

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Т.П. Петухова, Е.А. Шнякина

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ОЦЕНКИ ГОТОВНОСТИ СТУДЕНТОВ К ПРОВЕДЕНИЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

ЧАСТЬ 1
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Рекомендовано Ученым советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям подготовки «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная математика и информатика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2011

УДК 519.6(07)

ББК 22.19я73

П 31

Рецензент- доктор технических наук, доцент Ю.Г. Полкунов

Петухова, Т.П.

ПЗ1 Диагностические средства для оценки готовности студентов к проведению вычислительного эксперимента. Часть 1. Тестовые задания: учебное пособие/ Т.П. Петухова, Е.А. Шнякина, Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2011.-192 с.

ISBN

Настоящая первая часть диагностических средств включает в себя 342 тестовых вопроса по 11 темам курса.

Диагностические средства рекомендуется использовать для контроля знаний и умений обучающихся по дисциплинам «Численные методы», «Методы вычислений», «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки: 010100.62 - Математика, 010200.62 - Математика и компьютерные науки, 010300.62 - Фундаментальная информатика и информационные технологии, 010400.62 - Прикладная математика и информатика, 010500.62 - Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Учебное пособие выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» - №3.1.1/13256)

УДК 519.6(07)

П –

ББК 22.19я73

ISBN

© Петухова Т.П.,
Шнякина Е.А., 2011
© ГОУ ОГУ, 2011

Содержание

Введение.....	4
1 Этапы вычислительного эксперимента.....	10
2 Численное решение нелинейных уравнений	15
3 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений	25
3.1 Сведения из матричной алгебры.....	25
3.2 Прямые методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений	30
3.3 Итерационные методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений.....	46
4 Численное решение систем нелинейных уравнений	59
5 Численное решение проблемы собственных значений матриц	64
6 Интерполирование и аппроксимация функций	72
7 Численное интегрирование	80
8 Численное дифференцирование	90
9 Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.....	104
10 Численное решение уравнений конвективного переноса.....	122
11 Численное решение модельного уравнения диссипации, конвекции и кинетики	154
12 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины «Численные методы»	173

Приложение А Перечень компетенций, формируемых в ходе изучения дисциплины «Методы вычислений»	174
Приложение Б Перечень компетенций, развиваемых в ходе изучения дисциплины «Методы вычислений».....	176
Приложение В Карта правильных ответов.....	189

Введение

После изучения дисциплин «Численные методы», «Методы вычислений», «Вычислительная математика» или их аналогов у студентов должна быть сформирована готовность к проведению вычислительного эксперимента.

Вычислительный эксперимент, как технология исследования сложных процессов и явлений, состоит из пяти этапов, включающих в себя анализ объекта исследования, построение (выбор) математической модели объекта (явления), построение (выбор) дискретной модели, разработку программного средства, проведение вычислений и анализ полученных результатов.

Студент должен знать сущность каждого из этих этапов, уметь их спроектировать для поставленной задачи. В ходе освоения указанных выше дисциплин он должен приобрести опыт проведения модельного вычислительного эксперимента с самостоятельным выполнением трех последних его этапов.

В результате обучения у студента должно быть сформировано представление:

- о перспективах развития математического моделирования;
- об области использования математических моделей и вычислительного эксперимента в его будущей профессиональной деятельности;
- о сущности и этапах вычислительного эксперимента;
- об области использования того или иного метода (о совокупности решаемых задач с помощью него), о классе методов для решения поставленной задачи.

Обучающийся должен знать алгоритмы основных численных методов, приведенных в таблице 1, условия их использования, оценки сходимости, устойчивости, точности.

Таблица 1 - Основные численные методы

№	Тема	Численные методы
1	Численное решение нелинейных уравнений	метод бисекций, метод Ньютона, метод хорд, метод простых итераций
2	Численное решение систем нелинейных уравнений	метод простых итераций, метод покоординатного спуска, метод Ньютона и его модификации (двухступенчатый аналог, аппроксимационный аналог, дискретный аналог)
3	Численное решение систем линейных алгебраических уравнений	метод Гаусса, LU-алгоритм, метод скалярной трехточечной прогонки, метод вращений, метод отражений; метод Якоби, метод Зейделя, метод простых итераций, метод Рундсона, метод верхней релаксации, методы с Чебышевским набором параметров
4	Численные методы решения проблемы собственных значений матрицы	степенной метод, метод скалярных произведений, метод частных Рэлея; итерационный метод вращения (Якоби), LU-алгоритм, QR-алгоритм
5	Интерполирование функций	интерполяционные многочлены Лагранжа, Ньютона, эрмитовы кубические интерполяционные сплайны, нелокальные интерполяционные кубические сплайны; методы восстановления функций (метод выбранных точек, метод средних, метод наименьших квадратов)
6	Численное интегрирование	формулы левых, правых и средних прямоугольников, формула трапеции, формула Симпсона, общий вид формул Ньютона-Котеса
7	Численное дифференцирование	формулы вычисления первой производной с первым и вторым порядком точности и второй производной для таблично заданной функции
8	Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	метод Эйлера, симметричная разностная схема, предиктор-корректор, методы Рунге-Кутты, многошаговые методы Адамса (методы Адамса-Башфорта и методы Адамса-Моултона)
9	Численное решение модельного уравнения конвективного переноса	«явный левый уголок», «явный правый уголок», Лакса, «крест», «чехарда»; «неявный левый уголок», «неявный правый уголок», неявная четырехточечная конечно-разностная схема, «прямоугольник», неявная шес-

Продолжение таблицы 1

№	Тема	Численные методы
		титочечная конечно-разностная схема
10	Численное решение уравнений диссипации, конвекции и кинетики	явная четырехточечная конечно-разностная схема 1-го порядка точности по пространству, явная четырехточечная конечно-разностная схема 2-го порядка точности по пространству, трехслойная конечно-разностная схема «ромб» (схема Дюффорта-Франкела); неявная четырехточечная конечно-разностная схема 2-го порядка точности по пространству, неявная шеститочечная конечно-разностная схема, конечно-разностная схема с «весами», двухслойная конечно-разностная схема с хорошими стабилизирующими свойствами, трехслойная конечно-разностная схема
11	Нестационарные задачи с двумя пространственными переменными	конечно-разностные схемы метода переменных направлений и метода расщепления по пространственным переменным
12	Стационарные задачи с двумя пространственными переменными	метод установления на основе конечно-разностных схем метода переменных направлений и метода расщепления; разностная схема с итерационным процессом типа Зейделя

Он должен уметь:

- проектировать модельный вычислительный эксперимент для поставленной задачи;
- выбрать или разработать дискретную модель решаемой математической задачи;
- оценить погрешность и исследовать устойчивость используемого метода;
- провести сопоставление численных методов для заданного класса задач;
- реализовать численный метод с использованием ПК;
- оценить скорость сходимости используемого итерационного численного алгоритма;

- осуществить интерпретацию полученного результата и провести его качественную оценку.

В результате освоения численных методов студент должен приобрести опыт деятельности:

- по анализу численных методов (дискретной модели);
- по проектированию модельного вычислительного эксперимента;
- по программированию численных методов, разработке наборов тестовых данных и интерпретации полученных результатов.

Данная первая часть диагностических средств включает в себя 342 тестовых заданий по 11 темам:

- Введение в вычислительную математику;
- Численное решение нелинейных уравнений;
- Численное решение систем линейных алгебраических уравнений;
- Численное решение систем нелинейных уравнений;
- Численные методы решения проблемы собственных значений матриц;
- Интерполирование функций;
- Численное интегрирование;
- Численное дифференцирование;
- Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- Численное решение модельного уравнения конвективного переноса;
- Численное решение модельного уравнения диссипации, конвекции и кинетики.

С помощью данных тестовых заданий можно проверить преимущественно только когнитивный блок готовности студента к проведению вычислительного эксперимента. Однако следует заметить, что среди представленных диагностических средств имеются тестовые задания, способствующие развитию логического и

системного мышления в области знаний «Вычислительная математика», формированию навыков выявления неточностей в алгоритмах и демонстрирующие различные способы решения одной и той же задачи.

Данные диагностические средства ориентированы на студентов таких направлений подготовки, как 010100.62 - Математика, 010200.62 - Математика и компьютерные науки, 010300.62 - Фундаментальная информатика и информационные технологии, 010400.62 - Прикладная математика и информатика, 010500.62 - Математическое обеспечение и администрирование информационных систем и смежных с ними.

Рекомендуется при использовании данных тестовых заданий придерживаться следующей шкалы оценивания готовности студента к проведению вычислительного эксперимента (таблица 2).

Таблица 2 – Шкала оценивания готовности студента к проведению вычислительного эксперимента

№	Процент правильных ответов	Уровень готовности	Оценка
1	0 - 59	Готовность отсутствует	2
2	60 - 74	Низкий	3
3	75 - 84	Средний	4
4	85 - 100	Высокий	5

Для освоения численных методов предлагается использовать учебники и учебные пособия [12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5], представленные в разделе рекомендуемых источников.

В приложении А представлены компетенции, формируемые в ходе изучения дисциплины «Методы вычислений» (таблица 3). В приложении Б, в таблице 4

выделены курсивом компетенции, развиваемые в ходе изучения дисциплины «Методы вычислений».

Данные тестовые задания могут быть использованы студентами для самоконтроля знаний. Карта правильных ответов содержится в приложении В.

1 Этапы вычислительного эксперимента

1. Пусть x -точное решение, x^* - приближенное решение, тогда предельная относительная погрешность – это:

$$a) \delta x = \frac{\Delta x}{x};$$

$$б) \Delta x \geq |x - x^*|; x \in (x^* - \Delta x; x^* + \Delta x);$$

$$в) \Delta x = x - x^*;$$

$$г) \delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x^*|};$$

$$д) \delta x = \frac{x}{|x|}.$$

2. Вычислительный эксперимент – это технология исследования сложных процессов и явлений, основанная на ... и их исследовании с помощью ЭВМ.
Вставьте пропущенное:

- а) описании физической модели;*
- б) построении математических моделей;*
- в) задании целевых функций;*
- г) выборе численных моделей;*
- д) ни один из перечисленных вариантов.*

3. С точки зрения вычислительного эксперимента к устранимым погрешностям относятся:

- 1) ошибки округления;
- 2) ошибка численного метода;
- 3) ошибки выбора или построения математической модели;
- 4) ошибки дискретизации.

Укажите неверные:

- а) 1) и 3);*
- б) все устранимые;*
- в) 3);*
- г) 2);*
- д) 2) и 3).*

4. Любой численный метод должен удовлетворять следующим требованиям:

- 1) устойчивость;
- 2) согласованность;
- 3) корректность;
- 4) сходимость;
- 5) легко реализуемость;

Укажите верный ответ:

- а) 3), 5);*
- б) 1), 2), 4);*
- в) 1), 4), 5);*
- г) 1), 3), 4);*
- д) все кроме 2).*

5. Задача называется ..., если ее решение существует, единственно и устойчиво по исходным данным.

Вставьте пропущенное:

- а) устойчивой;*
- б) корректно поставленной;*
- в) сходящейся;*
- г) точной;*
- д) легко реализуемой;*
- е) правильной.*

6. Метод называется ... по параметру x , если его решение y непрерывно зависит от x .

Вставьте пропущенное:

- а) устойчивым;*
- б) корректным;*
- в) сходящимся;*
- г) точным;*
- д) легко реализуемым;*
- е) правильным.*

7. Метод является ... , если полученное искомое решение близко к истинному.

Вставьте пропущенное:

- а) устойчивым;*
- б) корректным;*
- в) сходящимся;*
- г) точным;*
- д) легко реализуемым;*
- е) правильным.*

8. Метод называется устойчивым по параметру x , если ...

- а) малым изменениям x соответствуют малые изменения решения;*
- б) малым изменениям x соответствуют большие изменения решения;*
- в) после нескольких итераций позволяет определить искомое решение;*
- г) позволяет определить искомое решение после первой итерации;*
- д) позволяет определить количество итераций, необходимых для получения решения;*

9. Задача называется корректно поставленной, если ...

- а) ее решение не существует;*
- б) если существует несколько ее решений;*
- в) ее решение существует и единственно;*
- г) ее решение существует, оно единственно и устойчиво по исходным данным.*

10. Численный метод называется сходящимся, если ...

- а) полученное численное решение близко к истинному;*
- б) решение исходной математической задачи (модели) существует;*
- в) метод реализуется за конечное число шагов;*
- г) решение исходной математической задачи (модели) существует при определенных условиях.*

11. Из ниже приведенных форм записей выбрать дискретные модели:

$$1) \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, t \in [0,1], x \in [0,1],$$

$$f = x^2 + 12t^2x + 2xt + 4t^3, a = 1,$$

$$u(0, x) = x, u(t, 0) = -t;$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} (f_0 + f_n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_k);$$

$$3) \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} = f_i^{n+1}, t \in [0,1], x \in [0,1],$$

$$f_i^{n+1} = x_i^2 + 12(t^{n+1})^2 x_i + 2x_i t^{n+1} + 4(t^{n+1})^3, a = 1, u_i^0 = x_i, u_0^n = -t^n;$$

$$4) y' = y - 2 \frac{x}{y} \quad y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

а) 1), 3);

б) 2), 4);

в) 2), 3);

г) 2);

д) 1), 4).

12. Установить порядок следования перечисленных этапов вычислительно-го эксперимента:

1) выбор или построение математической модели;

2) программирование;

3) анализ объекта или явления;

4) выбор или построение численной (дискретной) модели;

5) счет и анализ результатов.

Укажите верный ответ:

а) 1), 2), 3), 4), 5);

б) 2), 3), 5), 1), 4);

в) 3), 4), 1), 2), 5);

г) 3), 1), 4), 2), 5);

д) 3), 4), 1), 5), 2);

е) ни один из перечисленных вариантов.

13. На каком этапе вычислительного эксперимента записываются совокупности используемых формул, уравнений, ограничений для реализации на ЭВМ?

- а) счет и анализ результатов;
- б) анализ объекта или явления;
- в) выбор или построение численной (дискретной) модели;
- г) выбор или построение математической модели;
- д) программирование.

14. Продолжите определение.

Математическая модель – это...

- а) математические формулы, реализуемые с помощью ЭВМ;
- б) словесное и математическое описание задачи, входных и выходных данных;
- в) математическое описание объектов с некоторой степенью точности, выраженное с помощью математических формул, систем уравнений и неравенств;
- г) алгоритм реализации какого-либо метода.

15. Из ниже приведенных форм записей выбрать математические модели:

$$1) \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, t \in [0,1], x \in [0,1]$$

$$f = x^2 + 12t^2x + 2xt + 4t^3, a = 1,$$

$$u(0, x) = x, \quad u(t, 0) = -t;$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} (f_0 + f_n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_k);$$

$$3) \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} = f_i^{n+1}, t \in [0,1], x \in [0,1],$$

$$f_i^{n+1} = x_i^2 + 12(t^{n+1})^2 x_i + 2x_i t^{n+1} + 4(t^{n+1})^3, a = 1, u_i^0 = x_i, u_0^n = -t^n;$$

$$4) y' = y - 2 \frac{x}{y} \quad y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

- а) 1), 3);
- б) 2), 4);
- в) 4);
- г) 1);
- д) 1), 4).

2 Численное решение нелинейных уравнений

1. Для решения уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

на отрезке $[-1; 2]$ используется метод бисекций. Выполняется третий шаг. Какой из указанных интервалов будет содержать корень?

- a) $[0; 2]$;
- б) $[0.5; 2]$;
- в) $[0.875; 1.25]$;
- г) $[0.9; 1.25]$;
- д) $[0.5; 1.25]$.

2. Какое количество итераций необходимо для численного решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$ с точностью ε на отрезке $[a; b]$ методом бисекций?

- a) $\ln \frac{b-a}{\varepsilon}$;
- б) $\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$;
- в) $\lg \frac{b-a}{\varepsilon}$;
- г) $\ln \frac{b-a}{2^\varepsilon}$;
- д) $\log_2 \frac{b-a}{2^\varepsilon}$.

3. Определить интервал, на котором можно использовать метод бисекций для численного решения нелинейного уравнения

$$(x + 2)^3 - 1 = 0.$$

- a) $[1.5; 3]$;
- б) $[-3; -2]$;
- в) $[-4; -2]$;
- г) $(-4; -3)$;
- д) ни один из указанных интервалов не содержит корней.

4. Каким типом сходимости обладают итерационные последовательности метода бисекций?

- а) квадратичным;*
- б) сходимостью с p -ым порядком, ($p > 2$);*
- в) линейным;*
- г) сверхлинейным;*
- д) сходимости нет.*

5. Определить отрезок, на котором уравнение

$$x^2 - 5 \sin x = 0$$

имеет хотя бы один корень?

- а) $[\frac{\pi}{2}; \pi]$;*
- б) $[0.1; \frac{\pi}{2}]$;*
- в) $[2.5; \pi]$;*
- г) $[\frac{\pi}{2}; 1.6]$;*
- д) уравнение корней не имеет.*

6. Сколько итераций необходимо для решения уравнения

$$x + 2 = 0$$

методом бисекций с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ на отрезке $[-3; -1]$?

- а) 4;*
- б) 3;*
- в) 1;*
- г) 5.*

7. На каком из нижеуказанных отрезков уравнение

$$\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x - 3} = 0$$

имеет хотя бы один корень?

- а) $[0.5; 2]$;
- б) $[2; 3]$;
- в) $[3; 5]$;
- г) $[2.1; 2.9]$;
- д) $(2; 3]$;

8. Какой метод решения нелинейных уравнений наиболее чувствителен к выбору начального приближения (с точки зрения скорости сходимости)?

- а) Ньютона;
- б) бисекций;
- в) итераций;
- г) Зейделя
- д) хорд.

9. Уравнение $f(x)=0$ в методе итераций приводится к виду $x = \varphi(x)$. Какое условие должно выполняться для функции $\varphi(x)$?

- а) $\varphi(x)\varphi''(x) > 0$;
- б) $\max|\varphi'(x)| < 1$;
- в) $\max|\varphi''(x)| < 1$;
- г) $\varphi(x)\varphi''(x) < 0$;
- д) нет верного ответа.

10. Типами сходимости итерационных последовательностей при численном решении нелинейных уравнений являются:

- а) линейная, сверхлинейная, сходимость с p -порядком;
- б) линейная, функциональная, региональная;
- в) функциональная, сходимость с p -порядком;
- г) локальная, глобальная, равномерная.

11. Уравнение $f(x)=0$ решается методом Ньютона. Какая из нижеприведенных формул является правильной?

а) $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k);$

б) $x_{k+1} = \varphi(x_k);$

в) $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)};$

г) $x_{k+1} = \frac{a+b}{2}.$

12. Указать метод численного решения нелинейных уравнений, в котором итерационная последовательность обладает сверхлинейной сходимостью.

а) метод бисекций;

б) метод итераций;

в) метод Ньютона;

г) метод хорд.

13. Какой из численных методов решения нелинейных уравнений имеет квадратичную сходимость?

а) метод бисекций;

б) метод итераций;

в) метод Ньютона;

г) метод хорд.

14. За какое количество итераций возможно решение нелинейных уравнений методом бисекций на отрезке $[0; 2]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$?

а) 9;

б) 3;

в) 11;

г) 4.

15. Выражение $\sqrt[p]{a}$ является решением некоторого уравнения $f(x)=0$, где $a>0$, p - вещественное число. Восстановить исходный вид итерационной последовательности для метода Ньютона при $p=2$.

- a) $x_{n+1} = x_n + \frac{a}{x_n}$;
- б) $x_{n+1} = x_n + \frac{a}{2x_n}$;
- в) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$;
- г) $x_{n+1} = 2 \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$;
- д) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{x_n}$;
- е) нет верного ответа.

16. На каком из указанных интервалов возможно применение метода Ньютона для решения уравнения

$$x^3 - x^2 - 25x + 2 = 0 ?$$

- a) $[5, 6]$;
- б) $[2, 3]$;
- в) $[-3, -1]$;
- г) $[-2.1, -1.2]$;
- д) ни на одном из указанных интервалов.

17. Численное решение нелинейных уравнений состоит из следующих этапов (порядок этапов учитывается):

- a) отделение корней; уточнение корней;
- б) бисекция; табулирование;
- в) табулирование; графическое представление функции;
- г) уточнение корней; отделение корней.

18. На каком из указанных интервалов возможно применение метода Ньютона для решения уравнения

$$\ln(x + 2) = 0?$$

- a) $(-\infty; \infty)$;
- б) $[0; 3.5]$;
- в) $[-1.9; 1]$;
- г) $[-3; -2]$;
- д) ни на одном из указанных интервалов.

19. Какой тип сходимости имеет итерационная последовательность в методе хорд для решения нелинейных уравнений $f(x) = 0$?

- a) линейная сходимость;
- б) сверхлинейная сходимость;
- в) сходимость с p -ым порядком;
- г) локальная сходимость;
- д) глобальная сходимость.

20. Пусть применен один шаг метода хорд для решения нелинейного уравнения

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 10x - 2 = 0$$

на отрезке $[2; 3]$. Какой интервал получим для дальнейшего поиска корня?

- a) $[2.48; 3]$;
- б) $[2.09; 3]$;
- в) $[2; 2.09]$;
- г) $[2; 2.5]$;
- д) $[2; 2.48]$.

21. Из нижеприведенных формул выбрать ту, которая соответствует итерационному процессу вычисления корня уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом простой итерации для интервала $[-3; -2]$.

- а) $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} - 3$;
- б) $x_{n+1} = \sqrt{(1 - 3x_n^2)/3}$;
- в) $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} - 2$;
- г) $x_{n+1} = \sqrt{(1 - x_n^3)/3}$.

22. Какой метод решения любого нелинейного уравнения не зависит от выбора начального приближения?

- а) Ньютона;
- б) бисекций;
- в) Зейделя;
- г) итераций.

23. Построить итерационный процесс для решения уравнения

$$ax + b = 0, \quad 0 < a < 1,$$

методом простых итераций без использования операции деления.

- а) $x_{n+1} = (1 - a)x_n + b$;
- б) $x_{n+1} = (a - 1)x_n + b$;
- в) $x_{n+1} = (1 - a)x_n - b$;
- г) $x_{n+1} = (a - 1)x_n - b$;
- д) итерационный процесс построить невозможно.

24. Для численного решения нелинейного уравнения

$$x - \alpha \sin^2 x - \beta \cos^2 x - \gamma = 0$$

используется метод простых итераций, где

$$x_{n+1} = \alpha \sin^2 x_n + \beta \cos^2 x_n + \gamma.$$

При каких ограничениях на α , β , γ итерационный процесс будет работать при любом x ?

- а) $|\alpha - \beta| < 1$, γ - любое;
- б) $|\alpha + \beta| \leq 1$, $\gamma < |\alpha + \beta|$;

- в) α, β - любые, $\gamma < (\alpha + \beta)$;
- г) $|\alpha - \beta| > 1$, γ - любое;
- д) α, β, γ - любые.

25. Построить общую формулу метода простой итерации для решения уравнения

$$2 + x = e^x$$

при $x > 0$.

- а) $x_{n+1} = e^{x_n} - 2$;
- б) $x_{n+1} = e^{x_n} + 2$;
- в) $x_{n+1} = \ln(2 + x_n)$;
- г) $x_{n+1} = \ln(2 - x_n)$;
- д) *итерационный процесс построить невозможно*

26. Дано уравнение

$$\cos x - x^2 - x = 0.$$

Корень находится на отрезке $[0.1; 1]$. Определить для него правильный вид уравнения $x = \varphi(x)$:

- а) $x = \cos x - x^2$;
- б) $x = \frac{\cos x}{x + 1}$;
- в) $x = \sqrt{\cos x - x}$;
- г) $x = \arccos(x^2 + x)$.

27. Дано уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0.$$

Для поиска корня используется метод простых итераций, где

$$x_{n+1} = \sqrt{(1 - x_n^3)/3}.$$

Определить отрезок, на котором данную итерационную последовательность можно использовать.

- a) [-3; -2];
- б) [0.1; 0.8];
- в) [-1; 1];
- г) [1; 2].

28. Применен один шаг метода хорд для решения нелинейного уравнения

$$x^4 - x^3 - 8x - 2 = 0$$

на отрезке [2; 3]. Какой интервал получим для дальнейшего поиска корня?

- a) [2; 2.61];
- б) [2.61; 3];
- в) [2; 2.5];
- г) [2.26; 3];
- д) [2; 2.26].

29. В общем случае наибольшую скорость сходимости при решении нелинейных уравнений имеет метод:

- a) хорд;
- б) бисекций;
- в) итераций;
- г) Ньютона.

30. Из нижеперечисленных формул выбрать те, которые могут быть использованы для организации вычислений корней уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом простой итерации.

- 1) $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} - 3$;
- 2) $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 - 3x_n^2}$;
- 3) $x_{n+1} = \sqrt{(1 - 3x_n^2)/3}$;
- 4) $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} - 2$;
- 5) $x_{n+1} = 1/3\sqrt{1 - x_n^3}$;

6) $x_{n+1} = \sqrt{(1-x_n^3)/3}$.

a) 1), 3), 5);

б) 3), 4), 5);

в) 2), 3);

г) 1), 2), 3);

д) 1), 2), 6).

31. Для нелинейного уравнения

$$x^3 - x^2 - 16x + 4 = 0$$

определить отрезки, содержащие только один корень.

a) [-4; -2], [-1; 8];

б) [-4; -2], [-2; 8/3], [4; 5];

в) [-2; 10];

г) [-3; -2], [-2; -1], [2; 4];

д) [-4; 8].

3 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

3.1 Сведения из матричной и векторной алгебры

1. Как связаны нормы векторов $\|x\|_\infty$ и $\|x\|_1$?

- a) $\|x\|_1 \approx n\|x\|_\infty$;
- б) $\|x\|_\infty \gg \|x\|_1$;
- в) $n\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$;
- г) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$;
- д) нет правильного ответа.

2. Как связаны нормы векторов $\|x\|_\infty$ и $\|x\|_2$ ($\|x\|_2 = \|x\|_E$)?

- a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{1/2}\|x\|_\infty$;
- б) $n^{1/2}\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_\infty$;
- в) $\|x\|_2 \approx n^{1/2}\|x\|_\infty$;
- г) $\|x\|_2 \ll \|x\|_\infty$;
- д) нет правильного ответа.

3. Продолжите определение.

Норма матрицы считается согласованной с нормой вектора, если...

- a) $\|A \cdot x\| = \|A\| \cdot \|x\|$;
- б) $\|A \cdot x\| \neq \|A\| \cdot \|x\|$;
- в) $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$;
- г) $\|A \cdot x\| \geq \|A\| \cdot \|x\|$;
- д) нет правильного варианта ответа.

4. Дана система уравнений, записанная в виде $Ax=b$. Ее решение существует и единственно, если

- а) $\det A = 0$;
- б) $\det A \neq 0$;
- в) $\text{cond} A = 1$;
- г) угловые миноры A не равны нулю.

5. Для вектора x его норма-сумма $\|x\|_1$ определяется как:

- а) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- б) $\|x\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|}$;
- в) $\|x\|_1 = \max_{i=1, n} |x_i|$;
- г) $\|x\|_1 = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$.

6. Выберите верное равенство:

- а) $\|E\| = 0$;
- б) $\|A\| = \|E\| \|0\|$;
- в) $\|0\| = I$;
- г) $\|E\| = 1$.

7. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Чему равна норма $\|A\|_1$?

- а) 11;
- б) 10;
- в) 12;
- г) 13;
- д) нет правильного ответа.

8. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Чему равна норма $\|A\|_\infty$?

- а) 16;
- б) 12;
- в) 14;
- г) 17;
- д) нет правильного ответа.

9. Дана матрица:

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Чему равна норма $\|A\|_E$?

- а) 0;
- б) 4;
- в) $\sqrt{336}$;
- г) 16;
- д) нет правильного ответа.

10. Дан вектор $x=(4; -1; 3; -2; 5)$. Чему равна норма $\|x\|_1$?

- а) 10;
- б) 5;
- в) 15;
- г) $\sqrt{15}$;
- д) нет правильного ответа.

11. Дан вектор $x=(0; -6; 5; 1; -1)$. Чему равна норма $\|x\|_\infty$?

- а) $\sqrt{63}$;
- б) 6;

- в) 13;
- г) 1;
- д) нет правильного ответа.

12. Дан вектор $x = (\sqrt{3}; -3; -2; 0; 3)$. Чему равна норма $\|x\|_E$?

- а) $\sqrt{\sqrt{3} - 2}$;
- б) 5;
- в) 25;
- г) 3;
- д) нет правильного ответа.

13. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Чему равна норма $\|A\|_E$?

- а) 5;
- б) 49;
- в) -7;
- г) 7;
- д) нет правильного ответа.

14. Продолжите определение.

Нормой вектора $x \in R_n$, где R_n - пространство вещественных n -мерных векторов, называется такое действительное число $\|x\|$, которое удовлетворяет следующим условиям: ...

- а) $\|x\| < 0, x \neq 0, \quad \|0\| = 0; \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|; \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\|;$
- б) $\|x\| \leq 0, x \neq 0, \quad \|0\| = 0; \quad \|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|; \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$
- в) $\|x\| \geq 0, x \neq 0, \quad \|0\| = 0; \quad \|\lambda x\| \geq |\lambda| \|x\|; \quad \|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|;$
- г) $\|x\| > 0, x \neq 0, \quad \|0\| = 0; \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|; \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$
- д) верного ответа нет.

15. Вставить вместо ... подходящие по смыслу пропущенные слова.
Числом обусловленности матрицы A называется величина ..., которая используется для

a) $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$,

оценки величины обратной матрицы;

б) $M_A = \|A\| \|A^{-1}\|$,

оценки погрешности решения систем линейных алгебраических уравнений;

в) $cond(A) = \|\delta x\| \|A\| \|A^{-1}\|$,

оценки погрешности решения систем линейных алгебраических уравнений;

г) $M_A = cond(A)$,

оценки величины обратной матрицы;

д) $M_A = \|A\| \|A^T\|$,

выбора метода решения систем линейных алгебраических уравнений.

3.2 Прямые методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Методы решения СЛАУ делятся на:

- а) прямые, приближенные;*
- б) прямые, итерационные;*
- в) приближенные, итерационные;*
- г) уточнение корней, отделение корней.*

2. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$. Выполнение $\det A \neq 0$ означает, что....

- а) существует множество решений СЛАУ;*
- б) решения СЛАУ не существует;*
- в) решение СЛАУ существует и оно единственно;*
- г) не влияет на решение СЛАУ.*

3. Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Укажите вид матрицы C после выполнения прямого хода метода Гаусса с выбором ведущего элемента по строке ($Ax=b$ преобразуется в $Cx=y$).

$$а) C = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0.43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) C = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.58 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad г) C = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.58 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

д) для данной системы метод Гаусса не применим.

4. Какое из нижеприведенных выражений характеризует трудоемкость метода Гаусса решения СЛАУ?

а) $\approx n^3/3$;

б) $\approx n^2/2$;

в) $\approx n$;

г) $\approx 4n^3/3$.

Здесь n - число уравнений системы.

5. Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Укажите вид матрицы C после выполнения прямого хода метода Гаусса с выбором ведущего элемента во всей матрице A ($Ax=b$ преобразуется в $Cx=y$).

а) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

б) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

в) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

г) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

д) для данной системы метод Гаусса не применим.

6. Дана матрица A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 5 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя метод Гаусса решения СЛАУ $Ax=b$, найти $\det A$.

- а) 0;
- б) 378;
- в) 577;
- г) 4;
- д) нет правильного ответа.

7. Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Укажите вид матрицы C после выполнения прямого хода метода Гаусса ($Ax=b$ преобразуется в $Cx=y$).

$$а) \tilde{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad г) C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

д) для данной системы метод Гаусса не применим.

8. Какова будет матрица L после выполнения LU – разложения матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

$$a) L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$б) L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$г) L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

д) невозможно выполнить LU-разложение матрицы A .

9. Для каких классов матриц требования теоремы о LU-разложении заведомо выполняются?

- а) для квадратных матриц;
- б) для матриц с определителем, отличным от нуля;
- в) для матриц с диагональным преобладанием;
- г) для обратных матриц.

10. Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Укажите вид матрицы C после выполнения прямого хода метода Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу ($Ax=b$ преобразуется в $Cx=y$).

$$a) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0 & -0.67 \end{pmatrix}; \quad г) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

д) нет верного ответа.

11. Продолжите теорему:

Если все угловые миноры квадратной матрицы A отличны от нуля, то существуют такие треугольные матрицы нижняя L и верхняя U , что...

а) $A=LU$. Если элементы диагонали одной из матриц L , U фиксированы, то такое разложение единственно;

б) $A=UL$. Если элементы диагонали матрицы A фиксированы, то такое разложение единственно;

в) систему уравнений $Ax=b$ можно заменить эквивалентной системой $Ly=b$, $Ux=y$;

г) $A=LU$.

12. Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Укажите вид матрицы C после выполнения прямого хода метода Гаусса с выбором ведущего элемента во всей матрице A ($Ax=b$ преобразуется в $Cx=y$).

$$a) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.75 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$в) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad г) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.75 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.33 \\ 0 & 0 & 1 & -0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

д) для данной системы метод Гаусса не применим.

13. Дана матрица А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя метод Гаусса решения СЛАУ $Ax=b$, найти $\det A$.

а) 0;

б) 63;

в) 45;

г) 56;

д) невозможно найти определитель, решая СЛАУ методом Гаусса.

14. Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Укажите вид матрицы С после выполнения прямого хода метода Гаусса ($Ax=b$ преобразуется в $Cx=y$).

$$a) C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -0.67 & -1.67 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad б) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -0.33 & -0.33 \\ 0 & 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.33 & -0.33 \\ 0 & 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad г) C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.33 & -0.33 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

д) для данной СЛАУ метод Гаусса не применим.

15. Дана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Какова будет матрица U после выполнения LU – разложения матрицы A?

$$a) U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -0.67 & -1.67 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -0.33 & -1.67 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$в) U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -0.67 & -1.67 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad г) U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -0.67 & -1.67 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

д) невозможно выполнить LU-разложение матрицы A.

16. Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Укажите вид матрицы C после выполнения прямого хода метода Гаусса ($Ax=b$ преобразуется в $Cx=y$).

$$a) C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad г) C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

д) для данной системы неприменим традиционный метод Гаусса.

17. Дана СЛАУ $Ax=d$ с трехдиагональной матрицей коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Какая из нижеприведенных форм записи ей соответствует?

- а) $b_1x_1 + c_1x_2 = d_1;$
 $a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-1;$
 $a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n;$
- б) $b_ix_{i-1} + c_ix_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n;$
- в) $a_1x_1 + b_1x_2 = d_1;$
 $b_ix_{i+1} = x_i - d_i, \quad i = 2, \dots, n-1;$

$$b_n x_{n-1} + c_n x_n = d_n;$$

$$z) b_i x_{i-1} = d_i + c_i x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

18. Какова будет матрица U после выполнения LU – разложения матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

$$a) U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad г) U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

д) невозможно выполнить LU -разложение матрицы A .

19 Вычисление определителя LU -факторизованной матрицы A , где

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$L = \begin{cases} 0, & i < j, \\ 1, & i = j, \\ l_{ij}, & i > j, \end{cases} \quad U = \begin{cases} 0, & i > j, \\ u_{ij}, & i \leq j, \end{cases}$$

осуществляется как....

$$a) \det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn};$$

$$б) \det A = u_{11} u_{22} \dots u_{nn};$$

$$в) \det A = l_{11} l_{22} \dots l_{nn};$$

г) верного ответа нет.

20. Вычисление определителя LU-факторизованной матрицы A, где

$$A=(a_{ij}), i=1,\dots,n, j=1,\dots,n,$$

$$L = \begin{cases} 0, & i < j, \\ l_{ij} \neq 1, & i = j, \\ l_{ij}, & i > j \end{cases}$$

осуществляется как....

a) $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$;

б) $\det A = u_{11}u_{22}\dots u_{nn}$;

в) $\det A = l_{11}l_{22}\dots l_{nn}$;

г) *верного ответа нет.*

21. Дана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & -13 & 6 \end{pmatrix}.$$

Выполнить LU-разложение матрицы A.

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

б) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

в) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

г) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

22. Дана СЛАУ $Ax=b$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Выберите наиболее рациональный метод решения такой СЛАУ.

- а) метод Гаусса;*
- б) LU-разложение;*
- в) метод скалярной трехточечной прогонки;*
- г) метод вращений.*

23. Достаточным условием сходимости метода скалярной трехточечной прогонки решения СЛАУ $Ax=d$ является:

- а) угловые миноры матрицы A отличны от 0;*
- б) диагональное преобладание в матрице A ;*
- в) матрица A должна быть единичной;*
- г) матрица A должна быть верхней треугольной.*

24. Решение СЛАУ вида $Ax=d$ методом трехточечной скалярной прогонки состоит из следующих этапов:

- а) приведение матрицы A к верхнему и нижнему треугольному виду; вычисление корней;*
- б) приведение матрицы A к верхней треугольной матрице с единичными диагональными коэффициентами; вычисление корней;*
- в) определение прогоночных коэффициентов; вычисление корней;*
- г) нет верного ответа.*

25. Трудоемкость метода скалярной трехточечной прогонки оценивается как:

- а) $\approx 5n$;*
- б) $\approx \frac{n^3}{3}$;*

$$в) \approx \frac{n^3}{6};$$

$$г) \approx \frac{4n^3}{6}.$$

Здесь n – число уравнений.

26. Выберите из нижеприведенных утверждений те, которые являются условиями применимости метода скалярной трехточечной прогонки для решения СЛАУ $Ax = d$:

- 1) A – нижняя треугольная;
- 2) A – верхняя треугольная;
- 3) A – с диагональным преобладанием;
- 4) A – симметричная;
- 5) A – трехдиагональная.

$$а) 1);$$

$$б) 3) и 5);$$

$$в) 4) и 5);$$

$$г) 2);$$

$$д) 5).$$

27. Как вычисляется коэффициент α_1 при решении СЛАУ вида

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1; \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i=2, \dots, n-1; \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n; \end{cases}$$

методом скалярной трехточечной прогонки:

$$x_i = \alpha_i \cdot x_{i+1} + \beta_i ?$$

$$а) \alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1};$$

$$б) \alpha_1 = -\frac{d_1}{b_1};$$

$$в) \alpha_1 = \frac{c_1}{b_1};$$

$$г) \alpha_1 = \frac{d_1}{b_1};$$

д) нет правильного варианта ответа.

28. Как вычисляется коэффициент β_1 при решения СЛАУ

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1; \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-1; \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n; \end{cases}$$

методом скалярной трехточечной прогонки:

$$x_i = \alpha_i \cdot x_{i+1} + \beta_i ?$$

а) $\beta_1 = \frac{d_1}{b_1};$

б) $\beta_1 = \frac{a_1}{b_1};$

в) $\beta_1 = -\frac{d_1}{b_1};$

г) $\beta_1 = \frac{c_1}{b_1};$

д) нет правильного варианта ответа.

29. СЛАУ $Ax = b$ решается методом скалярной трехточечной прогонки. Выбрать те матрицы A , для которых указанный метод будет работать.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 11 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 15 & 4 \end{pmatrix};$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 15 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & -4 \\ 15 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$ 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

$$5) A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0.3 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

- а) 1);
- б) 2);
- в) только 4);
- г) 4) и 5);
- д) только 5);
- е) 3).

30. Из нижеприведенных формул выбрать те, которые входят в состав метода скалярной трехточечной прогонки решения СЛАУ вида

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, & i = 2, \dots, n-1 \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \end{cases}$$

- 1) $\alpha_i = \frac{-c_i}{a_i \alpha_{i-1} + b_i};$ 2) $\beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{a_i \alpha_{i-1} + b_i};$
- 3) $x_i = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji}};$ 4) $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i;$
- 5) $x_i = \alpha_i x_{i-1} + \beta_i.$

- а) 1), 2), 3);
- б) 1), 2), 4);
- в) 1), 2), 5);
- г) только 1) и 2);
- д) все верные.

31. Из нижеприведенных утверждений выбрать то, которое является условием применимости метода квадратных корней для решения СЛАУ $Ax=b$:

- а) диагональное преобладание матрицы A ;

- б) равенство 0 угловых миноров матрицы A ;
- в) A - симметричная, положительно определенная матрица;
- г) A – любая матрица.

32. Решение СЛАУ $Ax=b$ методом квадратных корней состоит из следующих этапов:

- а) 1) представить $A=LU$;
2) найти матрицы L, U ;
3) из системы $Ly=b$ определить y ;
4) из системы $Ux=y$ определить x .
- б) 1) представить $A=U^T U$;
2) определить матрицы U, U^T ;
3) из системы $U^T y=b$ определить y ;
4) из системы $Ux=y$ определить x .
- в) 1) на первом этапе из матрицы A получить верхнюю треугольную матрицу с единичными диагональными элементами;
2) на втором этапе, используя полученную матрицу, определить x .
- г) нет верного ответа.

33. Пусть СЛАУ вида

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, & i = 2, \dots, n-1 \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \end{cases}$$

решается методом скалярной трехточечной прогонки, при этом используются следующие формулы

$$\alpha_i = \frac{-c_i}{a_i \alpha_{i-1} + b_i}, \quad \beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{a_i \alpha_{i-1} + b_i}, \quad x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i.$$

Достаточно ли этих формул для организации вычислений?

- а) да;
- б) нет, нужны формулы для нахождения α_1, β_1 ;

- в) нет, нужны формулы для нахождения α_1, β_1, x_n ;
 г) нет, нужны формулы для нахождения α_n, β_n, x_1 .

34. Вычисление определителя LU-факторизованной матрицы A, где

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$L = \begin{cases} 0, & i < j, \\ l_{ij}, & i \geq j, \end{cases} \quad U = \begin{cases} 0, & i > j, \\ 1, & i = j \\ u_{ij}, & i < j, \end{cases}$$

осуществляется как....

- а) $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$;
 б) $\det A = u_{11}u_{22} \dots u_{nn}$;
 в) $\det A = l_{11}l_{22} \dots l_{nn}$;
 г) верного ответа нет.

35. Система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5.5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

решается методом скалярной прогонки

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i.$$

Чему равны коэффициенты α_1, β_1 ?

- а) $\alpha_1 = 3, \beta_1 = 1$;
 б) $\alpha_1 = 3, \beta_1 = 4$;
 в) $\alpha_1 = -1, \beta_1 = 4$;
 г) $\alpha_1 = -1/3, \beta_1 = 4/3$;
 д) $\alpha_1 = -1/3, \beta_1 = -4/3$.

3.3 Итерационные методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Вставьте пропущенное:

При решении СЛАУ $Ax=b$ методом верхней релаксации метод сходится при любом значении параметра релаксации $\omega \in (0; 2)$, если A - ... матрица.

- а) диагональная;*
- б) верхняя треугольная;*
- в) любого вида;*
- г) симметричная и положительно определенная;*
- д) все ответы верны.*

2. Решается СЛАУ $Ax=b$. Выберите верные утверждения:

- 1) При $\omega=1$ метод верхней релаксации превращается в метод Зейделя;
- 2) При $\omega=0.5$ метод верхней релаксации превращается в метод простых итераций;
- 3) При $\omega=1$ метод верхней релаксации превращается в метод Якоби;
- 4) Метод Якоби является модификацией метода Зейделя.

- а) 1), 2), 3), 4);*
- б) 1);*
- в) 2), 3);*
- г) 4);*
- д) 3).*

3. Для решения СЛАУ

$$\begin{cases} 2.1x_1 - 0.1x_2 + 0.1x_3 = 4 \\ x_1 - 3.2x_2 - 0.1x_3 = -1.1 \\ 0.1x_1 + 0.5x_2 + 2.7x_3 = -2 \end{cases}$$

используется метод простых итераций с начальным приближением $x=(0, 0, 0)^T$. При этом СЛАУ приводится к виду:

$$\begin{cases} x_1 = -0.05x_1 + 0.05x_2 - 0.05x_3 + 2 \\ x_2 = 0.33x_1 - 0.067x_2 - 0.033x_3 + 0.367 \\ x_3 = -0.05x_1 - 0.25x_2 - 0.35x_3 - 1 \end{cases} .$$

За сколько итераций можно гарантировать достижение точности $\varepsilon=0.001$ (в качестве $\|A\|$ используется норма, согласованная с нормой максимум вектора).

- a) 21;
- б) 11;
- в) 4;
- г) 10;
- д) 100.

4. Решается СЛАУ $Ax=b$. Выберите верные утверждения:

1) Для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

были по модулю больше 1.

2) Метод Якоби сходится в том случае, когда все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

по модулю меньше 1.

3) Метод верхней релаксации сходится в том случае, когда все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

по модулю меньше 1.

- a) 1), 2), 3);
- б) 2), 3);
- в) 1), 2);

- г) только 2);
 д) только 1).

5. Для решения СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

используется метод Якоби с начальным приближением $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Выполнено две итерации. Выбрать правильный вид полученного приближения.

- а) $x^{(2)} = (0.25, -0.33, 0.25)^T$;
 б) $x^{(2)} = (0.25, -0.167, 0.708)^T$;
 в) $x^{(2)} = (0.542, 0, 0.792)^T$;
 г) $x^{(2)} = (-5.625, -27.25, 9.0625)^T$;
 д) нет верного ответа.

6. Решается СЛАУ $Ax=b$ на основе итерационного процесса

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + d.$$

Используя априорную оценку погрешности

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

где x^* - точное решение;
 $x^{(k)}$ - решение, соответствующее k-итерации;
 $x^{(1)}$ - решение, полученное на 1-итерации;
 $x^{(0)}$ - начальное приближение;
 $\|B\| \leq q \leq 1$,

можно после первой итерации сделать оценку ...

- а) числа итераций, необходимых для получения решения с заданной точностью ε ;
 б) точного решения x ;
 в) устойчивости метода;
 г) значения приближенного решения $x^{(k)}$.

7. Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

используется метод Зейделя с начальным приближением $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Выполнено две итерации. Выбрать правильный вид полученного приближения.

- а) $x^{(2)} = (0.25, -0.33, 0.25)^T$;
- б) $x^{(2)} = (0.25, -0.167, 0.708)^T$;
- в) $x^{(2)} = (0.542, 0, 0.792)^T$;
- г) $x^{(2)} = (-5.625, -27.25, 9.0625)^T$;
- д) нет верного ответа

8. Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$, где $A=A_1+D+A_2$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & \cdot & =0 & \\ & \neq 0 & \cdot & \\ a_{n1} & & & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & \cdot & =0 & \\ & =0 & \cdot & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \cdot & \neq 0 & \\ & =0 & \cdot & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

При каких B_k и τ_k каноническая форма

$$B_k \frac{x_k - x_{k-1}}{\tau_k} + Ax_{k-1} = b$$

является записью метода Зейделя?

- а) $\tau_k=1, B_k=D$;
- б) $\tau_k=0.5, B_k=D+A_2$;
- в) $\tau_k=1, B_k=D+A_1$;
- г) $\tau_k=1, B_k=D+\omega A$;
- д) $\tau_k=\tau, B_k=A$.

9. Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 18, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10, \end{cases}$$

используется метод Зейделя с начальным приближением $x_0=(0;0;0)^T$. Выполнена одна итерация. Определить правильный вид полученного приближения.

- a) $(6; 18; 10)^T$;
- б) $(1.2; -2.5; 2)^T$;
- в) $(1.2; 3.6; 2)^T$;
- г) $(1.2; 3.84; 3.776)^T$;
- д) $(1.2; 3.84; 3.62)^T$.

10. Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$, где $A=A_1+D+A_2$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ a_{21} & \cdot & =0 \\ & \neq 0 & \cdot \\ a_{n1} & & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \cdot & =0 \\ & =0 & \cdot \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \cdot & \neq 0 & \\ & =0 & \cdot & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

При каких B_k и τ_k каноническая форма

$$B_k \frac{x_k - x_{k-1}}{\tau_k} + Ax_{k-1} = b$$

является записью метода Якоби?

- a) $\tau_k=\tau, B_k=A$;
- б) $\tau_k=0.5, B_k=D+A_2$;
- в) $\tau_k=1, B_k=D+A_1$;
- г) $\tau_k=1, B_k=D+\omega A_1$;
- д) $\tau_k=1, B_k=D$.

11. Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 18, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10, \end{cases}$$

используется метод Якоби с начальным приближением $x_0=(0; 0; 0)^T$. Выполнена одна итерация. Определить правильный вид полученного приближения.

- a) $(6; 18; 10)^T$;
- б) $(1.2; -2.5; 2)^T$;
- в) $(1.2; 3.6; 2)^T$;
- г) $(1.2; 3.84; 3.776)^T$;
- д) $(1.2; 3.84; 3.62)^T$.

12. Каноническая форма метода простой итерации имеет вид:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\tau} + Ax_{k-1} = b.$$

Выберите условие сходимости метода.

- a) если A - симметричная, положительно определенная матрица, $\tau > 0$, $\tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, λ_{\max} - наибольшее собственное число матрицы A ;
- б) если A - симметричная, положительно определенная матрица, $\tau > 0$, $\tau < \frac{2}{\lambda_{\min}}$, λ_{\min} - наименьшее собственное число матрицы A ;
- в) для любой матрицы A , $0 < \tau < 2$;
- г) для любой матрицы A , $\tau = 1$;
- д) если A - нижняя треугольная матрица, $\tau > 0$, $\tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, λ_{\max} - наибольшее собственное число матрицы A ;

13. Какая из записей содержит полную характеристику итерационных методов с Чебышевским набором параметров?

- a) одношаговые, нестационарные, явные или неявные;
- б) многошаговые, стационарные, явные;

- в) нестационарные, многошаговые, явные;
- г) неявные, одношаговые;
- д) одношаговые явные.

14. Продолжите теорему.

Если A - симметричная, положительно определенная матрица, то для метода простой итерации при $\tau = \tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$, где $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ – собственные числа матрицы A , справедлива оценка:

- а) $\|x_k - x^*\| \leq \rho_0^k \|x_0 - x^*\|$, где $\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$ $\xi = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}$;
- б) $\|x_k - x^*\| \leq \rho_0 \|x_0 - x^*\|$, где $\rho_0 = \frac{1 + \xi}{1 - \xi}$ $\xi = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}$;
- в) $\|x_k - x^*\| \leq \rho_0^k \|x_1 - x_0\|$, где $\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$ $\xi = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}$;
- г) нет верного ответа.

15. Какая из приведенных функций является нормированным многочленом Чебышева?

- а) $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos(x))$;
- б) $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} e^x - e^{-x}$;
- в) $T_n(x) = \arcsin(n \sin(x))$;
- г) $T_n(x) = \frac{\ln(e^x - e^{-x})}{(n-1)2^{n-1}}$;
- д) $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

16. СЛАУ $Ax=b$ решается методом Якоби, где $A=A_1+D+A_2$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & \cdot & = 0 & \\ & \neq 0 & \cdot & \\ a_{n1} & & & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & \cdot & = 0 & \\ & = 0 & \cdot & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \cdot & \neq 0 & \\ & = 0 & \cdot & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Если все корни уравнения ... по модулю меньше 1, то метод Якоби сходится. Вместо ... указать требуемое уравнение из нижеприведенных:

- а) $\det((A_1+D)\lambda+A_2)=0$;
- б) $\det((A_1+A_2)\lambda+D)=0$;
- в) $\det(D\lambda+A_1+A_2)=0$;
- г) $\det(A_1+D\lambda+A_2\lambda)=0$;
- д) $\det(A_1+A_2\lambda)=0$.

17. При каких значениях B_k, τ_k каноническая форма

$$B_k \frac{x_k - x_{k-1}}{\tau_k} + Ax_{k-1} = b$$

для решения СЛАУ является формой записи стационарных методов?

- а) $B_k=A, \tau_k = 1$;
- б) $B_k=E, \forall \tau_k$;
- в) $B_k=const, \tau_k = const$;
- г) $B_k=E, \tau_k = 1$;
- д) нет верного ответа.

18. При решении СЛАУ

$$\begin{cases} 0.5x_1 + 0.1x_2 - 0.33x_3 = 1, \\ 0.1x_1 + 0.8x_2 - 0.1x_3 = 0.5, \\ 0.2x_1 - 0.4x_2 + 0.8x_3 = 3, \end{cases}$$

с начальным приближением $x_0=(0; 0; 0)^T$ получено решение $x^{(1)}=(1; 0.5; 3)^T$. Определите метод, который был использован?

- а) верхней релаксации с $\omega=0.1$;
- б) Якоби;
- в) Зейделя;
- г) Гаусса;
- д) нет верного ответа.

19. Системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ решаются методом Якоби. Выберите те матрицы A , для которых применим указанный метод.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & -0.2 \\ 2 & 3 & 0.1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0.5 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad 4) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 11 & 2 & 4 \\ 120 & 13 & 14 \end{pmatrix}.$$

- а) 1);
- б) 1), 2);
- в) 2); 3);
- г) 3); 4);
- д) 1); 2); 3).

20. Выберите характеристики метода Якоби:

- а) одношаговый, стационарный, неявный по определению, но явный по реализации;
- б) многошаговый, стационарный, неявный по определению, но явный по реализации;
- в) двухшаговый, нестационарный, неявный;
- г) одношаговый, нестационарный, явный;
- д) нет верного ответа.

21. Решается СЛАУ $Ax=b$. Выберите верные утверждения:

- 1) Для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

были по модулю меньше 1.

2) Метод Якоби сходится в том случае, когда все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

по модулю больше 1.

3) Метод верхней релаксации сходится в том случае, когда все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

по модулю меньше 1.

- а) 1), 2), 3);
- б) 2), 3);
- в) 1), 2);
- г) только 2);
- д) только 1).

22. Для решения СЛАУ

$$\begin{cases} 2.1x_1 - 0.1x_2 + 0.1x_3 = 4 \\ x_1 - 3.2x_2 - 0.1x_3 = -1.1 \\ 0.1x_1 + 0.5x_2 + 2.7x_3 = -2 \end{cases}$$

используется метод Якоби с начальным приближением $x=(0, 0, 0)^T$. За сколько итераций можно гарантировать достижение точности $\varepsilon=0.001$ (в качестве $\|A\|$ используется норма, согласованная с нормой максимум вектора).

- а) 13;
- б) 11;

- в) 4;
- г) 10;
- д) 8.

23. При численном решении СЛАУ $Ax=b$ методом Зейделя она приводится к виду

$$x^{(l)} = Bx^{(l-1)} + C.$$

Считая, что $A=A_1+D+A_2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ a_{21} & \cdot & =0 \\ & \neq 0 & \cdot \\ a_{n1} & & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \cdot & =0 \\ =0 & \cdot & \\ 0 & =0 & \cdot \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \cdot & \neq 0 & \\ =0 & \cdot & & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

из предложенных ниже вариантов выберите правильный вид матрицы В.

- а) $B=A$;
- б) $B=-(D+A_1)^{-1}A_2$;
- в) $B=D+A_1$;
- г) $B=-D^{-1}(A_1+A_2)$;
- д) $B=D$.

24. При численном решении СЛАУ $Ax=b$ методом Якоби она приводится к виду

$$x^{(l)} = Bx^{(l-1)} + C.$$

Считая, что $A=A_1+D+A_2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ a_{21} & \cdot & =0 \\ & \neq 0 & \cdot \\ a_{n1} & & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \cdot & =0 \\ =0 & \cdot & \\ 0 & =0 & \cdot \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \cdot & \neq 0 & \\ =0 & \cdot & & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

из предложенных ниже вариантов выберите правильный вид матрицы В.

- а) $B=A$;
- б) $B=-(D+A_1)^{-1}A_2$;

6) $B=D+A_1$;

2) $B= - D^{-1} (A_1+A_2)$;

3) $B=D$.

4 Численное решение систем нелинейных уравнений

1. Система нелинейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 4x_2 = 3 \\ \cos(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 2 \end{cases}$$

решается методом Ньютона:

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - A_k F(x^{(k)}).$$

Выберите правильный вид матрицы A_k .

- а) $-\frac{1}{2x_1x_2 + 4\sin(x_1 + x_2)} \begin{pmatrix} -x_2 & -\sin(x_1 + x_2) \\ -4 & 2x_1 \end{pmatrix}$;
- б) $\frac{1}{\sin(x_1 + x_2)(4 - 6x_1) - 6x_1^2 + 4x_2} \begin{pmatrix} -\sin(x_1 + x_2) - x_1 & -4 \\ \sin(x_1 + x_2) + x_2 & 6x_1 \end{pmatrix}$;
- в) $\begin{pmatrix} 3x_1 & 4x_2 & | & 3 \\ \cos(x_1 + x_2) & -x_1x_2 & | & 2 \end{pmatrix}$;
- г) $\begin{pmatrix} 3x_1 & 4x_2 & -3 \\ \cos(x_1 + x_2) & -x_1x_2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Какой из нижеприведенных методов является наиболее оптимальным для решения системы:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 0.1z = 0 \\ \frac{x^2}{2} - 10y + z = 0 \\ xy - 0.95z = 0. \end{cases}$$

- а) метод скалярной трехточечной прогонки;
б) метод Гаусса;
в) метод Ньютона;
г) метод QR-разложений;
д) нет верного ответа.

3. Продолжите теорему. Пусть функция $f(x)$ и замкнутое множество $M \subseteq D(f) \subseteq R_n$ таковы, что:

- 1) $\forall x \in M \quad f(x) \in M$;
- 2) $\forall x, \tilde{x} \in M \quad \exists q < 1 : \|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq q \|x - \tilde{x}\|$.

Тогда...

а) $f(x)$ имеет в M единственную неподвижную точку x^* ; последовательность $\{x^{(k)}\}$, определяемая методом простых итераций, при $\forall x^{(0)} \in M$ сходится к x^* и справедливы следующие оценки

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad \forall k \in N;$$

б) если центр $x^{(0)}$ и радиус шара S таковы, что $\|x^{(0)} - f(x^{(0)})\| \leq r(1-q)$, то справедливо заключение теоремы с $M=S$;

в) $f(x)$ удовлетворяет на множестве M условию Липшица $\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq L \|x - \tilde{x}\|$;

г) $f(x)$ имеет в M единственную неподвижную точку \tilde{x} , для которой выполняется условие Липшица $\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq L \|x - \tilde{x}\|$;

д) если центр $x^{(0)}$ и радиус шара S таковы, что $\|x^{(0)} - f(x^{(0)})\| \leq (q-1)r$, то функция $f(x)$ имеет в M единственную точку x^* , последовательность $(x^{(k)})$, определяемая методом простых итераций при $\forall x^{(0)} \in M$ сходится к x^* при $M=S$.

4. Даны следующие шаги алгоритма решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона:

- 1) вычислить матрицу $A_k := [F'(x^{(k)})]^{-1}$;
- 2) выбрать начальное приближение $x^{(0)}$;
- 3) вычислить $x^{(k+1)} := x^{(k)} - A_k F(x^{(k)})$;
- 4) если $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, то корень $x^{(k+1)}$, иначе $k:=k+1$ и выполнить шаги 1, 3;
- 5) $k:=0$ (номер итерации).

Выбрать правильную последовательность их реализации.

- а) 2), 5), 1), 3), 4);
- б) 1), 2), 3), 4), 5);
- в) 2), 3), 4), 1), 5);

г) 4), 3), 1), 2), 4);

д) 5), 4), 2), 1), 3).

5. Из нижеперечисленных групп методов решения систем нелинейных уравнений выберите ту, в которой все методы обладают квадратичной скоростью сходимости...

а) метод Ньютона, аппроксимационный аналог метода Ньютона, модифицированный метод Ньютона (когда матрица Якоби вычисляется 1 раз в начальном приближении);

б) модифицированный метод Ньютона (когда матрица Якоби вычисляется 1 раз в начальном приближении), дискретный (разностный) аналог метода Ньютона;

в) метод Ньютона, аппроксимационный аналог метода Ньютона;

г) метод Ньютона, модифицированный метод Ньютона (когда матрица Якоби вычисляется 1 раз в начальном приближении), двухступенчатый метод Ньютона;

д) нет верного ответа.

6. В чем заключается сущность дискретной модификации метода Ньютона?

а) замена элементов матрицы Якоби разностными отношениями;

б) вычисление матрицы Якоби один раз, используя начальное приближение;

в) вычисление и обращение матриц Якоби не на каждом итерационном шаге, а через несколько шагов;

г) приведение матрицы Якоби к верхнему диагональному виду;

д) все ответы верны.

7. Аналогом какого метода в одномерном случае является разностный (дискретный) метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений?

а) метода простых итераций решения нелинейных уравнений;

- б) метода Ньютона решения нелинейных уравнений;
- в) метода хорд;
- г) метода касательных;
- д) метода бисекций.

8. Какой порядок сходимости имеет дискретный аналог (дискретная модификация) метода Ньютона решения СНУ?

- а) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- б) квадратичный;
- в) сверхлинейный;
- г) кубический.

9. Выберите правильное название метода для следующего алгоритма:

- 1) выбрать начальное приближение $x^{(0)}$;
- 2) $k := 0$ (номер итерации);
- 3) вычислить матрицу $A_k := [F'(x^{(k)})]^{-1}$;
- 4) вычислить $x^{(k+1)} := x^{(k)} - A_k F(x^{(k)})$;
- 5) вычислить $\psi_k := E - F'(x^{(k+1)})A_k$;
- 6) вычислить $A_{k+1} := A_k + A_k \psi_k$;
- 7) если $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, то корень $x^{(k+1)}$, иначе $k := k+1$ и выполнить шаги 4, 5, 6;

- а) метод Ньютона решения нелинейных уравнений;
- б) метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений;
- в) аппроксимационный аналог метода Ньютона решения систем нелинейных уравнений;
- г) двухступенчатый метод Ньютона решения систем нелинейных алгебраических уравнений;
- д) нет верного ответа.

10. Дана неупорядоченная совокупность шагов решения систем нелинейных уравнений двухступенчатым методом Ньютона:

- 1) вычислить матрицу $A_k := [F'(x^{(k)})]^{-1}$;
- 2) выбрать начальное приближение $x^{(0)}$;

- 3) вычислить $z^{(k)} := x^{(k)} - A_k F(x^{(k)})$;
- 4) если $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, то корень $x^{(k+1)}$, иначе $k := k+1$ и выполнить шаги 1, 3, 6;
- 5) $k := 0$ (номер итерации);
- 6) вычислить $x^{(k+1)} := z^{(k)} - A_k F(z^{(k)})$;

Выберите правильную последовательность их реализации.

- a) 2), 3), 4), 1), 5), 6);
- б) 1), 2), 6), 3), 4), 5);
- в) 2), 5), 1), 3), 6), 4);
- г) 4), 3), 1), 2), 4), 5);
- д) 5), 4), 2), 1), 3), 6).

11. Даны следующие шаги алгоритма решения систем нелинейных уравнений методом простых итераций:

- 1) $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$;
- 2) $k := 0$ (номер итерации);
- 3) если $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, то корень $x^{(k+1)}$, иначе $k := k+1$ и выполнить шаги 1, 3;
- 4) выбрать начальное приближение $x^{(0)}$.

Выбрать правильную последовательность их реализации.

- a) 1), 2), 3), 4);
- б) 4), 3), 2), 1);
- в) 4), 2), 1), 3);
- г) 4), 3), 1), 2).

12. Выберите правильное название метода решения систем нелинейных уравнений для следующего алгоритма:

- 1) выбрать начальное приближение $x^{(0)}$;
- 2) $k := 0$ (номер итерации);
- 3) $i := 0$ (счетчик);
- 4) если $i > n$ (n – размерность матрицы), то выполнить шаг 7, иначе выполнить шаг 5;
- 5) если $i \geq k$, то $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, иначе $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k+1)})$;

6) $i:=i+1$;

7) если $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, то корень $x^{(k+1)}$, иначе $k:=k+1$ и перейти к шагу 3;

а) метод Ньютона решения нелинейных уравнений;

б) метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений;

в) метод покоординатного спуска;

г) двухступенчатый метод Ньютона решения систем нелинейных алгебраических уравнений;

д) предложенный алгоритм не является методом решения системы нелинейных уравнений.

5 Численное решение проблемы собственных значений матриц

1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

найти ее собственные числа.

- a) 1, 2, 3;
- б) 2, 3, 4;
- в) 0, 1, 2;
- г) 3, 2, 0.

2. Определить спектральный радиус матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- a) 4;
- б) 3;
- в) 7;
- г) 1.

3. Продолжите определение. Собственным числом λ матрицы A называется такое число, для которого существует...

- a) ненулевая матрица A , удовлетворяющая условию $A\lambda = x^2$;
- б) ненулевой вектор x , удовлетворяющий условию $Ax = \lambda x$;
- в) ненулевой вектор x , удовлетворяющий условию $A\lambda = x^2$;
- г) ненулевая матрица A , удовлетворяющая условию $Ax = \lambda x$.

4. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – вещественные собственные числа квадратной матрицы ($n > 4$) и $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$, а x_1, x_2, \dots, x_n – соответствующие им собственные век-

торы. К какому числу λ_i сойдется степенной метод, если в качестве начального приближения выбрать вектор $2x_3 + 4x_4$? (Погрешность округления считать равной нулю)

- a) λ_2 ;
- б) λ_3 ;
- в) λ_4 ;
- г) λ_n .

5. Пусть $\{\lambda, x\}$ собственная пара матрицы A . Из перечисленных ниже пар выберите те, которые тоже будут являться собственными для матрицы A .

- a) $\{\lambda, 5x\}$;
- б) $\{\lambda, x+5\}, \{\lambda, 4x\}$;
- в) $\{\lambda+1, x+3\}, \{\lambda, x+3\}$;
- г) $\left\{ \frac{1}{\lambda}, x \right\}$;
- д) *все ответы верны.*

6. Даны следующие неупорядоченные шаги алгоритма решения частичной проблемы собственных чисел матрицы A методом скалярных произведений:

- 1) вычислить $y^{(1)} = Ax^{(0)}$;
- 2) вычислить $\lambda^{(k)} = \frac{(y^{(k)}, y^{(k)})}{(y^{(k)}, x^{(k-1)})}$;
- 3) если $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| < \varepsilon$, то $\lambda_1 = \lambda^{(k)}$, $x = x^{(k)}$, иначе $k := k + 1$, шаг 5;
- 4) ввести симметричную матрицу A ($n \times n$), ε - точность;
- 5) вычислить $x^{(k-1)} = \frac{y^{(k-1)}}{\sqrt{(y^{(k-1)}, y^{(k-1)})}}$;
- 6) задать $y^{(0)}$, вычислить $x^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{\sqrt{(y^{(0)}, y^{(0)})}}$;
- 7) вычислить $\lambda^{(1)} = \frac{(y^{(1)}, y^{(1)})}{(y^{(1)}, x^{(0)})}$;
- 8) вычислить $y^{(k)} = Ax^{(k-1)}$;
- 9) $k := 2$ (номер итераций);

Выбрать правильную последовательность их реализации.

- а) 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 8), 9);
- б) 4), 6), 1), 7), 9), 5), 8), 2), 3);
- в) 6), 5), 4), 3), 2), 1), 9), 8), 7);
- г) 4), 6), 1), 9), 5), 7), 8) 3), 2);
- д) 5), 1), 4), 2), 3), 6), 9), 7), 8).

7. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

вычислить собственные числа.

- а) 1, 0, 1;
- б) 2, 0, 1;
- в) 1, 3, 5;
- г) 1, 9, 25;
- д) для матриц такого вида собственных чисел не существует.

8. Какой по типу должна быть матрица, чтобы ее собственные числа можно было находить методом скалярных произведений?

- а) единичная;
- б) верхняя треугольная;
- в) с диагональным преобладанием;
- г) симметричная положительно определенная;
- д) произвольная.

9. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Какой из ниже приведенных методов подходит для определения наименьшего по модулю собственного числа?

- а) *степенной;*
- б) *частных Рэлея;*
- в) *скалярных произведений;*
- г) *квадратных корней;*
- д) *Якоби.*

10. Для решения полной проблемы собственных значений матрицы A используется следующий алгоритм

- 1) $A_0 := A;$
- 2) $k := 0$ (номер итерации);
- 3) представить $A_k = B_k C_k;$
- 4) вычислить $A_{k+1} = C_k B_k;$
- 5) $k := k + 1;$
- 6) выполнять шаги 3, 4, 5 до тех пор пока A_{k+1} не будет треугольной.

Выберите правильное название алгоритма и характеристику, используемых матриц.

- а) *QR-алгоритм, C_k - ортогональная матрица, B_k – правая треугольная матрица;*
- б) *LR-алгоритм, C_k - ортогональная матрица, B_k – правая треугольная матрица;*
- в) *LR-алгоритм, C_k - правая треугольная матрица, B_k – левая треугольная матрица;*
- г) *QR-алгоритм, C_k - правая треугольная матрица, B_k – левая треугольная матрица;*
- д) *итерационный метод вращений.*

11. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Какой из нижеприведенных методов для определения наибольшего по модулю собственного числа, является наиболее оптимальным?

- а) скалярных произведений;
- б) квадратных корней;
- в) степенной;
- г) Зейделя;
- д) Якоби.

12. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 9 & 13 & 0 \\ 7 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

вычислить собственные числа.

- а) 1, 0, 13;
- б) 15, 9, 7;
- в) 15, 13, 1;
- г) 7, 12, 1;
- д) для матриц такого вида собственных чисел не существует.

13. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – вещественные собственные числа квадратной матрицы ($n > 6$) и $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$, а x_1, x_2, \dots, x_n – соответствующие им собственные векторы. К какому числу λ_i сойдется степенной метод, если в качестве начального приближения выбрать вектор $4x_5 + 3x_6$? (Погрешность округления считать равной нулю)

- а) λ_1 ;
- б) λ_4 ;
- в) λ_5 ;
- г) λ_6 .

14. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda = 2$ найти нормированный собственный вектор (использовать евклидову норму).

- а) $\frac{1}{\sqrt{50}}(7; 1)^T$;

$$б) \frac{1}{\sqrt{7}} (28; 1)^T;$$

$$в) \frac{1}{\sqrt{8}} (0; 1)^T;$$

$$г) \frac{1}{\sqrt{50}} (1; 0)^T;$$

$$д) \frac{1}{\sqrt{7}} (1; 1)^T.$$

15. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Какой из ниже приведенных методов можно использовать для определения наибольшего по модулю собственного числа?

- а) степенной;
- б) частных Рэля;
- в) скалярных произведений;
- г) квадратных корней;
- д) Якоби.

16. Для решения полной проблемы собственных значений матрицы A используется LU- алгоритм, где

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ & \dots & \\ l_{n1} & & l_{nn} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & & u_{1n} \\ & \dots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Какой вид будет иметь матрица A , после преобразований?

$$а) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ \delta & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \delta \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}; \quad г) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \lambda_n \\ & \dots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Пусть $\{\lambda, x\}$ собственная пара матрицы A . Из перечисленных ниже пар выберите те, которые тоже будут являться собственными для матрицы $A+5E$.

- a) $\{\lambda, 5x\}$;
- б) $\{\lambda, x+5\}$;
- в) $\{\lambda+5, x\}$;
- г) $\left\{\frac{1}{\lambda-5}, x\right\}$;
- д) все ответы верны.

18. Для решения полной проблемы собственных значений матрицы A используется следующий алгоритм:

- 1) $A_0 := A$;
- 2) $k := 1$ (номер итерации);
- 3) вычислить $A_{k+1} = C_k B_k$;
- 4) представить $A_{k+1} = B_k C_k$;
- 5) $k := k + 1$;
- 6) выполнять шаги 4, 5 пока A_{k+1} не будет не треугольная.

Выберите правильное название алгоритма и характеристику, используемых матриц

- a) QR-алгоритм, C_k - ортогональная матрица, B_k - правая треугольная матрица;
- б) LR-алгоритм, C_k - ортогональная матрица, B_k - правая треугольная матрица;
- в) LR-алгоритм, C_k - правая треугольная матрица, B_k - левая треугольная матрица;
- г) QR-алгоритм, C_k - правая треугольная матрица, B_k - левая треугольная матрица;
- д) с помощью данного алгоритма нельзя решить поставленную задачу.

19. Продолжите определение. Отношением Рэля для матрицы $A(n \times n)$ называется функционал ..., определенный на множестве ненулевых n -мерных векторов x .

- a) $\rho(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$;
- б) $\rho(x) = \frac{(Ax, Ax)}{(x, x)}$;
- в) $\rho(x) = \frac{(x, x)}{(Ax, Ax)}$;
- г) $\rho(x) = \frac{(x, x)}{(Ax, x)}$;
- д) *нет верного ответа.*

6 Интерполирование и аппроксимация функций

1. Какую максимальную степень будет иметь интерполяционный многочлен Лагранжа, для функции, заданной таблично в $(n+1)$ точке?

- a) $n+1$;
- б) n ;
- в) $n-1$;
- г) $n+2$.

2. Что влияет на точность интерполяции при использовании интерполяционного многочлена Лагранжа?

- a) степень гладкости функции, число узлов интерполирования;
- б) число узлов интерполирования ($n \rightarrow \infty$);
- в) положение точки, в которой осуществляется интерполирование;
- г) все ответы верны.

3. Пусть имеется табличное представление функции:

x_i	x_0	x_1	x_2
$y(x_i)$	y_0	y_1	y_2

Для 3 узлов интерполяции полином Лагранжа имеет вид:

$$a) L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(y-y_1)(y-y_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(y-y_0)(y-y_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(y-y_0)(y-y_1)};$$

$$б) L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(y-y_1)(y-y_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(y-y_0)(y-y_2)};$$

$$в) L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)};$$

$$г) L_3(x) = y_0 \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)} + y_1 \frac{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}{(x-x_0)(x-x_2)} + y_2 \frac{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

4. Как повлияет дополнительная $n+1$ точка исходных данных внутри отрезка $[x_0; x_n]$ на точность интерполяции (если общее количество точек не велико)? Функция обладает требуемой степенью гладкости.

- a) увеличится;
- б) уменьшится;
- в) не изменится;
- г) нет верного ответа.

5. Конечную разность какого наивысшего порядка можно получить по n исходным точкам?

- a) $n+1$;
- б) n ;
- в) $n-1$;
- г) $2n$.

6. Как выражается конечная разность k -го порядка?

- a) $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k+1} y_{i+1}$;
- б) $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^k y_{i+1}$;
- в) $\Delta^k y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i$;
- г) $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$.

7. Используя интерполяционные формулы Ньютона запишите многочлен для таблично заданной функции $y=f(x)$.

x_i	1	2	4
$y(x_i)$	3	5	6

- a) $H_2=2x^2+x$;
- б) $H_2=-0.5x^2+3.5x$;
- в) $H_2=2.5x^3-x^2+3x$;
- г) $H_2=-3x^3-x^2+2x$;
- д) $H_2=-x+4$.

8. Для функции заданной таблицей:

x_i	0.5	1	1.5	2	3
$y(x_i)$	0.125	0.5	1.125	2	4.5

Подберите для $y(x)$ подходящий вид аппроксимационной функции $P(x)$.

- a) $P(x) = ax + b$;
- б) $P(x) = ax^b$;
- в) $P(x) = a + b/x$;
- г) $P(x) = 1/(a + bx)$.

9. Для функции $y = 3x^2 - 2$ запишите конечную разность второго порядка.

- a) $\Delta^2 y = 3(x_3^2 - 2x_2^2 + x_1^2)$;
- б) $\Delta^2 y = 3(x_3^2 + 2x_2^2 - x_1^2 + 8)$;
- в) $\Delta^2 y = 2(1.5x_3^2 - x_2^2 + x_1^2 - 4)$;
- г) $\Delta^2 y = 3(x_3 - 2x_2 + x_1)^2$;
- д) $\Delta^2 y = 3x_3^2 - 3x_1^2$.

10. Используя интерполяционные формулы Лагранжа запишите многочлен для таблично заданной функции $y = f(x)$.

x_i	1	2	4
$y(x_i)$	3	5	6

- a) $L_2 = 2x^2 + x$;
- б) $L_2 = -0.5x^2 + 3.5x$;
- в) $L_2 = 2.5x^3 - x^2 + 3x$;
- г) $L_2 = -3x^3 - x^2 + 2x$;
- д) $L_2 = -x + 4$.

11. Построить кубический интерполяционный сплайн для функции, заданной таблично:

x_i	0	0.1	0.2
$y(x_i)$	1	1.011	1.048

с краевыми условиями

$$f'(0) = 0, \quad f'(0.2) = 0.52.$$

$$a) S_3(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \in [0;0.1] \\ x^3 + 3x^2 + 1, & x \in [0.1;0.2] \end{cases}.$$

$$б) S_3(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 1, & x \in [0;0.1] \\ x^3 + 3x + 1, & x \in [0.1;0.2] \end{cases}.$$

$$в) S_3(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 1, & x \in [0;0.1] \\ x^3 + x^2 + 1, & x \in [0.1;0.2] \end{cases}.$$

$$г) S_3(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1, & x \in [0;0.1] \\ x^3 + x + 1, & x \in [0.1;0.2] \end{cases}.$$

12. Для таблично заданной функции построить многочлен Лагранжа

x_i	0	2	3
$y(x_i)$	6	2	3

a) $L_2 = (x-2)(x-3) + (x-3)x + x(x-2);$

б) $L_2 = x^2 - 4x + 6;$

в) $L_2 = 6x(x-2) + 2(x-2)(x-3) + 3(x-2)x;$

г) $L_2 = x^3 + x^2 + 4x + 6;$

д) *построить по трем точкам нельзя.*

13. Дана таблично заданная функция:

x_i	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$y(x_i)$	1.6	1.4	1.2	1	1.2	1.4	1.6	1.8

Наилучшей интерполяционной функцией для нее будет:

a) $L_n (n \geq 5);$

б) $H_4;$

в) $L_3;$

г) *линейная;*

д) $S_c;$

где H_n - многочлен Ньютона, L_n - многочлен Лагранжа, S_c – сплайн.

14. Таблично заданную функцию аппроксимировать с помощью метода наименьших квадратов многочленов первой степени $P(x)=p_0+p_1x$. Какой вид будет иметь система уравнений для определения коэффициентов p_0, p_1 ?

x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y(x_i)$	0.21	0.23	0.31	0.29	0.42	0.35	0.58	0.61	0.59	0.66

- a) $0.9p_0+4.5p_1=4.25$
 $4.5p_0+2.85p_1=2.356;$
- б) $10p_0+4.5p_1=4.25$
 $4.5p_0+2.85p_1=2.356;$
- в) $10p_0+2.85p_1=4.25$
 $2.85p_0+2.025p_1=2.356;$
- г) $0.9p_0+2.85p_1=4.25$
 $2.85p_0+4.5p_1=2.356;$
- д) $0.9p_0+4.5p_1=4.25$
 $0.9p_0+2.85p_1=2.356.$

15. Количество точек таблично заданной функции не превышает 7. Считая, что функция достаточно гладкая, определить какой интерполяционный многочлен будет для нее наиболее оптимальным

- a) $L_7;$
- б) $H_4;$
- в) $L_3;$
- г) $H_6;$
- д) $S_c,$

где H_n - многочлен Ньютона, L_n - многочлен Лагранжа, S_c – сплайн.

16. Таблично заданную функцию аппроксимировать с помощью метода наименьших квадратов многочленов первой степени $P(x)=p_0+p_1x$. Какой вид будет иметь система уравнений для определения коэффициентов p_0, p_1 ?

x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y(x_i)$	0.11	0.13	0.21	0.19	0.32	0.25	0.48	0.51	0.49	0.56

- а) $0.9p_0 + 4.5p_1 = 3.25$
 $4.5p_0 + 2.85p_1 = 1.906;$
- б) $10p_0 + 4.5p_1 = 3.25$
 $4.5p_0 + 2.85p_1 = 1.906;$
- в) $10p_0 + 2.85p_1 = 3.25$
 $2.85p_0 + 2.025p_1 = 1.906;$
- г) $0.9p_0 + 2.85p_1 = 3.25$
 $2.85p_0 + 4.5p_1 = 1.906;$
- д) $0.9p_0 + 4.5p_1 = 3.25$
 $0.9p_0 + 2.85p_1 = 1.906.$

17. Оценить погрешность интерполяционной формулы Лагранжа при вычислении функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x^* = 10$, если выбраны узлы интерполяции $x_0 = 4$, $x_1 = 12$, $x_2 = 15$.

- а) $R_2(10) \leq 0.12;$
- б) $R_2(10) \leq 0.7;$
- в) $R_3(10) = 0.12;$
- г) $R_3(10) = 0.7.$

18. Дана таблично заданная функция

x_i	2	3	3.2	4	5	6
$y(x_i)$	4	4.5	4.7	5.2	5.5	6

Используя линейную интерполяцию найти значение функции в точке $x = 3.5$.

- а) 4.89;
- б) 5;
- в) 7;
- г) 4.85.

19. Для таблично заданной функции

x_i	$y(x_i)$	$y'(x_i)$
0	1	0
0.5	0	$-\pi$
1	-1	0

построить кубический эрмитов сплайн.

$$a) S_3(x) = \begin{cases} H_3^1(x) = 1 + (2\pi - 12)x^2 + (16 - 4\pi)x^3, & x \in [0; 0.5] \\ H_3^2(x) = -\pi(x - 0.5) + (4\pi - 12)(x - 0.5)^2 + (16 - 4\pi)(x - 0.5)^3, & x \in [0.5; 1] \end{cases}$$

$$б) S_3(x) = \begin{cases} H_3^1(x) = \pi x + (4\pi - 12)x^2 + (16 - 4\pi)x^3, & x \in [0; 0.5] \\ H_3^2(x) = 1 + (2\pi - 12)(x - 0.5)^2 + (16 - 4\pi)(x - 0.5)^3, & x \in [0.5; 1] \end{cases}$$

$$в) S_3(x) = \begin{cases} H_3^1(x) = 1 + (12 - 4\pi)x^2 + (4\pi - 16)x^3, & x \in [0; 0.5] \\ H_3^2(x) = \pi x + (12 - 2\pi)(x - 0.5)^2 + (4\pi - 16)(x - 0.5)^3, & x \in [0.5; 1] \end{cases}$$

$$г) S_3(x) = \begin{cases} H_3^1(x) = \pi x + (12 - 4\pi)x^2 + (4\pi - 16)x^3, & x \in [0.5; 1] \\ H_3^2(x) = 1 + (2\pi - 12)(x - 0.5)^2 + (16 - 4\pi)(x - 0.5)^3, & x \in [0; 0.5] \end{cases}$$

20. Построить кубический интерполяционный сплайн для функции, заданной таблично:

x_i	0	0.1	0.2
$y(x_i)$	1	1.301	1.608

с краевыми условиями

$$f'(0) = 3.0, \quad f'(0.2) = 3.12.$$

$$a) S_3(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \in [0; 0.1] \\ x^3 + 3x + 1, & x \in [0.1; 0.2] \end{cases}$$

$$б) S_3(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 1, & x \in [0; 0.1] \\ x^3 + 3x + 1, & x \in [0.1; 0.2] \end{cases}$$

$$в) S_3(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x \in [0; 0.1] \\ x^3 + 3x + 1, & x \in [0.1; 0.2] \end{cases}$$

$$e) S_3(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1, & x \in [0; 0.1] \\ x^3 + 3x + 1, & x \in [0.1; 0.2] \end{cases}$$

21. Для функции $y=3x^3-2$ запишите разделенную разность второго порядка $f(x_1, x_2, x_3)$.

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 3(x_3^3 - 2x_2^3 + x_1^3)$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 3(x_3^2 + 2x_2^2 - x_1^2 + 8)$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = 3(x_3 + x_2 + x_1)$;

г) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_3^3 + 3x_2^3 + 3x_1^3$.

7 Численное интегрирование

1. Требуется вычислить

$$\int_0^4 x^4 dx$$

с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ на сетке из 11 точек. Какой метод следует использовать?

- а) средних прямоугольников;*
- б) трапеций;*
- в) Симпсона;*
- г) на указанной сетке точность не достигается;*
- д) левых прямоугольников.*

2. Вычислите значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

по формуле трапеций с шагом 0.2.

- а) 0.6956;*
- б) 0.7456;*
- в) 0.6456;*
- г) 0.6919;*
- д) нет верного ответа.*

3. Требуется вычислить

$$\int_0^{3.75} x^4 dx$$

с точностью $\varepsilon=10^{-2}$ на сетке с шагом 0.25. Какой метод следует использовать?

- а) средних прямоугольников;*
- б) трапеций;*
- в) Симпсона;*
- г) на указанной сетке точность не достигается;*
- д) левых прямоугольников.*

4. Требуется вычислить

$$\int_0^4 x^4 dx$$

с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ на сетке из 41 точки. Какой метод следует использовать?

- a) средних прямоугольников;
- б) трапеций;
- в) Симпсона;
- г) на указанной сетке точность не достигается;
- д) левых прямоугольников.

5. Вычислите значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

по формуле левых прямоугольников с шагом 0.2.

- a) 0.6956;
- б) 0.7456;
- в) 0.6456;
- г) 0.6919;
- д) нет верного ответа.

6. Укажите составную формулу метода левых прямоугольников для численного нахождения интеграла

$$\int_a^b f(x) dx$$

с шагом h . Где введены обозначения: $f(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n, x_0 = a, x_n = b$.

($n = \frac{b-a}{h}$ количество точек разбиения интервала).

- a) $\int_a^b f(x) dx = h(f_1 + f_2 + \dots + f_n)$;
- б) $\int_a^b f(x) dx = h(f_0 + f_1 + \dots + f_n)$;

$$в) \int_a^b f(x)dx = h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1});$$

$$з) \int_a^b f(x)dx = h(f_1 + f_2 + \dots + f_{n+1});$$

$$д) \int_a^b f(x)dx = h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n+1}).$$

7. Вычислите значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

по формуле правых прямоугольников с шагом 0.2.

- а) 0.6956;
- б) 0.7456;
- в) 0.6456;
- з) 0.6919;
- д) нет верного ответа.

8. Вычислите значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

по формуле средних прямоугольников с шагом 0.2.

- а) 0.6856;
- б) 0.7456;
- в) 0.6456;
- з) 0.6919;
- д) нет верного ответа.

9. Вычислите значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

по формуле Симпсона с шагом 0.2.

- а) 0.6500;

- б) 0.7456;
- в) 0.6456;
- г) 0.7500;
- д) нет верного ответа.

10. Определите значение главного члена погрешности при численном нахождении значения интеграла

$$\int_{0.1}^{1.1} \frac{dx}{x+2},$$

с шагом 0.2 методом средних прямоугольников.

- а) $72 \cdot 10^{-5}$;
- б) $1.05 \cdot 10^{-5}$;
- в) $36 \cdot 10^{-5}$;
- г) 0.045;
- д) нет верного ответа.

11. Какой из указанных ниже подходов используется при выводе формул Ньютона-Котеса:

- а) метод неопределенных коэффициентов;
- б) отрезок интегрирования разбивается на n частей;
- в) отрезок интегрирования разбивается на n частей, подынтегральная функция аппроксимируется по методу наименьших квадратов в полученных точках;
- г) подынтегральная функция заменяется интерполяционным многочленом;
- д) подынтегральная функция заменяется линейной функцией.

12. При выводе формулы Симпсона подынтегральная функция заменяется

...

- а) интерполяционным многочленом 1 степени;
- б) интерполяционным многочленом 0 степени;
- в) интерполяционным многочленом 2 степени;
- г) интерполяционным многочленом 3 степени.

13. Определите метод численного интегрирования (формулу Ньютона-Котеса), при выводе которого для аппроксимации подынтегральной функции использовался интерполяционный многочлен 1 степени.

- а) левых прямоугольников;*
- б) трапеций;*
- в) парабол;*
- г) средних прямоугольников.*

14. Требуется вычислить интеграл

$$\int_{0.2}^{1.2} x^3 dx$$

с шагом 0.1 методом средних прямоугольников. Выберите последовательность точек x_i , которые будут использованы в формуле:

- а) 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2;*
- б) 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.05, 1.15, 1.25;*
- в) 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2;*
- г) 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1;*
- д) 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.05, 1.15.*

15. Из перечисленных ниже названий методов численного интегрирования выберите те, которые имеют одинаковый порядок точности

- а) трапеций, Симпсона, прямоугольников;*
- б) трапеций, Симпсона;*
- в) Симпсона, прямоугольников;*
- г) трапеций, средних прямоугольников;*
- д) нет методов, имеющих одинаковый порядок точности.*

16. Из приведенных ниже классов формул выберите те, использование которых, дает устойчивый численный процесс

- а) формулы численного дифференцирования;*
- б) формулы численного интегрирования и дифференцирования;*
- в) формулы Ньютона-Котеса численного интегрирования;*
- г) все ответы верны;*

д) нет верного ответа.

17. Определите, с каким шагом нужно вычислить интеграл

$$\int_0^1 x^3 dx$$

методом трапеций, чтобы достичь точности 10^{-3} .

- а) 0.44;
- б) 0.06;
- в) 0.6;
- г) 0.05;
- д) 0.04.

18. Требуется вычислить интеграл

$$\int_{0.2}^{1.2} x^3 dx$$

с шагом 0.1 методом левых прямоугольников. Выберите последовательность точек x_i , которые будут использованы в формуле:

- а) 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2;
- б) 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.05, 1.15, 1.25;
- в) 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2;
- г) 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1;
- д) 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.05, 1.15.

19. Определите, с каким шагом нужно вычислить интеграл

$$\int_0^1 x^3 dx$$

методом средних прямоугольников, чтобы достичь точности 10^{-3} .

- а) 0.4;
- б) 0.063;
- в) 0.63;
- г) 0.08;

д) 0.085.

20. Из приведенных ниже формул выберите ту, которая является оценкой погрешности метода Симпсона в целом. (M_i - максимальное значение i -ой производной подынтегральной функции, h - шаг интегрирования, a , b - границы отрезка интегрирования)

а) $\varepsilon \leq \frac{(b-a)}{12} M_2 h^2$;

б) $\varepsilon \leq \frac{(b-a)}{24} M_2 h^2$;

в) $\varepsilon \leq \frac{(b-a)}{90} M_4 h^4$;

г) $\varepsilon \leq (b-a) M_1 h$;

д) $\varepsilon \leq \frac{(b-a)}{12} M_2 h$.

21. Из приведенных ниже методов численного интегрирования, выберите те, которые имеют первый порядок точности:

- 1) левых прямоугольников;
- 2) правых прямоугольников;
- 3) средних прямоугольников;
- 4) трапеций;
- 5) парабол.

а) 1), 2), 3);

б) 3), 4);

в) 4);

г) 5);

д) 1), 2).

22. Укажите составную формулу метода правых прямоугольников для численного нахождения интеграла

$$\int_a^b f(x) dx,$$

с шагом h . Где введены обозначения: $f(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$. ($n = \frac{b-a}{h}$ количество точек разбиения интервала).

$$\begin{aligned}
 a) \int_a^b f(x) dx &= h(f_1 + f_2 + \dots + f_n); \\
 б) \int_a^b f(x) dx &= h(f_0 + f_1 + \dots + f_n); \\
 в) \int_a^b f(x) dx &= h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}); \\
 г) \int_a^b f(x) dx &= h(f_1 + f_2 + \dots + f_{n+1}).
 \end{aligned}$$

23. Вычислите значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

с точностью $E \leq 0.01$, используя формулу левых прямоугольников с начальным шагом $h=0.2$. Далее при каждой итерации шаг уменьшается в 2 раза.

- a) 0.745635;
- б) 0.699436;
- в) 0.718771;
- г) 0.705803;
- д) 0.696282 .

24. Приближенное значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

вычисленное по формуле левых прямоугольников, равно 0.696282. Начальный шаг $h=0.2$. При каждой следующей итерации он уменьшается в 2 раза. Определите номер итерации, на которой было получено данное значение.

- a) 1;
- б) 2;
- в) 3;
- г) 4;
- д) 5 .

25. Приближенное значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

вычисленное по формуле левых прямоугольников, равно 0.696282. Начальный шаг $h=0.2$. При каждой следующей итерации шаг уменьшается в 2 раза. Определите шаг интегрирования, с которым было получено данное значение.

- a) 0.2;
- б) 0.1;
- в) 0.05;
- г) 0.025;
- д) 0.0125.

26. Требуется вычислить

$$\int_0^4 10 x^3 dx$$

с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ на сетке из 11 точек. Какой метод следует использовать?

- a) средних прямоугольников;
- б) трапеций;
- в) Симпсона;
- г) на указанной сетке точность не достигается;
- д) левых прямоугольников.

27. Требуется вычислить

$$\int_0^1 x^3 dx$$

с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ на сетке из 41 точки. Какой метод будет наиболее оптимальным?

- a) трапеций;
- б) правых прямоугольников;
- в) Симпсона;
- г) на указанной сетке точность не достигается;
- д) левых прямоугольников.

28. Требуется вычислить

$$\int_0^1 x^4 dx$$

с точностью $\varepsilon=10^{-4}$ на сетке из 81 точки. Какой метод следует использовать?

- а) средних прямоугольников;
- б) трапеций;
- в) правых прямоугольников;
- г) на указанной сетке точность не достигается;
- д) левых прямоугольников.

29. Требуется вычислить

$$\int_0^1 (x^2 + 3x) dx$$

с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ на сетке из 41 точки. Какой метод будет наиболее оптимальным?

- а) правых прямоугольников;
- б) трапеций;
- в) Симпсона;
- г) на указанной сетке точность не достигается;
- д) левых прямоугольников.

30. Из перечисленных ниже формул выберите ту, которая является в малом оценкой погрешности для метода трапеций. (M_i - максимальное значение i -ой производной подынтегральной функции, h – шаг интегрирования, a, b – границы отрезка интегрирования)

а) $\varepsilon_k \leq \frac{(b-a)}{90} M_4 h^4;$

б) $\varepsilon_k \leq \frac{h^5}{90} M_4;$

в) $\varepsilon_k \leq \frac{h^3}{12} M_2;$

г) $\varepsilon_k \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2;$

д) $\varepsilon_k \leq \frac{h^3}{24} M_2.$

8 Численное дифференцирование

1. Какая из формул дает вычисление $f'(x_i)$ со вторым порядком точности (сетка равномерная, h -шаг)?

a) $\frac{f_i - f_{i-1}}{h};$

б) $\frac{f_{i+1} - f_i}{h};$

в) $\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h};$

г) $\frac{f_{i+1} - 2f_i - f_{i-1}}{h^2};$

д) $h \sum_{i=0}^{n-1} f_i .$

2. Какая из формул дает вычисление $f'(x_i)$ с первым порядком точности (сетка равномерная, h -шаг)?

a) $\frac{f_i - f_{i-1}}{h};$

б) $\frac{2f_{i+1} - f_i}{2h};$

в) $\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h};$

г) $\frac{f_{i+1} - 2f_i - f_{i-1}}{h^2};$

д) $h \sum_{i=0}^{n-1} f_i .$

3. Какая из формул дает вычисление $f''(x_i)$ со вторым порядком точности (сетка равномерная, h -шаг)?

a) $\frac{f_i - f_{i-1}}{h};$

б) $\frac{f_{i+1} - f_i - f_{i-1}}{h^2};$

- в) $\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$;
- з) $\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$;
- д) $h \sum_{i=0}^{n-1} f_i$.

4. Найдите значение первой производной функции, заданной таблично:

x_i	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$f(x_i)$	1.10	1.16	1.20	1.28	1.33

в точке $x = 0.2$, используя направленные разности «вперед» с первым порядком точности.

- а) 1.6;
- б) 0.8;
- в) 1.2;
- з) 0.85;
- д) 16.

5. Найдите значение второй производной функции, заданной таблично:

x_i	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$f(x_i)$	1.10	1.16	1.20	1.28	1.33

в точке $x = 0.2$.

- а) 1.6;
- б) 0.8;
- в) 1.2;
- з) 0.85;
- д) 16.

6. Найдите значение первой производной функции, заданной таблично:

x_i	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$f(x_i)$	1.10	1.16	1.20	1.28	1.33

в точке $x = 0.2$, используя направленные разности «назад» с первым порядком точности.

- a) 1.6;
- б) 0.8;
- в) 1.2;
- г) 0.85;
- д) 16.

7. Найдите значение первой производной функции, заданной таблично:

x_i	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$f(x_i)$	1.10	1.16	1.20	1.28	1.33

в точке $x = 0.2$, используя симметричную аппроксимацию.

- a) 1.6;
- б) 0.8;
- в) 1.2;
- г) 0.85;
- д) 16.

8. Функция $f(x)$ задана таблично:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$f(x_i)$	f_0	f_1	...	f_n

Для нахождения f'_{i+2} используется метод неопределенных коэффициентов

$$f'_{i+2} = \tilde{n}_0 f_{i+2} + \tilde{n}_1 f_{i+3}.$$

Чему равны коэффициенты c_0, c_1 ?

- a) $c_0 = -\frac{1}{h}; c_1 = \frac{1}{h};$
- б) $c_0 = \frac{1}{h}; c_1 = -\frac{1}{h};$
- в) $c_0 = -\frac{1}{h}; c_1 = -\frac{1}{h^2};$

$$e) c_0 = -\frac{1}{h^2}; c_1 = \frac{1}{h^2};$$

$$d) c_0 = \frac{1}{h^2}; c_1 = -\frac{1}{h^2}.$$

9. Для вычисления $f'(x_i)$ используется метод неопределенных коэффициентов:

$$f'_i = \tilde{n}_0 f_i + \tilde{n}_1 f_{i+1} + \dot{A}$$

Из приведенных ниже вариантов выберите для этой формулы главный член погрешности.

$$a) \frac{h^2}{4} f_i'';$$

$$b) \frac{h^2}{8} f_{i+1}''';$$

$$в) \frac{h}{4} f_i''';$$

$$e) \frac{h}{2} f_i'';$$

$$d) \frac{h}{2} f_{i+1}''.$$

10. Для функции, заданной таблично:

x_i	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
$f(x_i)$	10	10.5	11.1	11.7	12.3	12.9	13.6	14.3	15.0	15.7	16.5

требуется вычислить первую производную в точке 2.5 со вторым порядком точности. Определите формулу, которая позволит достичь требуемого результата.

$$a) f'(2.5) = \frac{f(2.6) - f(2.5)}{0.1};$$

$$b) f'(2.5) = \frac{f(2.5) - f(2.4)}{0.1};$$

$$в) f'(2.5) = \frac{f(2.6) - f(2.4)}{0.2};$$

$$e) f'(2.5) = \frac{f(2.6) - f(2.4)}{0.1};$$

11. Для функции, заданной таблично, выберите формулу для вычисления $f'(x_{i+2})$. (h - шаг)

$$a) f'(x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+3}) + f(x_{i+2})}{h};$$

$$б) f'(x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{h};$$

$$в) f'(x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+3}) - f(x_{i+2})}{2h};$$

$$г) f'(x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+4}) - f(x_{i+3})}{h};$$

$$д) f'(x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+3}) + f(x_{i+2})}{2h}.$$

12. Пусть функция $f(x)$ задана таблично

x_i	x_0	...	x_n
$f(x_i)$	f_0	...	f_n

Для нахождения $f'(x_{i+3})$ используется метод неопределенных коэффициентов:

$$f'(x_{i+3}) = \tilde{n}_0 f_{i+2} + \tilde{n}_1 f_{i+3} + \tilde{n}_2 f_{i+4}.$$

Определите вид коэффициентов c_0, c_1, c_2 ?

$$a) c_0 = -\frac{1}{2h}, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2h};$$

$$б) c_0 = \frac{1}{2h}, c_1 = \frac{1}{2h}, c_2 = \frac{1}{2h};$$

$$в) c_0 = -\frac{1}{2h}, c_1 = \frac{1}{2h}, c_2 = 0;$$

$$г) c_0 = -\frac{1}{2h}, c_1 = -\frac{1}{2h}, c_2 = \frac{1}{2h};$$

$$\text{д) } c_0 = -\frac{1}{h}, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{h}.$$

13. Пусть функция $f(x)$ задана таблично:

x_i	x_0	...	x_n
$f(x_i)$	f_0	...	f_n

Требуется вычислить $f'(x_n)$ с первым порядком точности. Какие формулы численного дифференцирования для этого следует использовать?

- а) направленные разности «вперед»;*
- б) направленные разности «назад»;*
- в) симметричная аппроксимация;*
- г) направленные разности «вперед», симметричная аппроксимация;*
- д) любой метод подходит.*

14. Пусть функция $f(x)$ задана таблично:

x_i	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
$f(x_i)$	0.10	0.21	0.41	0.52	0.68

Требуется вычислить значение производной в точке $x = 0.35$ со вторым порядком точности. Какие методы численного дифференцирования для этого следует использовать?

- 1) двухточечные направленные разности «вперед»;
- 2) двухточечные направленные разности «назад»;
- 3) симметричная аппроксимация;
- 4) трехточечные направленные разности «вперед».

- а) только 1);*
- б) только 2);*
- в) только 3);*
- г) 1), 2);*
- д) 3), 4).*

15. Пусть функция $f(x)$ задана таблично. Требуется определить производную во внутренних узлах сетки со вторым порядком точности. Какие методы для этого следует использовать?

- 1) двухточечные направленные разности «вперед»;
- 2) двухточечные направленные разности «назад»;
- 3) симметричная аппроксимация;
- 4) трехточечные направленные разности «вперед»;
- 5) трехточечные направленные разности «назад».

- a) 1), 2);
- б) 3), 4), 5);
- в) 3);
- г) 4), 5);
- д) 1), 2), 3).

16. Из приведенных ниже вариантов выберите формулы, являющиеся в общем случае (при любом шаге h) неустойчивыми.

- a) $y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$;
- б) $\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n f(x_i)$;
- в) $f(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$;
- г) $\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$;
- д) нет верного ответа.

17. Из ниже приведенных формул выберите ту, которая является главным членом погрешности аппроксимации $f'(x_i)$ на основе симметричной разности.

- a) $f'''(x_i) \frac{h^2}{3!}$;
- б) $f'''(x_i) \frac{h^3}{3!}$;

$$в) f''(x_i) \frac{h^2}{6};$$

$$з) f''(x_i) \frac{h}{2};$$

$$д) f'''(x_i) \frac{h^3}{4!}.$$

18. Для функции $y=x^3+7x$, которая задана таблично с шагом $h=0.1$, вычисляется первая производная в точке $x=1$ на основе симметричной аппроксимации. Чему равна погрешность?

$$а) E \leq 0.01;$$

$$б) E \leq 0.3;$$

$$в) E \leq 0;$$

$$з) E \leq 0.02;$$

$$д) E \leq 0.003.$$

19. Пусть функция $f(x)$ задана таблично. Требуется определить производную во всех узлах сетки со вторым порядком точности. Какие из приведенных формул для этого следует использовать?

$$1) \frac{f_{i+1} - f_i}{h};$$

$$2) \frac{f_i - f_{i-1}}{h};$$

$$3) \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h};$$

$$4) \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h};$$

$$5) \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h}.$$

$$а) 1), \text{ при } i=0, \dots, n;$$

$$2), \text{ при } i=0, \dots, n;$$

$$б) 3), \text{ при } i=0, \dots, n;$$

$$в) 3), \text{ при } i=1, \dots, n-1;$$

$$4), \text{ при } i=0;$$

- 5), при $i=n$;
 з) 4), при $i=0, \dots, n$;
 д) 5), при $i=0, \dots, n$.

20. Найдите значение первой производной функции, заданной таблично:

x_i	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$f(x_i)$	1.10	1.16	1.20	1.28	1.33

в точке $x = 0.2$, используя направленные разности «вперед» со вторым порядком точности.

- а) 1.6;
 б) 1.9;
 в) 1.2;
 з) 0.85;
 д) 16.

21. Найдите значение первой производной функции, заданной таблично:

x_i	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$f(x_i)$	1.10	1.16	1.20	1.28	1.33

в точке $x = 0.2$, используя направленные разности «назад» со вторым порядком точности.

- а) 1.6;
 б) 0.8;
 в) 1.2;
 з) 0.85;
 д) 0.6.

22. Пусть функция $f(x)$ задана таблично:

x_i	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
$f(x_i)$	0.10	0.21	0.41	0.52	0.68

Требуется вычислить значение $f'(x_i)$ в точке $x_i = 0.3$ со вторым порядком точности. Какие формулы численного дифференцирования для этого следует использовать?

- 1) $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$;
- 2) $\frac{f_i - f_{i-1}}{h}$;
- 3) $\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$;
- 4) $\frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h}$;
- 5) $\frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h}$.

- а) только 1);
- б) только 2);
- в) только 3);
- г) 3), 4), 5);
- д) 4), 5).

23. Для вычисления производной таблично заданной функции в узлах используется численный процесс:

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + E.$$

Чему равен главный член погрешности?

- а) $\frac{h}{4} f''_{i-1}$;
- б) $\frac{h^2}{2} f''_{i-1}$;
- в) $\frac{h^2}{4} f''_i$;
- г) $\frac{h^2}{6} f'''_i$;
- д) $\frac{h}{2} f''_i$.

24. Какая из формул дает вычисление $f'(x_i)$ со вторым порядком точности (сетка равномерная, h -шаг)?

a) $\frac{f_i - f_{i-1}}{h};$

б) $\frac{f_{i+1} - f_i}{h};$

в) $\frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h};$

г) $\frac{f_{i+1} - 2f_i - f_{i-1}}{h^2};$

д) $h \sum_{i=0}^{n-1} f_i .$

25. Какая из формул дает вычисление $f'(x_i)$ со вторым порядком точности (сетка равномерная, h -шаг)?

a) $\frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h};$

б) $\frac{2f_{i+1} - f_i}{2h};$

в) $\frac{f_{i+1} - f_i}{h};$

г) $\frac{f_{i+1} - 2f_i - f_{i-1}}{h^2};$

д) $h \sum_{i=0}^{n-1} f_i .$

26. Пусть функция $f(x)$ задана таблично:

x_i	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
$f(x_i)$	0.10	0.21	0.41	0.52	0.68

Требуется вычислить значение $f'(x_i)$ в точке $x_i = 0.40$ со вторым порядком точности. Какие формулы численного дифференцирования для этого следует использовать?

1) $\frac{f_{i+1} - f_i}{h};$

- 2) $\frac{f_i - f_{i-1}}{h}$;
- 3) $\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$;
- 4) $\frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h}$;
- 5) $\frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h}$.

- а) только 1);
 б) только 3);
 в) 3), 5);
 г) 3), 4), 5);
 д) 4), 5).

27. Пусть функция $f(x)$ задана таблично:

x_i	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
$f(x_i)$	0.10	0.21	0.41	0.52	0.68

Требуется вычислить значение $f'(x_i)$ в точке $x_i = 0.2$ со вторым порядком точности. Какие формулы численного дифференцирования для этого следует использовать?

- 1) $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$;
- 2) $\frac{f_i - f_{i-1}}{h}$;
- 3) $\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$;
- 4) $\frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h}$;
- 5) $\frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h}$.

- а) 1);
 б) 2);
 в) 3);
 г) 3), 4), 5);

д) 3), 4).

28. Для функции $y=x^3+7x$, заданной таблично с шагом $h=0.1$, вычисляется вторая производная в точке $x=1$. Чему равна погрешность?

а) $\varepsilon \leq 0.01$;

б) $\varepsilon \leq 0.3$;

в) $\varepsilon \leq 0$;

г) $\varepsilon \leq 0.02$;

д) $\varepsilon \leq 0.003$.

29. Для функции $y=x^3+7x$, заданной таблично с шагом $h=0.1$, вычисляется первая производная в точке $x=1$ с использованием направленной разности «вперед» с первым порядком точности. Чему равна погрешность?

а) $\varepsilon \leq 0.01$;

б) $\varepsilon \leq 0.3$;

в) $\varepsilon \leq 0.02$;

г) $\varepsilon \leq 0.0001$;

д) $\varepsilon \leq 0.003$.

30. Для функции $y=x^3+7x$, заданной таблично с шагом $h=0.1$, вычисляется первая производная в точке $x=1$ с использованием направленной разности «вперед» со вторым порядком точности. Чему равна погрешность?

а) $\varepsilon \leq 0.01$;

б) $\varepsilon \leq 0.3$;

в) $\varepsilon \leq 0.02$;

г) $\varepsilon \leq 0.0001$;

д) $\varepsilon \leq 0.003$.

31. Пусть функция $f(x)$ задана таблично. Требуется определить производную во всех узлах сетки со вторым порядком точности. Какие из приведенных формул для этого следует использовать?

1) $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$;

$$2) \frac{f_i - f_{i-1}}{h};$$

$$3) \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h};$$

$$4) \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h};$$

$$5) \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h}.$$

a) 1), n пу $i=0, \dots, n$;

2), n пу $i=0, \dots, n$;

б) 3), n пу $i=0, \dots, n-1$;

в) 4), n пу $i=0$;

5), n пу $i=1, \dots, n$;

г) 4), n пу $i=0, \dots, n-2$;

5), n пу $i=n-1, n$;

д) 5), n пу $i=0, \dots, n$.

9 Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

1. Требуется численно решить задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), u(0) = u^{(0)}, t > 0$$

со вторым порядком точности. Какой метод будет оптимальным для использования?

$$a) \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_n, u_n) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$б) \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$в) \frac{u_{n+1/2} - u_n}{0.5\tau} - f(t_n, u_n) = 0 \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = 0 \\ n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$г) \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - \frac{1}{2}(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})) = 0 \\ n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

д) *правильного ответа нет.*

2. Требуется численно решить задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), u(0) = u^{(0)}, t > 0$$

с первым порядком точности. Какой метод будет оптимальным для использования?

$$a) \frac{u_{n+1/2} - u_n}{0.5\tau} - f(t_n, u_n) = 0 \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = 0 \\ n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$б) \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$в) \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_n, u_n) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$г) \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - \frac{1}{2}(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_0 = u^{(0)}$$

д) данная точность недостижима.

3. Требуется численно решить задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), u(0) = u^{(0)}, t > 0$$

со вторым порядком точности. Какой метод будет оптимальным для использования?

$$а) \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_n, u_n) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$б) \frac{u_{n+1} - u_n}{0.5\tau} - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$в) \frac{u_{n+1/2} - u_n}{2\tau} - f(t_n, u_n) = 0 \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = 0$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$г) \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - \frac{1}{2}(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_0 = u^{(0)}$$

д) правильного ответа нет

4. Выберите расчетные формулы, которые являются методом предиктор-корректор численного решения задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), u(0) = u^{(0)}, t > 0.$$

$$a) \frac{u_{n+2} - u_n}{2\tau} - f(t_n, u_n) = 0 \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_{n+2}, u_{n+2}) = 0 ;$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$б) \frac{u_{n+1/2} - u_n}{\tau} - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)} ;$$

$$в) \frac{u_{n+1/2} - u_n}{0.5\tau} - f(t_n, u_n) = 0 \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = 0 ;$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$г) \frac{u_{n+1/2} - u_n}{0.5\tau} - f(t_{n-1}, u_{n-1}) = 0 \quad \frac{u_{n+1} - u_{n+1/2}}{0.5\tau} - f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = 0 ;$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

$$д) \frac{u_{n+1} - u_n}{2\tau} - f(t_n, u_n) = 0 \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} - f(t_{n+1}, u_{n+1}) = 0$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$$

5. Выберите таблицу, являющуюся решением задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = u - t^2 + t, u(0) = 1$$

методом Эйлера на отрезке $[0; 1]$ с шагом 0.2 .

a)

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$u(t)$	1	0.8	0.608	0.4384	0.30272	0.210176

б)

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$u(t)$	1	1.2	1.472	1.8144	2.22528	2.702336

в)

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$u(t)$	1	1.219	1.51359	1.882844	2.325641	2.84063

з)

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$u(t)$	1	1.4923	2.2466	3.4176	5.2288	8.0032

6. Выберите таблицу, являющуюся решением задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{3ut^2}{1-t^3}, u(0)=1, 0 \leq t \leq 0.4, \tau=0.2$$

методом Эйлера.

а)

x	0	0.2	0.4
y	1	1	1.024194

б)

x	0	0.2	0.4
y	1	1.003003	1.043305

в)

x	0	0.2	0.4
y	1	1.006006	1.062513

7. Требуется численно решить задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), u(0) = u^{(0)}, t > 0.$$

Выберите методы, позволяющие найти решение со вторым порядком точности.

- 1) $u_{i+1} = u_i + \tau f(t_i, u_i)$. $u_0 = u^{(0)}, n = 0, 1, 2, \dots$;
- 2) $u_{i+1} = u_i + 0.5\tau [f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})]$. $u_0 = u^{(0)}, n = 0, 1, 2, \dots$;
- 3) $u_{i+1/2} = u_i + 0.5\tau f(t_i, u_i)$, $u_{i+1} = u_i + \tau f(t_{i+1/2}, u_{i+1/2})$. $u_0 = u^{(0)}, n = 0, 1, 2, \dots$;

а) 1), 2), 3);

б) 2);

в) 3);

г) 2), 3);

д) 1), 3).

8. Выберите таблицу, являющуюся решением задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{3ut^2}{1-t^3}, u(0) = 1, 0 \leq t \leq 0.4, \tau = 0.2$$

методом предиктор-корректор.

a)

x	0	0.2	0.4
y	1	1	1.024194

б)

x	0	0.2	0.4
y	1	1.003003	1.043305

в)

x	0	0.2	0.4
y	1	1.006006	1.062513

9. Для численного решения задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u). u(0) = u^{(0)}. t > 0$$

используется метод Эйлера. Выберите главный член ошибки аппроксимации метода.

a) $\frac{\tau}{2} \max_{i=0, n} |u''(t_i)|;$

б) $\frac{\tau^2}{2} \max_{i=0, n} |u''(t_i)|;$

в) $\frac{\tau}{2} \max_{i=0, n} |u'(t_i)|;$

г) $\frac{\tau^2}{2} \max_{i=0, n} |u(t_i)|;$

д) $\frac{\tau}{2} \max_{i=0, n} |u(t_i)|.$

10. Требуется численно решить задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u). \quad u(0) = u^{(0)}. \quad t > 0$$

с первым порядком точности. Какие из перечисленных методов для этого следует использовать:

- а) Эйлера, предиктор-корректор;
- б) Эйлера;
- в) предиктор-корректор, двухэтапный метод Рунге-Кутты;
- г) двухэтапный метод Рунге-Кутты;
- д) нет верного ответа.

11. Выберите таблицу, являющуюся решением задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = u - t^3 + 5t, \quad u(0) = 1$$

методом Эйлера на отрезке $[0; 1]$ с шагом $\tau = 0.2$.

а)

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1	1.2	1.6384	2.3533	3.3807	4.7545

б)

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1	1.1	1.3092	1.6337	2.0755	2.6318

в)

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1	1.2599	1.7809	2.6053	3.7744	5.3278

г)

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1	1.77	2.09	2.77	2.99	3.01

12. Найдите значения $u(0.1)$, $z(0.1)$ численного решения задачи Коши из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' = 3z + 2t - 2 \\ z' = 2t \end{cases},$$

$$u(0) = 0, \quad z(0) = 1$$

методом Эйлера с шагом $\tau = 0.1$.

- a) $u(0.1)=1, z(0.1)=0.1$;
- б) $u(0.1)=0.846, z(0.1)=1.15$;
- в) $u(0.1)=1.15, z(0.1)=0.846$;
- г) $u(0.1)=1.1, z(0.1)=0.846$;
- д) $u(0.1)=0.1, z(0.1)=1$.

13. Найдите значение $u(0.2)$ из численного решения дифференциального уравнения

$$u'' = u' - u + t^3 + t + 6$$

методом Эйлера с шагом $\tau = 0.1$. Начальные условия $u(0)=1, u'(0)=1$.

- a) 1.1;
- б) 1;
- в) 1.26;
- г) 0.2;
- д) 0.04.

14. Найдите значение $u(2.2)$ из численного решения дифференциального уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = u - t^2 + t,$$

методом Рунге-Кутты IV порядка точности с использованием схемы:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Начальные условия $u(2)=7$, шаг $\tau = 0.2$.

- a) 8.039993;
- б) 9.159985;
- в) 8;
- г) 7.90056;
- д) 4.7.

15. Из ниже перечисленных методов решения ОДУ выберите те, которые являются явными

- а) Адамса-Моултона, Эйлера;
- б) Адамса-Башфорта, предиктор-корректор;
- в) Адамса-Моултона, Адамса-Башфорта;
- г) нет верного ответа;

16. Выберите расчетные формулы для численного решения задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = u^{(0)}, \quad t > 0$$

методом Адамса-Башфорта со вторым порядком точности.

а) $u_{n+1} = u_n + \tau f(t_n, u_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$

б) $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{2} (3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})) \quad n = 1, 2, \dots$
 $u_0 = u^{(0)}$

в) $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{12} (23f(t_n, u_n) - 16f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, u_{n-2}))$
 $n = 2, 3, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$

г) $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{2} (f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})) \quad n = 0, 1, 2, \dots$
 $u_0 = u^{(0)}$

д) $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{12} (5f(t_{n+1}, u_{n+1}) + 8f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1}))$
 $n = 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$

0

17. При численном решении задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{3t^2 - 2u}{1 + 2t}, \quad u(2) = 1.6$$

методом Эйлера с начальным шагом 0.2 было получено решение $u(2.2) = 1.967028$.
 Определите шаг, с которым было получено это решение.

- a) 0.2;
- б) 0.05;
- в) 0.1;
- г) 0.4;
- д) 0.025.

18. Выберите расчетные формулы для численного решения задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u). \quad u(0) = u^{(0)}. \quad t > 0$$

методом Адамса-Моултона с третьим порядком точности.

a) $u_{n+1} = u_n + \tau f(t_{n+1}, u_{n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$

б) $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{2} (-f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 3f(t_n, u_n))$
 $n = 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$

в) $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{12} (23f(t_n, u_n) - 16f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, u_{n-2}))$
 $n = 2, 3, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$

г) $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{2} (f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})) \quad n = 0, 1, 2, \dots$
 $u_0 = u^{(0)}$

д) $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{12} (5f(t_{n+1}, u_{n+1}) + 8f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1}))$
 $n = 1, 2, \dots \quad u_0 = u^{(0)}$

19. Для задачи

$$u' + u = 3e^{2t} \quad u(0) = 1.$$

постройте трехточечную разностную схему второго порядка точности.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + u_n = 3e^{2t_i}; \\
\text{б)} \quad & \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + 0.5(u_{n+1} + u_{n-1}) = 3e^{2t_i}; \\
\text{в)} \quad & \frac{u_{n+1} - u_n}{2\tau} + u_{n+1} + u_{n-1} = 3e^{2t_i}; \\
\text{г)} \quad & \frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} + u_{n-1} = 3e^{2t_i}; \\
\text{д)} \quad & \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\tau} + u_n = 3e^{2t_i}.
\end{aligned}$$

20. Из перечисленных ниже вариантов выберите основные этапы вывода формул метода Адамса-Башфорта решения задачи Коши:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = u^{(0)}, \quad t > 0.$$

а) 1. Интегрирование дифференциального уравнения на промежутке $[t_i; t_{i+1}]$;

2. Замена функции $f(t, u)$ интерполяционным многочленом Ньютона требуемой степени.

б) 1. Интегрирование дифференциального уравнения на промежутке $[t_i; t_{i+1}]$;

2. Аппроксимация $\frac{du(t)}{dt}$ направленной разностью «вперед» относительно i -го узла с шагом $\tau = t_{i+1} - t_i$.

в) 1. Аппроксимация $\frac{du(t)}{dt}$ направленной разностью «вперед» относительно i -го узла с шагом $\tau = t_{i+1} - t_i$;

2. Вычисление значений функции u_{i+1} через u_i .

г) 1. Интегрирование дифференциального уравнения на промежутке $[t_i; t_{i+1}]$;

2. Замена функции $f(t, u)$ интерполяционным многочленом Лагранжа требуемой степени.

д) нет верного ответа.

21. Требуется решить задачу Коши

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = 1$$

методом Адамса-Башфорта со вторым порядком точности, $\tau = 0.05$. Из ниже перечисленных вариантов выберите правильную формулу для $u(0.1)$.

а) $u(0.1) = u(0.05) + 0.025(3f(0.05, u(0.05)) - f(0, u(0)))$;

б) $u(0.1) = u(0.05) + 0.05f(0, u(0))$;

в) $u(0.1) = u(0) + 0.1f(0, u(0))$;

г) $u(0.05) = u(0) + 0.05f(0, u(0))$,
 $u(0.1) = u(0) + 0.05(3f(0, u(0)) - f(0.05, u(0.05)))$;

д) нет верного ответа.

22. Требуется решить задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = u - t^2 + t, \quad u(0) = 1$$

методом Рунге-Кутты IV порядка точности с использованием схемы:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Вычислите k_1, k_2, k_3, k_4 в точке $t=0.1$ при $\tau=0.1$.

а) $k_1=1.1, k_2=1.105, k_3=1.2105, k_4=1.3$;

б) $k_1=1, k_2=1.1, k_3=1.2, k_4=1.3$;

в) $k_1=1, k_2=1.19, k_3=1.204, k_4=1.4018$;

г) $k_1=1, k_2=1.0975, k_3=1.102375, k_4=1.2002375$;

д) $k_1=0, k_2=0.1, k_3=1, k_4=1.1$.

23. Продолжите предложение.

Зафиксируем точку t_i и введем последовательность разностных сеток $\{\omega_n\}$: $\tau \rightarrow 0$. Численное решение задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = u^{(0)}, \quad t > 0$$

сходится в точке t_i , если ...

а) он сходится в каждой точке расчетной области;

б) $\lim_{\tau \rightarrow 0} |u_i - u(t_i)| \rightarrow 0$, где τ – шаг сетки, u_i – решение дискретной задачи,

$u(t_i)$ – точное решение;

в) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} |u_i - u(t_i)| \rightarrow 0$, где τ – шаг сетки, u_i – решение дискретной задачи,

$u(t_i)$ – точное решение;

г) нет верного ответа.

24. Для решения задачи Коши

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = 1$$

используется метод Адамса-Моултона со вторым порядком точности, $\tau = 0.05$. Из ниже перечисленных вариантов выберите правильную формулу для $u(0.1)$.

а) $u(0.1) = u(0.05) + 0.05 f(0.1, u(0.1))$;

б) $u(0.1) = u(0.05) + 0.025(f(0, u(0)) + f(0.1, u(0.1)))$;

в) $u(0.1) = u(0.05) + 0.025(f(0.05, u(0.05)) + f(0.1, u(0.1)))$;

г) $u(0.1) = u(0) + 0.05(f(0, u(0)) + f(0.1, u(0.1)))$;

д) $u(0.1) = u(0.05) + 0.0042(5f(0.1, u(0.1)) + 8f(0.05, u(0.05)) - f(0, u(0)))$.

25. Требуется численно решить задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u). \quad u(0) = u^{(0)}. \quad t > 0$$

со вторым порядком точности. Какие из перечисленных методов для этого можно использовать:

а) предиктор-корректор, Рунге-Кутта;

б) Эйлера;

в) предиктор-корректор;

г) Рунге-Кутта;

д) нет верного ответа.

26. Задача Коши для ОДУ

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u). \quad u(0) = u^{(0)}. \quad t > 0$$

решается с помощью схемы второго порядка точности:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2,$$

где $k_1 = f(t_i, u_i)$, $k_2 = f(t_i + \alpha\tau, u_i + \beta\tau k_1)$.

Выпишите систему для нахождения α , β , σ_1 , σ_2 .

$$a) \begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 0 \\ \sigma_1 \alpha = 1 \\ \sigma_2 \beta = 1 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 1 \\ \sigma_1 \alpha = 0.5 \\ \sigma_2 \beta = 0.5 \end{cases};$$

$$в) \begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 1 \\ \sigma_2 \alpha = 0.5 \\ \sigma_2 \beta = 0.5 \end{cases};$$

$$г) \begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 1 \\ \sigma_1 \alpha = 0.5 \\ \sigma_1 \beta = 0.5 \end{cases};$$

д) нет верного ответа.

27. Для численного решения задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = u^{(0)}, \quad t > 0$$

используется метод предиктор-корректор. Чему равен главный член ошибки аппроксимации метода?

$$a) \frac{\tau}{2} \max_{i=0, n} |u''(t_i)|;$$

$$б) \frac{\tau^2}{3!} \max_{i=0, n} |u'''(t_i)|;$$

$$в) \frac{\tau^3}{6} \max_{i=0,n} |u'''(t_i)|;$$

$$з) \frac{\tau}{3!} \max_{i=0,n} |u''(t_i)|;$$

$$д) \frac{\tau^3}{3!} \max_{i=0,n} |u'''(t_i)|.$$

28. Исследуется ошибка аппроксимации метода предиктор-корректор. Определите пропущенные члены в записи:

$$L_\tau = u'(t_i) + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f(t, u) \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\tau^2}{6} u'''(t_i) - f(t_i, u(t_i)) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial f}{\partial t} + \dots + \dots - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\tau^2}{8} f^2(t_i, u(t_i)) + o(\tau^3)$$

$$а) -\frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, -\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\tau}{2} f(t_i, u(t_i));$$

$$б) \frac{\tau}{2} u''(t_i), -\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\tau}{2} f(t_i, u(t_i));$$

$$в) -\frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2};$$

$$з) \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2};$$

д) запись верна, ничего не пропущено.

29. Требуется численно решить задачи Коши для ОДУ

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u). \quad u(0) = u^{(0)}. \quad t > 0.$$

Каким интерполяционным многочленом, аппроксимируется функция $f(t, u)$ в методе Адамса-Башфорта 2 порядка точности?

а) интерполяционным многочленом Ньютона 2 степени;

б) интерполяционным многочленом Лагранжа 1 степени;

в) интерполяционным многочленом Ньютона 1 степени;

г) интерполяционным многочленом Лагранжа 3 степени.

30. Продолжите определение.

Погрешностью аппроксимации разностной схемы на решении называют...

а) сеточную функцию, полученную при подстановке точного решения в разностную задачу и характеризующую степень близости дифференциального и разностного уравнений;

б) сеточную функцию, получающуюся при подстановке приближенного значения в разностную задачу;

в) сеточную функцию, получающуюся при подстановке приближенного значения в дифференциальное уравнение;

г) нет верного ответа.

31. На последовательности сеток с шагами: $\tau_1=0.02$, $\tau_2=0.01$, $\tau_3=0.005$, $\tau_4=0.0025$ методом Эйлера были получены решения двух задач Коши:

1) $\frac{du}{dt} = \frac{1}{1+t}$, $u(1)=0.5$;

2) $\frac{du}{dt} = u - t^2$, $u(2)=10$.

Для первой задачи:

t	1	1.02	1.04	1.06	1.08	1.1
u_{τ_1}	0.5	0.505	0.509901	0.514706	0.519417	0.524038
u_{τ_2}	0.5	0.504975	0.509852	0.514634	0.519324	0.519324
u_{τ_3}	0.5	0.504963	0.509828	0.514599	0.519277	0.523866
u_{τ_4}	0.5	0.504957	0.509816	0.514581	0.519254	0.523838

Для второй задачи:

t	2	2.02	2.04	2.06	2.08	2.1
u_{τ_1}	10	10.12	10.24079	10.36238	10.48475	10.60792
u_{τ_2}	10	10.12020	10.24119	10.36298	10.48557	10.60895
u_{τ_3}	10	10.12023	10.24140	10.36329	10.48598	10.60948
u_{τ_4}	10	10.12035	10.2415	10.36345	10.48619	10.60974

Определите, какой из численных процессов сходится.

а) сходится решение первой задачи;

б) сходится решение второй задачи;

в) сходятся решения первой и второй задач;

г) оба решения не сходятся.

32. Из перечисленных ниже вариантов выберите систему, которая будет эквивалентна указанному дифференциальному уравнению:

$$u'' = u' - u + t^3 + t + 6.$$

$$а) \begin{cases} u = k \\ k'' = k' - k + t^3 + t + 6; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} u' = k \\ k' = k - u + t^3 + t + 6; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} u' = k \\ k' = k(2k + t); \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} u'' = k \\ k = u' - u + t^3 + t + 6. \end{cases}$$

33. Для двух задач Коши:

$$1) \frac{du}{dt} = u - 5t^3, u(2)=174;$$

$$2) \frac{du}{dt} = tu^3 - u^2, u(4)=2.6.$$

на последовательности сеток с шагами $\tau_1=0.02$, $\tau_2=0.01$, $\tau_3=0.005$, $\tau_4=0.0025$ методом Эйлера были получены решения:

Для первой задачи:

t	2	2.02	2.04	2.06	2.08	2.1
u_{τ_1}	174	176.68	179.38936	182.12818	184.89656	187.69460
u_{τ_2}	174	176.68737	179.40427	182.1508	184.92710	187.73322
u_{τ_3}	174	176.69108	179.41179	182.1622	184.9425	187.75269
u_{τ_4}	174	176.69295	179.4156	182.16795	184.9502	187.76246

Для второй задачи:

t	4	4.02	4.04	4.06	4.08	4.1
u_{τ_1}	2.6	3.68608	7.389582	39.66715	5107.483	108720451
u_{τ_2}	2.6	4.22731	21.37929	291.6102	41552.11	111432560
u_{τ_3}	2.6	4.9781237	14088.591	19268	175888.9	123464222

$u_{\tau 4}$	2.6	5.9855865	35143	453797.99	5432669	98657890
--------------	-----	-----------	-------	-----------	---------	----------

Определите правильность и сходимость полученных численных решений.

- 1) верно решение первой задачи, численный процесс сходится;
- 2) неверно решение первой задачи, численный процесс расходится;
- 3) верно решение второй задачи, численный процесс сходится;
- 4) неверно решение второй задачи, численный процесс расходится;
- 5) неверно решение первой задачи, численный процесс сходится;

- a) 1), 3);
- б) 2), 3);
- в) 4), 5);
- г) 3), 5);
- д) 1), 4).

34. Задача Коши для ОДУ

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u). \quad u(0) = u^{(0)}. \quad t > 0$$

решается с помощью схемы:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = \varphi(t, u, \tau).$$

Определите вид функции $\varphi(t, u, \tau)$, при котором указанная схема определяет классический метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

a)

$$\varphi(t, u, \tau) = \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \sigma_3 k_3 + \sigma_4 k_4, \text{ где}$$

$$k_1 = f(t_i, u_i);$$

$$k_2 = f(t_i + a_2 \tau, u_i + \tau b_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + a_3 \tau, u_i + \tau(b_{31} k_1 + b_{32} k_2))$$

$$k_4 = f(t_i + a_4 \tau, u_i + \tau(b_{41} k_1 + b_{42} k_2 + b_{43} k_3))$$

б)

$$\varphi(t, u, \tau) = \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \sigma_3 k_3 + \sigma_4 k_4, \text{ где}$$

$$k_1 = f(t_i, u_i);$$

$$k_2 = f(t_i + a_2 \tau, u_i + \tau k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + a_3 \tau, u_i + \tau(k_1 + k_2))$$

$$k_4 = f(t_i + a_4 \tau, u_i + \tau(k_1 + k_2 + k_3))$$

в)

$$\varphi(t, u, \tau) = \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \sigma_3 k_3 + \sigma_4 k_4, \text{ где}$$

$$k_1 = f(t_i, u_i);$$

$$k_2 = f(t_i + \tau, u_i + \tau k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + a \tau, u_i + \tau(k_1 + k_2))$$

$$k_4 = f(t_i + \tau, u_i + \tau(k_1 + k_2 + k_3))$$

з)

$$\varphi(t, u, \tau) = \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \sigma_3 k_3 + \sigma_4 k_4, \text{ где}$$

$$k_1 = f(t_i, u_i);$$

$$k_2 = f(t_i + a_2 \tau, u_i + \tau b_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + a_3 \tau, u_i + \tau(b_{31} k_1 + b_{32} k_2 + b_{33} k_3))$$

$$k_4 = f(t_i + a_4 \tau, u_i + \tau(b_{41} k_1 + b_{42} k_2 + b_{43} k_3 + b_{44} k_4))$$

д) все ответы верны.

10 Решение уравнений конвективного переноса

1. Какой из приведенных ниже методов будет разностной схемой уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$
$$a > 0,$$

имеющей 2-ой порядок точности по пространству и являющейся абсолютно устойчивой?

$$a) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

$$б) \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

$$в) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}$$

$$г) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

$$д) \frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

2. Какая из приведенных ниже разностных схем для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$$

является явной и неустойчивой?

$$a) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

$$б) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

$$в) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n$$

$$г) \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

3. Какой из приведенных ниже методов будет разностной схемой для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a < 0,$$

имеющей 1-ой порядок точности по пространству и являющейся абсолютно устойчивой?

$$a) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

$$б) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = f_m^{n+1}$$

$$в) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}$$

$$г) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = f_m^{n+1}$$

$$д) \frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

4. Какая из приведенных ниже разностных схем построена на основе шаблона, приведенного на рисунке 1,

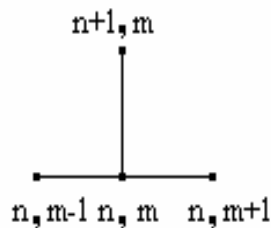


Рисунок 1

и может быть использована для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)?$$

$$a) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

$$б) \frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

$$в) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}$$

$$г) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

5. Продолжите предложение. Шаблон схемы – это...

а) количество слоев, использованных в построении разностной схемы;

б) расчетная область, покрытая разностной сеткой;

в) совокупность узлов разностной сетки, расположенных на одном слое;

г) точки разностной сетки, использованные в записи разностной схемы.

6. Какая из приведенных ниже разностных схем построена на основе шаблона, приведенного на рисунке 2,

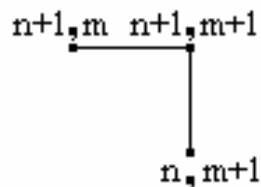


Рисунок 2

и может быть использована для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0.$$

$$а) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = f_m^n \\
 \text{в) } & \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + a_{m+1}^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = f_{m+1}^{n+1} \\
 \text{г) } & \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}
 \end{aligned}$$

7. Из шаблонов, перечисленных на рисунке 3, выберите те, на основании которых можно построить явные разностные схемы, используемые для решения и уравнения конвективного переноса, и уравнения диссипации, конвекции и кинетики.

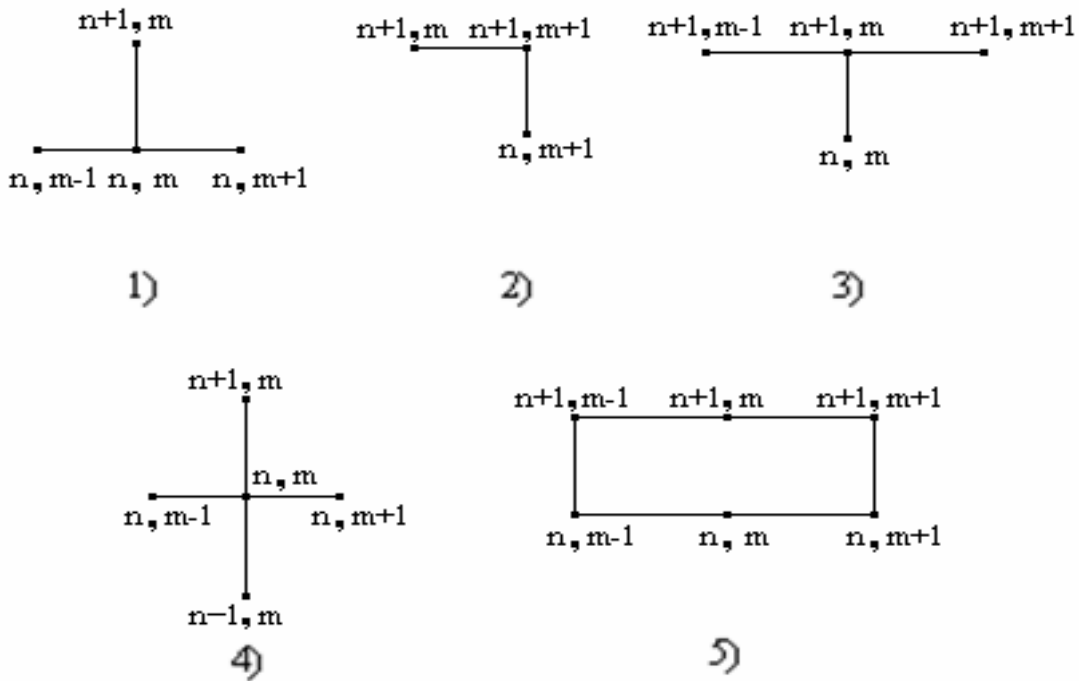


Рисунок 3

- а) 1), 2), 3), 4), 5);
- б) 1), 4);
- в) 2), 3), 5);
- г) 1), 3);
- д) 5).

8. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

используется следующая разностная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n.$$

Какими свойствами она обладает?

- а) явная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет первый порядок точности по времени;
- б) неявная, двухслойная, условно устойчивая, имеет первый порядок точности по пространству;
- в) явная, трехслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по времени;
- г) явная, двухслойная, условно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству;
- д) неявная, трехслойная, условно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству.

9. Разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

используется для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x).$$

Выберите для нее условие устойчивости.

- а) абсолютно устойчива;
- б) устойчива при $\kappa \leq 1$, где $\kappa = \frac{|a|\tau}{h}$;
- в) схема не устойчива;
- г) устойчива при $\kappa \leq 1$, где $\kappa = \frac{a\tau}{h}$, $a > 0$;

10. Разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

используется для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0.$$

Из ниже приведенных записей выберите ту, которая содержит члены, характеризующие главную часть ошибки аппроксимации данной схемы.

- а) $\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(t_n, x_m)}{\partial t^2}, a_m^n \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(t_n, x_m)}{\partial x^2};$
 б) $\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(t_n, x_m)}{\partial t^2}, a_m^n \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u(t_n, x_m)}{\partial x^3};$
 в) $\frac{\tau}{6} \frac{\partial^2 u(t_n, x_m)}{\partial t^2}, a_m^n \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 u(t_n, x_m)}{\partial x^2};$
 г) $\frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u(t_n, x_m)}{\partial t^3}, a_m^n \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u(t_n, x_m)}{\partial x^3};$
 д) $\frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u(t_n, x_m)}{\partial t^3}, a_m^n \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(t_n, x_m)}{\partial x^2};$

11. Из шаблонов, перечисленных на рисунке 4, выберите те, на основании которых можно построить неявные разностные схемы, используемые для решения уравнения конвективного переноса.

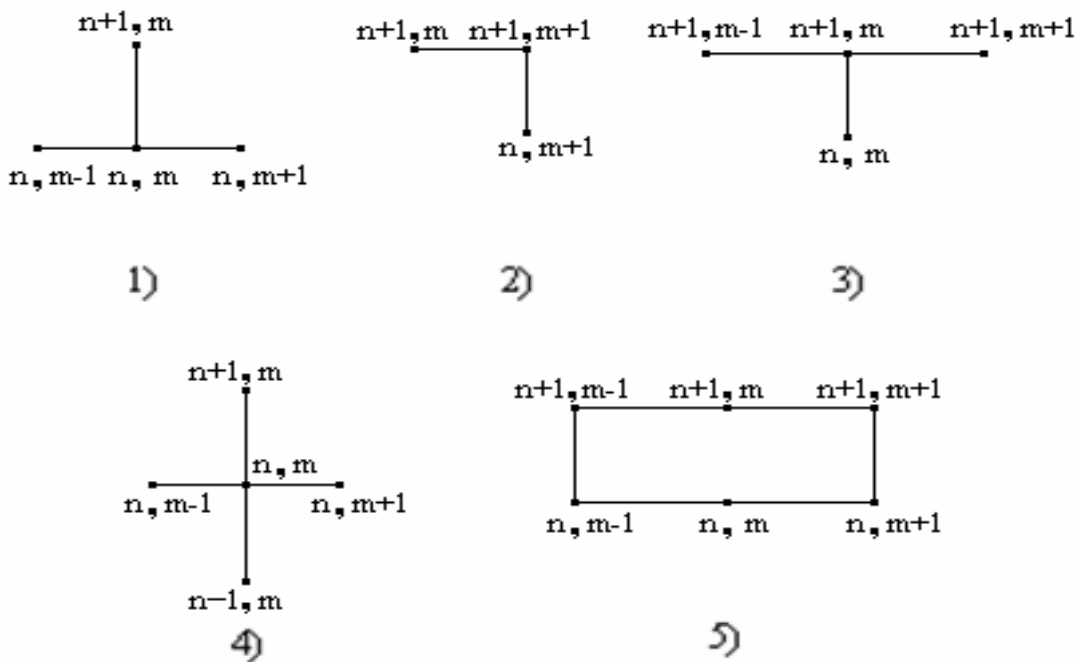


Рисунок 4

- а) 1), 2), 3) 4), 5);
- б) 1), 4);
- в) 2), 3), 5);
- г) 1), 3);
- д) 5).

12. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

используется разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n.$$

Укажите самый существенный недостаток данной схемы.

- а) $\frac{|a|\tau}{h} \leq 1$;
- б) схема неустойчивая;
- в) схема первого порядка точности по времени;
- г) для применения данной схемы необходимо использовать дополнительные сеточные граничные условия;
- д) схема имеет разные порядки точности по пространству и времени.

13. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

используется разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n.$$

Определите условия ее применимости.

- а) $\tau \leq h, \frac{|a|\tau}{h} \leq 1$;
- б) $\tau \approx h^2$;

- в) $\tau \leq h^2$;
 з) $\frac{h^2}{\tau} \rightarrow 0, \frac{|a|\tau}{h} \leq 1$;
 д) нет верного ответа.

14. Требуется решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$$

со вторым порядком точности. Какие разностные схемы могут быть использованы для решения поставленной задачи?

- 1) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$
- 2) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$
- 3) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}$
- 4) $\frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$
- 5) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + 0.5a_m^{n+1/2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) = f_m^{n+1/2}$

- а) 2), 3) 4), 5);
 б) 1), 4);
 в) 2), 3), 5);
 з) 1), 3);
 д) 2), 5).

15. Требуется решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

с первым порядком точности. Какие разностные схемы могут быть использованы для решения поставленной задачи?

$$1) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

$$2) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = f_m^{n+1}$$

$$3) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}$$

$$4) \frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

$$5) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + 0.5a_m^{n+1/2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) = f_m^{n+1/2}$$

$$6) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n$$

а) 1), 2), 3) 4), 5);

б) 1), 6);

в) 2), 3), 5);

г) 1), 2);

д) 1), 2), 6).

16. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u(t, 0) = \psi(t)$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$ с использованием разностной схемы:

$$\frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n.$$

Как получить решение на правой границе области (в точках $u_M^n, n = \overline{1, N}$)?

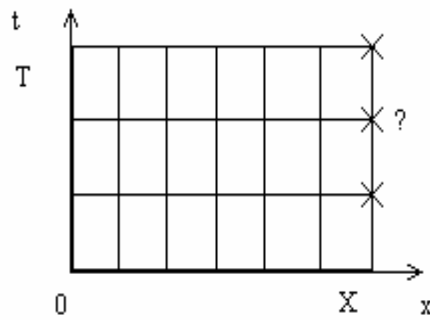


Рисунок 5

а) значения в указанных точках должны быть заданы в граничных условиях задачи;

б) привлечь для вычисления дополнительную разностную схему:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n;$$

в) привлечь для вычисления дополнительную разностную схему:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n;$$

г) использовать указанную разностную схему для $m=M$.

17. Выберите таблицу, являющуюся решением уравнения конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.5 \frac{\partial u}{\partial x} = x + 0.5t$$

$$\text{в области } G = \{0 \leq t \leq 0.1, 0 \leq x \leq 0.3\}$$

$$\text{при } u(0, x) = 1,$$

$$u(t, 0) = 1$$

с использованием явной разностной схемы «левый уголок». ($\tau, h = 0.1$)

а)

	0	0.1	0.2	0.3
0	1	1	1	1
0.1	1	1.01	1.02	1.03

б)

	0	0.1	0.2	0.3
0	1	1	1	1
0.1	1	1.015	1.025	1.035

в)

	0	0.1	0.2	0.3
0	1	1	1	1
0.1	1.015	1.025	1.035	1

г)

	0	0.1	0.2	0.3
0	1.1	1.2	1.3	1
0.1	1	1	1	1

18. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 1.6x + 0.1t$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$

при $u(0, x) = 3x^2$,

$$u(t, 0) = 0$$

с использованием явной разностной схемы «левый уголок». Найти $u(0.2, 0.8)$, при $\tau, h = 0.2$.

а) 0.172;

б) 1.758;

в) 1.92;

г) 3;

д) 2.092.

19. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 1.6x + 0.1t$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$

$$\begin{aligned} \text{при } u(0,x) &= 3x^2, \\ u(t,0) &= 0 \end{aligned}$$

с использованием разностной схемы Лакса. Найти $u(0.2,0.2)$, при $\tau = 0.1, h = 0.2$.

- а) 0;
- б) 0.25;
- в) 0.337;
- г) 0.12;
- д) 3.

20. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$1 \geq a > 0$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$

$$\text{при } u(0,x) = \varphi(x),$$

$$u(t,0) = \psi(t)$$

с использованием разностной схемы «крест», с точностью 10^{-8} . Известно, что все значения производных функции u не больше 1. Выберите возможные начальные значения τ, h , позволяющие решить поставленную задачу.

- а) $\tau \geq 10^{-1}, h \geq 10^{-1}$;
- б) $\tau \leq 10^{-3}, h = 10^{-1}$;
- в) $\tau = 10^{-4}, h \geq 10^{-3}$;
- г) $\tau = 10^{-4}, h = 10^{-4}$;
- д) $\tau = 10^{-2}, h = 10^{-4}$.

21. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a = 1$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$

$$\text{при } u(0,x) = \varphi(x),$$

$$u(t,0) = \psi(t)$$

с использованием явной разностной схемы «левый уголок». Известно, что $u''_{tt} \leq 40$, $u''_{xx} \leq 20$. Выберите возможные наибольшие значения τ, h так, чтобы ошибка аппроксимации была не больше 10^{-3} ?

- а) $\tau \leq 10^{-4}, h \leq 10^{-4}$;
- б) $\tau \leq 10^{-3}, h \leq 10^{-4}$;
- в) $\tau \leq 10^{-4}, h \leq 10^{-5}$;
- г) $\tau \leq 10^{-3}, h \leq 10^{-3}$;
- д) нет верного ответа.

22. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a < 0$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$

при $u(0, x) = \varphi(x)$,

$u(t, X) = \psi(t)$

с использованием разностной схемы Лакса. Как найти значения $u(t, 0)$?

- а) значения в указанных точках заданы в граничных условиях;
- б) с помощью явной разностной схемы «правый уголок»;
- в) с помощью явной разностной схемы «левый уголок»;
- г) с помощью разностной схемы «тренога»;
- д) в этих точках невозможно найти решение.

23. Для аппроксимации уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$

при условиях $u(0, x) = \varphi(x)$,

$u(t, 0) = \psi(t)$

используется разностная схема «крест». Из предложенных ниже вариантов выберите алгоритм численного решения поставленной задачи.

- а) 1. Вычислить $M = X/h, N = T/\tau$;
- 2. При $0 \leq m \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $n = 1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^1 = \psi(t_1)$

3.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ найти значения функции u_m^1 по разностной схеме Лакса

3.3 При $t=M$ найти значение функции u_m^1 по явной разностной схеме «левый угол»

3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^1

4. Для $1 \leq n \leq N - 1$

4.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi(t_{n+1})$

4.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ найти значения функции u_m^{n+1} по разностной схеме «крест»

4.3 При $t=M$ найти значения функции u_m^{n+1} по явной разностной схеме «левый угол»

4.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

б) 1. Вычислить $M=X/h$, $N=T/\tau$;

2. При $0 \leq t \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $n = 1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^1 = \psi(t_1)$

3.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ найти значения функции u_m^1 по разностной схеме «тренога»

3.3 При $t=M$ найти значение функции u_m^1 по явной разностной схеме «левый угол»

3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^1

4. Для $1 \leq n \leq N - 1$

4.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi(t_{n+1})$

4.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ найти значения функции u_m^{n+1} по разностной схеме «крест»

4.3 При $t=M$ найти значения функции u_m^{n+1} по явной разностной схеме «левый угол»

4.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

в) 1. Вычислить $M=X/h$, $N=T/\tau$;

2. При $0 \leq t \leq M$
 - 2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$
 - 2.2 Вывод u_m^0
 3. Для $0 \leq n \leq N - 1$
 - 3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi(t_{n+1})$
 - 3.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ найти значения функции u_m^{n+1} по разностной схеме «крест»
 - 3.3 При $t=M$ найти значения функции u_m^{n+1} по явной разностной схеме «левый уголок»
 - 3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}
- в) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;
2. При $0 \leq t \leq M$
 - 2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$
 - 2.2 Вывод u_m^0
 3. Для $n = 1$
 - 3.1 При $t=M$ найти значение функции $u_m^1 = \psi(t_1)$
 - 3.2 При $M - 1 \geq t \geq 1$ найти значения функции u_m^1 по разностной схеме Лакса
 - 3.3 При $t=0$ вычислить u_m^1 по явной разностной схеме «правый уголок»
 - 3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^1
 4. Для $1 \leq n \leq N - 1$
 - 4.1 При $t=M$ найти значения функции $u_m^{n+1} = \psi(t_{n+1})$
 - 4.2 При $M - 1 \geq t \geq 1$ найти значения функции u_m^{n+1} по разностной схеме «крест»
 - 4.3 При $t=0$ вычислить u_m^{n+1} по явной разностной схеме «правый уголок»
 - 4.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}
- д) нет верного ответа.

24. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a = 1$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$
 при $u(0, x) = \varphi(x)$,
 $u(t, 0) = \psi(t)$

Считая τ, h равными 0.01, выберите формулу для расчета u во внутренних точках области ($0 \leq n \leq T/\tau, 1 \leq m \leq X/h$) с использованием неявной разностной схемы «левый уголок».

- а) $u_m^n = 2u_m^{n+1} - 0.005f_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}$;
- б) $u_m^{n+1} = 0.005f_m^{n+1} + 0.5(u_{m-1}^{n+1} + u_m^n)$;
- в) $u_{m-1}^{n+1} = 2u_m^{n+1} - 0.005f_m^{n+1} - u_m^n$;
- г) $u_m^n = u_m^{n+1} - f_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}$;
- д) нет верного ответа.

25. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = x - t$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$
 при $u(0, x) = 0$,
 $u(t, 1) = t$.

Считая τ, h равными 0.1, вычислите $u(0.1, 0.9)$ с помощью неявной разностной схемы «правый уголок».

- а) 0;
- б) 1;
- в) 0.09;
- г) 0.1;
- д) нет верного ответа.

26. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a = -1$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$
 при $u(0, x) = \varphi(x)$,
 $u(t, X) = \psi(t)$.

Считая τ, h равными 0.1, выберите формулу для расчета u во внутренних точках области ($0 \leq n \leq T/\tau, 0 \leq m \leq X/h - 1$) с помощью неявной разностной схемы «правый уголок».

а) $u_m^{n+1} = 0.005f_m^{n+1} + 0.5(u_{m-1}^{n+1} + u_m^n);$

б) $u_{m+1}^{n+1} = -0.1f_m^{n+1} + u_m^n + 2u_m^{n+1};$

в) $u_m^{n+1} = 0.1f_m^{n+1} + 0.5u_m^{n+1} - u_m^n;$

г) $u_m^{n+1} = 0.05f_m^{n+1} + 0.5(u_{m+1}^{n+1} + u_m^n);$

д) нет верного ответа.

27. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 2tx + 0.1t^2 + 0.1$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$

при $u(0, x) = x,$

$u(t, 0) = 0.$

Используется разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}.$$

Из приведенных ниже алгоритмов выберите алгоритм ее реализации. Считать τ, h равными 0.2.

а) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$

2. При $0 \leq m \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = x_m$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N - 1$

3.1 Вычислить $u_0^{n+1} = 0$

3.2 При $1 \leq m \leq M$ решить систему уравнений вида

$$-0.05u_{m-1}^{n+1} + u_m^{n+1} + 0.05u_{m+1}^{n+1} = 0.2f_m^{n+1} + u_m^n$$

методом скалярной трехточечной прогонки

где $u_M^{n+1} = 0.9u_M^n + 0.1u_{M-1}^n + 0.2f_M^n$

3.3 При $0 \leq m \leq M$ вывод u_m^{n+1}

б) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$

2. При $0 \leq m \leq M$

- 2.1 Вычислить $u_m^0 = x_m$
- 2.2 Вывод u_m^0
3. Для $0 \leq n \leq N - 1$
- 3.1 Вычислить $u_0^{n+1} = 0$
- 3.2 При $1 \leq t \leq M$ вычислить
- $$u_m^{n+1} = 0.2f_m^{n+1} + u_m^n - 0.05(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1})$$
- 3.3 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}
- в) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$
2. При $0 \leq t \leq M$
- 2.1 Вычислить $u_m^0 = x_m$
- 2.2 Вывод u_m^0
3. Для $0 \leq n \leq N - 1$
- 3.1 Вычислить $u_0^{n+1} = 0$
- 3.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ вычислить
- $$u_m^{n+1} = 0.2f_m^{n+1} + u_m^n - 0.05(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1})$$
- 3.3 При $t=M$ вычислить $u_M^{n+1} = 0.9u_M^n + 0.1u_{M-1}^n + 0.2f_M^n$
- 3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1} ;
- г) 1. Вычислить количество точек сетки $M=X/h, N=T/\tau$
2. При $0 \leq t \leq M$
- 2.1 Вычислить $u_m^0 = x_m$
- 2.2 Вывод u_m^0
3. Для $0 \leq n \leq N - 1$
- 3.1 Вычислить $u_0^{n+1} = 0$
- 3.2 При $1 \leq t \leq M$ решить систему уравнений вида
- $$-2u_{m-1}^{n+1} + u_m^{n+1} + 2u_{m+1}^{n+1} = 0.005f_m^{n+1} - u_m^n$$
- методом скалярной трехточечной прогонки
- где $u_M^{n+1} = 0.9u_M^n + 0.1u_{M-1}^n + 0.2f_M^n$
- 3.3 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}
- д) нет верного ответа.

28. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 2tx + 0.1t^2,$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.
 при $u(0, x) = 2$,
 $u(t, 0) = 2$.

Считая τ, h равными 0.2, и используя разностную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1},$$

определите значения прогоночных коэффициентов α_0, β_0 при $t = \tau$.

- а) $\alpha_0 = -0.05, \beta_0 = 2.1021$;
- б) $\alpha_0 = 0.05, \beta_0 = -2.1021$;
- в) $\alpha_0 = 2.1168, \beta_0 = -0.05$;
- г) $\alpha_0 = -0.05, \beta_0 = 2.1168$;
- д) нет верного ответа.

29. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$.

при $u(0, x) = \varphi(x)$,

$u(t, 0) = \psi(t)$

Из предложенных ниже вариантов выберите алгоритм разностной схемы «прямоугольник», считая, что τ, h заданы (выбраны из требований заданной точности).

- а) 1. Вычислить $M = X/h, N = T/\tau$;
- 2. При $0 \leq m \leq M$
 - 2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$
 - 2.2 Вывод u_m^0
- 3. Для $0 \leq n \leq N - 1$
 - 3.1 При $t = 0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi(t_{n+1})$
 - 3.2 При $0 \leq m \leq M - 1$ вычислить

$$U_{m+1}^{n+1} = \frac{2\tau f_{m+0.5}^{n+0.5} + (1 - a\tau/h)(U_{m+1}^n - U_m^{n+1})}{1 + a\tau/h} + U_m^n$$
 - 3.3 При $0 \leq m \leq M$ вывод u_m^{n+1}
- б) 1. Вычислить $M = X/h, N = T/\tau$;
- 2. Для $0 \leq n \leq N - 1$

2.1 При $0 \leq t \leq M - 1$ вычислить

$$U_{m+1}^{n+1} = \frac{2\tau f_{m+0.5}^{n+0.5} + (1 - a\tau/h)(U_{m+1}^n - U_m^n)}{1 + a\tau/h} + U_m^n$$

2.2 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

в) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq t \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N - 1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi(t_{n+1})$

3.2 При $0 \leq t \leq M - 1$ вычислить

$$U_m^{n+1} = \frac{2\tau f_{m+0.5}^{n+0.5} + (1 + a\tau/h)(U_m^n - U_{m+1}^{n+1})}{1 - a\tau/h} + U_{m+1}^n$$

3.3 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

г) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq t \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N - 1$

3.1 При $t=M$ вычислить $u_m^{n+1} = \psi(t_{n+1})$

3.2 При $M - 1 \geq t \geq 0$ вычислить

$$U_m^{n+1} = \frac{2\tau f_{m+0.5}^{n+0.5} + (1 + a\tau/h)(U_m^n - U_{m+1}^{n+1})}{1 - a\tau/h} + U_{m+1}^n$$

3.3 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

д) нет верного ответа.

30. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

используется следующая разностная схема:

$$\frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - 0.5(u_m^n + u_{m+1}^n)}{0.5\tau} + a_{m+1/2}^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_{m+1/2}^n$$

$$\frac{u_{m-1/2}^{n+1/2} - 0.5(u_{m-1}^n + u_m^n)}{0.5\tau} + a_{m-1/2}^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_{m-1/2}^n$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1/2} \frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - u_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = f_m^{n+1/2}$$

Какими свойствами обладает данная схема?

- а) неявная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет первый порядок точности по времени и второй по пространству, одношаговая;*
- б) неявная, двухслойная, условно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и по времени, двухшаговая;*
- в) явная, трехслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по времени, двухшаговая;*
- г) явная, двухслойная, условно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и первый по времени, одношаговая;*
- д) явная, двухслойная, условно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и по времени, двухшаговая.*

31. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

используется следующая разностная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + 0.5a_m^{n+1/2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) = f_m^{n+1/2}.$$

Какими свойствами обладает данная схема?

- а) явная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет первый порядок точности по времени;*
- б) неявная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет первый порядок точности по времени и второй по пространству;*
- в) явная, трехслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по времени;*
- г) неявная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и по времени;*
- д) неявная, трехслойная, условно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству.*

32. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a < 0$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$

при $u(0, x) = \varphi(x)$,

$u(t, X) = \psi(t)$

с использованием разностной схемы:

$$\frac{u_m^{n+1} - 0.5(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n.$$

Как получить решение на левой границе области (в точках $u_0^n, n = \overline{1, N}$)?

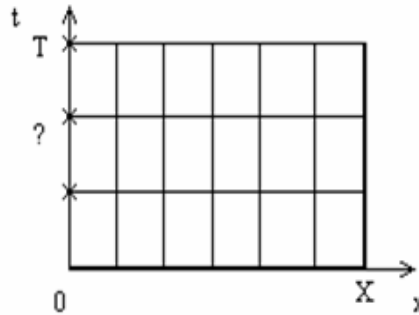


Рисунок 6

а) значения в указанных точках должны быть заданы в граничных условиях;

б) привлечь для вычисления дополнительную разностную схему:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n;$$

в) привлечь для вычисления дополнительную разностную схему:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n;$$

г) в этих точках невозможно найти решение.

33. Какая из приведенных ниже разностных схем для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a > 0$$

является неявной и абсолютно устойчивой?

$$а) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

$$б) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}$$

$$в) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + bu_m^{n+1} + f_m^{n+1}$$

$$г) \frac{3}{2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_m^n - u_{m-1}^{n-1}}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

34. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 2tx + 0.1t^2$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$

при $u(0, x) = 2,$

$u(t, 0) = 2$

используется разностная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^{n+1} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = f_m^{n+1}.$$

Для ее реализации составлена система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$-0.05u_{m-1}^{n+1} + u_m^{n+1} + 0.05u_{m+1}^{n+1} = 0.2f_m^{n+1} + u_m^n,$$

где $0 \leq n \leq 4, 1 \leq m \leq 4$

Выберите оптимальный метод решения данной СЛАУ.

а) Гаусса;

б) LU-разложение;

в) Зейделя;

г) скалярная трехточечная прогонка;

д) нет верного ответа.

35. Из перечисленных ниже названий разностных схем, аппроксимирующих уравнение конвективного переноса, выберите те, которые обладают свойством позитивности.

- а) схема Лакса, «крест»;
- б) «крест», явный «правый уголок», «тренога»;
- в) явный «правый уголок», неявный «правый уголок»;
- г) явный «левый уголок», «прямоугольник»;
- д) все существующие схемы обладают указанным свойством.

36. Для численного решения уравнения конвективного переноса используется разностная схема Лакса, укажите ν в ее первом дифференциальном приближении:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

- а) $\nu = \frac{ah}{2k}(1 - k^2)$;
- б) $\nu = \frac{ah}{2}(1 + k)$;
- в) $\nu = \frac{ah}{2}(k - 1)$;
- г) $\nu = \frac{ah}{2}(1 - k)$;
- д) $\nu = -\frac{ah}{2}(1 + k)$.

37. Из перечисленных ниже названий разностных схем, аппроксимирующих уравнение конвективного переноса, выберите те, которые обладают свойством монотонности.

- а) схема Лакса, «крест»;
- б) неявный «левый уголок», неявный «правый уголок»;
- в) «крест», неявный «левый уголок», «тренога»;
- г) явный «левый уголок», «прямоугольник»;
- д) все существующие схемы обладают указанным свойством.

38. Для численного решения уравнения конвективного переноса используется неявная разностная схема «правый уголок», укажите ν в ее первом дифференциальном приближении:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

$$a) \nu = \frac{ah}{2k}(1 - k^2);$$

$$б) \nu = \frac{ah}{2}(1 + k);$$

$$в) \nu = \frac{ah}{2}(k - 1);$$

$$г) \nu = \frac{ah}{2}(1 - k);$$

$$д) \nu = -\frac{ah}{2}(1 + k).$$

39. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$a > 0$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq 1, 1 \leq x \leq 2\}$

при $u(0, x) = 0,$

$u(t, 1) = 1.$

Из перечисленных ниже названий разностных схем, выберите те, которые позволяют решить поставленную задачу?

- а) неявный «левый уголок», явный «левый уголок»;
- б) неявный «правый уголок», явный «правый уголок»;
- в) «крест», «Лакса»;
- г) «прямоугольник», явный «левый уголок»;
- д) «Лакса», явный «правый уголок»

40. Выберите таблицу, являющуюся решением уравнения конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 0.2 \frac{\partial u}{\partial x} = x - 0.2t - 0.4$$

в области $G = \{0 \leq t \leq 0.2, 1 \leq x \leq 2\}$

при $u(0, x) = 2x,$

$u(t, 2) = 2t + 4$

с использованием явной разностной схемы «правый уголок». ($\tau = 0.2, h = 0.2$)

a)

	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
0.2	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4.4

б)

	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
0.2	2.024	2.465	2.901	3.355	3.74	4.4

в)

	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
0.2	2.032	2.472	2.912	3.352	3.792	4.4

г)

	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
0.2	2.2	2.64	3.08	3.52	3.96	4.4

д) нет верного решения.

41. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.2 \frac{\partial u}{\partial x} = x + 0.2t + 0.4$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq 1, 1 \leq x \leq 2\}$

при $u(0, x) = 2x,$

$u(t, 1) = t + 2$

с использованием неявной разностной схемы «левый уголок». Найти $u(0.4, 1.2)$ при $\tau = 0.2, h = 0.2$.

a) 0;

б) 1.12;

в) 2.88;

г) 3.454;

д) нет верного ответа.

42. Для уравнения конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = x + 0.1t + 2$$

$$\text{в области } G = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$$

была получена таблица значений искомой функции на 2 первых слоях:

	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.4	0.44	0.48	0.52	0.56	0.6
0.4	0.8					

Используя разностную схему «крест», заполните третий слой (во внутренних точках области).

a)

	0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.4	0.8	0.444	0.484	0.524	0.526

б)

	0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.4	0.8	0.81	0.82	0.83	0.84

в)

	0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.4	0.8	0.8876	0.968	1.014	1.056

г)

	0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.4	0.8	0.88	0.96	1.04	1.12

д) нет верного решения.

43. Пространственным профилем решения $u(t,x)$ называется ... при ...
Вставьте пропущенное:

- a) график функции $u(t,x)$, x - фиксированном;
- б) таблица значений функции $u(t,x)$, t - заданном;
- в) таблица значений функции $u(t,x)$, x - фиксированном;
- г) таблица значений $u'_x(t,x)$, x - фиксированном;
- д) график функции $u(t,x)$, t - фиксированном.

44. Продолжите формулировку свойства.

Если во всей области $G = \{t_0 \leq t \leq T, x_0 \leq x \leq X\}$ правая часть уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$$

неотрицательна, начальные и граничные значения также неотрицательны, то ...

а) решение искомой функции $u(t, x)$ будет монотонно возрастать в области G ;

б) искомая функция $u(t, x)$ не принимает отрицательных значений в области G ;

в) искомая функция $u(t, x)$ имеет точки разрыва в области G ;

г) то уравнение имеет единственное решение в области G .

45. Из перечисленных ниже вариантов, выберите тот, который является характеристической формой уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x).$$

а) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x) \\ \frac{\partial x}{\partial t} = a(t, x) \end{array} \right. ;$

б) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = f(t, x) \\ \frac{dx}{dx} = a(t, x) \end{array} \right. ;$

в) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x) \\ \frac{dx}{dt} = a(t, x) \end{array} \right. ;$

г) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = f(t, x) \\ \frac{dx}{dt} = a(t, x) \end{array} \right. ;$

д) нет верного ответа.

46. Из приведенных ниже записей выберите те, которые являются свойствами решения уравнения конвективного переноса.

- 1) позитивность;
- 2) монотонность;
- 3) принцип максимума;
- 4) образование и распространение особенностей во внутрь области;
- 5) стабилизация.

а) 1), 2), 3), 4), 5);

б) 1), 3), 4), 5);

в) 2), 3), 4);

г) 3), 4), 5);

д) 1), 2), 4).

47. Выписать математическую модель для задачи одномерного переноса тепла средой, движущейся со скоростью $a(t, x)$ в положительном направлении оси x .

1) $\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x);$

2) $G = \{t_0 \leq t \leq T, x_0 \leq x \leq X\};$

3) $u(t_0, x) = \varphi(x);$

4) $u(t, x_0) = \psi_1(t);$

5) $u(t, X) = \psi_2(t);$

6) $a(t, x) > 0;$

7) $a(t, x) < 0.$

а) 1), 2), 3), 4), 5);

б) 1), 6), 2), 3), 4);

в) 1), 7), 2), 3), 5);

г) 1), 6), 2), 3), 5);

д) 1), 7), 2), 3), 4).

48. Дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

которое является математической моделью процесса одномерного переноса тепла средой при пренебрежении ... и с учетом ... $f(t, x)$. Где $a(t, x)$ - ...

Вставьте пропущенное:

- а) вещества, интенсивности возможных источников или стоков, температура;
- б) вещества, диффузии, скорость;
- в) кондуктивной теплопроводностью, интенсивности возможных источников или стоков, скорость;
- г) кондуктивной теплопроводностью, диффузии, температура;
- д) нет верного ответа.

49. Уравнение конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

$$a < 0$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$.

$$\text{при } u(0, x) = \varphi(x),$$

$$u(t, X) = \psi(t)$$

Из предложенных ниже вариантов выберите алгоритм разностной схемы «прямоугольник», считая, что τ, h заданы (выбраны из требований заданной точности).

- а) 1. Вычислить $M = X/h, N = T/\tau$;
- 2. При $0 \leq m \leq M$
 - 2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$
 - 2.2 Вывод u_m^0
- 3. Для $0 \leq n \leq N - 1$
 - 3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi(t_{n+1})$
 - 3.2 При $0 \leq m \leq M - 1$ вычислить

$$U_{m+1}^{n+1} = \frac{2\tau f_{m+0.5}^{n+0.5} + (1 - a\tau/h)(U_{m+1}^n - U_m^{n+1})}{1 + a\tau/h} + U_m^n$$
 - 3.3 При $0 \leq m \leq M$ вывод u_m^{n+1}
- б) 1. Вычислить $M = X/h, N = T/\tau$;
- 2. Для $0 \leq n \leq N - 1$
 - 2.1 При $0 \leq m \leq M - 1$ вычислить

$$U_{m+1}^{n+1} = \frac{2\tau f_{m+0.5}^{n+0.5} + (1 - a\tau/h)(U_{m+1}^n - U_m^n)}{1 + a\tau/h} + U_m^n$$

2.2 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

в) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq t \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N-1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi(t_{n+1})$

3.2 При $0 \leq t \leq M-1$ вычислить

$$U_m^{n+1} = \frac{2\tau f_{m+0.5}^{n+0.5} + (1 + a\tau/h)(U_m^n - U_{m+1}^{n+1})}{1 - a\tau/h} + U_{m+1}^n$$

3.3 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

г) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq t \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N-1$

3.1 При $t=M$ вычислить $u_m^{n+1} = \psi(t_{n+1})$

3.2 При $M-1 \geq t \geq 0$ вычислить

$$U_m^{n+1} = \frac{2\tau f_{m+0.5}^{n+0.5} + (1 + a\tau/h)(U_m^n - U_{m+1}^{n+1})}{1 - a\tau/h} + U_{m+1}^n$$

3.3 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

д) нет верного ответа.

50. Дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x),$$

которое является математической моделью процесса одномерного переноса вещества средой при пренебрежении ... и с учетом ... $f(t, x)$. Где $a(t, x)$ - ...

Вставьте пропущенное:

а) диффузии, интенсивности возможных источников или стоков, температура;

б) диффузии, интенсивности возможных источников или стоков, скорость;

- в) кондуктивной теплопроводностью, интенсивности возможных источников или стоков, скорость;*
- г) кондуктивной теплопроводностью, диффузии, температура;*
- д) нет верного ответа.*

11 Численное решение модельного уравнения диссипации, конвекции и кинетики

1. Какой из приведенных ниже методов будет явной разностной схемой для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x),$$

имеющей 2-ой порядок точности по времени и пространству и являющейся абсолютно устойчивой?

- а) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$
- б) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + bu_m^n + f_m^n$
- в) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$
- г) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$
- д) *все явные разностные схемы условно устойчивы.*

2. Из приведенных ниже разностных схем для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x)$$

выберите те, которые являются явными и условно устойчивыми

- 1) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$
- 2) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + bu_m^n + f_m^n$
- 3) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$
- 4) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + bu_m^n + f_m^n$
- 5) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + bu_m^{n+1} + f_m^{n+1}$

- a) 1), 2), 3), 4), 5);
- б) 1), 4);
- в) 2), 3), 5);
- г) 1), 2);
- д) 5).

3. Из шаблонов, перечисленных на рисунке 7, выберите те, на основании которых можно построить явные разностные схемы, используемые для решения уравнения диссипации, конвекции и кинетики

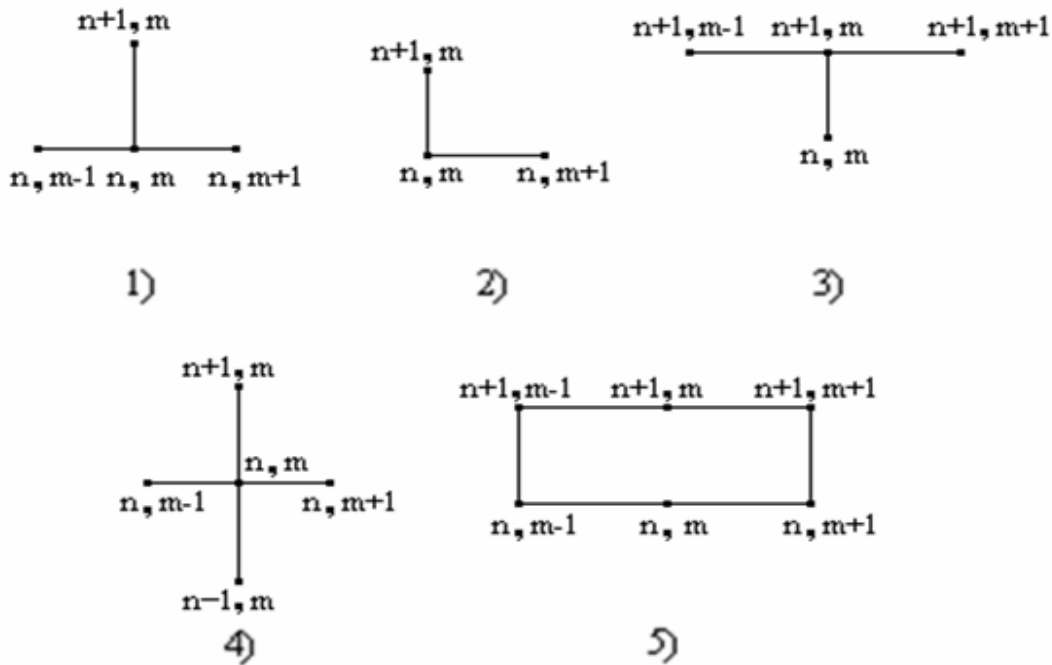


Рисунок 7

- a) 1), 2), 3), 4), 5);
- б) 1), 4);
- в) 2), 3), 5);
- г) 1), 2), 4);
- д) 5).

4. Какие из приведенных ниже разностных схем построены на основе шаблона, приведенного на рисунке 8

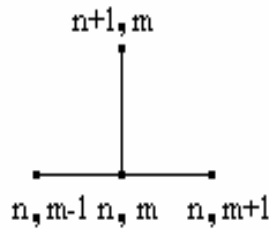


Рисунок 8

и могут быть использованы для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x)$$

$$1) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$2) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$3) \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$4) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$5) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + bu_m^{n+1} + f_m^{n+1}$$

а) 1), 2), 3), 4), 5);

б) 1), 4);

в) 1), 2), 4);

г) 1), 2);

д) 3), 5).

5. Из шаблонов, перечисленных на рисунке 9, выберите те, на основании которых можно построить разностные схемы, используемые для решения и уравнения конвективного переноса, и уравнения диссипации, конвекции и кинетики.

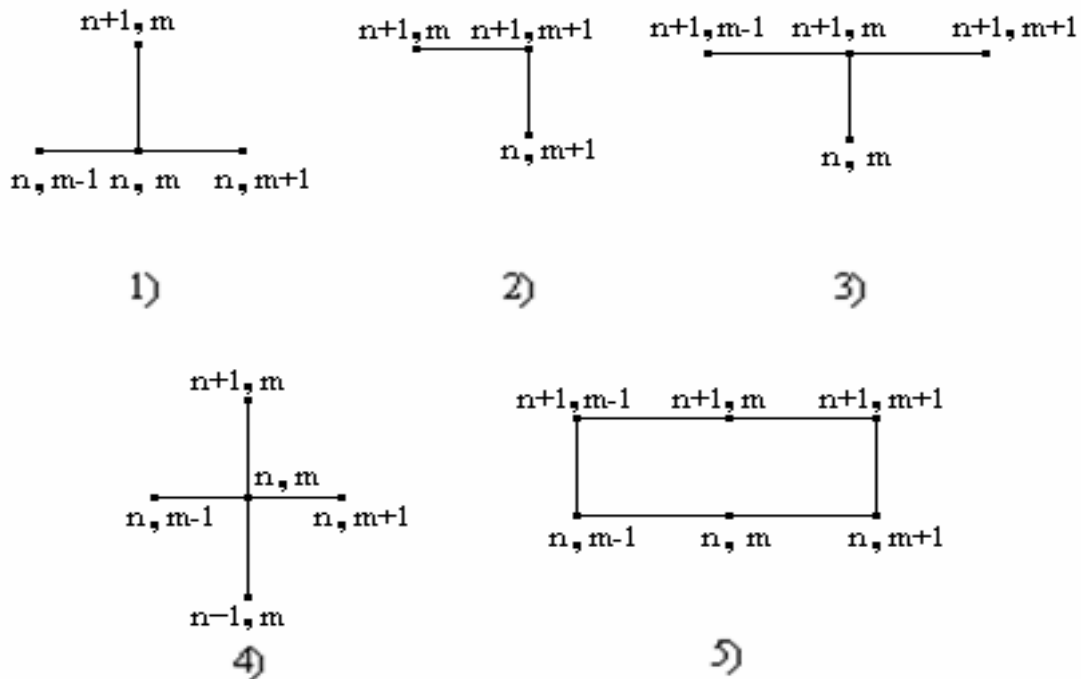


Рисунок 9

- а) 1), 2), 3), 4), 5);
 б) 1), 4);
 в) 1), 3), 4), 5);
 г) 1), 3);
 д) таких шаблонов нет.

6. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x)$$

используется следующая разностная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n.$$

Какими свойствами обладает данная схема?

- а) явная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по времени и по пространству, $\tau/h \rightarrow 0$;
 б) неявная, двухслойная, условно устойчивая, имеет первый порядок точности по пространству;
 в) явная, трехслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и по времени, $\tau/h \rightarrow 0$;

г) неявная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и по времени;

д) явная, трехслойная, устойчивая, имеет второй порядок точности по времени и первый по пространству, аппроксимирующая.

7. Какие из приведенных ниже разностных схем для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x)$$

являются абсолютно устойчивыми?

$$1) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$2) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$3) \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$4) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$5) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + bu_m^{n+1} + f_m^{n+1}$$

а) 3), 5);

б) 1), 2), 3);

в) 1), 2), 3), 4);

г) 1), 2), 3), 4), 5);

д) 5).

8. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x)$$

используется следующая разностная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = 0.5(v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}) -$$

$$0.5(a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}) + 0.5b(u_m^{n+1} + u_m^n) + f_m^{n+1/2}$$

Какими свойствами обладает данная схема?

- а) явная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет первый порядок точности по времени;
- б) неявная, двухслойная, условно устойчивая, имеет первый порядок точности по пространству;
- в) явная, трехслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и по времени;
- г) неявная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и по времени;
- д) явная, трехслойная, устойчивая, имеет второй порядок точности по времени и первый по пространству.

9. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x)$$

используется следующая разностная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n.$$

Укажите недостаток данной схемы.

- а) схема неустойчивая;
- б) схема условно устойчивая;
- в) схема условно аппроксимирующая, $\tau / h^2 \rightarrow 0$;
- г) условно устойчивая $\tau / h \rightarrow 0$;
- д) схема условно аппроксимирующая, $\tau / h \rightarrow 0$.

10. Какие из приведенных ниже разностных схем построены на основе шаблона, изображенного на рисунке 10

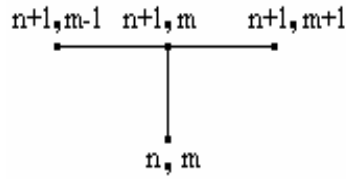


Рисунок 10

и могут быть использованы для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x),$$

$$a < 0$$

- 1) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$
- 2) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} + bu_m^{n+1} + f_m^{n+1}$
- 3) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$
- 4) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} + bu_m^{n+1} + f_m^{n+1}$
- 5) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + bu_m^{n+1} + f_m^{n+1}$

а) 1), 2), 3), 4), 5);

б) 5);

в) 2), 5);

г) 1), 2);

д) 2).

11. Из нижеприведенных записей выберите те, которые фиксируют свойства решения модельного уравнения диссипации, конвекции и кинетики.

- 1) внутренняя гладкость решения;
- 2) монотонность;
- 3) принцип максимума;

4) образование и распространение особенностей во внутрь области;

5) характеристическая форма исходного уравнения $\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, x) \\ \frac{dx}{dt} = a(t, x) \end{cases};$

6) позитивность;

7) стабилизация.

а) 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7);

б) 1), 3), 4), 5);

в) 2), 3), 4);

г) 1), 3), 6), 7);

д) 2), 5), 7).

12. Выписать математическую модель для задачи одномерного распространения тепла в ограниченной среде, при заданных значениях температур на границе.

1) $\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x), a, b, v = const, v > 0;$

2) $G = \{t_0 \leq t \leq T, x_0 \leq x \leq X\};$

3) $u(t_0, x) = \varphi(x);$

4) $u(t, x_0) = \psi_1(t), u(t, X) = \psi_2(t);$

5) $\frac{\partial u(t, x_0)}{\partial x} = \psi_1(t), \frac{\partial u(t, X)}{\partial x} = \psi_2(t);$

6) $\alpha_1 \frac{\partial u(t, x_0)}{\partial x} + \beta_1 u(t, x_0) = \psi_1(t), \alpha_2 \frac{\partial u(t, X)}{\partial x} + \beta_2 u(t, X) = \psi_2(t);$

а) 1), 2), 3), 4);

б) 1), 2), 3), 6);

в) 1), 2), 3), 5);

г) 1), 2), 3), 5), 6);

д) 1), 3), 4).

13. Дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$a, v = \text{const}, v > 0$$

$u(t, x)$ – температура.

Дайте физическую интерпретацию следующим обозначениям:

1) $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dots$
 2) $a \frac{\partial u}{\partial x} - \dots$

- а) 1) конвективный перенос,
 2) перенос тепла теплопроводностью;
 б) 1) перенос тепла теплопроводностью,
 2) конвективный перенос;
 в) 1) перенос за счет внешних источников и стоков,
 2) перенос вещества диффузией;
 г) 1) перенос вещества диффузией,
 2) источник, пропорциональный температуре.

14. Одномерный перенос тепла (или вещества) теплопроводностью (для вещества соответственно диффузией) и конвекцией описывается дифференциальным уравнением ...

а) $\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x);$
 б) $\frac{\partial u}{\partial t} = v_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(t, x, y);$
 в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(t, x, y) = 0;$
 г) $\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x};$
 д) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x).$

15. Выписать математическую модель для задачи одномерного распространения тепла в ограниченной среде, при заданных значениях тепловых потоков на границе.

$$1) \frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x), \quad a, b, v = \text{const}, \quad v > 0;$$

$$2) G = \{t_0 \leq t \leq T, \quad x_0 \leq x \leq X\};$$

$$3) u(t_0, x) = \varphi(x);$$

$$4) u(t, x_0) = \psi_1(t), \quad u(t, X) = \psi_2(t);$$

$$5) \frac{\partial u(t, x_0)}{\partial x} = \psi_1(t), \quad \frac{\partial u(t, X)}{\partial x} = \psi_2(t);$$

$$6) \alpha_1 \frac{\partial u(t, x_0)}{\partial x} + \beta_1 u(t, x_0) = \psi_1(t), \quad \alpha_2 \frac{\partial u(t, X)}{\partial x} + \beta_2 u(t, X) = \psi_2(t);$$

а) 1), 2), 3), 4);

б) 1), 2), 3), 6);

в) 1), 2), 3), 5);

г) 1), 2), 3), 5), 6);

д) 1), 3), 4).

16. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x)$$

используется следующая разностная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n.$$

Укажите самый существенный недостаток данной схемы.

а) схема неустойчивая;

б) схема условно устойчивая;

в) схема имеет разный порядок точности по пространству и времени;

г) для применения данной схемы необходимо использовать дополнительные схемы;

д) схема условно аппроксимирующая, необходимо, чтобы $\tau / h \rightarrow 0$.

17. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x)$$

используется следующая разностная схема:

$$\frac{3}{2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + bu_m^{n+1} + f_m^{n+1}$$

Какими свойствами обладает данная схема?

- а) явная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет первый порядок точности по времени;
- б) неявная, двухслойная, условно устойчивая, имеет первый порядок точности по пространству;
- в) явная, трехслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и по времени;
- г) неявная, двухслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по пространству и по времени;
- д) неявная, трехслойная, абсолютно устойчивая, имеет второй порядок точности по времени и по пространству.

18. Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x),$$

$$a, b, v = \text{const}, v > 0$$

используется следующая разностная схема:

$$\frac{\bar{u}_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{2h} + b\bar{u}_m^{n+1} + \bar{f}_m^{n+1}$$

$$\frac{\hat{u}_m^{n+1/2} - u_m^n}{\tau/2} = v \frac{\hat{u}_{m+1}^{n+1/2} - 2\hat{u}_m^{n+1/2} + \hat{u}_{m-1}^{n+1/2}}{h^2} - a \frac{\hat{u}_{m+1}^{n+1/2} - \hat{u}_{m-1}^{n+1/2}}{2h} + \dots$$

$$\frac{\hat{u}_m^{n+1} - \dots}{\tau/2} = v \frac{\hat{u}_{m+1}^{n+1} - 2\hat{u}_m^{n+1} + \hat{u}_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{\hat{u}_{m+1}^{n+1} - \hat{u}_{m-1}^{n+1}}{2h} + b\hat{u}_m^{n+1} + \hat{f}_m^{n+1}$$

$$u_m^{n+1} = 2\hat{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^{n+1}$$

Вставьте пропущенные члены разностной схемы.

- а) \bar{u}_{m+1}^{n+1} , $b\bar{u}_m^{n+1/2} + \bar{f}_m^{n+1/2}$, $\hat{u}_m^{n+1/2}$;
- б) \bar{u}_m^{n+1} , $b\hat{u}_m^n + \hat{f}_m^n$, u_m^n ;

- в) $\bar{u}_{m+1}^{-n+1}, \quad b\widehat{u}_m^{n+1/2} + \widehat{f}_m^{n+1/2}, \quad u_m^n;$
 з) $\bar{u}_m^{-n+1}, \quad u_m^n;$
 д) $\bar{u}_m^{-n+1}, \quad b\widehat{u}_m^{n+1/2} + \widehat{f}_m^{n+1/2}, \quad \widehat{u}_m^n.$

19. Какая из приведенных ниже разностных схем построена на основе шаблона, приведенного на рисунке 11,

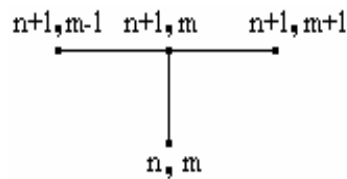


Рисунок 11

и может быть использована для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\nu > 0$$

а) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = 0.5(\nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2});$

б) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2};$

в) $\frac{3}{2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2};$

з) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2};$

д) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}.$

20. Выберите из приведенных ниже записей те, которые соответствуют разностной схеме с «весами» для уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$1) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = 0.5v \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) - 0.5a \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right);$$

$$2) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \left(s \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1-s) \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) - a \left(s \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + (1-s) \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right);$$

$$3) \frac{3}{2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h};$$

$$4) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h};$$

$$5) \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}.$$

a) 1), 2), 3), 4), 5);

б) 1), 4);

в) 1), 2), 4);

г) 1), 2);

д) 5).

21. Модельное уравнение диссипации, конвекции и кинетики

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x),$$

$$a, b, v = \text{const},$$

$$a, v > 0$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$

при $u(0, x) = \varphi(x)$,

$$u(t, 0) = \psi_1(t)$$

$$u(t, X) = \psi_2(t).$$

Из предложенных ниже вариантов выберите алгоритм неявной четырехточечной схемы, считая, что τ, h заданы (выбраны из требований заданной точности).

а) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq m \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N-1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi_1(t_{n+1})$

3.2 При $1 \leq m \leq M-1$ вычислить

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{v\tau}{h^2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) - \frac{a\tau}{2h}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + b\tau u_m^n + \tau f_m^n$$

3.3 При $t=M$ вычислить $u_M^{n+1} = \psi_2(t_{n+1})$

3.4 При $0 \leq m \leq M$ вывод u_m^{n+1}

б) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq m \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N-1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi_1(t_{n+1})$

3.2 При $t=M$ вычислить $u_M^{n+1} = \psi_2(t_{n+1})$

3.3 При $1 \leq m \leq M-1$ решить систему уравнений вида

$$\left(\frac{v}{h^2} + \frac{a}{2h}\right)u_{m-1}^{n+1} + \left(b - \frac{1}{\tau} - \frac{2v}{h^2}\right)u_m^{n+1} + \left(\frac{v}{h^2} - \frac{a}{2h}\right)u_{m+1}^{n+1} = -\frac{1}{\tau}u_m^n - f_m^{n+1}$$

методом скалярной трехточечной прогонки

3.4 При $0 \leq m \leq M$ вывод u_m^{n+1}

в) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq m \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N-1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi_1(t_{n+1})$

3.2 При $1 \leq m \leq M-1$ вычислить

$$u_m^{n+1} = \frac{\left(\frac{v}{h^2} - \frac{a}{2h}\right)}{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2v}{h^2} - b\right)} u_{m+1}^{n+1} + \frac{\left(\frac{v}{h^2} + \frac{a}{2h}\right)}{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2v}{h^2} - b\right)} u_{m-1}^{n+1} + \frac{1}{\tau\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2v}{h^2} - b\right)} u_m^n + \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2v}{h^2} - b\right)} f_m^{n+1}$$

3.3 При $t=M$ вычислить $u_M^{n+1} = u_M^n \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) + \frac{a\tau}{h} u_{M-1}^n + \tau f_M^n$

3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

г) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq t \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N-1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi_1(t_{n+1})$

3.2 При $0 \leq t \leq M-1$ вычислить

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{v\tau}{h^2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) - \frac{a\tau}{2h}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + b\tau u_m^n + \tau f_m^n$$

3.3 При $t=M$ вычислить $u_M^{n+1} = u_M^n \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) + \frac{a\tau}{h} u_{M-1}^n + \tau f_M^n$

3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

д) нет верного ответа.

22. Из приведенных ниже утверждений выберите верные:

Для решения уравнения диссипации, конвекции и кинетики...

- 1) все явные схемы являются условно устойчивыми;
- 2) все неявные схемы условно аппроксимирующие;
- 3) при значении весового параметра $s=0.5$ схема «с весами» превращается в шеститочечную схему;
- 4) все неявные схемы являются абсолютно устойчивыми;
- 5) схема Дюффорта-Франкела условно устойчивая.

а) 1), 2), 3), 4), 5);

б) 1), 2);

в) 1), 2), 4);

г) 3), 4);

д) 5).

23. Модельное уравнение диссипации, конвекции и кинетики

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x),$$

$$a, b, \nu = \text{const},$$

$$a, \nu > 0$$

решается в области $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$

при $u(0, x) = \varphi(x)$,

$$u(t, 0) = \psi_1(t)$$

$$u(t, X) = \psi_2(t).$$

Из предложенных ниже вариантов выберите алгоритм схемы Дюффорта-Франкела, считая, что τ, h заданы (выбраны из требований заданной точности).

- а) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;
 2. При $0 \leq m \leq M$
 2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$
 2.2 Вывод u_m^0
 3. Для $n = 1$
 3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^1 = \psi_1(t_1)$
 3.2 При $1 \leq m \leq M - 1$ найти значения функции u_m^1 с помощью явной четырехточечной схемы второго порядка точности по пространству и времени
 3.3 При $t=M$ найти значение функции u_m^1 по схеме явный «левый уголок»
 3.4 При $0 \leq m \leq M$ вывод u_m^1
 4. Для $1 \leq n \leq N - 1$
 4.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi_1(t_{n+1})$
 4.2 При $1 \leq m \leq M - 1$ найти значения функции u_m^{n+1} по схеме Дюффорта-Франкела
 4.3 При $t=M$ найти значения функции u_m^{n+1} по схеме явный «левый уголок»
 4.4 При $0 \leq m \leq M$ вывод u_m^{n+1}
- б) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;
 2. При $0 \leq m \leq M$
 2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$
 2.2 Вывод u_m^0
 3. Для $0 \leq n \leq N - 1$

- 3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi_1(t_{n+1})$
- 3.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ найти значения функции u_m^{n+1} по схеме Дюффорта-Франкела
- 3.3 При $t=M$ вычислить $u_M^{n+1} = \psi_2(t_{n+1})$
- 3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

в) 1. Вычислить $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq t \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $n = 1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^1 = \psi_1(t_1)$

3.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ найти значения функции u_m^1 с помощью неявной четырехточечной схемы второго порядка точности по пространству и времени

3.3 При $t=M$ вычислить $u_M^1 = \psi_2(t_1)$

3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^1

4. Для $1 \leq n \leq N - 1$

4.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi_1(t_{n+1})$

4.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ найти значения функции u_m^{n+1} по схеме Дюффорта-Франкела

4.3 При $t=M$ вычислить $u_M^{n+1} = \psi_2(t_{n+1})$

4.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

г) 1. Вычислить количество точек сетки $M=X/h, N=T/\tau$;

2. При $0 \leq t \leq M$

2.1 Вычислить $u_m^0 = \varphi(x_m)$

2.2 Вывод u_m^0

3. Для $0 \leq n \leq N - 1$

3.1 При $t=0$ вычислить $u_0^{n+1} = \psi_1(t_{n+1})$

3.2 При $1 \leq t \leq M - 1$ найти значения функции u_m^{n+1} по схеме Дюффорта-Франкела

3.3 При $t=M$ вычислить u_M^{n+1} по схеме явный «левый уголок»

3.4 При $0 \leq t \leq M$ вывод u_m^{n+1}

д) нет верного ответа.

24. Какие из приведенных ниже разностных схем построены на основе шаблона, приведенного на рисунке 12,

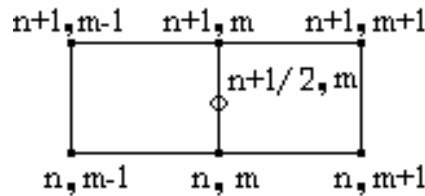


Рисунок 12

и могут быть использованы для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$1) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$2) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = 0.5(v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}) - 0.5(a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h})$$

$$3) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v(s \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1-s) \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}) - a(s \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + (1-s) \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h});$$

$$4) \frac{3}{2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h}$$

$$5) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h}$$

а) 1), 2), 3), 4), 5);

б) 2), 3), 5);

в) 1), 2), 4);

г) 2), 3);

д) 3), 4).

25. Какие из приведенных ниже разностных схем построены на основе шаблона, приведенного на рисунке 13

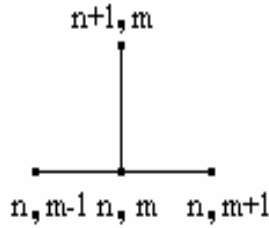


Рисунок 13

и могут быть использованы для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x),$$

$$a > 0$$

$$1) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$2) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$3) \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$4) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + bu_m^n + f_m^n$$

$$5) \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = v \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + bu_m^{n+1} + f_m^{n+1}$$

а) 1), 2), 3), 4), 5);

б) 1), 2);

в) 1), 2), 4);

г) 1), 4);

д) 3), 5).

12 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины «Численные методы»

12.1 Самарский, А.А. Численные методы математической физики: учебное пособие для вузов/ А.А.Самарский, А.В. Гулин. - М.: Научный мир, 2000. – 316 с.

12.2 Вержбицкий, В.М. Основы численных методов: учебник для вузов. / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с. с ил.

12.3 Бахвалов, Н.С. Численные методы: учеб пособие для вузов/ Н.С. Бахвалов, Н.П.Житков, Г.М. Кобельков. – 3-е изд. перераб. и доп.-М: Бином, 2003. –632 с. с ил.

12.4 Костомаров, Д.Г. Вводные лекции по численным методам: учебное пособие/ Д.Г. Костомаров, А.П. Фаворский. – М.: Логос, 2004. – 184 с.

12.5 Самарский, А.А. Введение в численные методы: учебное пособие для вузов/ А.А. Самарский. – М.: Наука, 1987. – 287 с.

12.6 Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях: учеб пособие/ Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Высш.шк., 2000. –190 с.

12.7 Самарский, А.А. Задачи и упражнения по численным методам: учебное пособие/А.А. Самарский. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 208 с.

12.8 Влацкая, И.В. Программа итоговой аттестации выпускников по специальности 010503 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем/ И.В. Влацкая, Т.П. Петухова, А.Е. Шухман. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007. – 44 с.

Приложение А

(справочное)

Перечень компетенций, формируемых в ходе изучения дисциплины «Методы вычислений»

Таблица А.1 - Перечень компетенций, формируемых в ходе изучения дисциплины «Методы вычислений»

№	Компетенции формируемые	010100.62 Математика	010200.62 Математика и компьютерные науки	010300.62 Фундаментальная информатика и информационные технологии	010400.62 Прикладная математика и информатика	010500.62 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем	Рекомендуемые формы работы, формирующие компетенции по дисциплинам: «Численные методы», «Методы вычислений», «Вычислительная математика»		Рекомендуемые педагогические технологии
							Аудиторные занятия	Самостоятельная работа	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Определение общих форм, закономерностей, инструментальных средств дисциплины «Методы вычислений»	+	+			+	ЛК ЛБ	Самоподготовка, коллоквиум	
2	Умение грамотно пользоваться языком предметной области (в области научных знаний)	+	+			+	ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуаль-	Метод проектов в команде, кейс-метод

Продолжение таблицы А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	«методы вычислений»)							ное исследо- вательское за- дание	
3	Способность передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области (научных знаний «методы вычислений») изучавшегося явления	+	+			+	ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод
4	Умение проанализировать результат и скорректировать математическую модель, лежащую в основе задачи		+				ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод

Приложение Б

(справочное)

Перечень компетенций, развиваемых в ходе изучения дисциплины «Методы вычислений»

Таблица Б.1 - Перечень компетенций, развиваемых в ходе изучения дисциплины «Методы вычислений»

№	Компетенции развиваемые	010100.62 Математика	010200.62 Математика и компьютерные науки	010300.62 Фундаментальная информатика и информационные технологии	010400.62 Прикладная математика и информатика	010500.62 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем	Рекомендуемые формы работы, развивающие компетенции по дисциплинам: «Численные методы», «Методы вычислений», «Вычислительная математика»		Рекомендуемые педагогические технологии
							Аудиторные занятия	Самостоятельная работа	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	<i>Навыки межличностных отношений; готовность работе в команде</i>	+				+		Творческое задание	Метод проектов в команде, корпоративного взаимодействия
	<i>Умение работать самостоятельно и в коллективе, руководить людьми и подчинять</i>		+						

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	<i>личные интересы общей цели</i>								
	<i>Способность работать в коллективе и использовать нормативные правовые документы в своей деятельности</i>				+				
2	<i>Способность применять знания на практике</i>	+				+	ЛБ	Творческое задание	Метод проектов в команде, корпоративного взаимодействия
	<i>Способность применять в научно-исследовательской и профессиональной деятельности базовые знания в области фундаментальной и прикладной математики и естественных наук</i>		+					или индивидуальное исследовательское задание	
3	<i>Исследовательские навыки</i>	+				+	ЛК	Творческое задание	Метод проектов в команде, корпоративного взаимодействия, портфолио
	<i>Значительные навыки самостоятельной научно-исследовательской работы</i>		+					или индивидуальное исследовательское задание	
4	<i>Фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний, готовность к использованию полученных знаний в профессиональной</i>	+					ЛК	Самоподготовка, коллоквиум	

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	<i>деятельности</i>								
	Фундаментальная подготовка в области фундаментальной математики и компьютерных наук, <i>готовность к использованию полученных знаний в профессиональной деятельности</i>		+						
5	<i>Базовые знания в различных областях</i>					+	ЛК	Самоподготовка, коллоквиум	
6	Базовые знания в областях информатики и современных информационных технологий, <i>навыки использования программных средств</i> и навыки работы в компьютерных сетях, умение создавать базы данных и использовать ресурсы Интернета	+	+				ЛБ	Самостоятельное освоение пакета прикладных программ для решения задач технических вычислений	
7	<i>Значительные навыки самостоятельной работы с компьютером, программирова-</i>		+				ЛК ЛБ	Индивидуальное исследование	Кейс-метод

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	<i>ния, использования методов обработки информации и численных методов решения базовых задач</i>							творческое задание	
8	<i>Способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования</i>			+			ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод
9	<i>Умение понять поставленную задачу</i>	+	+			+	ЛБ	Творческое задание	Метод проектов в команде
10	<i>Умение формулировать результат</i>	+	+			+	ЛБ	Творческое задание или индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, портфолио
11	<i>Умение строго доказать утверждение</i>	+	+			+	ЛБ	Самоподготовка, коллоквиум,	
12	<i>Умение на основе анализа</i>	+	+			+	ЛБ	Индивиду-	Портфолио, кейс-

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	<i>Увидеть и корректно сформулировать результат</i>							альное исследовательское задание	метод
13	<i>Умение самостоятельно увидеть следствия сформулированного результата</i>	+	+			+	ЛБ	Индивидуальное творческое задание	Портфолио
14	<i>Умение ориентироваться в постановках задач</i>	+	+			+	ЛБ	Индивидуальное творческое задание	Портфолио
15	<i>Знание корректных постановок классических задач</i>	+	+			+	ЛК	Домашнее задание, коллоквиум	
16	<i>Понимание корректности постановок задач</i>	+	+			+	ЛК ЛБ	Самоподготовка	
17	<i>Самостоятельное построение алгоритма и его анализ</i>	+	+			+	ЛБ	Индивидуальное исследовательское задание	Кейс-метод
18	<i>Умение извлекать полезную научно-техническую информацию из электронных библиотек, реферативных жур-</i>	+	+			+		Творческое задание	Метод проектов в команде, портфолио

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	<i>налов, сети Интернет; (в области научных знаний «методы вычислений»)</i>								
	<i>Способность осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников (в области научных знаний «методы вычислений»)</i>				+				
	<i>Способность осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет(в области научных знаний «методы вычислений»), способность взаимодействовать и сотрудничать с профессиональными сетевыми сообществами международными консорциумами, отслеживать динамику развития выбранных направлений области информационных технологий</i>			+					

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
19	<i>Умение публично представить собственные и известные научные результаты</i>	+	+			+		Публичная защита творческих заданий, студенческие научные семинары и конференции	
20	<i>Выделение главных смысловых аспектов в доказательствах</i>	+	+			+	ЛК	Домашнее задание	
21	<i>Способность в составе научно-исследовательского коллектива решать задачи профессиональной деятельности (в соответствии с профилем подготовки)</i>			+				Творческое задание	Метод проектов в команде
	<i>Способность в составе научно-исследовательского и производственного коллектива решать задачи профессиональной деятельности ;</i>				+				
22	<i>Способность применять на практике международные</i>			+			ЛБ	Творческое задание -	Метод проектов в команде, портфолио

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	профессиональные стандарты информационных технологий, современные парадигмы и методологии, инструментальные и <i>вычислительные средства</i> (в соответствии с профилем подготовки)							или индивидуальное исследовательское задание	
23	<i>Способность профессионально владеть базовыми математическими знаниями и информационными технологиями, эффективно применять их для решения научно-технических и прикладных задач, связанных с развитием и использованием информационных технологий (использование высокопроизводительных вычислений)</i>			+			ЛК ЛБ	Творческое задание или индивидуальное исследовательское задание с использованием высокопроизводительных вычислений	Метод проектов в команде, кейс-метод, портфолио
24	<i>Способность составлять и контролировать план выполняемой работы, планировать необходимые для выполнения работы ресурсы, оценивать результаты собственной работы</i>			+	+		ЛБ	Творческое задание	Метод проектов в команде

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	<i>Способность формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций (в области вычислительного эксперимента)</i>				+			Творческое задание или индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод, портфолио
26	<i>Способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая: разработку алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования</i>				+			Творческое задание или индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод, портфолио
27	<i>Владение методами математического и алгоритмического моделирования при решении прикладных задач</i>	+					ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод
	<i>Владение методами математического и алгоритмического моделирования при анализе и решении прикладных и инженерно-технических проблем</i>		+						

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
28	<i>Владение методом алгоритмического моделирования при анализе постановок математических задач</i>	+	+				ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод
29	<i>Владение методами математического и алгоритмического моделирования при анализе теоретических проблем и задач</i>	+					ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод
30	<i>Владение проблемно-задачной формой представления математических знаний</i>	+					ЛК ЛБ	Самоподготовка, коллоквиум	
	<i>Владение проблемно-задачной формой представления математических и естественнонаучных знаний</i>		+						
31	<i>Умение самостоятельно математически корректно ставить естественнонаучные и инженерно-физические задачи</i>	+					ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуальное исследовательское	Метод проектов в команде, кейс-метод
	<i>Умение самостоятельно ма-</i>		+						

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	<i>тематически и физически корректно ставить естественнонаучные и инженерно-физические задачи и организовывать их решение в рамках небольших коллективов</i>							задание	
32	<i>Умение увидеть прикладной аспект в решении научной задачи, грамотно представить и интерпретировать результат (в области вычислительного эксперимента)</i>		+						
33	<i>Способность профессионально решать задачи производственной и технологической деятельности с учетом современных достижений науки и техники, включая: разработку алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования; разработку математических, информационных и имитационных моделей по тематике выполняемых исследований; создание информационных</i>			+			ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	ресурсов глобальных сетей, образовательного контента, прикладных баз данных; разработку тестов и средств тестирования систем и средств на соответствие стандартам и сходным требованиям; разработку эргономичных человеко-машинных интерфейсов (в соответствии с профилизацией)								
34	Понимание концепций и абстракций, способность использовать на практике базовые математические дисциплины, включая...Вычислительные методы...			+			ЛК ЛБ	Самоподготовка, коллоквиум	
35	Способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, <i>понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой</i> и информатикой				+		ЛК ЛБ	Самоподготовка, коллоквиум	

Продолжение таблицы Б.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	<i>Способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат</i>				+		ЛК ЛБ	Творческое задание, индивидуальное исследовательское задание	Метод проектов в команде, кейс-метод
	<i>Способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат, фундаментальные концепции и системные методологии, международные профессиональные стандарты в области информационных технологий, способность использовать современные инструментальные и вычислительные средства (в соответствии с профилем подготовки)</i>			+					

Приложение В

(справочное)

Карта правильных ответов

1 Этапы вычислительного эксперимента

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ответ	г	б	в	г	б	а	в	а	г	а	в	г	в	в	г

2 Численное решение нелинейных уравнений

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	в	б	д	в	а	в	г	в	б	а	в
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ответ	г	в	в	в	а	а	в	б	б	а	б
№ вопроса	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
ответ	в	а	в	б	б	г	г	д	б		

3 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

3.1 Сведения из матричной и векторной алгебры

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ответ	г	а	в	б	а	г	в	а	б	в	б	б	г	г	б

3.2 Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	б	в	б	а	д	д	д	в	в	а	а
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ответ	а	б	в	в	а	а	д	б	в	б	в
№ вопроса	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
ответ	б	в	а	б	а	а	г	б	в	б	в
№ вопроса	34	35									
ответ	в	г									

3.3 Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	г	б	а	г	в	а	д	в	г	д	в
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ответ	а	а	а	а	в	в	д	в	а	д	д
№ вопроса	23	24									
ответ	б	г									

4 Численное решение систем нелинейных уравнений

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ответ	б	в	а	а	в	а	в	в	в	в	в	д

5 Численное решение проблемы собственных значений матриц

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	а	в	б	б	а	б	в	г	а	в	а
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19			
ответ	в	в	а	а	б	в	д	а			

6 Интерполирование и аппроксимация функций

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	б	а	в	а	в	г	б	б	а	б	в
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
ответ	б	г	б	г	б	а	а	а	б	в	

7 Численное интегрирование

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	г	а	в	в	б	в	в	г	д	в	г
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ответ	в	б	д	г	в	д	г	б	в	д	а
№ вопроса	23	24	25	26	27	28	29	30			
ответ	б	д	д	в	а	а	б	в			

8 Численное дифференцирование

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	в	а	г	а	д	б	в	а	г	в	б
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ответ	а	б	в	б	а	а	а	в	б	д	г
№ вопроса	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
ответ	д	в	а	в	д	в	б	в	г		

9 Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	в	в	г	в	б	а	г	в	а	б	а
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ответ	д	в	а	б	б	б	д	д	а	а	г
№ вопроса	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
ответ	б	в	а	в	б	а	в	а	в	б	д
№ вопроса	34										
ответ	а										

10 Численное решение уравнений конвективного переноса

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	в	б	б	б	г	в	б	г	б	а	в
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ответ	б	г	д	г	б	а	д	в	г	а	б
№ вопроса	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
ответ	а	б	в	г	а	г	а	д	г	в	б
№ вопроса	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
ответ	г	в	а	б	в	а	г	в	г	д	б
№ вопроса	45	46	47	48	49	50					
ответ	г	д	б	в	г	б					

11 Численное решение модельного уравнения диссипации, конвекции и кинетики

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ответ	в	г	б	в	в	в	а	г	д	в	г
№ вопроса	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ответ	а	б	г	в	б	д	а	д	г	б	г
№ вопроса	23	24	25								
ответ	в	г	г								