к изменяющимся условиям работы происходит в два этапа:

- выбор корректирующего звена;
- самонастройка параметров в выбранном звене.



УУА - управляющее устройство адаптации;

УВМ - управляющая вычислительная машина ;

ИР₁...ИР_n - исполнительные реле P₁ ... P_n ;

КЗ₁...КЗ_n- корректирующие звенья;

ИСС - изменяемая структурная схема основного контура управления САУ .

Рисунок 3.10 – Функциональная схема СОС

3.5.3 Самообучающиеся системы автоматического управления (СОБС)

Рассмотренные выше адаптивные системы имеют один общий недостаток - они не запоминают свои оптимальные решения и после нового вида управляющего воздействия или при изменении внешних условий все свои вычисле-

ния начинают, так сказать «с чистого листа», заново. Хотя перед этим и был вариант оптимального решения по возникшей проблеме.

В самом общем случае под самоорганизующейся системой понимают такую систему, в которой упорядоченность, организованность со временем возрастает. То есть, в исходном состоянии она представляет собой совокупность элементов слабо связанных между собой или даже связанных случайным образом. Затем в результате работы системы управления постепенно возникают стойкие связи между элементами, возникает определенная структура. Таким образом, важнейшим свойством самоорганизующейся системы является их способность к самоорганизации или самообучению.

Самообучающиеся САУ - это высший тип адаптивных систем, приближающийся по своим принципиальным возможностям до "мыслительных" способностей человека. Но в начале систему надо научить работать! "Обучение" таких систем и дрессировка животных имеет много общего. Для дрессировки животных им многократно подают команду и показывают, что надо делать. В самообучающихся САУ вначале показывают ситуации и дают правильные решения. По мере нормальной работы система уже сама самостоятельно запоминает новые правильные решения. Таким образом, самообучающаяся САУ должна выполнять две функции.

Первая - определять правильные (лучше оптимальные) решения.

Вторая - запоминать эти решения.

Для этого такая САУ должна иметь несколько контуров адаптации (или самонастройки). Первый контур - анализирует ситуацию в основном контуре управления и принимает решения по качеству принимаемого решения. Вторым контуром - анализирует решение первого контура по заданным критериям качества управления и выбирает лучшее решение. Третий контур запоминает полученное решение. Поэтому третий контур адаптации должен обладать памятью. В работе такой системы устанавливается определенная временная последовательность. Вначале должен отработать первый контур самонастройки и принять решение по адаптации системы. Его работу анализирует второй контур и

выдает рекомендации для более точной самонастройки. Поэтому второй контур адаптации должен обладать меньшим быстродействием, чем первый контур. Второму контуру надо дать время «подумать», чтобы потом окончательно принять решение.

В общем случае система может иметь несколько контуров адаптации:

- 1 контур - решает задачу адаптации системы управления;
- 2 контур - оценивает качество адаптации по первому контуру;
- 3 контур - оценивает надежность выбранных решений второго контура;
- 4 контур - оценивает экономическую целесообразность выбранного критерия качества регулирования и т.д.

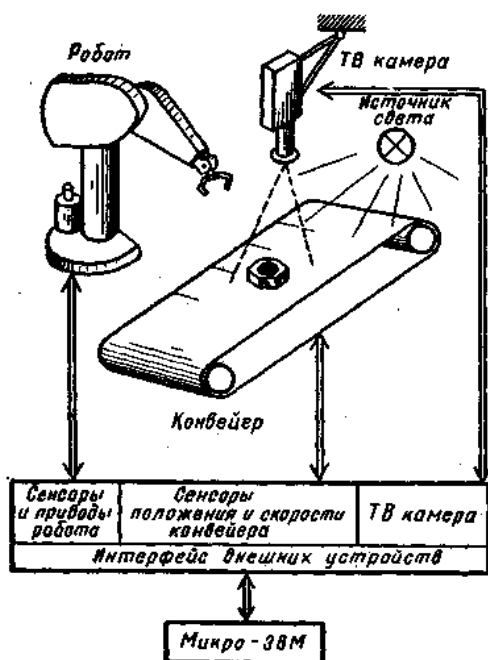
n контур – «запоминает» лучшее решение возникшей проблемы управления и «забывает» предыдущее менее эффективное решение этой проблемы. По запросу от первого контура он сразу выдаёт «готовое решение», минуя все остальные контуры.

Применение такой многоконтурной системы адаптации не означает, что каждый контур должен иметь свою ЭВМ и свою программу. Разделение по контурам - это условное разделение, чтобы лучше разобраться в алгоритме работы самообучающейся САУ. А практически имеется единая ЭВМ и одна программа с разветвлениями типа «если-то». По мере накопления материалов она наполняется, набором готовых решений и таким образом система «умнеет».

Во всех способах самообучения есть общая черта – постепенное выделение «области знаний» из всех совокупностей «области незнаний». Такая адаптивная система называется *автоматическая система распознавания образа* (или система классификации). Задачи распознавания образа встречаются не только в технических системах, но и в таких областях, как медицинская диагностика, прогнозирование погоды, геологическая разведка месторождений и т.д. Задача автоматического обучения распознавания образов формируется следующим образом. Каждой возможной ситуации из множества рассматриваемых ставится в соответствии точка x_i . Необходимо выделить области расположения каждого вида точек x_i из большого числа областей их нахождения. Расположе-

ние границ между областями неизвестно. Цель обучения заключается в определение областей расположения этих точек, то есть в определении границ между ними.

Есть два подхода к созданию такой самообучающейся системы. При обучении методом «поощрение-наказание» автомату предъявляют ряд случайных точек из множества рассматриваемых с информацией о принадлежности каждой точки определённому классу. Требуется только определить границы области их расположения. При обучении без поощрения задача более сложная. Информация о принадлежности каждой точки отсутствует. Но автомату показывают образцы точек, а он должен найти их в заданном пространстве и определить



границы их расположения (подробнее смотри раздел 4.3). Такие самообучающиеся системы есть у роботов с искусственным интеллектом. На рисунке 3.11 показана общая схема работы робота с телевизионным визуальным осязанием [1]. Назначение робота: найти и снять с движущейся конвейерной ленты произвольно ориентированную деталь и перенести её на заданное место. Для решения этой задачи необходимо

Рисунок 3.11 – Схема работы робота с телевизионным визуальным осязанием

- воспринять изображение детали телекамерой;
- разложить полученное изображение на информационные области;

- распознать деталь согласно описанию образа детали;
- интерпретировать полученный образ детали в необходимые команды управления;
- обеспечить управление за движением руки робота.

Самообучающиеся системы при выполнении этих процедур имеет сле-

дующие устройства: средство оучувствления робота, средство обработки полученной информации, устройство адаптивного движения робота.

Средство оучувствления робота позволяют определить расположение внешних предметов и координировать свои движения среди них. Датчики информации для этих целей называются сенсорными устройствами или сенсорами. Робот с помощью сенсоров получает информацию об окружающем пространстве, регистрирует его геометрические, физические, химические свойства, а так же скорость перемещения по каждой степени свободы, необходимое ускорение или торможение звеньев манипулятора.

Большинство сенсорных датчиков имеют телевизионное визуальное оучувствление, которое преобразует световые сигналы отражения с исследуемого предмета в аналоговые электрические сигналы. При этом важно обеспечить диффузионное освещения, т.е. освещение рассеянным светом с различных сторон, чтобы не было бликов при отражении и затемнения отдельных поверхностей предметов.

Обработка информации позволяет преобразовать полученное изображение для ЭВМ. Это проводится в два этапа: вначале обрабатывается полученный аналоговый сигнал для выделения границ исследуемого предмета (или свойства). Затем изображение дискретно сканируется специально формируемой маской. По разрывам изображения под маской вычисляется значение градиента, и в результате этого от изображения сохраняются только контурные кривые в местах резкого изменения интенсивности изображения. Это сокращает объём информации вводной в ЭВМ.

Устройство адаптивного движения – это распознавание образов, отнесение их к разным классам. Полученные образы преобразуются в команды согласно заданной программе работы робота и обеспечивает заданную форму его движения.

В настоящее время самообучающиеся системы находят применение в таких объектах, где ход регулирования технологического процесса может изменяться скачками, например, при производстве бурильных работ, в металлургии-

ческом производстве, в некоторых видах химического производства, в которых надо распознать ход процесса управления.

3.5.4 Особенности расчета адаптивных систем

При расчете адаптивных систем могут быть использованы те же методы расчета, который применяется при расчете САУ. Особенность применения этих методов связано с особенностью работы контуров адаптации и сводится к следующему:

1 Адаптивная система является многомерной и многоконтурной системой связанного управления. В самонастраивающейся системе это показано на рисунке 3.8. Регулятор является исполнительным органом для основного контура управления объектом, одновременно он сам может быть объектом регулирования для контура адаптации. Кроме этого, контуры адаптации связаны с основным контуром многомерными связями.

2 Параметры основного контура и контура адаптации изменяется в значительной степени, что вытекает из сущности процесса адаптации. При этом можно использовать метод «замороженных коэффициентов», но встает проблема «сшивки» полученных частных решений.

3 Требуется учитывать наличие существенной нелинейности в контуре адаптации и связанная с этим возникновение автоколебаний в системе.

4 Необходимо учитывать, что в общем случае в адаптивных системах возникают нестационарные процессы. Это связано с изменением во времени ее свойств. Расчет существенно упрощается, если контуры основной САУ и контуры адаптации можно рассматривать как *квазистационарные* (независимые от времени). Для многих систем эти допущения приемлемы.

5 Управляющие воздействия и возмущающие воздействия в общем случае является случайными процессами, поэтому во многих случаях адекватный расчет адаптивной систем будет, если ее рассматривать как стохастическую систему.

Исходя из вышеизложенного, для расчета адаптивных систем применяются

следующие методы расчета:

- 1) амплитудно-частотный метод;
- 2) метод фазового пространства;
- 3) графоаналитический метод;
- 4) статистический метод.

Задачи исследования СНС. По заданному критерию качества работы системы определить алгоритм работы контура адаптации с учетом возможных помех и других случайных факторов. Эта задача в общем виде является сложной вариационной задачей с рядом ограничений. Если требуется определить показатели установившегося режима, то задача фактически сводится к поддержанию экстремума по заданному критерию качества.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.5

- 1 Назначение самонастраивающихся систем автоматического управления (СНС).
- 2 Алгоритм работы СНС без эталонной системы модели.
- 3 Алгоритм работы СНС с эталонной моделью.
- 4 Алгоритм работы СНС с пробным сигналом
- 5 Со стабилизацией по амплитудной характеристике.
- 6 Отличительная особенность самоорганизующейся системы (СОС) по сравнению с СНС.
- 7 Отличительная особенность самообучающейся системы (СОБС) от СНС и СОС.
- 8 Зачем в СОБС несколько контуров адаптации.
- 9 Отличие СОБС при обучении методом «поощрение-наказание» и при обучении без поощрения.
- 10 Какие устройства имеет робот с телевизионным визуальным чувствованием для своего самообучения.
- 11 Особенности расчёта СНС.
- 12 Методы расчёта СНС.

4 Кибернетические системы (КС)

4.1 Основные положения

Появление ЭВМ ознаменовало начало второй научно-технической революции (середина XX века). Это внедрение вычислительной техники в процесс управления производством, то есть помощь умственной деятельности человека при управлении сложными процессами.

Первая техническая революция (середина XIX века) обеспечила механизацию в различных областях производства, то есть замена мускульной силы человека машинной, которая использует природные энергетические ресурсы (тепло, силу ветра, силу падающей воды и т. д.). Революция - это коренное изменение в научных взглядах, в технических решениях, в постановке задач управления и, вследствие всего этого, в самой жизни человека. Сравним эти два этапа развития производства.

Первая техническая революция касалась *энергетической стороны производства*, рассматривались способы замены мускульной силы человека. Всё шире стала использоваться тепловая энергия (паровозы, пароходы и даже паросамолёт Можайского). Затем на смену стала приходить электрическая энергия (электровозы, электроприводы станков, судов и т. д.), далее атомная энергия (атомный ледокол, атомная электростанция). Дальнейшее ещё более широкое использование природной энергии стало тормозиться проблемой управления возрастающего потока энергии. Существующие регуляторы, начиная с регулятора Уатта (1784 г.) уже не обеспечивали необходимое управление.

Вторая техническая революция затронула в основном *информационный аспект проблемы управления*. Началась замена человека в управлении мощными энергетическими объектами, в которых технологические процессы не всегда полностью наблюдаемые и могут меняться случайным образом. Это атомные электростанции, доменные печи, химические реакторы и т. д.

Применение ЭВМ способствовало частичной замене человека в процессе управления, позволило в десятки и сотни раз повысить процесс получения необходимой информации. Таким образом, если первая техническая революция

явилась «усилителем мускульной силы человека», то вторая техническая революция стала «усилителем умственных способностей человека», повышением его интеллектуальных возможностей путём создания специальных кибернетических систем.

Слово *кибернетика* является составным словом от двух греческих слов:

кибер - над, старший;

наутис - исполнитель, порядок;

кйбернаутис - над исполнителем, управляющий.

В современном понятии кибернетика - искусство управлять

Кибернетика - наука о преобразовании информации с целью определения управляющих воздействий

Методологической основой кибернетики послужила книга Р. Винера «Кибернетика или управление и связь в животном и машине» (1948 г.). Рассмотрим основной тезис Р. Винера

Процессы управления, где бы они не происходили, в живом организме, обществе или машине подчиняются одним и тем же законам.

Современное развитие науки и техники показало правильность этого неожиданного тезиса.

Во-первых, любое развитие имеет свои этапы, свои закономерности. Учёные постоянно ищут эти законы развития (учение Дарвина, Павлова, Моргана, Мичурина, Маркса и т. д.).

Во-вторых, есть многочисленные подтверждения единства этих законов развития и их взаимосвязь. Например, некоторые аспекты управления в живом организме успешно используются в технике и создана целая наука «биотехнология».

В-третьих, если есть единство законов развития, если их можно определить, то возможно предвидеть дальнейшее развитие процесса. А если можно предвидеть, то можно и управлять.

Главная особенность кибернетики – информационный подход к процессу

управления. В любой системе, где есть обработка информации - есть элементы кибернетики. Автоматизированные методы обработки информации, разработанные в кибернетике, сейчас имеют отношение к любой профессии (плановик, физик, технолог, администратор, геолог, штурман и т. д.). Это придаёт кибернетике универсальный характер и возводит её в категорию фундаментальных наук.

Особенность кибернетики в системном подходе к исследованию процесса управления. Системность предполагает единое комплексное рассмотрение процесса управления в целом и представляет сложное переплетение организационных, информационных, математических и технических средств.

Первый этап системного подхода заключается в уточнении функциональной схемы взаимодействия составных частей системы и анализ объёма информации, циркулирующей в ней.

Второй этап в создании информационного обеспечения в функциональных подсистемах с оптимальным перераспределением имеющихся ресурсов (энергетических, финансовых, временных, материальных и т. д.).

Третий этап - в определении оптимального управления этими процессами.

Другая особенность кибернетических систем состоит в создании системы нового типа - биосистемы в виде оператор и ЭВМ. Возникает много проблем во «взаимопонимании» такой системы, учитывая, что обработка информации в голове у человека идёт медленнее и по «другой технологии», чем в электронных системах ЭВМ. И, наконец, в распределении «обязанностей», в определении кто за что отвечает. В начале работы, пока ЭВМ не получила «производственного опыта», основу управления берёт на себя оператор. Затем, когда ЭВМ «разобралась» во многих ситуациях, часть функций управления дополнительно переходят к ней. И уже ЭВМ может предотвратить некоторые нечёткие решения оператора. Уже оператор кое-чему учится у ЭВМ.

Ещё одна особенность кибернетических систем - *определение критерия управления*. Критерий управления в кибернетике обычно не записывается в интегральной форме, а формируется в виде понятия «цель управления». Дается

перечень ограничений на процесс управления и на его параметры. Модель объекта управления не всегда задаётся в виде дифференциальных уравнений, а *формируется на содержательном уровне*, то есть даётся словесное описание процесса и требования к его протеканию. Решение находят методом итераций, когда вначале определяется приближённое решение, затем его уточнение [15].

Развитие ТАУ происходит на основе *концепции детерминизма*, утверждающей, что без алгоритмизации, без составления математического или вообще без формального описания объекта управления управлять невозможно. Концепцию детерминизма в ТАУ кратко можно выразить так.

Автоматика – это прежде всего алгоритмизация объекта управления.

Обычные автоматические системы содержат только управляющие устройства, оптимальные системы управления дополнительно содержат устройство автоматической адаптации для управления алгоритмизируемыми объектами. Это позволяет решать всё более сложные задачи управления. Математический аппарат по алгоритмизации объекта управления непрерывно развивается, однако уже сейчас чувствуется границы его применимости. Некоторые учёные (например, Стеффорд Бир) считают, что весьма сложные вероятностные системы, такие как, например, экономика, биологические процессы, алгоритмизировать невозможно, и поэтому управлять невозможно. Они самоорганизуются по своим непредсказуемым законам.

Кибернетика начинается там, где кончается возможность алгоритмизации объекта управления.

Что значит алгоритмизация объекта управления? Это выявление причинно-следственных связей, типа «если-то». Однако при рассмотрении сложных систем возникают зависимости типа дизъюнкции («или») и более сложные («возможно», «может быть») и поэтому детерминированный подход исключается. Возможный выход - использовать методы теории вероятности. Но и этот метод не всегда подходит, если характеристика объекта не подчиняется ни ка-

кому закону распределения.

Опыт создания кибернетических систем управления показал, что в этих системах есть и детерминизированные зависимости, которые можно определить и, следовательно, математически описать. Всё, что априорно известно об объекте, необходимо использовать. Следовательно, сложная кибернетическая система должна быть комбинированной, детерминированно-самоорганизующейся системой (ДСС). Детерминированная часть системы может быть математически описана. Она обеспечивает быстрое, но грубое управление. Самоорганизующаяся часть кибернетической системы аналогична корректору, который с помощью обратной связи исправляет возникшие погрешности управления. Обратная связь в кибернетической системе – это достаточно сложная система, она может быть комбинированной, получать информацию от датчиков возмущающих воздействий, от датчиков промежуточных и выходных величин. Всё это позволяет управлять объектом, который не поддаётся алгоритмизации.

Некоторые выводы по кибернетическим системам.

1 Многие считают, что задачи управления кибернетической системой можно решить на ЭВМ, которая имеет достаточный объём памяти и быстродействие.

Это идея прямой причинно-следственной подчинённости. Рассчитывать все варианты в кибернетической системе невозможно.

2 Другие считают, что в детерминированном объекте никакие зависимости определить невозможно, это «чёрный ящик», о котором ничего неизвестно.

Это зависит от сложности поставленной задачи, от степени идеализации процесса. Общие закономерности в детерминированном объекте можно алгоритмизировать.

3 Основной кибернетической системы является обратные связи, которые:

- независимо от алгоритмизации объекта могут поддерживать постоянство регулируемой величины;

- действуют на следствия, без определения причин возникновения этого

следствия;

- могут самообучаться в процессе работы и улучшать качество управления.

Кибернетическая система – это самоорганизующаяся система со сложными непредсказуемыми связями внутри себя. Она способна самостоятельно определять оптимальное управление. За человеком остаётся постановка цели и определение критерия качества. «Что делать» - решает человек, «как делать» - определяет сама система.

Кибернетика – наука о комбинированных детерминированно-само-настраивающихся системах, требующих минимума указаний от человека.

Кибернетика – сравнительно молодая и бурно развивающаяся наука. В дальнейшем рассмотрим её основные разделы: системы массового обслуживания, методы распознавания образов, системы искусственного интеллекта.

Вопросы для самоконтроля к разделу 4.1

- 1 В чём заключается первая техническая революция?
- 2 В чём заключается вторая техническая революция?
- 3 Что такое кибернетика?
- 4 На каком тезисе Р. Винера основана кибернетика?
- 5 В чём главная особенность кибернетики?
- 6 Что значит системный подход к процессу управления?
- 7 Что такое биосистема?
- 8 В чём особенность определения критерия управления в кибернетики?
- 9 В чём заключается концепция детерминизма?
- 10 В чём основа алгоритмизации объекта управления?
- 11 Что значит детерминировано-самоорганизующаяся система (ДСС)?
- 12 Роль главной обратной связи в кибернетической системе.

4.2 Система массового обслуживания [СМО]

4.2.1 Общие положения

Большое место в кибернетике занимают вероятностные кибернетические модели, в которых имеется случайный характер изменения входных воздействий и случайный характер изменения её работы или её работоспособность. Примером вероятностной модели может быть поток пассажиров в троллейбус и время их в пути, или поток покупателей в магазине и время их обслуживания, или возникновение неисправностей в системе и время их устранения и т.д. В общем случае этот входной поток называется поступлением заявки. Изменения параметров системы можно рассматривать как изменения скорости обслуживания заявок, которая тоже носит случайный характер. Поэтому решение проблемы управления проводится через вероятностные величины (среднее значения, дисперсия, вероятность поступление «n» заявок за время t, вероятность обслуживания за время t и другие). Определив такие вероятностные параметры, можно оценить работу системы и определить способы управления процессом.

В качестве основного критерия оценки качества работы системы, используется вероятность надёжной её работы или вероятность выполнения поставленной задачи. Надежность работы сложного устройства зависит от надежности работы его отдельных частей. В случаи независимости в работе отдельных частей системы общая вероятность надёжной работы определяется:

$$P_{общ} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \dots P_n,$$

где P_i - вероятность надёжной работы отдельных частей системы.

Для получения высокой вероятности $P_{общ}$ необходимо чтобы значения вероятностей надёжной работы каждой части системы были максимально близки друг к другу. Технически неправильно повышать вероятность надёжности одного устройства, если другое имеет низкое значение P_i . В этом и состоит смысл оптимального проектирования сложных вероятностных систем.

4.2.2 Классификация СМО

В теории массового обслуживания водится понятие потока событий.

Потоком событий называется последовательность событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.

Потоки событий обладают свойствами, которые позволяют различать разные типы потоков.

Марковские, когда в любой момент времени закономерность следования заявок не зависит от предшествующей закономерности следования заявок.

Немарковские, когда закономерность следования заявок в данный момент времени зависит от предшествующей закономерности следования заявок.

Одноканальные, когда поток заявок обслуживает один канал (например, один врач, один парикмахер и т.д.).

Многоканальные, когда поток заявок обслуживаются по многим параллельным каналам (например, несколько контролёров на вход в парк, несколько заправочных колонок на заправке, несколько продавцов одного товара и т.д.).

Ординарный, когда за малый промежуток времени Δt появление 2^x и более событий маловероятно (например, парикмахер не может одновременно стричь 2 и более клиентов).

Неординарный, когда за малый промежуток времени обслуживаются сразу « n » клиентов или происходит « n » событий (например, при обмене квартиры присутствует хозяева и члены семьи, заинтересованные в обмене).

Стационарный, когда вероятность появления события зависит только от интервала времени и не зависит от расположения этого интервала на оси времени.

Нестационарные, когда вероятность появления событий зависит не только от интервала времени, но и от расположения этого интервала на оси времени (например, поток пассажиров на автобус за время равное 10 минут утром и днем отличается).

Без последствия, когда для двух не пересекаемых интервалов време-

ни вероятность событий на втором интервале не зависит от вероятности появления событий на первом интервале.

С последствием, когда для двух не пересекаемых интервалов времени вероятность появления событий на втором интервале зависит от вероятности появления событий на первом (предыдущем) интервале (например, поток пассажиров входящих на станцию метро - без последствия и зависит только от интервала времени. Поток пассажиров выходящих со станции метро с последствием, зависит от момента прихода поезда и расположения этих интервалов времени).

Однофазный, когда производится одна операция (например, при контроле проверяется один размер детали).

Многофазный, когда производится несколько операций (например, при контроле проверяется несколько размеров детали последовательно).

Однородный, когда поток заявок идёт строго последовательно, в порядке поступления.

Неоднородный, когда из потока заявок выделяются отдельные, которые идут в первую очередь или даже в не очереди (например, скоропортящиеся продукты оформляются и разгружаются в первую очередь или когда инвалиды войны обслуживаются в поликлинике вне очереди).

4.2.3 Пуассоновский поток поступления заявок

Этот пуассоновский или простейший поток занимает центральное место в расчёте СМО. Более того, другие потоки для упрощения расчёта стараются представить как пуассоновские. Такой поток должен обладать тремя свойствами:

а) ординарность - вероятность появления событий не зависит от его расположения на интервале времени;

б) стационарность - вероятность появления событий зависит только от интервала времени;

в) без последствия - вероятность появления событий на любом

интервале не зависит от предыдущего.

Определим вероятность отсутствия события за время $t = 1$. Разделим это время на n интервалов. Вероятность того, что на каждом элементарном интервале времени $1/n$ не появится событие, равно $P_0(1/n)$. Вероятность не появления событий на всём единичном интервале равна

$$P(1) = (P_0(1/n))^n.$$

Введём обозначение $P(1) = Q$, тогда $P_0(1/n) = Q^{1/n}$.

Увеличим количество интервалов в k раз, тогда

$$P_0(k/n) = Q^{k/n}.$$

Пусть промежуток времени равен $\tau = k/n$ тогда

$$P_0(\tau) = Q^\tau.$$

Причём, так как Q - вероятность не появления события на интервале от 0 до 1, то

$$Q = e^{-\lambda},$$

где λ , - среднее число событий в единицу времени.

Если обозначить через T интервал между событиями, то вероятность не наступления события за заданное время t

$$P_0(T > t) = e^{-\lambda t}.$$

Отсюда вероятность наступления события на интервале t

$$P(T > t) = 1 - P_0(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Вероятность поступления не менее 1 события на интервале t

$$P(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Вероятность поступления не более 1 события на интервале t

$$P(t, 1) = P_0(t) + P_1(t) = e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t},$$

где $P_0(t)$ – не поступления события;

$P_1(t)$ – поступления одного события.

Вероятность поступления не более « n » событий на интервале t .

$$P(t, n) = P_0(t) + e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^n (\lambda t)^n \cdot \frac{n}{n!}.$$

Математическое ожидание числа событий на интервале t

$$m = \lambda t.$$

Пример 4.1 - В магазин в среднем приходит 30 человек в час. Определить различные вероятности событий за 5 минут.

РЕШЕНИЕ

1 Интенсивность прихода заявок в минуту $\lambda = 30/60 = 0,5$ / мин.

2 Математическое ожидание количества покупателей (среднее за 5 минут)

$$m = \lambda t = 0,5 \cdot 5 = 2,5 \text{ чел.}$$

3 Вероятность отсутствия покупателей $P(5,0) = e^{-\lambda t} = e^{-0,5} = 0,082$

4 Вероятность, что придёт 1 покупатель $P(1) = \lambda t e^{-\lambda t} = 0,5 \cdot 5 \cdot e^{-0,5 \cdot 5} = 0,205$

5 Вероятность, что придёт не более 1 покупателя

$$P(0,1) = e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} = 0,082 + 0,205 = 0,287.$$

6 Вероятность, что придёт не более 6 покупателей (таблица 4.1)

$$\begin{aligned} P(0,6) &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} [\lambda t (1/1) + \lambda t (2/2!) + \lambda t (3/3!) + \lambda t (4/4!) + \lambda t (5/5!) + \lambda t (6/6!)] = \\ &= e^{-2,5} + e^{-2,5} [2,5 + 2,5(2/2) + 2,5(3/6) + 2,5(4/24) + 2,5(5/120) + 2,5(6/720)] = \\ &= 0,948. \end{aligned}$$

7 Вероятность, что придёт не менее 4 и не более 6 покупателей

$$p(4-6) = e^{-\lambda t} [\lambda t (4/4!) + \lambda t (5/5!) + \lambda t (6/6!)] = 0,13 + 0,06 + 0,026 = 0,216.$$

Таблица 4.1 - Вероятность прихода покупателей

количество покупателей (п)	0	1	2	3	4	5	6	\sum_0^6
вероятность этого события)	0,082	0,2	0,25	0,21	0,13	0,06	0,026	0,948

4.2.4 Обслуживания заявок при многоканальном СМО

Марковские системы массового обслуживания занимают в теории массового обслуживания такое же место, как линейные системы в теории автоматического управления. Это наиболее простые расчеты СМО.

Для того чтобы система осталась марковской, дисциплина очереди и закон обслуживания должны быть подчинены, определенным условиям.

Рассмотрим вначале закон обслуживания. Чаще всего встречается *экспоненциальный закон обслуживания*. Это закон обслуживания клиентов (в магазине, в парикмахерской, на заправке автомашин); это отыскание неисправности методом проб и ошибок (например, ремонт телевизоров). Схематично процесс обслуживания показан на рисунке 4.1

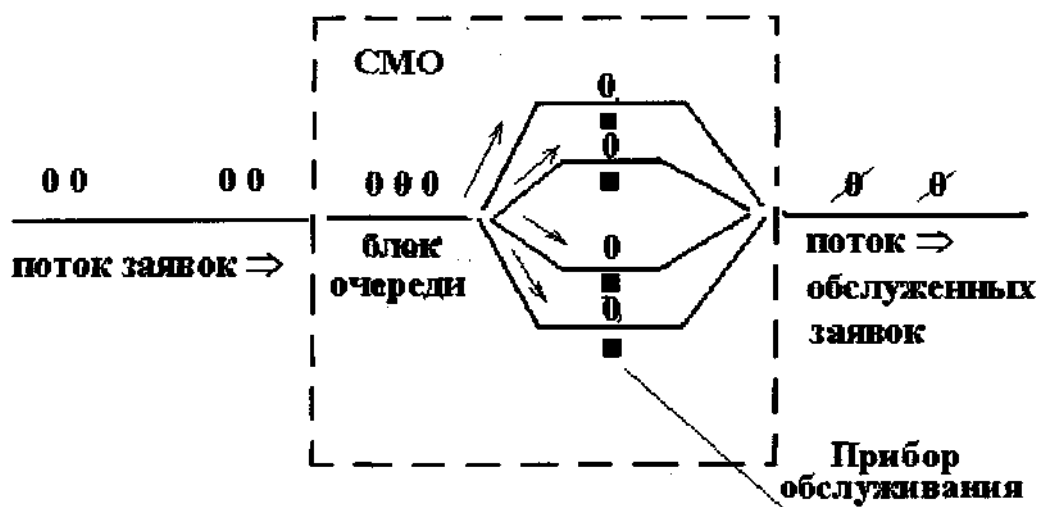


Рисунок 4.1- Схема обслуживания заявок в 4-х канальной СМО

Для расчета марковского процесса принимаем, что входной поток - простейший, пуассоновский. Обслуживание экспоненциальное, однофазное, ординарное

Введем коэффициент μ - *интенсивность обслуживания в единицу времени*. Тогда $\Delta t_{обс} = 1/\mu$ - среднее время обслуживания одной заявки.

Напомним, что λ - *интенсивность прихода заявок* и $\Delta t_{заяв} = 1/\lambda$ - среднее время между поступлением следующей заявки.

В дальнейших расчётах понадобится коэффициент *степень насыщения СМО* или *приведённая плотность потока*. Её можно охарактеризовать как среднее число вновь поступивших заявок за время обслуживания одной заявки.

По мере поступления заявок (с одной стороны) и в процессе их обслуживания при «n» приборов обслуживания (с другой стороны) состояние СМО может измениться.

Вначале необходимо определить установившейся режим работы

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{\varphi^i}{i!} + \frac{\varphi^{r_0+1}}{n!(r_0 - \varphi)}}$$

где $\varphi = \lambda/\mu$ - степень насыщения СМО;

n - количество приборов обслуживания;

r_0 - ожидаемое количество заявок в очереди.

Затем определяется $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ - вероятность перехода в другое состояние путём подключения одного, трёх... и n приборов обслуживания

$$P_1 = P_0 \cdot 1;$$

$$P_2 = P_0 \cdot 2^2 / 2!;$$

$$P_3 = P_0 \cdot 2^3 / 3!;$$

.....

$$P_n = P_0 \cdot 2^n / n!.$$

Вероятность отсутствия очереди при работе от 0 до 4 колонок

$$P_{\Sigma} = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Потом определяется $P_{r1}, P_{r2}, P_{r3}, \dots, P_{rm}$ вероятность возникновения очереди в количестве $1, 2, 3, \dots, m$ заявок при работе всех n колонок

$$P_{\Sigma r_0} (r < r_m) = P_n \cdot \left(\frac{\varphi}{r_0} \right)^{r_i},$$

где $r_i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Тогда вероятность нахождения в очереди более r_0 заявок

$$P(r > r_0) = 1 - P_{\Sigma n} - P_{\Sigma r_0},$$

где $P_{\Sigma n}$ - обслуживание заявок без очереди;

$P_{\Sigma r_0}$ - обслуживание заявок с очередью, при $r \leq r_0$.

Пример 4.2 - На заправочную станцию в среднем приезжают 2 машины в минуту. Время обслуживания одной заправочной колонкой 1 мин. Определить вероятность возникновения очереди в три машины, если работает 4 колонки.

Определить вероятность отсутствия очереди.

РЕШЕНИЕ

1 Определяем параметры СМО:

- а) λ - интенсивность прихода заявок $\lambda = 2$ 1/мин;
- б) μ - интенсивность обслуживания $\mu = 1$ 1/мин;
- в) φ - приведенная плотность прихода заявок $\varphi = \lambda/\mu = 2$;
- г) n - количество приборов обслуживания $n = 4$;
- д) r_0 - ожидаемое количество заявок в очереди $r_0 = 3$.

2 Определяем P_0 – установившийся режим

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{i=0}^n \frac{\varphi^i}{i!} + \frac{\varphi^{z_0+1}}{n!(z_0 - \varphi)} \right]},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_0} &= \sum_{i=0}^4 \frac{2^i}{i!} + \frac{2^{3+1}}{4!(3-2)} = 1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{24} + \frac{2^4}{24(3-2)} = \\ &= 1 + 2 + 2 + 1,333 + 0,666 + 0,666 = 7,666. \end{aligned}$$

$$P_0 = 1/7,666 = 0,13.$$

3 Определяем P_n - изменение состояния системы путем подключения одной, двух, трех и четырёх колонок при отсутствии очереди

$$P_n = P_0 \cdot \frac{2^n}{n!}$$

Вероятность, что не работают колонки $P_1 = 0,13$.

Вероятность, что работает одна колонка $P_1 = P_0 \cdot 2^1/2 = 0,13 \cdot 1 = 0,13$.

Вероятность, что работает две колонки $P_2 = P_0 \cdot 2^2/2! = 0,13 \cdot 4/2 = 0,26$.

Вероятность, что работает три колонки $P_3 = P_0 \cdot 2^3/3! = 0,13 \cdot 8/6 = 0,17$.

Вероятность, что работает четыре колонки $P_4 = P_0 \cdot 2^4/4! = 0,13 \cdot 16/24 = 0,06$.

4 Вероятность отсутствия очереди при работе от 0 до 4 колонок

$$P_{\Sigma n} = \sum_{n=0}^4 P_n = 0,13 + 0,13 + 0,26 + 0,17 + 0,06 = 0,75.$$

5 Определяем вероятность возникновения очереди

$$P_r = (P_0 \cdot 2^n / n!) \cdot \left(\frac{\varphi}{r_0}\right)^{r_i} = P\left(\frac{\varphi}{r_0}\right)^{r_i}.$$

В очереди одна машина: $P_1 = 0,06(2/3)^1 = 0,039$.

В очереди две машины: $P_2 = 0,06(2/3)^2 = 0,026$.

В очереди три машины: $P_3 = 0,06(2/3)^3 = 0,017$.

Вероятность, что в очереди от одной до трех машин

$$P_{\Sigma r_0} = \sum_{i=1}^{r_0} P_i = 0,039 + 0,026 + 0,017 = 0,082.$$

6 Вероятность возникновения очереди более 3^x машин

$$P(n > 3) = 1 - P_{\Sigma n} - P_{\Sigma r_0} = 1 - 0,75 - 0,082 = 0,168.$$

4.2.5 Статистические параметры СМО

Перед решением задачи на обслуживание с очередью необходимо проверить СМО на стационарность, то есть на возможность существования установившегося стационарного процесса. В данном примере, при ($\lambda = 2$ и $\mu = 1$) если будет работать только одна колонка, то $\varphi = \lambda / (n \cdot \mu) = 2 / 1 \cdot 1 = 2$. Количество поступающих заявок в единицу времени больше количества обслуживаемых заявок. Такой процесс не стационарный, и количество заявок в очереди стремится к бесконечности.

Если будет работать две колонки ($n = 2$), то $\varphi = 2 / 2 \cdot 1 = 1$ Процесс на пределе стационарности, количество поступающих и обслуживаемых заявок в единицу времени совпадает.

Если будет работать три колонки, то $\varphi = 0,666$. Процесс стационарный и можно определить вероятность очереди при заданном ограничении количества заявок в очереди r_0 .

Если будет работать четыре колонки, то $\varphi = 0,5$. Процесс стационарный с повышенной устойчивостью, так как количество обслуживаемых заявок в единицу времени в два раза выше, чем поступающих.

Примечание - В данном разделе рассмотрен самый простой случай расчета СМО. Как видно по классификации (даже не полной) их большое разнообразие по закономерности поступления заявок. Например, поток Пальма, поток Эрланга, полумарковские потоки и т.д.

Еще большее разнообразие по особенностям обслуживания заявок. Например, СМО с взаимопомощью, СМО с отказом, замкнутые СМО, и т.д. Расчет надежности систем и способы их повышения также основываются на СМО. Расчеты таких СМО и показатели их работы принципиально не отличаются от рассмотренного выше случая.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 4.2

- 1 Примеры вероятностных моделей системы массового обслуживания?
- 2 Что называется потоком событий?
- 3 Отличие марковского и немарковского потоков.
- 4 Отличие одноканального и многоканального обслуживания.
- 5 Отличие стационарного и нестационарного процесса.
- 6 Отличие однофазного и многофазного обслуживания.
- 7 Что значит пуассоновский поток поступления заявок?
- 8 Что характеризует коэффициент λ ?
- 9 Что характеризует коэффициент μ ?
- 10 Что характеризует коэффициент ρ ?
- 11 Почему для нормальной работы $\rho < 1$?

4.3 Метод распознавания образов (МРО)

4.3.1 Постановка задачи

В современных условиях автоматизации производства требуется, чтобы машина выполняла за человека некоторые функции *распознавания*. Так, при автоматической сборке механических узлов требуется, чтобы робот-сборщик распознавал нужные детали. При автоматической сортировке яблок, карандашей, тканей и т.д. технические устройства должны различать отклонение в качестве этих предметов. Для машин - переводчиков с голоса необ-

ходимо правильное понимание словосочетания, произнесенной разными по тембру голосами. Еще более трудная задача стоит при управлении сложными энергоемкими объектами (атомная станция, мартеновская печь, энергосистема и т.д.). Система управления должна распознать характер изменения состояния объекта и выбрать путь к оптимальному управлению. Для этого она должна иметь образы «оптимального», «нормального», «допустимого», «аварийного» режима работы и функционально-следственные связи для возможности изменения этих режимов. Различают два направления в распознавании образов: биологический и технический.

В биологическом направлении исследуются существующие способы распознавания образа (ситуации, положения, состояния) человеком и другими представителями животного мира, и по их «образу и подобию» создаются технические устройства, то есть, это путь копирования живого организма, путь создания более или менее адекватных (похожих) технических моделей этого процесса, используя опыт животного мира.

При техническом направлении создается математическая модель, используя теорию вероятности, комбинаторную логику, нечеткие множества, лингвистические методы и т.д. В ряде разделов теория распознавания образов используют положения теории искусственного интеллекта. Это объясняется тем, что проблема формирования и поиска решения, которой занимаются специалисты по искусственному интеллекту, можно рассматривать как задачу распознавания неверного и правильного решения.

Для построения теории распознавания образов необходимо сформировать определенную модель процесса распознавания, применительно к которой будут развиваться все теоретические положения. Прежде всего, необходимо дать определения образ или класс. Отдельные предметы или явления, которые необходимо распознать, обладают общими друг с другом свойствами, а также имеют некоторые отличительные качества. Например, такие предметы, как «карандаши» имеют общее свойство: «пишущее устройство с твердом сердечником». Отличительное свойство - это размер, форма, цвет, конфигурация и т.д.

Образом (или классом) называется множество предметов, объединённых общими свойствами.

Классификация или выделение классов можно проводить и по их отличительным свойствам. Например, по цвету карандашей выделить три класса: красный, желтый, зелёный из 100 различных цветных карандашей. Совокупность реализации предметов данного класса среди множества возможных реализаций позволяет выделить класс по данному отличительному признаку. При этом количество предметов должно быть больше, чем количество классов. Если количество классов один, то никакого распознавания нет. Если количество классов бесконечное множество, то такая задача практически не реальная.

Часто бывает, что данный образ характеризуется определенным набором признаков. Например, образ человека больного гриппом характеризуется: x_1 - температура, x_2 - кашель, x_3 - покраснения горла, x_4 - головная боль, x_5 - слабость во всем теле и т.д. Если процесс выделения образа больного человека гриппом поручить ЭВМ, то в неё необходимо заложить и совокупность признаков здорового человека по этим параметрам ($x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$), то есть выделить образ «здоровый человек» и выделить совокупность признаков больного человека по таким же параметрам, то есть выделить образ «больной гриппом человек». Практически числовые значения каждого признака могут изменяться (или колебаться) в некоторых пределах и принимать определённое отклонение из совокупности n – значений

$$x_i^R = \{x_1^R, x_2^R, x_3^R, \dots, x_n^R\}$$

Выделение образа происходит при конкретных значениях каждого из N заданных признаков. Поэтому, количество возможных реализаций T для попадания в данный образ (например, «больной гриппом человек») равно

$$T = \sum_{i=1}^n x_i^R$$

где T - количество возможных реализаций (например, разные стадии заболевания гриппом, разные тяжести перенесения болезни и т.д.)

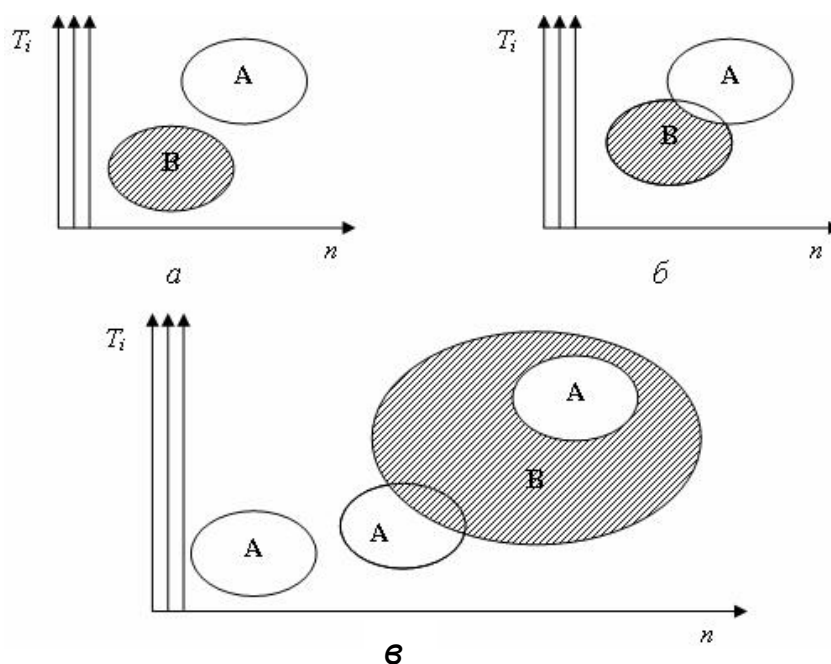
n - количество признаков, по которым классифицируется данный обзор (класс) (например: температура, кашель, головная боль, покраснение горла и т.д.);

R - пределы изменения (колебания) значения каждого признака (например: колебание температуры, покраснения горла и т. д.). Очевидно, что количество возможных реализаций T - это большое, но конечное число.

Теперь можно уточнить постановку задачи по распознаванию образа:

Из всех возможных реализаций при $T \rightarrow \infty$ выделять только те T , которые соответствуют заданному количеству признаков n при возможных пределах их изменения R .

В теории распознавания очень часто прибегают к геометрической интерпретации модели распознавания. Геометрически, выделенный класс представляют в виде замкнутой области в многомерной системе координат, в которую входят все значения T . Это показано на рисунке 4.2



а - случай полного разделения классов;

б - случай перекрывающихся классов;

в - случай многосвязных классов.

Рисунок 4.2 - Геометрическая интерпретация модели распознавания образов

Наиболее просто провести разделение классов, когда класс А и класс В четко определен (рисунок 4.2 а). Труднее провести разделение, если эти классы перекрываются (рисунок 4.2 б). В зоне перекрытия реализация Т принадлежит обоим классам, поэтому распознающая машина (ЭВМ) иногда просто дает отказ от разделения по классам в этой зоне.

Наибольшая трудность в разделении по классам, когда классы не только перекрываются, но еще один класс расположился внутри другого (рисунок 4.2 в). Но все равно, разделение по классам возможно и в этом случае, применяя сложные, нелинейные методы распознавания.

4.3.2 Распознавание образов методом секущих плоскостей

Пусть необходимо разделить секущими плоскостями 3 класса, которые обозначим А, В, С. Для этого в автомат вводится значение двух точек 1А и 2В, который запоминает их расположение и между ними проводит секущую плоскость I так, чтобы точка 1А была с одной стороны, а точка 2В - с другой. Это показано на рисунке 4.3

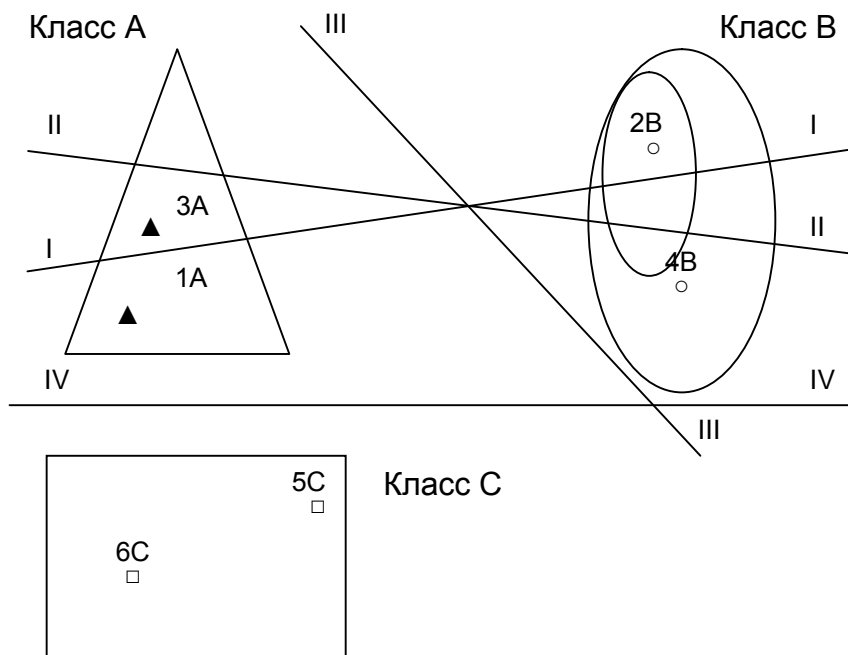


Рисунок 4.3 - Разделение на классы методом секущих плоскостей.

Затем в автомат вводится точка 3А и по тем же правилам проводится секущая плоскость II так, чтобы 3А была слева рядом с 1А. Далее вводится точка 4В и проводится секущая III так, чтобы точка 2 В и 4В были по одну сторону от этой секущей. Затем вводится точка 5 С класса С и проводится секущая плоскость IV так, чтобы точка класса 5 С была отделена от класса А и класса В. Таким образом, предъявляя другие точки и проводя новые секущие, окончательно разделяются эти три класса. Это простой, и очень малоэффективный метод, требующий многократных повторений.

4.3.3 Евклидовы метод распознавания образов

Он основан на использовании некоторой функции подобия (принадлежности) признаков данному классу.

Будем считать, что два класса A и B представляются точками (признаками) с координатами a_n и b_n в N -мерной ортогональной системе координат. Расстояние между точками в этом пространстве определяется по формуле

$$d(a, b) = |a - b| = \sqrt{\sum_{n=1}^N (a_n - b_n)^2},$$

где W_n - весовой коэффициент существенных признаков.

На весовые коэффициенты наложены ограничения

$$\sum_{n=1}^N W_n = 1.$$

Выбор весового коэффициента производится путем сравнения данного признака с эталонным. Если для некоторого признака дисперсия эталонного значения велика, то его смело можно исключить из рассмотрения. Например, цвет глаз у больного гриппом. Если для данного признака дисперсия очень мала, то он имеет существенного значения. Например, покраснение горла у больного гриппом - это действительно существенный признак. Весовые коэффициенты могут рассматриваться как более грубое описание класса и как способ «сжатия» размеров класса по рассматриваемым признакам, что значительно облегчает разделение классов.

После всех этих преобразований евклидово расстояние между элементами в преобразованном N-мерном пространстве равно

$$d(a - b) = \sqrt{\sum_{n=1}^n \left[\sum_{s=1}^n W_{ns} (a_{ns} - b_{ns}) \right]^2}.$$

Геометрический смысл этой формулы заключается в том, что сначала определяется (внутренняя) сумма взвешенных расстояний между n -ым признаком по всем элементам класса, а затем (внешняя) сумма квадратов расстояний по всем признакам. То есть, производятся «сжатия» класса по эталонам, потом оценка по признакам.

4.3.4 Лингвистический метод распознавания образов

При обычном подходе к проблеме распознавания зрительных образов изображение рассматривалось как нечто целое. При лингвистическом подходе изображение рассматривается как состоящее из ряда частей, в качестве которых выступают геометрические характеристики изображения и множество правил их соединения. Все это объединяется в специальный язык изображений (PDL). Словарь этого языка - геометрические характеристики, а грамматика - правила построения описания по этим характеристикам. Рассмотрим автоматический анализ сложного изображения на языке PDL. Основные параметры языка PDL показаны на рисунке 4.4.

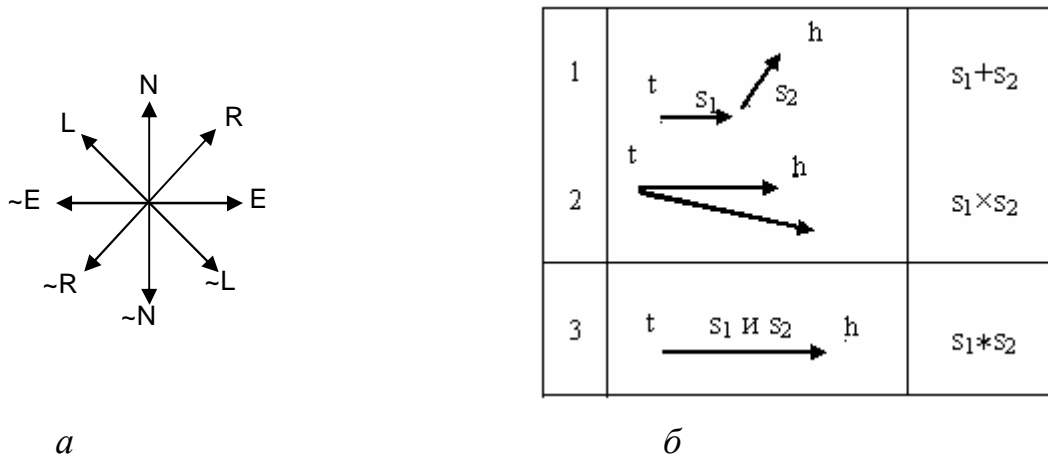
Анализ разбивается на три этапа.

1 этап. ЭВМ производит устранение помех в изображении, пустот внутри линий, соединение разорванных частей, выбрасывание случайных изолированных точек для получения более четкого изображения.

2 этап. Каждой точке изображения в соответствии с геометрическими свойствами записывается определенный код с учетом линий соединяющих эти точки. Этот процесс называется маркировкой. Определение кодов направления линий и бинарные операторы показаны на рисунке 4.4 а.

3 этап. Согласно полученной маркировки определяются концы линий,

точки разветвления. Затем строится математическое описание изображений. Согласно бинарным операторам соединения линий, показаны на рисунке 4.4 б. По ним ЭВМ распознает это изображение.



а - коды направления линий;
 б - бинарные операторы соединения линий.

Рисунок 4.4 - Структурное описание цепочки символов на языке PDL

Пример 4.3 - Определить структуру изображения заданной буквы А.

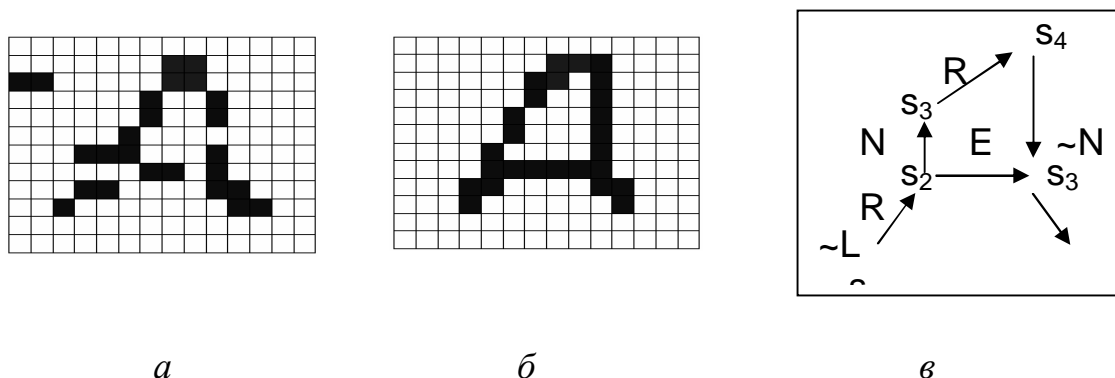


Рисунок 4.5 - Выявление структуры изображения буквы А

РЕШЕНИЕ

На первом этапе ЭВМ производит "очистку" изображения от посторонних сигналов (рисунок 4.5 а). Соединяет разорванные линии буквы, убирает линии утолщения и, в результате получаем четко связанное изображение (рисунок.4.5.б)). На втором этапе выделяются узловые точки: s_1, s_4, s_6 - концы изображенной буквы; s_2, s_5 - точки разветвления; s_3 - точка перегиба. На третьем эта-

пе проводится кодирование буквы согласно структурного описания на языке PDL. Узловые точки соединяются следующим образом

- $s_1 \rightarrow s_2$ код направления R ;
- $s_2 \rightarrow s_3$ код направления N ;
- $s_3 \rightarrow s_4$ код направления R ;
- $s_4 \rightarrow s_5$ код направления $\sim N$;
- $s_5 \rightarrow s_6$ код направления $\sim L$;
- $s_2 \rightarrow s_5$ код направления E .

Перед началом описания цепочки изображения задаются две точки t - начало изображения и h - конец изображения. Согласно бинарным операторам.

- «+» - точка перегиба j ;
- «-» - подсоединение другого вектора к концу h ;
- «×» - разветвления вектора от начала t ;
- «*» - круговое замыкание двух векторов ;
- «~» - смена местами точки t и h или изменение направления вектора.

Согласно этим бинарным операторам и полученной маркировки на втором этапе можно записать следующую цепочку символов для буквы А

$$N=(R+((E*((N+R)+(\sim N))+(\sim L))).$$

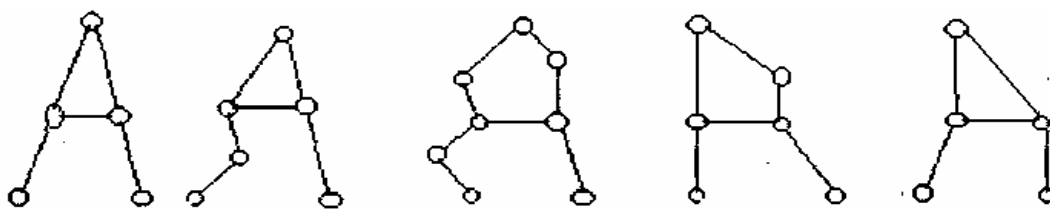


Рисунок 4.6 - Примеры изображения буквы А

После получения этого описания необходимо решить следующую задачу проанализировать принадлежность данного изображения к интересующему нас классу возможных изображений буквы А. На рисунке 4.6 показано несколько примеров такого изображения. Очевидно, все они соответствуют полученной цепочке символов для буквы А.

С помощью лингвистического метода распознавания можно создать модель не только букв, но и других объектов исследования. На рисунок 4.7 показана электрическая схема цепочки RLC и ее изображение с помощью маркировки.

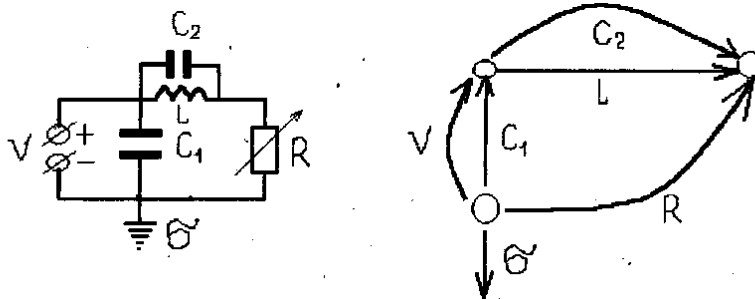


Рисунок 4.7 Принципиальная электрическая схема и ее изображение с помощью узловых точек

По рисунку 4.7 видно, что изображение может характеризоваться и иными характеристиками (например, длиной дуги, толщиной, кривизной и т. д.), что бывает необходимо для задания семантических (смысловых) параметров. Таким образом, описание изображения в общем виде можно представить в виде

$$T(a)=[Ts(a), T_V(a)],$$

где $Ts(a)$ - структурное описание изображения, причем выбор начала (t) и конца (h) в этих описаниях не имеет значения;

$T_V(a)$ - семантическое описание элементов схемы. Семантическое описание представляет собой список параметров по каждому элементу схемы. При использовании языка PDL можно найти такое эквивалентное выражение, с помощью которого эффективно описывается любое связанное множество или, другими словами, произвести полное распознавание образа с применением ЭВМ.

4.3.5 Перцептронная модель распознавания образов

Рассмотрим процесс распознавания образа на примере зрительного образа, т.е. перцептрон - как модель человеческого глаза. Структурная схема перцептрона показана на рисунке 4.8.

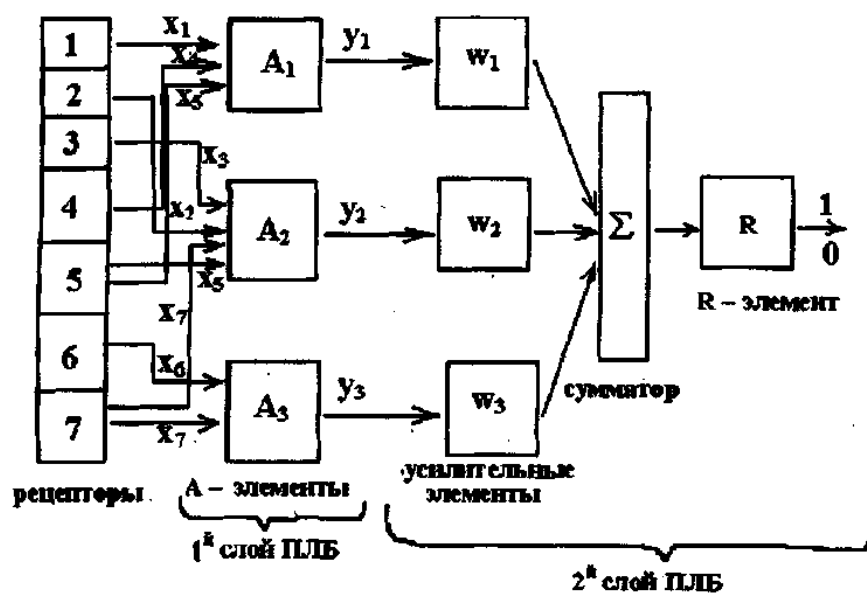


Рисунок 4.8. Обобщённая структурная схема персептрона

Персептрон условно можно представить как состоящего из трех частей. Первая часть - рецепторы - в данном случае светочувствительные дискретные оптические датчики.

Вторая часть А-элементы - пороговые элементы с постоянным коэффициентом усиления (или первый слой ПЛБ). Их количество соизмеримо с количеством (до 1000 шт), и соединены они с рецепторами случайным образом (с помощью датчиков случайных чисел). Или произвольный j элемент рецептора соединен с i^m А-элементом или даже с двумя тремя А-элементами.

Третья часть персептрона - это второй слой ПЛБ «окончательное решение» по разделению классов.

Работа персептрона. Каждый чувствительный элемент рецептора выдает сигнал +1 или минус 1 в зависимости от попадания на него света. Этот сигнал попадает на вход А-элемента (на первый слой ПЛБ). Весовые коэффициенты А-элемента есть постоянные величины и принимают только три значения +1, 0, минус 1. С выхода А-элементов сигнал принимает два значения в зависимости от знака полученной суммы сигналов с учетом весового коэффициента

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ при } \sum_{i=1}^n r_i x_i - \delta \geq 0; \\ 0 \text{ при } \sum_{i=1}^n r_i x_i - \delta < 0. \end{cases}$$

Сигналы y_i с выходом A -элемента умножаются на переменные весовые коэффициенты ω_i , которые настраиваются в процессе обучения и затем их значения суммируются. Полученная сумма поступает на пороговый элемент R второго слоя ПЛБ. В зависимости от знака суммы R элемент принимает значение

$$R = \begin{cases} 1 \text{ при } \sum_{j=1}^m \omega_j y_j \geq 0; \\ 0 \text{ при } \sum_{j=1}^m \omega_j y_j < 0. \end{cases}$$

В процессе обучения персептрон должен выдавать выходной сигнал 0 при предъявлении объектов класса B , и выдавать сигнал 1 при предъявлении объектов класса D . Обучение заключается в том, что коэффициенты ω при каждом показе объектов класса B увеличиваются на некоторую величину, а при показе объектов класса D уменьшаются. Постепенно правильность ответов на предъявляемые объекты улучшается.

Различают два вида алгоритма обучения: без обратной связи и с обратной связью. При обучении без обратной связи надежность распознавания не превышает 70 % даже при достаточно большом цикле обучения. При обучении с обратной связью, когда после каждой ошибки сразу же корректируется значение весового коэффициента, надежность распознавания достигает 100 % после 30 предъявлений каждой буквы

Вопрос для размышления. Сколько раз надо показывать буквы первокласснику, чтобы он их безошибочно распознавал?

4.3.6 Бейесовский метод распознавания образов

Этот метод основан на известной теории Бейеса из теории вероятности.

Пусть имеется полная группа A_m гипотез (или образов), и известна вероятность их появления. Тогда

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m) = 1$$

Пусть наблюдается событие b_2 , вероятность которого $P(b_2)$. Оно связано с событием a_1 условной вероятностью $P(b_2/a_1)$. По теореме Байеса вероятность появления события a_1 , если произошло событие b_2 определяется по формуле (первый вариант)

$$P(a_1/b_2) = P(a_1) \cdot P(b_2/a_1) / P(b_2).$$

Таким образом, для определения вероятности возникновения события a_1 если произошло событие b_2 необходимо знать:

- $P(a_1)$ – безусловная вероятность события a_1 ;
- $P(b_2)$ – безусловная вероятность события b_2 ;
- $P(b_2/a_1)$ – условная вероятность события b_2 если произошло событие a_1 .

ПОСТАВИМ ЗАДАЧУ: Пусть нам неизвестна вероятность события b_2 (т.е. $P(b_2)$). Необходимо определить вероятность появления события a_1 , если остальные вероятности ($P(a_1)$ и $P(b_2/a_1)$) известны.

РЕШЕНИЕ

Определим вероятность события $P(b_i)$ через формулу полной вероятности, считая что события a_i и a_{i+1} несовместны (одновременно не могут произойти).

Тогда

$$P(b_i) = \sum_{i=1}^M P(a_i) \cdot P(b_i/a_i),$$

где M - количество классов.

Подставляем значение $P(b_i)$ в формулу Байеса и получаем второй вариант

$$P(a_1/b_2) = \frac{P(a_1)P(b_2/a_1)}{\sum_{i=1}^M P(a_i)P(b_i/a_i)}.$$

В данном случае для определения вероятности возникновения события, если произошло событие b_i достаточно знать две (а не три) вероятности:

- $P(a_1)$ – безусловная вероятность события a_1 ;
- $P(b_1/a_1)$ – условная вероятность b_1 если произошло a_1 .

Пример 4.4 - Известно, что в Подмоскowie в начале июня бывают заморозки на почве (событие a_1) с вероятностью $P(a_1) = 0,2$. Если снег не растаял (событие b_1), то вероятность заморозков увеличивается $P(b_1/a_2) = 0,9$. Значит заморозки на почве всё же могут быть, если снег растаял, но с вероятностью $P(b_2/a_1) = 0,1$. Обозначим: событие b_1 - снег есть; событие b_2 - снег растаял. Определить вероятность заморозков при не растаявшем снеге.

Уточняем условие задачи: Вероятность заморозков $P(a_1) = 0,2$ [образ класса «заморозки»] Вероятность отсутствия заморозков $P(a_2) = 0,8$ [образ класса «тепло»]. Вероятность наличия снега при заморозке $P(b_1/a_1) = 0,9$ [признак «снег»]. Вероятность отсутствия снега при заморозке $P(b_2/a_1) = 0,1$ [признак «растаяло»].

Определить: с какой вероятностью признак «снег» связан с классом «заморозки».

РЕШЕНИЕ

В данной задаче не известно значение $P(b_2)$ - полная вероятность наличия снега, поэтому первым вариантом формулы Байеса воспользоваться нельзя. Используем второй вариант

$$P(a_1/b_1) = \frac{P(a_1)P(b_1/a_1)}{\sum_{i=1}^2 P(a_i)P(b_i/a_i)} = \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,8 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,9} \approx 0,69.$$

ОТВЕТ. Вероятность $P(a_1/b_1)$ достаточно большая. При поздней весне, когда снег не растаял, вероятность заморозков в июне до 70 %.

4.3.7 Статистический метод распознавания образов

При наличии вероятностных зависимостей в появлении признаков в исследуемом процессе (например, появление бракованных деталей при контроле) и деления их по классам (например, класс А - брак, класс В - годная деталь) производят методом распознавания образов. Такая задача решается на основе

теорий статистических решений. Рассмотрим методику такого решения на простом примере.

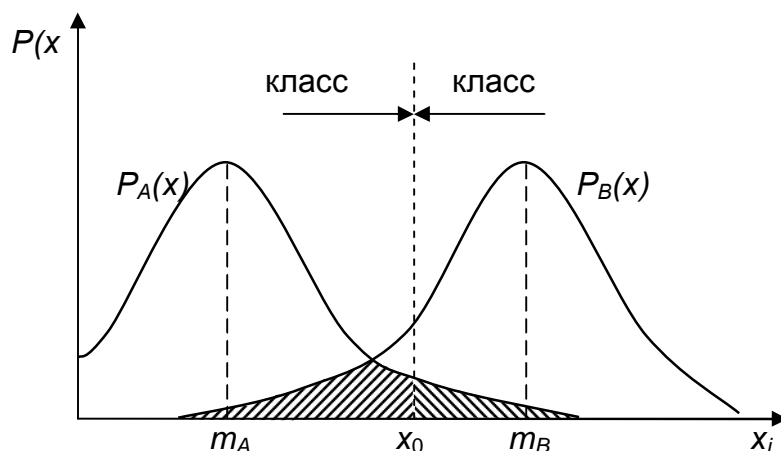
Пусть необходимо разделить совокупность объектов по одному признаку x на два класса A и B . Известно, что плотность вероятности распределения этих признаков $f(x)$ согласуется с нормальным законом распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

В классе A плотность вероятности распределения $f_a(x)$ с m_a и σ_a . В классе B соответственно $f_b(x)$ с m_b и σ_b . Определить значение x_0 для разделения этих классов A и B , с учётом, что кривые распределения вероятности в некоторой области пересекаются (рисунок 4.9).

РЕШЕНИЕ

Обозначим искомое граничное значение между классами через x_0 , тогда при $x_i < x_0$ объект относится к классу A , а при $x_i > x_0$ объект относится к классу B .



$f_a(x), f_b(x)$ - распределение плотности вероятности по классу A и B ;

x_i - признаки объекта для определения класса;

x_0 - разделительное значение признака x по классам.

Рисунок 4.9 – Распределение плотности вероятности объектов по признакам x_a и x_b .

Ошибка первого рода (или, другое название, вероятность ложной тревоги), если объект класса A неверно отнесён к классу B

$$Q_A = \int_{x_0}^{\infty} f_a(x) dx.$$

Ошибка второго рода (или вероятность пропуска цели), если объект класса B неверно отнесён к классу A

$$Q_B = \int_0^{x_0} f_b(x) dx.$$

Эти ошибки на рисунке 4.9 заштрихованы. В полученные уравнения ошибок подставим формулу плотности вероятности

$$Q_A = 1 - F\left(\frac{x_0 - m_a}{\sigma_a}\right), \quad Q_B = 1 - F\left(\frac{x_0 - m_b}{\sigma_b}\right),$$

где $F\left(\frac{x_0 - m}{\sigma}\right)$ - функция Лапласа.

В результате получили условия вероятности ошибочного отнесения объектов класса A к классу B и вероятность ошибочного отнесения объектов класса B к классу A . Учитывая, что полная вероятность каждого из этих двух несовместных событий равна 1, определим условную вероятность правильного разделения классов

$$D_A = 1 - Q_A = F\left(\frac{x_0 - m_a}{\sigma_a}\right), \quad D_B = 1 - Q_B = F\left(\frac{x_0 - m_b}{\sigma_b}\right).$$

При выборе значения x_0 для разделения классов A и B необходимо учесть потери (или ввести штрафные санкции) связанные с правильным и неправильным решением в виде матрицы потерь

$$\|C\| = \begin{vmatrix} C_{AA} & C_{AB} \\ C_{BA} & C_{BB} \end{vmatrix},$$

где C_{AA} и C_{BB} - потери при правильном выборе значения x_0 а C_{BA} и C_{AB} - потери при неправильном выборе.

Пусть вероятность поступления объектов с признаками x , класса A равна $P_a(x)$, а объектов класса B равна $P_b(x)$, тогда среднеквадратичный разброс объ-

ектов с учётом штрафных санкций равен

$$\bar{R} = P_{\alpha}(x) \left[C_{AA} \int_{\infty}^{x_0} f_{\alpha}(x) dx + C_{AB} \int_{x_0}^{\infty} f_{\alpha}(x) dx \right] + P_{\varepsilon}(x) \left[C_{BB} \int_{x_0}^{\infty} f_{\varepsilon}(x) dx + C_{BA} \int_{\infty}^{x_0} f_{\varepsilon}(x) dx \right]$$

Примечание - Первое слагаемое в скобках - правильное распознавание образа, второе слагаемое - неправильное распознавание образа. Обратите внимание на пределы интегрирования.

Для определения величины x_0 , при которой средние потери минимальны, продифференцируем R по x и, положив $x = x_0$, приравняем полученную производную к нулю.

$$\frac{d\bar{R}}{dx} = P_{\alpha}(x) f_{\alpha}(x_0) (C_{AA} - C_{AB}) + P_{\varepsilon}(x) f_{\varepsilon}(x_0) (C_{BA} - C_{BB}) = 0,$$

откуда

$$\frac{f_{\varepsilon}(x_0)}{f_{\alpha}(x_0)} = \frac{P_{\alpha}(x) (C_{AB} - C_{AA})}{P_{\varepsilon}(x) (C_{BA} - C_{BB})} = \lambda_0,$$

где λ_0 - коэффициент правдоподобия.

Если признаки объектов подчинены нормальным законам распределения, то разделительное значение x_0 является основной для разделения двух классов на основе теории статистических решений

$$x_0 = \frac{m_a + m_{\varepsilon}}{2} + \frac{\sigma_a + \sigma_{\varepsilon}}{m_{\varepsilon} + m_a} \cdot \ln \lambda_0.$$

Пример 4.7 - Пусть $P_{\alpha}(x) = P_{\varepsilon}(x)$ (вероятность наступления любого события равновероятно). $C_{AA} = C_{BB} = 0$ (правильное распределение по классам не вознаграждается). $C_{AB} = 2C_{BA}$ (допустить ошибку первого рода в два раза опасней, чем ошибку второго рода). Центры нормального закона распределения равны: $m_a = 1$, $m_{\varepsilon} = 3$. Стандарт отклонения равны $\sigma_a = 0,8$, $\sigma_{\varepsilon} = 0,8$. Графики такого распределения показаны на рисунке 4.9.

ОПРЕДЕЛИТЬ

- 1 Значение x_0 при заданных штрафных санкциях.
- 2 Условную вероятность правильного разделения по классу A (D_A);

3 Вероятность возникновения ошибки первого рода (Q_A), то есть вероятность отнесения объектов с признаками x_a к классу B .

4 Вероятность возникновения ошибки второго рода (Q_B), то есть вероятность отнесения объектов с признаками x_b к классу A .

5 Проверить правильность учёта штрафных санкций .

РЕШЕНИЕ

1 Определяем коэффициент правдоподобия

$$\frac{P_a(x)}{P_b(x)} \cdot \frac{C_{BA}}{C_{AB}} = \lambda_0 = 2$$

2 Значение x_0 для разделения классов A и B

$$x_0 = \frac{m_a - m_b}{2} + \frac{\sigma_a \sigma_b}{m_b - m_a} \cdot \ln \lambda_0 = \frac{1+3}{2} + \frac{0,8^2}{3-1} \cdot 0,6931 = 2,221.$$

3 Условная вероятность правильного распознавания по классу A

$$D_A = F\left(\frac{x_0 - m_a}{\sigma_a}\right) = F\left(\frac{2,221 - 1}{0,8}\right) = F(1,526) = 0,861.$$

4 Вероятность возникновения ошибки Q_A

$$Q_A = 1 - D_A = 1 - 0,861 = 0,139.$$

5 Вероятность возникновения ошибки Q_B .

$$Q_B = F\left(\frac{x_0 - m_b}{\sigma_b}\right) = F\left(\frac{2,221 - 3}{0,8}\right) = F(-0,937) = 0,3138..$$

6 Проверим правильность учёта коэффициентов потерь (C_{AB} и C_{BA}) при решении этого примера

По условию задачи $\lambda_0 = \frac{C_{BA}}{C_{AB}} = 2.$

По полученному решению $\lambda_0 = \frac{C_{BA}}{C_{AB}} = \frac{0,3138}{0,139} = 2,2.$

ОТВЕТ. Разделительное значение $x_0 = 2,221.$

Вопросы для самоконтроля к подразделу 4.3

- 1 Примеры использования распознавания образа.
- 2 Что называется образом или классом?
- 3 Что называется признаком?
- 4 Как разделяются классы эвклидовым методом?
- 5 Как разделяются классы лингвистическим методом?
- 6 Как разделяются классы персептронным методом?
- 7 Как разделяются классы бейесовским методом?
- 8 Как разделяются классы статистическим методом?

4.4 Система искусственного интеллекта (СИИ)

4.4.1 Постановка задачи

В современных системах управления поставлена задача: создать модель принятия решения, которые обычно осуществляются естественным интеллектом (человек). Другими словами, создать кибернетическую систему по переработке информации с заранее поставленной целью. Но полностью человека не исключают из процесса управления, он тоже участвует в этом процессе. Таким образом система имеет человеко-машинный характер взаимодействия или работает в режиме диалога.

Система искусственного интеллекта (СИИ) применяется, если качество формируемых ей решений будет не хуже, а иногда быстрее и лучше по сравнению со средним естественным интеллектом оператора. СИИ помогает человеку в узкопрофессиональных условиях для решения конкретных производственных задач. При этом она использует в своих решениях методы и приемы, заимствованные из разных дисциплин: психологии, лингвистики, информатики, системного программирования и т. д. Рассматривая систему искусственного интеллекта, остановимся на понятии *интеллектуальность*.

Во-первых, интеллектуальность предполагает наличие в системе собственной, внутренней модели внешнего мира, свои правила поведения и реакцию на воздействие, обеспечения прагматической интерпретации на запросы в

СИИ.

Во-вторых, интеллектуальность связана со способностью пополнять имеющиеся знания, способность к обучению, причем не путем добавления новых факторов в базу данных, а «переосмысления» старых понятий.

В-третьих, интеллектуальность - это способность к конструированию таких решений, которые в явном виде не содержались в первоначальной программе. Это способность к дедуктивному мышлению, переход от общих положений к частному выводу.

Особенность СИИ связана с проблемой *нечеткостью принятия решений*, когда необходимо учитывать противоречивые требования в процессе регулирования. Кроме этого, при работе СИИ могут встретиться непредвиденные обстоятельства, так как все заранее учесть невозможно. СИИ начинает маневрировать, искать новые решения. Дополнительно необходимо учитывать языковой барьер между оператором и ЭВМ. Всегда ли оператор сможет четко поставить задачу? Всегда ли ЭВМ может правильно понять, что от нее требуют? Поэтому проблема общения человека с ЭВМ перерастает в проблему представления знаний в ЭВМ понятных для человека и удобных для ЭВМ.

Процесс принятия решения связан с синтаксическим, семантическим и прагматическим аспектами поведения СИИ.

Синтаксический аспект - это чисто формальное соблюдение правил для выполнения поставленной задачи, но решение бывает непонятное по содержанию. Например, можно собрать из деталей детского конструктора башенный кран, формально все правильно, но вот только башня присоединяется снизу к платформе и он фактически не работоспособен. Можно формально, грамматически правильно составить фразу «Дом взял палку», но фактически смысл этой фразы не понятен.

Семантический аспект - это принятие решения понятное по смысловому значению, понятно, что делать. Например, можно сконструировать новый кран, который полностью работоспособен, но только для выполнения данной работы (по грузоподъемности) он не пригоден. Таким образом, конечная цель

его работы не выполняется. Фраза «Человек взял палку» по смысловому значению понятно, но зачем, с какой конечной целью?

Прагматический аспект - это принятие решения с определением конечной цели, когда понятно что делать и зачем это делать. Например, разработать подъемный кран для строительства одноэтажного дома. Такая постановка задачи становится понятна, так - как определена конечная цель. Фраза «человек взял палку, чтобы разбить окно» - тоже становится более понятна, но зачем бить окна? Здесь сталкиваемся с бесконечной глубиной семантической и прагматической трактовкой интеллектуальных знаний.

В связи с вышеизложенным разработанная СИИ не представляет собой застывшую систему типа телевизора, она постоянно развивается, обучается, совершенствуется как и положено интеллектуальному человеку.

4.4.2 Общие сведения о модели СИИ

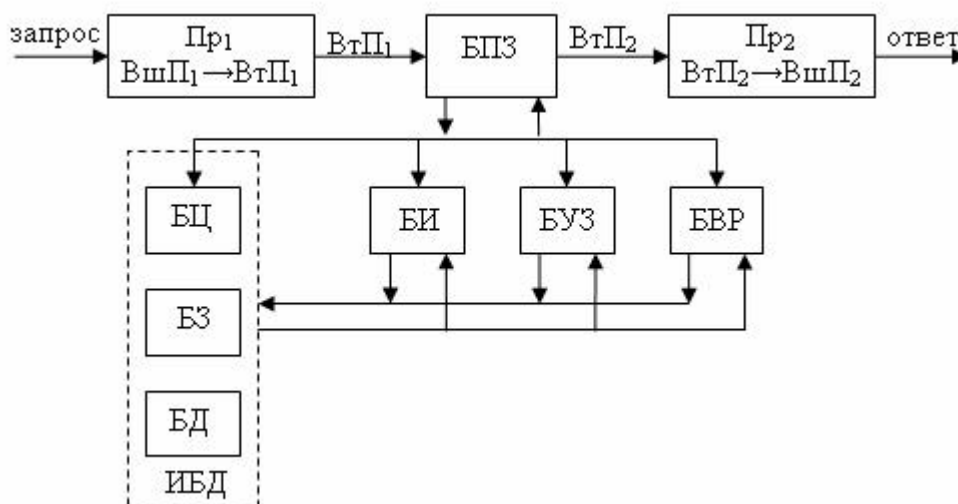
Запрос в виде внешнего представления проблемы поступает в СИИ и преобразуется на языке понятий ЭВМ, в которой определяется цель обработки информации и с учётом имеющихся данных о предметной области исследования находится решение. Рассмотрим последовательность преобразования информации в СИИ по функциональной схеме модели СИИ, показанной на рисунке 4.10. Запрос поступает в преобразователь ($Пр_1$) затем в блок представления знаний (БПЗ), далее в преобразователь ($Пр_2$) для выдачи ответа.

$Пр_1$ (преобразователь 1) обеспечивает перевод внешнего представления проблемы ($ВшП_1$) во внутреннее представление проблемы ($ВтП_1$) на язык понятий ЭВМ.

БПЗ (блок представления знаний) содержит всю необходимую информацию для получения решения. Основой БПЗ является интеллектуальный банк данных (ИБД), в котором сосредоточена вся информация о внешнем мире. Условно ИБД разделены на три базы: база целей (БЦ), база знаний (БЗ) и база данных (БД).

БЦ (база целей) содержит информацию о целевом назначении СИИ

(предметной области), то есть о цели переработки полученной информации извне. Целью может быть прогноз погоды, перевод текста, управление большой системой и т.д. Мотивация к действию - это добиться идеального конечного результата (ИКР). Общая цель, как правило, распадается на подцели, на промежуточные цели, проводится анализ возможности выполнения каждой поставленной цели.



- Пр₁, Пр₂ - преобразователи информации;
- БПЗ - блок представления знаний;
- ИДБ - интеллектуальный блок данных;
- БЦ - база цели;
- БЗ - база знаний;
- БД - база данных;
- БВР - блок выдачи решений;
- БИ - блок интерпретации;
- БУЗ - блок усвоения знаний.

Рисунок 4.10 - Функциональная схема модели СИИ

БЗ (база знаний) содержит сведения отражающие закономерность в исследуемой области и выводит новые факты ранее неизвестные, прогнозирует возможные их изменения. Выдает варианты решения, анализирует и запоминает лучшие решения. При этом старые, неудачные с ее памяти стираются.

БД (база данных) содержит количественные характеристики, необходимые для принятия решения. Для быстрого их получения эти данные связаны определенной структурой. В процессе работы эти данные конкретизируются, уточняются, изменяются и даже заменяются.

Принятие интеллектуальных решений человеком и СИИ имеет много общего и свою специфику. Можно утверждать, что процесс становления и развития естественного интеллекта у человека начинается с сознания базы данных (БД), то есть с накопления фактов, сведений о внешнем мире. Затем закономерности развития мира познаются от учителей, из книг, то есть создается (БЗ). И, наконец, для активного поведения определяется цель, разрабатывается стратегия, то есть создается (БЦ).

При функционировании созданной СИИ также происходит преобразование информации, но в другом направлении. В начале ставится цель из (БЦ), уточняются подцели. Затем в соответствии с поставленной целью ищутся способы решения. СИИ обращается к (БЗ). Для реализации решения системы обращается к базе данных (БД), запрашивает необходимые сведения. Такая иная последовательность при решении интеллектуальных задач для СИИ более удобна.

БИ (блок интерпретации) В развитых СИИ одного простого преобразования от внешнего представления знаний ($VшП_1$) во внутренние представления знаний ($VтП_1$) недостаточно, так как естественный (человеческий) интеллект и искусственный (машинный) интеллект может по-разному понять поставленную задачу. Это связано с языковым барьером, с правильной формулировкой фраз. При этом необходимо учитывать, что отдельные слова имеют разное значение, более того, даже технические термины не всегда однозначны. Поэтому блок интерпретации (БИ) уточняет смысл запроса и помогает правильно его представить в свете внутренних представлений знаний ($VтП_1$).

БУЗ (блок усвоения знаний) В работе СИИ очень важно способность самообучаться, пополнять свои знания, уточнять цели поведения, запоминать новые оригинальные решения, а в некоторых случаях переосмысливать получен-

ные результаты. Для этого и существует блок усвоения знаний.

БВР (блок выдачи решений) Выдавать полученное решение так, чтобы это было понятно пользователю, не простая задача. При решении поставленная цель разбивается на подцели, каждая подцель решается отдельно и потом необходимо все это согласовать или «сшить» полученные решения в единое целое. Кроме этого, выдача решений может быть в виде таблицы, графиков, рекомендаций и т.д. В отдельных случаях по полученным решениям необходимо экстренное вмешательство в технологический процесс.

4.4.3 Интеллектуальная вопросно-ответная система

В общении людей, особенно когда рассматривается неоднозначное понимание проблемы, то возникают многовариантные решения. При этом собеседник использует специальную фразу «*пойми меня правильно!*». В общении оператора с системой искусственного интеллекта эта проблема стоит постоянно.

Для решения такой задачи служит интеллектуальная вопросно-ответная система (ИВОС), структурная схема которой показана на рисунке 4.11.

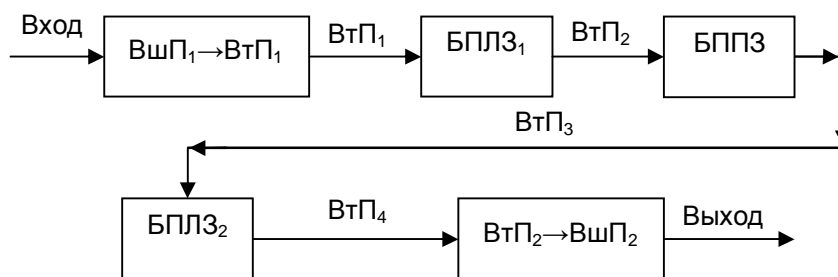


Рисунок 4.11 - Структурная схема интеллектуальной вопросно-ответной системы

В ИВОС основные блоки, это *блоки представления лингвистических знаний* (БПЛЗ) и *блок представления понятийных знаний* (БППЗ).

Лингвистические знания (блок БПЛЗ₁) - это знание слов, грамматика, значение определенных фраз, то есть те знания, которыми владеет, например, переводчик, не знакомый с предметной областью, для которой предназначена СИИ (физика, экономика, растениеводство и т.д.). Считается, что такой пере-

водчик не сможет сделать грамотный перевод. Для этого ему необходима помощь специалиста в данной области. Если, например, осуществляется перевод с одного языка (японский) на другой (русский), то есть переход от $ВтП_2$ к $ВтП_3$ то необходимо присутствие понятийного представления знаний (БППЗ). В данном примере это представление об особенностях оборота речи в японском и русском языке. В общем случае БППЗ₁ - это конкретные знания об объекте управления, по которому ведется диалог оператора с СИИ.

Проблема работы БППЗ в отделения конкретного знания от «языковой шелухи». Это необходимо даже в случае, когда вопрос и ответ осуществляется на одном языке. Будем считать, что входная фраза формируется на ограниченном профессиональном языке, обрабатывается в БПЛЗ₁, где проверяется грамматически и поступает в БППЗ, где уточняется смысл фразы. Затем осуществляется обратный процесс, процесс синтеза семантического и лингвистического уровня с использованием БПЛЗ₂. Для этого в системе предусматриваются специальные структуры, которые определяют успех решения проблемы независимости понятийного представления знаний от естественного языка. По существу, если под $ВшП_1$ понимать различную входную информацию, то $ВтП_1$ – её преобразование понятное для ЭВМ, $ВтП_2$ - расшифровка значения слов, $ВтП_3$ – более чёткая информация с учётом конкретных знаний об объекте управления, $ВтП_4$ – преобразование полученных конкретных знаний для выходного блока ЭВМ, выход – представление полученных результатов в удобном виде для оператора (таблицы, графики и т.д.).

4.4.4 Интеллектуальная сеть связи

Большинство существующих СИИ являются синтаксическими системами по электронной обработке информации, то есть по переработке и подготовке документов (бух. учет, планово-финансовые отчёты, материально-техническое снабжение и т. д.). Главное содержание в таких СИИ в накоплении рабочих программ и в большом объеме базы данных (БД). Для управления такой системой необходима специальная БЗ, которая позволяла бы на семантическом и

прагматическом уровне вызывать, комплектовать и управлять программами.

Интеллектуальная сеть связи обеспечивает распределение и передачу информации, необходимую абонентам, в семантическом и прагматическом смысле, то есть любая порция информации по каналам связи передается не как единица информации по Шеннону, а как информация, имеющая определенный смысл и целенаправленность. Например, многоцелевая САУ осуществляет слежение за несколькими объектами, проводит прагматическую оценку и выбор среди большого количества объектов тех, за которыми необходим особый контроль. При вводе информации в СИИ оператор может допустить грамматические и смысловые ошибки, которые автоматически исправляются.

4.4.5 Модель представления знаний

При создании модели представления знаний используют понятие пространство состояний, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями. В СИИ пространство состояний дискретное, топологическое и изображается в виде графов, вершины которых соответствуют состоянию, а дуги - операторам перехода из одного состояния в другой. Для задания пространства состояний необходимо иметь систему описаний состояний и операторов перехода. Пространство состояний можно использовать для поиска решений. Тогда вершина соответствует решению, а дуги - пространству поиска решений. Модели представления знаний можно разделить на декларативные, процедурные, специальные.

В декларативных моделях описание состояния представляет собой множество утверждений, в значительной степени независимых от того, где их использовать. Имеются четкие разделения процедуры поиска решения, приводящая к полному перебору (механизм генерации) и процедуры поиска с оптимизацией этого процесса (механизм управления). Механизм генерации носит универсальный характер и не зависит от ПО (предметной области), но достаточно длителен. Механизм управления определяется эвристической эффективностью знаниями о конкретной ПО, что ускоряет процесс поиска решений.

Поиск решений состоит в применении заранее заданных правил к начальным аксиомам, затем полученные решения становятся «новыми» аксиомами для дальнейшего применения правил, так далее вплоть до получения конечной целевой функции.

В процедурных моделях задаются процедуры преобразования для данной ПО. При этом текущее состояние системы представляется в виде набора специальных процедур, обрабатывающих локальный участок БД. Семантическая информация о конкретной ПО сводится в виде свойств, программ, алгоритмов работы, что позволяет из БД брать те данные, которые необходимы в данный момент при рассмотрении данной процедуры. Такая модель обеспечивает в целом более быстрый поиск решений по сравнению с декларативной моделью, но для решения сложных задач и для не полностью известных ПО она менее приспособлена.

При объединении этих двух типов моделей повышается эффективность СИИ, и были разработаны **специальные модели** в виде семантических сетей. Например, *сети фреймов*. Характерной особенностью этого представления знаний является введение модульной структуры в виде фреймов, которые представляют собой синтаксически-семантические блоки (единицы) процедурально-декларативного типа. В общем случае фрейм (перевод, как каркас, рамка) содержит информационные и процедурные элементы и связан с другими фреймами. В этом каркасе есть и «дыры», которые называются *слоты*. В процессе функционирования слоты могут заполняться и формируется новая сеть фреймов с заполненными слотами. Для этого в СИИ есть специальная процедура для повышения уровня своих знаний.

В заключение, необходимо отметить, что с ростом знаний о ПО часть информации становится второстепенной, уточняющей. Это затрудняет поиск и обработку основной информации и уменьшает эвристическую эффективность СИИ. Чтобы этого избежать в системе предусмотрены средства разграничивающие информацию и выделяющую только ту, которая необходима для решения конкретной задачи, оставляя прочую пока без внимания.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 4.4

- 1 Определить понятие интеллектуальность в СИИ.
- 2 Синтаксический аспект интеллектуальности.
- 3 Семантический аспект интеллектуальности.
- 4 Прагматический аспект интеллектуальности.
- 5 Назначение в модели СИИ преобразователей (Пр₁ и Пр₂).
- 6 Назначение в модели СИИ блока представления знаний (БПЗ).
- 7 Назначение в модели СИИ базы целей (БЦ).
- 8 Назначение в модели СИИ базы знаний (БЗ).
- 9 Назначение в модели СИИ базы данных (БД).
- 10 Назначение в модели СИИ блока интерпретации (БИ).
- 11 Назначение в модели СИИ блока усвоения знаний (БУЗ).
- 12 Назначение в модели СИИ блока выдачи решений (БВР).
- 13 Назначение в структурной схеме интеллектуально-вопросной системы блока представления лингвистических знаний (БПЛЗ).
- 14 Назначение в структурной схеме блока представления понятийных знаний (БППЗ).
- 15 Назначение интеллектуальной вопросно-ответной системы.
- 16 Представление знаний в декларативных моделях.
- 17 Представление знаний в процедурных моделях.
- 18 Что такое сети фреймов?
- 19 Как используются слоты?

Список использованных источников

- 1 **Александров, А.Г.** Оптимальные и адаптивные системы / А.Г. Александров. – М.: Высшая шк. 1989. – 263 с.
- 2 **Анхимюк, В.Л.** Теория автоматического управления: учеб. пособие для вуза/ В. Л. Анхимюк. Минск: Вышш. шк., 1979. – 350 с.
- 3 **Дорф, Р.** Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп: пер. с англ. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
- 4 **Евсюков, В.Н.** Оптимальные, экстремальные, адаптивные, кибернетические системы управления: учеб. пособие для вуза / В.Н. Евсюков. – Оренбург: ИПК ОГУ, 1999. – 111 с.
- 5 **Евсюков, В.Н.** Расчёт оптимальных системы управления методом стыковки: методические указания / В.Н. Евсюков. – Оренбург: ИПК ОГУ, 1999. – 35.
- 6 **Евсюков, В.Н.** Основы теории автоматического управления: учебн. пос. для вуза / В.Н. Евсюков. – Оренбург: ИПК ОГУ, 2005. – 562 с.
- 7 **Евсюков, В.Н.** Предварительный анализ и синтез САУ по характеристическому уравнению / В.Н. Евсюков // Известие вузов. Электромеханика. – Новочеркасск: Новочеркасский политех. ин-т., 1984. - № 4.– С. 43-48.
- 8 **Задатчик по теории автоматического управления / под общ. ред. А.С. Шаталова.** – М.: Энергия, 1971. – 496 с.
- 9 **Зайцев, Г.Ф.** Теория автоматического управления и регулирования: учебное пособие для студентов вузов / Г.Ф. Зайцев. - 2-е изд. перераб. и доп. – Киев: Выща шк., 1988. – 431 с.
- 10 **Куропаткин, П.В.** Теория автоматического управления: учебное пособие для студентов электротехнических специальностей вузов / П.В. Куропаткин. – М.: Высш. шк., 1973. – 527 с.
- 11 **Олейников, В.А.** Основы оптимального и экстремального управления / В.А. Олейников, Н.С. Зотов, А.М. Пришвин. – М.: Высшая шк., 1969. – 296 с.
- 12 **Ротач, В.Я.** Теория автоматического управления: учебник для вузов

/ В.Я. Ротач. – М.: Изд. дом МЭИ, 2007. – 400 с.

13 Сборник задач и примеров по теории автоматического управления / В.А. Олейников и [др]. – М.: Высшая шк., 1969. – 200 с.

14 Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления / под общ. ред. Е.А. Санковского. – Минск.: Вышэйш. шк, 1973. – 584 с.

15 Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат., 1987. – 712 с.

16 Теория автоматического управления: учебник для вузов / под ред. В.Б. Яковлева. – М.: Высш. шк., 2003. – 567 с.

17 Теория автоматического управления: учебник для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика»: в 2-х ч. Часть 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 504 с.