МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

И.П. ВАСИЛЕГО, Л.Ш. ГАРКАВИК

СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ ФОРМУЛЫ N-ОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 517.5 (076.5)
ББК 22.160я7
В 19

Рецензент
доктор технических наук, профессор И.П. Болодурина

Василего И.П.
В19 **Способы нахождения формулы n-ой производной функции: методические указания к практическим занятиям/ Василего И.П., Гаркавик Л.Ш. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 23 с.**

Методические указания содержат 23 страницы, в том числе 36 задач и список использованных источников. Содержат кроме классических устоявшихся способов нахождения n-ой производной функции и новый способ, освоенный на теореме Фаа ди Бруно.

Методические указания предназначены для студентов экономических и инженерно-технических специальностей всех форм обучения.

ББК 22.16я7

Содержание

1 Понятие n-ой производной

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$. Тогда каждой точке $x \in (a;b)$ можно поставить в соответствие число – производную $f'(x)$ в этой точке. Полученную функцию называют производной от данной и обозначают $f'(x)$. Может случиться, что она сама имеет производную. Тогда эту производную называют второй производной функции $f(x)$ (или производной второго порядка) и обозначают $f''(x) = f^{(2)}(x)$.

Подобным образом определяется третья, четвертая и все последующие производные:

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \left(f^{(2)}(x)\right)', f^{(4)}(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)', \ldots, f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Функцию $f(x)$, имеющую на множестве X конечную производную n-го порядка, называют n раз дифференцируемой на множестве X.

Итак, для того, чтобы вычислить n-ю производную от какой-либо функции, нужно предварительно вычислить производные всех предшествующих порядков.

Пример 1. Найдем n-ю производную от функции e^x.

Так как $\left(e^x\right)' = e^x, \left(e^x\right)^{(2)} = \left(e^x\right)' = e^x, \ldots, \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

Пример 2. Покажем, что $\left(e^{kx}\right)^{(n)} = k^n \cdot e^{kx}$.

Решение. Имеем $y = e^{kx}, y' = ke^{kx}$. Если $y^{(n-1)}(x) = k^{n-1}e^{kx}$, то $y^{(n)}(x) =$ $= \left(y^{(n-1)}(x)\right)' = \left(k^{n-1}e^{kx}\right)' = k^{n-1} \cdot ke^{kx} = k^n e^{kx}$. Согласно принципу математической индукции формула доказана.

Однако и в ряде других случаев удается получить общую формулу для n-ой производной, которая зависит непосредственно от n.

2 Способы получения общей формулы для n-й производной

2.1 Использование формул $\left(cu(x)\right)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}, \left(u \pm \upsilon\right)^{(n)} = u^{(n)} \pm \upsilon^{(n)}$ и принципа математической индукции

Пример 3. Найти n-ю производную функции $y = \sin x$. Так как $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то дифференцирование функции $y = \sin x$ прибавляет к аргументу этой функции число $\frac{\pi}{2}$. Поэтому $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. При $n=1$ формула справедлива. Пусть эта формула справедлива и при $n = k-1$, то есть $(\sin x)^{(k-1)} = \sin\left(x + (k-1)\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $(\sin x)^{(k)} = \left(\sin^{(k-1)}\right)' =$

$= \sin\left(x + (k-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.

Согласно принципу математической индукции формула доказана.

Пример 4. Найти n-ю производную функции $y = (a+bx)^{\alpha}, \alpha, a, b \in R$.

Дифференцируя последовательно эту функцию имеем: $y' = \alpha \cdot b(a+bx)^{\alpha-1}, y'' = \alpha(\alpha-1)b^2(a+bx)^{\alpha-1}, y^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)b^3(a+bx)^{\alpha-2}$ Во зникает гипотеза, что

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)b^n(a+bx)^{\alpha-n} \qquad (1)$$

При $n=1$ формула справедлива. Если формула $y^{(n-1)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)b^{n-1}(a+bx)^{\alpha-n+1}$ справедлива, то

$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)b^{n-1} \cdot b(a+bx)^{\alpha-n} =$

$= \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)b^n(a+bx)^{\alpha-n}$. Согласно, принципу математической индукции формула (1) доказана.

Из формулы (1) следует, что:

1) при $a=0, b=1, y=x^{\alpha} \Rightarrow \left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ (2)

2) при $a=0, b=1, \alpha=n \in N \Rightarrow \left(x^n\right)^{(n)} = n!$ (3)

3) при $a=1, b=1, y=(1+x)^{\alpha} \Rightarrow y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ (4)

4) формула (2) при $\alpha=-1$, имеет вид $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)...(-n)x^{-1-n}$ или

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} \qquad (4')$$

Из формулы (3) при $m \in N$ и $n > m$, следует, что $\left(x^m\right)^{(n)} = 0 \Rightarrow \left(P_m(x)\right)^{(n)} = 0$ при $m < n$.

Пример 5. Найти n-ю производную функции $y=\ln x\left(x>0\right)$.

$y'=\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$. Тогда $\left(\ln x\right)^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n-1)}$. По формуле ($4'$) имеем

$$\left(\ln x\right)^{(n)}=\frac{\left(-1\right)^{n-1}\cdot\left(n-1\right)!}{x^{n}}. \qquad (5)$$

Пример 6. Найти n-ю производную функции $y=a^{x}\left(0<a\neq 1\right)$.

Имеем $y'=a^{x}\cdot\ln a, y''=a^{x}\cdot\ln^{2}a, y^{(3)}=a^{x}\cdot\ln^{3}a$. Согласно, принципу математической индукции имеем:

$$\left(a^{x}\right)^{(n)}=a^{x}\cdot\ln^{n}a \qquad (6)$$

2.2 Предварительное преобразование функции

Мы уже знаем формулы n-ой производной для функций $e^{x}, e^{kx}, \sin x$, $\left(a+bx\right)^{\alpha}, x^{\alpha}, x^{n}, \left(1+x\right)^{\alpha}, \dfrac{1}{x}, x^{m}, P_{m}\left(x\right), a^{x}$.

Пример 7. Найти n-ю производную функции $y=\cos x$.

Преобразуем функцию $y=\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$. Из примера (3) имеем $\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда $y^{(n)}=\left(\cos x\right)^{(n)}=\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)^{(n)}=$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x-n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Итак, $\left(\cos x\right)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Используя формулу n-й производной для функции $\cos x$, получим формулу n-ой производной для функции $\cos mx, m\in N: \left(\cos mx\right)^{(n)}=m^{n}\cdot\cos\left(mx+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пример 8. Найти производную n-го порядка функции $y=\cos^{4}x$.

Понизим степень тригонометрической функции с помощью кратных углов.

$$y=\cos^{4}x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^{2}2x\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

Откуда

$$\left(\cos 4x\right)^{(n)}=\left(\frac{3}{8}\right)^{(n)}+\frac{1}{2}\left(\cos 2x\right)^{(n)}+\frac{1}{8}\left(\cos 4x\right)^{(n)}=0+\frac{1}{2}\cdot 2^{n}\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{8}\cdot 4^{n}\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)=2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)+2^{2n-3}\cdot\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 9. Найдите n-ю производную функции $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Представим функцию в виде алгебраической суммы двух простейших дробей: $y=\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$.

Тогда $y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}$. Используя ранее выведенную формулу ($4'$): $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$ имеем $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}}$ и

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

Учитывая это, получим $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right)$.

Пример 10. Найдите n-ю производную функции $y=\ln\frac{1+x}{3x+1}$.

Представим функцию в виде $y=\ln\frac{1+x}{3x+1}=\ln|x+1|-\ln|3x+1|$. Тогда

$$y'=\frac{1}{x+1}-\frac{3}{3x+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+\frac{1}{3}} \quad \text{и} \quad y^{(n)}=\left(y'\right)^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-1)}-\left(\frac{1}{x+\frac{1}{3}}\right)^{(n-1)}.$$

Используя формулу ($4'$), имеем $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+1)^n}-\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^n}=$

$$=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\left(\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^n}\right).$$

Пример 11. Найдите n-ю производную функции $y=\sin 2x\cdot\cos^2 3x$.

Преобразуем функцию $y=\sin 2x\cdot\cos^2 3x=\sin 2x\cdot\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+$

$$+\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos 6x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}(\sin 8x-\sin 4x).$$

Учитывая формулу $\left(\sin(kx)\right)^{(n)}=k^n\cdot\sin\left(kx+n\frac{\pi}{2}\right)$ имеем

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(\sin 2x)^{(n)}+\frac{1}{4}(\sin 8x)^{(n)}-\frac{1}{4}(\sin 4x)^{(n)}=2^{n-1}\cdot\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+2^{3n-2}\cdot\sin\left(8x+n\frac{\pi}{2}\right)-4^{n-1}\cdot\sin\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 12. Найдите n-ю производную функции $y=e^x\cdot\cos x$.

Представим функцию в виде $y=e^x\cdot\cos x=\operatorname{Re}e^{x(1+i)}$. Тогда

$$\left(e^{x(1+i)}\right)^{(n)}=(1+i)^n\cdot e^{x(1+i)}=2^{\frac{n}{2}}e^{n\frac{\pi}{4}i}\cdot e^{x(1+i)}=e^x\cdot e^{\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)i}\cdot 2^{\frac{n}{2}}=2^{\frac{n}{2}}\cdot e^x\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}n\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(x+\frac{\pi}{4}n\right)\right)=e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}n\right)2^{\frac{n}{2}}+ie^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}n\right)\cdot e^{\frac{n}{2}}.$$

Откуда $y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}\cdot e^x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}n\right)$.

Второй способ.

$$y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$y''=\sqrt{2}e^x\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot e^x\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{4}\right).$$

Применяя принцип математической индукции можно доказать формулу $y^{(n)}=\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot e^x\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right)$.

Пример 13. Найдите n-ю производную функции $y=arctgx$.

Так как $\sin(arcctgx)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\cos(arcctgx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, то

$$\underline{\sin((k+1)arcctgx)}=\sin(karcctgx+arcctgx)=\sin(karcctgx)\cos(arcctgx)+$$

$$+\cos(karcctgx)\sin(arcctgx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin(karcctgx)+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cos(karcctgx).\ (1)$$

Найдем $y'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\sin(arcctgx)$

$$y''=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sin(arcctgx)2x-\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos(arcctgx)\cdot\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=-\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x\sin(arcctgx)+\cos(arcctgx)\right)=-\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x}{1+x^2}\sin(arcctgx)+\right.$$

$$+\frac{1}{1+x^2}\cos\left(arcctgx\right)\Bigg)=\frac{\left(-1\right)^{2-1}\cdot 1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\left(2arcctgx\right).$$

Сравнивая y' и y'' возникает предположение, что

$$y^{(n)}=\frac{\left(-1\right)^{n-1}\cdot\left(n-1\right)!}{\left(1+x^2\right)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(narcctgx\right) \qquad (*)$$

При $n=1$ и $n=2$ формула (*) справедлива.

Пусть формула (*) справедлива при $n=k$, то есть

$$y^{(k)}=\frac{\left(-1\right)^{k-1}\cdot\left(k-1\right)!}{\left(1+x^2\right)^{\frac{k}{2}}}\sin\left(karcctgx\right).$$

Докажем, что формула (*) справедлива и при $n=k+1$.

$$y^{(k+1)}=\frac{\left(-1\right)^{k}\cdot k!}{\left(1+x^2\right)^{\frac{k+1}{2}}}\sin\left(\left(k+1\right)arcctgx\right).$$

Действительно

$$y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left(-1\right)^{k-1}\cdot\left(k-1\right)!\Bigg(-\frac{k}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{k+2}{2}}\cdot 2x\cdot\sin\left(karcctgx\right)-$$

$$-\left(1+x^2\right)^{-\frac{k}{2}}\cdot\cos\left(karcctgx\right)\cdot\frac{k}{1+x^2}\Bigg)=\left(-1\right)^{k}\left(k-1\right)!k\cdot\left(1+x^2\right)^{-\frac{k+2}{2}}\left(x\sin\left(karcctgx\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\left(karcctgx\right)\right)=\frac{\left(-1\right)^{k}\cdot k!}{\left(1+x^2\right)^{\frac{k+1}{2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\left(karcctgx\right)+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cos\left(karcctgx\right)\right).$$

Используя формулу (1) имеем

$$y^{(k+1)}=\frac{\left(-1\right)^{k}\cdot k!}{\left(1+x^2\right)^{\frac{k+1}{2}}}\sin\left(\left(k+1\right)arcctgx\right).$$

Таким образом, формула (*) справедлива и при $n=k+1$. Итак, формула (*) справедлива для любого натурального n.

2.3 Применение формулы Лейбница

Выведем правило вычисления n-ой производной от произведения двух функций. Пусть функции $u=u\left(x\right)$ и $v=v\left(x\right)$ $n+1$ раз дифференцируема в точке x. Покажем, что функция $y=u\cdot v$ имеет n-ую производную и найдем ее выражение. Применяя последовательно правило производной от произведения двух функций получим:

$y' = u'v + v'u$ или $y^{(1)} \cdot v^{(0)} + v^{(1)} \cdot u^{(0)}$, где $u = u^{(0)}, v = v^{(0)}$.

$y^{(2)} = u^{(2)} \cdot v^{(0)} + u^{(1)} \cdot v^{(1)} + v^{(2)} \cdot u^{(0)} + v^{(1)} \cdot u^{(1)}$ или

$$y^{(2)} = u^{(2)} \cdot v^{(0)} + 2u^{(1)} \cdot v^{(1)} + v^{(2)} \cdot u^{(0)} = \sum_{k=0}^{2} C_2^k u^{(2-k)} \cdot v^{(k)}.$$

Тогда $y^{(3)} = \sum_{k=0}^{2} C_2^k \left(u^{(2-k)} \cdot v^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{2} C_2^k \cdot u^{(3-k)} \cdot v^{(k)} + \sum_{k=0}^{2} C_2^k u^{(2-k)} \cdot v^{(k+1)}$.

Пусть для первой суммы $k = t$, а для второй суммы $k = t - 1$.

Тогда $y^{(3)} = \sum_{t=0}^{2} C_2^t \cdot u^{(3-t)} \cdot v^{(2)} + \sum_{t=1}^{3} C_2^{t-1} u^{3-t} \cdot v^{(t)} = C_2^0 u^{(3)} v^{(0)} +$

$$+\sum_{t=1}^{2} C_2^t u^{(3-t)} \cdot v^{(t)} + \sum_{t=1}^{2} C_2^{t-1} u^{(3-t)} \cdot v^{(3)} + C_2^2 u^{(0)} \cdot v^{(3)} = C_3^0 u^{(3)} \cdot v^{(0)} + \sum_{t=1}^{2} C_3^t u^{(3-t)} \cdot v^{(t)} +$$

$$+C_3^3 u^{(0)} \cdot v^3 = \sum_{t=0}^{3} C_3^t u^{(3-t)} \cdot v^{(t)}.$$

Здесь мы использовали формулы $C_2^t + C_2^{t-1} = C_3^t$ и $C_2^2 = C_3^3$. Таким образом $y^{(3)} = \left(u \cdot v\right)^{(3)} = \sum_{t=0}^{3} C_3^t u^{(3-t)} \cdot v^{(t)}$.

Поступая аналогично, получим

$$y^{(n)} = \left(u \cdot v\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} \text{ или } y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}, \qquad (*)$$

где $u = u^{(0)}, v = v^{(0)}, C_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$.

Формулу (*) называют формулой Лейбница.

Формула Лейбница особенно эффективна тогда, когда одна из перемножаемых функций имеет лишь конечное число отличных от нуля производных, а вычисление всех производных другой функции не вызывает затруднений.

Пример 14. Найдите 50-ую производную от функции $y = x^2 \cdot \cos ax, a \in R$.

Найдем требуемую производную с помощью формулы Лейбница:

$$\left(x^2 \cos ax\right)^{50} = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k \left(x^2\right)^{(k)} \cdot \left(\cos ax\right)^{(50-k)} = C_{50}^0 x^2 \left(\cos ax\right)^{(50)} + C_{50}^0 \left(2x\right) \cdot \left(\cos ax\right)^{(49)} +$$

$$+C_{50}^2 \cdot 2 \cdot \left(\cos ax\right)^{(48)} + C_{50}^3 \cdot 0 \cdot \left(\cos ax\right)^{(47)} = 1 \cdot x^2 \cdot a^{50} \cdot \cos\left(ax + 50 \cdot \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+50\cdot 2x\cdot a^{49}\cos\left(ax+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 2\cdot a^{48}\cdot\cos\left(ax+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)=a^{48}\Big(x^2\cos(ax+\pi)+$$

$$+100xa\cos\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)+2450\cos ax\Big)=a^{48}\left(\left(2450-x^2\right)\cos ax-100ax\sin ax\right).$$

Пример 15. Для функции $f(x)=e^{arcctgx}$ вычислить $f^{(n)}(0)$.

Решение. Так как $f(x)=-e^{arcctgx}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$, то $\left(1+x^2\right)\cdot f'(x)=-f(x)$ (1)

Вычислим производные порядка $(n-1)$ от обеих частей этого равенства. Для вычисления производной от левой части применим формулу Лейбница, положив в ней $u=f'(x), v=1+x^2$.

Получим $\left(1+x^2\right)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=-f^{(n-1)}(x)$

или

$$\left(1+x^2\right)f^{(n)}(x)=-\left(2(n-1)x+1\right)f^{(n-1)}(x)-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) \qquad (2)$$

Так как $f(0)=e^{arcctg\,0}=e^{\frac{\pi}{2}}$, то $f'(0)=-f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$.

Дифференцируя равенство (1), имеем

$$f''(x)\left(1+x^2\right)+f'(x)\cdot 2x=-f'(x),$$

откуда

$$f''(0)=-f'(0)=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Заменяя в равенстве (2) x на 0, получим рекуррентную формулу

$$f^{(n)}(0)=-f^{(n-1)}(0)-(n-2)(n-1)f^{(n-2)}(0), n=3,4,...,$$

причем

$$f(0)=e^{\frac{\pi}{2}}, f'(0)=-f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}, f''(0)=f(0).$$

2.4 Применение теоремы Фаа ди Бруно

Выведем правило вычисления n-й производной от сложной функции $G(x)=F(u(x))$. Для этого используем теорему Фаа ди Бруно: пусть функции $F(x)$ и $u(x)$ имеют n-ые производные. Тогда для n-й производной функции $G(x)=F(u(x))$ имеет место формула Бруно:

$$G^{(n)}(x)=\sum_{\alpha+2\beta+3\gamma+...=n}F^{(\alpha+\beta+\gamma+...)}(u)\cdot P_{\alpha+\beta+\gamma+...},$$

где $P_{\alpha+\beta+\gamma+...} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!...}\left(\frac{u^{1}}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{u^{(2)}}{2!}\right)^{\beta}\left(\frac{u^{(3)}}{3!}\right)^{\gamma}...$.

Суммирование в правой части ведется по всем целым неотрицательным числам $\alpha,\beta,\gamma,...$ удовлетворяющих равенству $\alpha+2\beta+3\gamma+...=n$.

Докажем, что $G^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n}C_{kn}(x)F^{(k)}(u)$ (1)

где $C_{kn}(x)(k=0,1,...,n)$ не зависят от вида функции $F(u)$. Для доказательства формулы (1) применим принцип математической индукции. При $n=1$ имеем $G^{(1)}(x)=F^{(1)}(u)\cdot u'(x)=C_{11}F'(u)$, где $C_{11}=u'(x)$.

Предположим, что для производной $(n-1)$-го порядка функции $G(x)$ справедлива формула

$$G^{(n-1)}(u)=\sum_{k=1}^{n-1}C_{kn-1}(x)\cdot F^{(k)}(u).$$

где $C_{kn-1}(x)$ - функции не зависящие от вида $F(u)$. Дифференцируя это равенство, находим

$$G^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(C'_{kn-1}(x)\cdot F^{(k)}(u)+C_{kn-1}(x)\cdot F^{(k+1)}(u)\cdot u'(x)\right)=\sum_{k=1}^{n}C_{kn}F^{(k)}(u),$$ где

$C_{1n}(x)=C'_{1n-1}(x);C_{kn}(x)=C'_{kn-1}(x)+u'C_{(k-1)(n-1)}(x)(k=2,3,...,n-1);$

$C_{nn}(x)=C_{(n-1)(n-1)}(x)\cdot u'$,

то есть формула (1) справедлива для любого натурального n. Итак, вид $C_{kn}(x)$ не зависит от конкретного задания функции $y=F(u),u=u(x)$. Поэтому для определения точного выражения $C_{kn}(x)$ через функцию $u(x)$ можно использовать любые удобные функции. В силу этого пусть $F(u)$ и $u(x)$ - многочлены n-ой степени, записанные в виде

$$F(u)=F(u_0)+\frac{F'(u_0)}{1!}(u-u_0)+...+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}(u-u_0)^n \qquad (2)$$

$$u(x)=u(x_0)+\frac{u'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

или

$$u-u_0=\frac{u'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (3)$$

Подставляя в формулу (2) вместо $u-u_0$ правую часть равенства (3) имеем

$$G(x)=F(u_0)+\frac{F'(u_0)}{1!}\left(\frac{u'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)+...+$$
$$+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\left(\frac{u'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)^n \qquad 4)$$

Из формулы (4) следует, что функция $G(x)$ представляет собой многочлен степени n^2, который можно записать в виде равенства (5):

$$G(x)=G(x_0)+\frac{G'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{G^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...+\frac{G^{(n^2)}(x_0)}{(n^2)!}(x-x_0)^{n^2}$$

Раскрывая скобки в правой части равенства (4) с помощью формулы полинома Ньютона, имеющей вид:

$$(a_1+a_2+...+a_n)^n=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=n}\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n},\ (0\le\alpha_i\le n)$$

и сравнивая коэффициенты при $(x-x_0)^n$ в получившемся выражении с равенством (5), получим утверждение теоремы.

Найдем с помощью формулы Бруно первые пять производных от сложной функции $G(x)$.

$$G^{(1)}(x)=\sum_{\alpha=1}F^{(1)}(u)P_1=F^{(1)}(u)\cdot\frac{1!}{1!}\left(\frac{u'}{1!}\right)=F^{(1)}(u)\cdot u'$$

$$G^{(2)}(x)=\sum_{\alpha+2\beta=2}F^{(\alpha+\beta)}P_{\alpha+\beta}=\sum_{\alpha+2\beta=2}F^{(\alpha+\beta)}(u)\cdot\frac{2!}{\alpha!\beta!}\left(\frac{u^1}{1!}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{u^{(2)}}{2!}\right)^\beta=$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c}\alpha&\beta&\alpha+2\beta\\0&1&2\\2&0&2\end{array}\right|=F^{(1)}(u)\frac{2!}{0!1!}\cdot\left(\frac{u^{(1)}}{1!}\right)^0\cdot\left(\frac{u^{(2)}}{2!}\right)^1+F^{(2)}(u)\cdot\left(\frac{u^{(1)}}{1!}\right)^2=F^{(1)}(u)u^{(2)}+$$
$$+F^{(2)}(u)\cdot\left(u^{(1)}\right)^2$$

Для того, чтобы раскрыть $F^{(3)}(u)$ надо взять три буквы α,β,γ и решить в целых неотрицательных числах уравнение $\alpha+2\beta+3\gamma=3$. Найдем эти решения (подбором).

α	β	γ	$\alpha+2\beta+3\gamma$
0	0	1	3
1	1	0	3
3	0	0	3

Получим три решения $(0,0,1),(1,1,0),(3,0,0)$.

Таким образом,

$$G^{(3)}(x)=\sum_{\alpha+2\beta+3\gamma=3} F^{(\alpha+\beta+\gamma)}(u)\cdot P_{\alpha+\beta+\gamma}=F^{(1)}(u)\cdot P_{0+0+1}+F^{(2)}(u)\cdot P_{1+1+0}+$$

$$+F^{(3)}(u)P_{3+0+0}=F^{(1)}(u)\frac{3!}{0!0!1!}\cdot\frac{u^{(3)}}{3!}+F^{(2)}(u)\frac{3!}{1!1!0!}\cdot\frac{u^{(1)}}{1!}\cdot\frac{u^{(2)}}{2!}+F^{(3)}(u)\cdot\left(\frac{u^{(1)}}{1!}\right)^3=$$

$$=F^{(1)}(u)\cdot u^{(3)}+3(u)^{(1)}\cdot u^{(2)}\cdot F^{(2)}(u)+\left((u)^{(1)}\right)^3\cdot F^{(3)}(u).$$

Для нахождения коэффициентов $G^{(4)}(u)$ возьмем четыре буквы $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ и решим в целых неотрицательных числах уравнение $\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta=4$.

Тогда

$$G^{(4)}(x)=F^{(1)}(u)\frac{4!}{0!0!0!1!}\cdot\frac{u^{(4)}}{4!}+F^{(2)}(u)\frac{4!}{1!0!0!0!}\cdot\frac{u^{(1)}}{1!}\cdot\frac{u^{(3)}}{1!}+$$

$$+F^{(3)}(u)\cdot\left(\frac{u^{(1)}}{1!}\right)^2\cdot\left(\frac{u^{(2)}}{2!}\right)\cdot\frac{4!}{2!1!}+F^{(2)}(u)\cdot\frac{4!}{2!}\left(\frac{u^{(2)}}{2!}\right)+F^{(4)}(u)\cdot\frac{4!}{4!}\left(\frac{u^{(1)}}{1!}\right)^4=$$

α	β	γ	δ	$\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta$
0	0	0	1	4
1	0	1	0	4
2	1	0	0	4
0	2	0	0	4
4	0	0	0	4

$$=F^{1}(u)\cdot u^{(4)}+F^{(2)}(u)\cdot\left(4u^{(1)}\cdot u^{(3)}+3\left(u^{(2)}\right)^2\right)+$$

$$+6F^{(3)}(u)\cdot\left(u^{(1)}\right)^2\cdot u^{(2)}+F^{(4)}(u)\cdot\left(u^{(1)}\right)^4.$$

Для нахождения коэффициентов $G^{(5)}(u)$ возьмем пять букв $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta$ и составим таблицу

α	β	γ	δ	θ	$\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+5\theta$
0	0	0	0	1	5
1	0	0	1	0	5
0	1	1	0	0	5

2	0	1	0	0	5
3	1	0	0	0	5
1	2	0	0	0	5
5	0	0	0	0	5

Тогда

$$G^{(5)}(x)=\sum_{\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+5\theta=5} F^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\theta)}(u)\cdot P_{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\theta}=$$

$$=F^{(1)}(u)\cdot\frac{5!}{1!}\cdot\frac{u^{(5)}}{5!}+F^{(2)}(u)\left(\frac{5!}{1!1!}\left(\frac{u^{(1)}}{1!}\right)^1\cdot\frac{u^{(4)}}{4!}+\frac{5!}{1!1!}\left(\frac{u^{(2)}}{2!}\right)^1\cdot\left(\frac{u^{(3)}}{3!}\right)^1\right)+$$

$$+F^{(3)}(u)\left(\frac{5!}{2!1!}\cdot\left(u^{(1)}\right)^2\cdot\frac{u^{(3)}}{3!}+\frac{5!}{1!2!}\cdot\frac{u^{(1)}}{1!}\cdot\frac{\left(u^{(2)}\right)^2}{4}\right)+F^{(4)}(u)\cdot\frac{5!}{3!1!}\left(u^{(1)}\right)^3\cdot\frac{u^{(2)}}{2}+$$

$$+F^{(5)}(u)\frac{5!}{5!}\cdot\left(u^{(1)}\right)^5=F^{(1)}(u)\cdot u^{(5)}+F^{(2)}(u)\left(5u^{(1)}\cdot u^{(4)}+10u^{(2)}\cdot u^{(3)}\right)+$$

$$+F^{(3)}(u)\left(10\left(u^{(1)}\right)^2\cdot u^{(3)}+15u^{(1)}\left(u^{(2)}\right)^2\right)+F^{(4)}(u)\cdot 10\left(u^{(1)}\right)^3\cdot u^{(2)}+F^{(5)}(u)\cdot\left(u^{1}\right)^5$$

$G^{(6)}(u)=\sum\limits_{\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+5\theta+6\varphi=5} F^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\theta+\varphi)}(u)\cdot P_{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\theta+\varphi}$ найдите самостоятельно используя таблицу:

α	β	γ	δ	θ	φ	$\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+5\theta+6\varphi$
0	0	0	0	0	1	6
1	0	0	0	1	0	6
0	1	0	1	0	0	6
0	0	2	0	0	0	6
2	0	0	1	0	0	6
1	1	1	0	0	0	6
3	0	1	0	0	0	6
2	2	0	0	0	0	6
4	1	0	0	0	0	6
6	0	0	0	0	0	6

Очевидно, что если в формуле Бруно $u(x)=ax+b$, то $G^{(n)}(x)=F^{(n)}(x)\cdot a^n$.

Пример 16. Найдите n-ую производную функции $y=(a+bx)^{\alpha}$, где $a,b,\alpha\in R$.

$y=G(x)=F(u(x))$ где $F(u)=u^{\alpha}, u(x)=a+bx$.

$y^{(n)}=G^{(n)}(x)=F^{(n)}(u)\cdot b^n=\left(u^{\alpha}\right)^{(n)}\cdot b^n=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)b^n\cdot(a+bx)^{\alpha-n}$.

Пример 17. Найдите третью производную функции $y=e^{\sin 6x}$.

Имеем $y=G(x)=F(u(x))$, где $F(u)=e^u, u(x)=\sin 6x$.

По формуле Бруно имеем

$$y^{(3)}=G^{(3)}(x)=\left(e^u\right)^{(1)}\cdot\left(\sin 6x\right)^{(3)}+3\left(\sin 6x\right)^{(1)}\cdot\sin 6x\cdot\left(e^u\right)^{(2)}+\left(\left(\sin 6x\right)^{(1)}\right)^3\cdot\left(e^u\right)^{(3)}=$$

$$=e^u\cdot 6^3\sin\left(6x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)+3\cdot 6\cos 6x\cdot\sin 6x\cdot e^u+6^3\left(\cos x\right)^3\cdot e^u=$$

$$=e^{\sin 6x}\left(-6^3\cdot\cos 6x+9\sin 12x+6^3\cos^3 6x\right).$$

Пример 18. Найдем n-ую производную функции $y=f\left(-x^2\right)$.

$y=G(x)=F(u(x))$, где $F(u)=f(u), u(x)=-x^2$.

Тогда $u^{(1)}(x)=-2x, u^{(2)}(x)=-2$, а $u^{(n)}(x)=0$, для $n=3,4,....$ По формуле Бруно имеем:

При $n=1, y^{(1)}=f'(u)\cdot u'=(-2x)f^{(1)}\left(-x^2\right)$

при $n=2, y^{(2)}=f'(u)\cdot u^{(2)}+f^{(2)}(u)\cdot\left(u^{(1)}\right)^{(2)}=(-2x)^2\cdot f^{(2)}\left(-x^2\right)-2f'\left(-x^2\right)=$

$$=(-2x)^2 f^{(2)}\left(-x^2\right)-\frac{2(2-1)}{2!}f^{(1)}\left(-x^2\right)(-2x)^{2-2}.$$

при $n=3, y^{(3)}=\left(u^{(1)}\right)^3\cdot f^{(3)}(u)+3u^{(1)}\cdot u^{(2)}f^{(2)}(u)=(-2x)^3 f^{(3)}\left(-x^2\right)-$

$$-\frac{3(3-1)}{1!}(-2x)^{3-2}\cdot f^{(2)}\left(-x^2\right)$$

при $n=4, y^{(4)}=f'(u)\cdot 0+f^{(2)}(u)\cdot\left(4\cdot u^{(1)}\cdot 0+3\left(u^{(2)}\right)^2\right)+$

$$+6f^{(3)}(u)\cdot\left(u^{(1)}\right)^2\cdot u^{(2)}+f^{(4)}(u)\cdot\left(u^{(1)}\right)^4=3\left(u^{(2)}\right)^2\cdot f^{(2)}(u)+6f^{(3)}(u)\cdot\left(u^{(1)}\right)^2\cdot u^{(2)}+$$

$$+f^{(4)}(u)\cdot\left(u^{(1)}\right)^4=(-2x)^4\cdot f^{(4)}\left(-x^2\right)--\frac{4(4-1)}{1!}(-2x)^{4-2}\cdot f^{(3)}\left(-x^2\right)+$$

$$+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2!}(-2x)^{4-4}\cdot f^{(2)}\left(-x^2\right)$$

Поступая аналогично для $n=5,6,...$ получим формулу для n-ой производной:

$$\begin{aligned}y^{(n)}(x)=&(-2x)^n f^{(n)}\left(-x^2\right)-\frac{n(n-1)}{1!}(-2x)^{n-2}\cdot f^{(n-1)}\left(-x^2\right)+\\&+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(-2x)^{n-4}\cdot f^{(n-2)}\left(-x^2\right)-\\&-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}(-2x)^{n-6}\cdot f^{(n-3)}\left(-x^2\right)+...\end{aligned}\qquad(5)$$

Используя формулу (5) найдем n-ую производную от функции e^{-x^2}:

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = (-2x)^n \cdot e^{-x^2} - \frac{n(n-1)}{1!}(-2x)^{n-2} \cdot e^{-x^2} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(-2x)^{n-4} \cdot e^{-x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}(-2x)^{n-6} \cdot e^{-x^2} + \ldots$$

или

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = e^{-x^2}\left((-2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(-2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(-2x)^{n-4} - \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}(-2x)^{n-6} + \ldots\right) \qquad (6)$$

Используя формулу (6) найдем шестую производную функции $y = e^{-x^2}$.

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(6)} = e^{-x^2}\left((-2x)^6 - \frac{6\cdot 5}{1}(-2x)^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2}(-2x)^2 - \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3!}(-2x)^0\right) =$$

$$= e^{-x^2}\left(64x^6 - 30\cdot 16x^4 + 720x^2 - 120\right) = e^{-x^2}\cdot\left(64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120\right).$$

Многочлен степени n, стоящий в круглых скобках формулы (6), обозначают $H_n(x)$ и называют многочленом Чебышева-Эрмита, тогда формула (6) примет вид

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = e^{-x^2}\cdot H_n(x) \qquad (7)$$

Установим связь между многочленами Чебышева-Эрмита:

$$e^{-x^2} = \left(e^{-x^2}\right)^{(0)} = e^{-x^2}\cdot H_0(x) \Rightarrow H_0(x) = 1$$

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(1)} = e^{-x^2}\cdot(-2x) \Rightarrow H_1(x) = -2x$$

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(2)} = e^{-x^2}\left(-2x(-2x) - 2\cdot 1\cdot 1\right) = e^{-x^2}\left(-2x\cdot H_1(x) - 2\cdot 1\cdot H_0(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_2(x) = -2x\cdot H_1(x) - 2\cdot 1\cdot H_0(x), H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(3)} = e^{-x^2}\left(-8x^3 + 12x\right) = e^{-x^2}\left(-2x\cdot H_2(x) - 2\cdot 2\cdot H_1(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_3(x) = -2x\cdot H_2(x) - 2\cdot 2\cdot H_1(x), H_3(x) = -8x^3 + 12$$

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(4)} = e^{-x^2}\left(16x^4 - 48x^2 + 12x\right) = e^{-x^2}\left(-2x\cdot H_3(x) - 2\cdot 3\cdot H_2(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_4(x) = -2x\cdot H_3(x) - 2\cdot 3\cdot H_2(x), H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(5)} = e^{-x^2}\left(-32x^5 + 160x^3 + 120x\right) = e^{-x^2}\left(-2x\cdot H_4(x) - 2\cdot 4\cdot H_3(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_5(x) = -2x\cdot H_4(x) - 2\cdot 4\cdot H_3(x), H_5(x) = -32x^5 + 160x^3 - 120x.$$

Таким образом, получим рекуррентную формулу

$$H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) - 2\cdot nH_{n-1}(x) \quad \text{для} \quad n = 1,2,3,... \qquad (8)$$

при этом $H_0(x) = 1, H_1(x) = -2x$.

Строгое доказательство формулы (8) проводится методом математической индукции. Подготовив заранее таблицу многочленов Чебышева-Эрмита (достаточно высоких степеней) можно легко вычислять n-ую производную функции e^{-x^2}.

Например. $\left(e^{-x^2}\right)^{(6)} = e^{-x^2}\cdot H_6(x)$. Найдем $H_6(x)$.

$$H_6(x) = -2xH_5(x) - 2\cdot 5H_4(x) = -2x\left(-32x^5 + 160x^3 - 120x\right) - 10\left(16x^4 - 48x^2 + 12\right) =$$

$$= 64x^6 - 320x^4 + 240x^2 - 160x^4 + 480x^2 - 120 = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.$$

3 Производные от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y(x)$ задана параметрически: $x = x(t), y = y(t), t \in T$. Если в некотором промежутке $(\alpha,\beta) \subset T$ функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$, то в промежутке $(\alpha;\beta)$ функция $y(x)$ однозначно определена, дифференцируема и $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \varphi_1(t)$. Производная y'_x связана с аргументом x так же, как и исходная функция $y(x)$ через параметр t: $y'_x = \varphi_1(t), x = x(t)$. Если в некотором промежутке $(\alpha_1;\beta_1)$ функции $x(t)$ и $\varphi_1(t)$ дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$, то функция $y'_x = \varphi_1(t)$ однозначно определена, дифференцируема и $y''_{x^2} = \left(y'_x\right)'_x = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \dfrac{\varphi'_1(t)}{x'_t}$.

Пусть $y''_{x^2} = \varphi_2(t)$. Тогда при выполнении соответствующих условий третья производная $y^{(3)}_{x^3} = \dfrac{\varphi'_2(t)}{x'_t}$ и т.д.

Пример 19. Найти $y^{(3)}_{x^3}$ для функции $y(x)$, заданной параметрически: $x(t) = t^3 + 3t, y(t) = t\,arctg\,t - \ln\sqrt{1+t^2}$.

Решение. Очевидно, что $t \in R, x'(t) = 3t^2 + 3 \neq 0 \quad \forall t \in R$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на R. Следовательно, $y(x)$ однозначно определена и $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ для $\forall t \in R$. Найдем $y^{(1)}_x$.

$$y'_t = arctgt + \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = arctgt; y'_x = \frac{arctgt}{3t^2+3} = \varphi_1(t).$$

Функция $y'_x(x)$ задана параметрически $y'_x = \varphi_1(t), x = x(t) \;\; \forall t \in R$. Функции $\varphi_1(t)$ и $x(t)$ дифференцируемы на R и $x'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in R$. Следовательно, однозначно определена и $y''_{x^2} = \dfrac{\varphi_1'(t)}{x'_t} \;\; \forall t \in R$. Найдем $y^{(2)}_{x^2}$.

$$\varphi_1'(t) = \left(\frac{arctgt}{3t^2+3}\right)' = \frac{\frac{3t^2+3}{1+t^2} - 6tarctgt}{\left(3t^2+3\right)^2} = \frac{3-6tarctgt}{9\left(t^2+1\right)^2}.$$

$$y^{(2)}_{x^2} = \frac{3\left(1-2tarctgt\right)}{9\left(t^2+1\right)^2 \cdot 3\left(t^2+1\right)} = \frac{1-2tarctgt}{9\left(t^2+1\right)^3} = \varphi_2(t).$$ Найдем $y^{(3)}_{x^3}$.

$$y^{(3)}_{x^3} = \frac{\varphi_2(t)}{x'_t} \cdot \varphi_2'(t) = \frac{\left(-2arctgt - \frac{2t}{1+t^2}\right)9\left(t^2+1\right)^3 - 54\left(t^2+1\right)^2 t\left(1-2tarctgt\right)}{81\left(t^2+1\right)^6} =$$

$$= \frac{-18\left(t^2+1\right)^3 arctgt - 18t\left(t^2+1\right)^2 - 54\left(t^2+1\right)^2 \cdot t + 108t^2\left(t^2+1\right)^2 arctgt}{81\left(t^2+1\right)^6} =$$

$$= \frac{\left(t^2+1\right)^2 \cdot 18\left(-\left(t^2+1\right)arctgt - 4t + 6t^2 arctgt\right)}{81\left(t^2+1\right)^6} = \frac{2\left(5t^2 arctgt - arctgt - 4t\right)}{9\left(t^2+1\right)^4}.$$

Пример 20. Найти n-ую производную от функции, заданной параметрически уравнениями $x = \cos t, y = \cos nt, n \in 0,1,2,...$

Для $|x| \leq 1, t = \arccos x \Rightarrow y = \cos\left(n \arccos x\right) = P_n(x)$.

Тогда

$P_0(x) = \cos\left(0 \arccos x\right) = 1, P_1(x) = \cos\left(\arccos x\right) = x, P_{n+1}(x) = \cos\left(\left(n+1\right)\arccos x\right)$,

$P_{n-1}(x) = \cos\left(\left(n-1\right)\arccos x\right)$.

Так как

$\cos\left(\left(n+1\right)\arccos x\right) + \cos\left(\left(n-1\right)\arccos x\right) = 2\cos\left(n \arccos x\right)\cos\left(\arccos x\right)$, то

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2xP_n(x) \qquad (*)$$

При $n = 1$ используя (*) имеем

$P_2(x) + P_0(x) = 2xP_1(x)$

или

$P_2(x) = 2x^2 - 1$; при $n = 2$: $P_3(x) = 2xP_2(x) - P_1(x) = 2x\left(2x^2-1\right) - x = 4x^3 - 3x$

Пусть $P_n(x) = 2^{n-1} \cdot x^n - Q_{n-2}(x)$.

Докажем, что $P_{n+1}(x) = 2^n \cdot x^{n+1} - Q_{n-1}(x)$.

Действительно по формуле (*) имеем:

$$P_{n+1}(x)=2x\cdot P_n(x)-P_{n-1}(x)=2x\left(2^{n-1}\cdot x^n-Q_{n-2}(x)\right)=2^n\cdot x^{n+1}-Q_{n-1}(x).$$

Таким образом, по индукции доказано, что $P_n(x)$ - многочлен степени n со старшим коэффициентом $2^{n-1}, n=1,2,3,...$

Следовательно, $\left(P_n(x)\right)^{(n)}=2^{n-1}\cdot n!$ или $y^{(n)}=2^{n-1}\cdot n!$

4 Производная от функции, заданной неявно

Пусть функция $y=y(x)$ заданная неявно уравнением $F\left(x,y(x)\right)=0$ определена и дифференцируема на (a,b). Тогда при формальном дифференцировании уравнения $F\left(x,y(x)\right)=0$ по переменной x, (считая y функцией от x) получим линейное относительно y'_x уравнение, из которого находим выражение для y'_x.

При соответствующих условиях функция $y(x)$ будет иметь и производные высших порядков, которые определяются уравнениями $F\left(x,y(x)\right)^{(2)}_{x^2}=0, F\left(x,y(x)\right)^{(3)}_{x^3}=0$ и т.д.

Пример 21. Пусть функция $y(x)$ задана неявно уравнением $x^3+y^3-y^5-x=0$. Найти $y'_x(1), y''_{x^2}(1)$, если $y(1)=1$.

Решение. Заметим, что $x=1, y=1$ удовлетворяют данному уравнению. Дифференцируя соотношение $x^3+y^3(x)-y^5(x)-x=0$ по переменной x, получим

$$3x^2+3y^2(x)\cdot y'_x-5y^4(x)\cdot y'_x-1=0 \qquad (1)$$

Дифференцируя (1) по переменной x, получим

$$6x+6y(x)\cdot\left(y'_x\right)^2+3y^2(x)\cdot y''_{x^2}-20y^3(x)\cdot\left(y'_x\right)^2-5y^4(x)\cdot y''_{x^2}=0 \qquad (2)$$

Подставляя в равенство (1) $x=1, y=1$ имеем

$3+3y'_x(1)-5y'_x(1)-1=0,$

$-2y'_x(1)=-2,$

$y'_x(1)=1$

Подставляя в равенство (2), $x=1, y=1$, $y'_x(1)=1$ имеем

$6+6\cdot1\cdot1^2+3\cdot1^2\cdot y''_{x^2}(1)-20\cdot1\cdot1^2-5\cdot1^4\cdot y''_{x^2}(1)=0$ или

$-2y''_{x^2}(1)=8,$

$y''_{x^2}(1)=-4$

5 Задачи

Найти производную n-го порядка следующих функций:

1	$y=\sin^4 x$	2	$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$
3	$y=x^3\cdot\cos x$	4	$y=5^{3x+1}$
5	$y=\left(1-x^2\right)\sin x$	6	$y=e^x\cdot\left(3x^2-4\right)$
7	$y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$	8	$y=\lg(5x+1)$
9	$y=e^{-x}\cdot\cos x$	10	$y=e^x\cdot\cos^2 x$
11	$y=x^2\cdot\cos^2 x$	12	$y=\dfrac{1+2x}{3x-1}$

Найти производные указанного порядка следующих функций, заданных параметрически, если:

13 $y''_{x^2}: x=\arcsin t, y=\sqrt{1-t^2}$

14 $y'''_{x^3}: x=a\cos^5 t, y=a\sin^5 t$

15 $y''_{x^2}: x=t^2+2, y=\dfrac{t^3}{3}-t$

16 $y'''_{x^3}: x=e^{-t}, y=t^3$

17 $y''_{x^2}: x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$

18 $y''_{x^2}: x=t^3+3t+1, y=t^3-3t+1$

19 $y''_{x^2}: x=a(\cos t+\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$

20 $y''_{x^2}: x=e^t\cdot\cos t, y=e^t\cdot\sin t$

21 $y'''_{x^3}: x=\dfrac{1}{\sin x}, y=tgt$

22 $y'''_{x^3}: x=t^2, y=t\ln\sin t-tctgt$

23 $y''_{x^2}: x=\cos t, y=\ln\sin t$

24 $y''_{x^2}: x=\mathrm{arc}tgt, y=\dfrac{t^2}{2}$

Найти производные y'_x и y''_{x^2} следующих функций, заданных неявно, если:

25	$y = x + arctgy$
26	$x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$
27	$e^{x+y} = xy$
28	$y^2 = 2ax$
29	$y = x + \ln y$
30	$x^3 + \cos xy = 0$
31	$x^2 + 4y^3 - 3yx^2 = 0$
32	$e^{2y} - 2\ln x - 1 = 0$
33	$y^2 = e^{x^4 - y^2}$
34	$3y + arctg\left({}^{y}\!/_{x} \right) = 3x$
35	$\arcsin\left(y - x \right) = 1 - x^3 \cdot y$
36	$e^{x-y} = x + y$

Список использованных источников

1 **Архипов, Г.И.** Лекции по математическому анализу: учебник для вузов /Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – 5-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с.

2 **Ильин, В.А.** Математический анализ: учеб./ В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х Сендов. –3-е изд.: в 2 ч. Ч1. – М.: Проспект, 2006. – 672 с.

3 **Виноградова, И.А.** Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: учебное пособие для университетов, пед. вузов / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – 2-е изд. перераб. – М.: Высшая школа, 2002. – 725с.