

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математической кибернетики

Н.В. МАКСИМЕНКО, Е.Н. СМЕРНОВА

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно – издательским советом
государственного образовательного учреждения высшего
профессионального образования "Оренбургский государственный
университет"

Оренбург 2009

УДК 517.5 (07)
ББК 22.161.5 я 7
М 17

Рецензент
кандидат физико-математических наук А.Н. Павленко

М 17 Максименко Н.В.
Предел функции одной переменной: методические
указания / Н.В. Максименко, Е.Н. Смирнова - Оренбург:
ГОУ ОГУ, 2009 – 18 с.

Методические указания посвящены основным понятиям по теме «Предел функции одной переменной». В них рассмотрены теоретические вопросы, содержатся практические задания для самостоятельного решения, а также решение задач «нулевого» варианта и список использованных источников.

Методические указания в первую очередь предназначены для студентов очной формы обучения специальности 210106 – «Промышленная электроника», а также для студентов других технических специальностей.

© Максименко Н.В., Смирнова Е.Н. 2009
© ГОУ ОГУ, 2009

Содержание

Введение	4
1 Функция одной независимой переменной	5
2 Предел функции	6
3 Бесконечно малые и их основные свойства	7
4 Основные теоремы о пределах	8
5 Замечательные пределы	8
6 Решение задач «нулевого» варианта	9
7 Задачи для самостоятельного решения	12
Список использованных источников	18

Введение

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она является не только орудием количественного исчисления, но и методом точного исследования и средством четкой формулировки понятий и проблем. Цель преподавания математики в вузе, где ведется подготовка специалистов технических специальностей, – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать представление о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре; развить навыки математического исследования прикладных вопросов и умения сформулировать задачу на математическом языке. Все это понадобится для успешной работы и для ориентации в будущей профессиональной деятельности.

Знания, умения и навыки, приобретенные при изучении математического анализа, используются при изучении таких дисциплин, как:

- 1) физика;
- 2) теория вероятностей и математическая статистика;
- 3) теоретические основы электротехники;
- 4) теоретическая механика;
- 5) информатика;
- 6) математическое программирование и др.

1 Функция одной независимой переменной

Действительными (или **вещественными**) числами называются рациональные и иррациональные числа. Множество всех действительных чисел обозначается буквой **R** . Каждое действительное число может быть изображено точкой на числовой прямой.

Пусть даны два непустых множества X и Y . Если каждому элементу x из множества X по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент y из Y , то говорят, что на множестве X задана **функция** с множеством значений Y . Это можно записать так: $X \xrightarrow{f} Y$ или $f: X \rightarrow Y$, где множество X называется **областью определения** функции, а множество Y , состоящее из всех чисел вида $y=f(x)$, – **множеством значений** функции. Если y является функцией от x , то пишут также $y = f(x)$. Буква f характеризует то правило, по которому получается значение y , соответствующее заданному аргументу x . Область определения функции f обозначается через $D(f)$, а множество значений – через $E(f)$.

Пример: Найти область определения функции $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$.

Функция определена, если $x-1 \neq 0$ и $1+x > 0$, т.е. если $x \neq 1$ и $x > -1$. Область определения функции есть объединение двух интервалов: $D(f) = (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

- 1) **константа**: $y=c$, где $c \in R$;
- 2) **степенная функция**: $y = x^\alpha$, где $\alpha \in R$;
- 3) **показательная функция**: $y = a^x$, где a – любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0, a \neq 1$;
- 4) **логарифмическая функция**: $y = \log_a x$, где a – любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0, a \neq 1$;
- 5) **тригонометрические функции**: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- 6) **обратные тригонометрические функции**: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарными функциями называются функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (т. е. формирования сложных функций), применённых конечное число раз.

Все элементарные функции непрерывны на всей своей области определения.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости xOy с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Функция $f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется **четной (нечетной)**, если для любого значения $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$). График четной функции симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции - относительно начала координат.

Функция $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ – четная, т.к. $D(f) = \mathbb{R}$ $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = 2^x + 2^{-x} = f(x)$.

Функция $f(x) = \lg \frac{x+3}{x-3}$ – нечетная, т.к. $D(f) = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$,
 $f(-x) = \lg \frac{-x+3}{-x-3} = \lg \frac{x-3}{x+3} = \lg \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^{-1} = -\lg \frac{x+3}{x-3} = -f(x)$.

Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$, $(x \pm T) \in D(f)$, выполняются равенства $f(x) = f(x \pm T)$.

Функция $f(x)$ называется **ограниченной** на множестве X , если $(\exists M > 0)(\forall x \in X): |f(x)| \leq M$.

2 Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$. Возьмем из X последовательность точек, отличных от x_0 : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, сходящуюся к x_0 . Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$.

Число A называется **пределом функции $f(x)$** в точке x_0 , если для любой сходящейся к x_0 последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x , отличных от x_0 , соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к числу A .

Это записывается так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Функция $f(x)$ может иметь в точке x_0 только один предел. Это следует из того, что последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет только один предел.

Существует другое определение предела функции.

Число A называется **пределом функции $f(x)$** в точке x_0 , если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in X, x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Используя логические символы, это определение можно записать в виде:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Можно доказать, что эти определения эквивалентны.

Кроме понятия предела функции при $x \rightarrow x_0$ существует также понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, |x| > \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

А также если предел функции равен бесконечности, т. е. функция, является бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) : |f(x)| > \varepsilon.$$

И при стремлении аргумента к бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, |x| > \delta) : |f(x)| > \varepsilon.$$

Если $x < x_0$ и $x \rightarrow x_0$, то употребляют запись $x \rightarrow x_0 - 0$; если $x > x_0$ и $x \rightarrow x_0$ - запись $x \rightarrow x_0 + 0$. Числа $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ называются соответственно **левым** и **правым пределом функции $f(x)$** в точке x_0 .

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

3 Бесконечно малые и их основные свойства

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow x_0$ или

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) : |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Имеет место следующее утверждение:

Для выполнения равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

Свойства бесконечно малых функций:

Теорема 3.1: Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая ($\alpha(x) \neq 0$), то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция.

Также справедлива и обратная теорема, т.е. функция, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

Теорема 3.2: Сумма, разность конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

Теорема 3.3: Произведение бесконечно малой функций на ограниченную является бесконечно малой.

Следствия:

1. Произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение бесконечно малой функции на постоянную функцию есть бесконечно малая функция.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми** (при $x \rightarrow x_0$). Это обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых (при $x \rightarrow 0$):

$\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $e^x - 1 \sim x$, $a^x - 1 \sim x \ln a$, $(1+x)^k - 1 \sim kx$, $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$.

Если бесконечно малая является множителем, делимым или делителем, то ее можно заменять на эквивалентную бесконечно малую.

4 Основные теоремы о пределах

Теорема 4.1: Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы A и B соответственно. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеют в точке x_0 пределы, равные соответственно $A \pm B$, AB и $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

Теорема 4.2: Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены в окрестности точки x_0 и предел функций $f(x)$ и $h(x)$ равен A при $x \rightarrow x_0$ и выполняется неравенство $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, следовательно предел функции $g(x)$ равен A при $x \rightarrow x_0$.

Теорема 4.3: Если при $x \rightarrow x_0$ функция $y = f(x) \geq 0$ и при этом $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то $A \geq 0$.

Теорема 4.4: Если A — предел функции $u(x)$, B — предел функции $v(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и выполняется неравенство $u(x) \leq v(x)$, то имеет место $A \leq B$.

5 Замечательные пределы

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $e \approx 2,7$,

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

6 Решение задач «нулевого» варианта

1. Доказать, используя определение, что:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$$

Решение:

Используем определение предела функции:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x \neq x_0) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Найдём $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 3| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

$$|2(x - 3)| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ видим, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 3| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$.

2. Найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$$

Решение:

Пределы знаменателя и числителя равны нулю и мы имеем неопределённость вида " $\frac{0}{0}$ ". Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь. Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{2x - 1} = \frac{1}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 - 2}{3x^2 + 5x - 2}$$

Решение:

Нам дана неопределённость вида " $\frac{\infty}{\infty}$ ". Разделим числитель и знаменатель на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 - 2}{3x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^3}} = \frac{4 + 0 - 0}{0 + 0 - 0} = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$$

Решение:

При стремлении аргумента x к бесконечности имеем неопределённость вида " $\frac{\infty}{\infty}$ ". Чтобы раскрыть её, разделим числитель и знаменатель дроби на x . Получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}$$

Решение:

Чтобы избавиться от неопределённости вида " $\frac{0}{0}$ ", умножим числитель и знаменатель на произведение $(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x + 1})$ и затем сократим дробь на $4 - x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x + 1})}{(3 - \sqrt{2x + 1})(3 + \sqrt{2x + 1})(2 + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{(9 - 2x - 1)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{2(4 - x)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 + \sqrt{2x + 1}}{2(2 + \sqrt{x})} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{7x}$$

Решение:

Чтобы раскрыть неопределённость вида " $\frac{0}{0}$ ", воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{4}{7}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 + x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Решение:

Т.к. в этом случае имеем неопределённость вида " 1^∞ ", то воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{x}{3} \right)^{\frac{3}{x}} \right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

Решение:

Имеем неопределённость вида " $\infty - \infty$ ". Чтобы её раскрыть, произведём вычитание дробей. Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 4x}$$

Решение:

Нам дана неопределённость вида " $\frac{0}{0}$ ". Заменим числитель и знаменатель дроби на эквивалентные им бесконечно малые функции, т.к. при $x \rightarrow 0$:

$$\ln(1+2x) \sim 2x$$

$$\sin 4x \sim 4x$$

Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|}$$

Решение:

Имеем неопределённость вида " $\frac{0}{0}$ ". Т.к. x стремится к нулю справа, то мы раскрываем модуль аргумента со знаком «плюс». Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|}$$

Решение:

Чтобы избавиться от неопределённости вида " $\frac{0}{0}$ ", мы раскрываем модуль аргумента со знаком «минус», т.к. x стремится к нулю слева. Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{-x} = -1$$

7 Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, используя определение:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5) = 7$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 3) = 5$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 5) = 11$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} (3x + 1) = 10$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} (4x - 2) = 2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2} (6x - 8) = 4$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} (5x - 8) = 2$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 2} (7x - 6) = 8$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 2} (6x + 8) = 20$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} (5x - 4) = 6$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 3} (6x + 4) = 22$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} (4x + 2) = 6$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} (7x - 5) = 2$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} (4x + 1) = 9$$

2. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{2(x^2-1)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 2x^2 - x}{3x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x + 4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - x^2 + x}{2x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 7x + 6}{(x+2)^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 7x - 6}$$

3.Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{5x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2}{x^3 + 3x^4 - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{3x^3 - 5}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 8}{2x - 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 - 2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x - 1}{x^5 + 7x^3 + 11}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + x^2}}{2x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 - x^3}{3x^2 - 2}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 4}$$

4.Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 - \sqrt{x}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x + 4}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5 + x}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x}{x - 2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4}{x^2 + 5}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x^2 + 5}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 - 7}}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 7x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5}}{x}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x - x^2}{x^3 + 3}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 6x - 5}{3 - x^4}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 5x^2}{3 - 2x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{4 - \sqrt{2x - 2}}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6x + 1} - 1}{3x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}}{5x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{x - 8}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}}{3x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}$$

5. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{12}{x^3 + 8} \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} + \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} - \frac{2}{1 - x^2} \right)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{2}{x - 1} \right)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} \right)$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 5} - x \right)$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{x - x^3} \right)$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{5x^2 + 1} - \frac{3x^2}{15x + 1} \right)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x - 4} - \frac{1}{x^2 - 16} \right)$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x^2 - 16} - \frac{1}{x - 4} \right)$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right)$$

$$19) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2} \right)$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x^3 + 8} - \frac{1}{x + 2} \right)$$

6. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sin(x - 1)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 9x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 17x}{8x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 2x}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg} 8x}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cos x}{x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{\operatorname{tg} 5x}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

7. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{5}{x}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{3}{5x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^{2x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{\frac{2}{3x}}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1+3x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$$

8. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{arctg} 8x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2 - 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x \cdot \arcsin 3x}{\sin 3x \cdot \operatorname{arctg} 2x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{5}}{x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{7x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2 - 4}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sin 6x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x \cdot \sin 3x}{x^2 + x^3}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{3x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{5x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{\arcsin x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\arcsin(4-x)}{\ln(x-3)}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{\arcsin(x+2)}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\ln(1-3x)}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 7x^2}{\sin 2x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}$$

9. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0+} 3^{\frac{1}{x}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0-} 3^{\frac{1}{x}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1-} e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1+} e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{|x|}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{|x|}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|x-2|}{x-2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|x-2|}{x-2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 5+} \frac{x-5}{|x-5|}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x-5}{|x-5|}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x-4}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{|x-2|}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{|x-2|}$$

Список использованных источников

- 1 **Бугров Я.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.И. Никольский – М.: Наука, 1988.
- 2 **Выгодский М.Я.** Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002 – 992 с.
- 3 **Гусак А.А.** Справочное пособие по решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А.А. Гусак – Минск: ТетраСистемс, 1998 – 416 с.
- 4 **Гурский Е.И.** Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях: учебное пособие / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.П. Сильванович; под редакцией Е.И. Гурского – Минск: Вышэйш. шк., 1990 – 400с.
- 5 **Данко П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для вузов/П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Д. Кожевникова – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»; Мир и Образование, 2003.
- 6 **Запорожец Г.И.** Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И.Запорожец – М.: Высшая школа, 1965.
- 7 **Кузнецов Л.А.** Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л.А. Кузнецов – СПб.: Издательство «Лань», 2005.
- 8 **Математический анализ в вопросах и задачах:** учеб. пособие / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин; под ред. В.Ф. Бутузова – М.: Физико-математическая литература, 2001.
- 9 **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов – М.: Наука, 1978.
- 10 **Шипачев В.С.** Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов/ В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998 – 479с.
- 11 **Шипачев В.С.** Основы высшей математики: учеб. пособие / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова – М.: Высш. шк., 1998 – 479с.