

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

*Ю.Л. Власов*

# **КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Рекомендовано Ученым советом Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям подготовки бакалавров 190600.62 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов и 140400.62 – Электроэнергетика и электротехника

Оренбург  
2011

УДК 531.18

ББК 22.21я73  
В58

Рецензент – заведующий кафедрой сопротивления материалов ГОУ ОГУ  
кандидат технических наук, доцент С.Н. Горелов

**Власов, Ю.Л.**  
В58 Колебания механических систем. Лабораторный практикум : учебное  
пособие / Ю.Л. Власов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2011. -  
165 с.  
ISBN

В учебном пособии рассмотрены основные разделы тем «Устойчивость положения равновесия механических систем» и «Малые колебания механических систем» дисциплины «Теоретическая механика». Приведены лабораторные работы на устойчивость положения равновесия и колебания механических линейных систем с одной и двумя степенями свободы.

Учебное пособие предназначено для направлений подготовки бакалавров 190600.62 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» и 140400.62 – «Электроэнергетика и электротехника» и может быть полезно аспирантам и преподавателям.

УДК 531.18  
ББК 22.21я73

ISBN

© Власов Ю.Л., 2011  
© ГОУ ОГУ, 2011

# Содержание

Введение.....	6
1 Устойчивость положения равновесия.....	8
1.1 Определение устойчивости положения равновесия.....	8
1.2 Теорема Лагранжа – Дирихле. Теоремы Ляпунова.....	13
1.3 Лабораторная работа на устойчивость положения равновесия системы.....	19
1.4 Задачи для самоконтроля.....	31
2 Общие сведения о колебаниях.....	34
3 Малые колебания системы с одной степенью свободы.....	39
3.1 Дифференциальное уравнение колебаний системы с одной степенью свободы в общем случае.....	39
3.1.1 Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы.....	40
3.1.2 Обобщенная сила для системы с одной степенью свободы.....	42
3.2 Свободные колебания консервативной системы.....	46
3.2.1 Закон свободных колебаний механической системы.....	46
3.2.2 Лабораторная работа на свободные колебания системы с одной степенью свободы .....	49
3.3 Влияние сил сопротивления на свободные колебания системы.....	58
3.3.1 Законы колебаний системы с учетом сил сопротивления.....	58
3.3.2 Лабораторная работа на колебания системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления .....	65
3.4 Вынужденные колебания системы при гармоническом возбуждении.....	70
3.4.1 Способы возмущения колебаний. Определение обобщенной силы $Q(t)$ .....	71
3.4.2 Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления.....	74
3.4.2.1 Силовое и кинематическое возбуждение.....	74
3.4.2.2 Инерционное возбуждение.....	79
3.4.3 Лабораторная работа на вынужденные колебания системы без учета сил сопротивления.....	79
3.4.4 Вынужденные колебания при наличии линейного сопротивления.....	90

3.4.5 Лабораторная работа на вынужденные колебания системы с учетом сил сопротивления .....	94
3.4.6 Переходные процессы.....	100
3.5 Вынужденные колебания в случае периодической возмущающей силы.....	100
3.6 Вынужденные колебания при произвольном возбуждении.....	102
3.7 Основы теории регистрирующих приборов.....	104
3.8 Основы виброзащиты.....	107
3.9 Задачи для самоконтроля.....	111
4 Малые колебания системы с двумя степенями свободы.....	114
4.1 Кинетическая энергия системы с двумя степенями свободы в обобщенных координатах.....	114
4.2 Потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы в обобщенных координатах.....	116
4.3 Свободные колебания системы с двумя степенями свободы.....	117
4.3.1 Дифференциальные уравнения свободных колебаний.....	117
4.3.2 Общее решение дифференциальных уравнений свободных колебаний системы с двумя степенями свободы.....	118
4.3.3 Главные координаты.....	121
4.3.4 Лабораторная работа на малые свободные колебания систем с двумя степенями свободы .....	124
4.4 Влияние линейного сопротивления на собственные колебания.....	138
4.4.1 Диссипативная функция для системы с двумя степенями свободы.....	138
4.4.2 Дифференциальные уравнения колебаний системы с учетом линейного сопротивления и их решения.....	140
4.5 Вынужденные колебания без учета сопротивления.....	143
4.5.1 Уравнения вынужденных колебаний без учета сопротивления.....	143
4.5.2 Лабораторная работа на вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы без учета сопротивления.....	145
4.6 Влияние линейного сопротивления на вынужденные колебания.....	154
4.7 Задачи для самоконтроля.....	156

5 Малые колебания системы с $n$ степенями свободы.....	159
5.1 Кинетическая энергия системы с $n$ степенями свободы.....	150
5.2 Потенциальная энергия системы с $n$ степенями свободы.....	161
5.3 Диссипативная функция Рэля для системы с $n$ степенями свободы.....	162
5.4 Дифференциальные уравнения колебаний системы с $n$ степенями свободы.....	163
Список использованных источников.....	165

## Введение

Одними из основных элементов при изучении курса теоретической механики являются самостоятельная работа студентов и выполнение лабораторных работ. Особую актуальность они приобретают в последнее время, в связи с сокращением количества лекционных и практических занятий. Поэтому возникает потребность в учебной литературе, необходимой для выполнения лабораторных работ и самостоятельного изучения студентами разделов теоретической механики.

Колебания механических систем – один из самых сложных разделов теоретической механики, поэтому настоящее учебное пособие призвано помочь студентам и бакалаврам в изучении материала по данному разделу.

С общими понятиями колебательных процессов студенты знакомятся при изучении общего курса физики. Поэтому читателю известно, что невозможно назвать какие-либо отрасли науки и техники, в которых бы отсутствовали колебательные процессы. В оптике, акустике, механике, электротехнике — всюду мы встречаемся с колебательными процессами. Работа целого ряда технологических машин, установок и инструментов основаны на использовании теории колебаний.

Однако, физическая сущность процессов, в которых имеют место колебания, различна. Например, колебания железнодорожного моста и колебания тока в электрическом контуре — совершенно различные явления. Но даже беглое знакомство с законами этих колебаний показывает много общего между ними. Детальный анализ колебательных процессов, встречающихся в физических явлениях и технических устройствах, показывает, что основные законы колебаний во всех случаях одинаковы.

Наряду с выдающимися зарубежными учеными, такими как Лагранж Ж., Пуанкаре А., Рэлей Дж., значительный вклад в развитие теории колебаний внесли российские и советские ученые: Ляпунов А.М., Мандельштам Л.И., Остроградский М.В., Жуковский И.Е., Тимошенко С.П., Бать М.И., Боголюбов А.А. и другие.

Задачей изучения колебаний механической системы является изучение с

единой точки зрения колебательных процессов, встречающихся в разнообразных физических явлениях и технических устройствах.

В первой части пособия рассмотрены вопросы устойчивого положения равновесия, вблизи которого механические системы могут совершать малые колебания.

Во второй части описаны общие сведения о колебаниях, ознакомление с которыми поможет облегчить изучение дальнейших частей данного пособия.

В третьей части изложены вопросы, касающиеся колебаний механических систем с одной степенью свободы, которые описаны подробно и занимают значительную часть учебного пособия.

В четвертой и пятой части рассмотрены более сложные колебательные процессы в механических системах с двумя и конечным числом степеней свободы, принципиально мало отличающихся от процессов в системах с одной степенью свободы.

Для изучения темы «Колебания механических систем» нужно в первую очередь глубоко усвоить теоретический материал и получить твердые навыки в решении задач. При освоении теоретического материала особое внимание следует обратить на формулировки определений и теорем; важно понять их смысл.

Важное значение имеет приобретение навыков выполнения лабораторных работ. Для этого, сначала необходимо ознакомиться с алгоритмом выполнения лабораторных работ, приведенных после теоретического изложения различных видов колебаний, а затем ознакомиться выполнить лабораторную работу по данной теме. Всего в пособии представлено 7 лабораторных работ на устойчивость положения равновесия и колебания механических систем. Для более полного закрепления полученных знаний рекомендуется самостоятельно решить задачи для самоконтроля, приведенные в конце глав и несколько аналогичных задач из сборника задач [4].

# 1 Устойчивость положения равновесия

## 1.1 Определение устойчивости положения равновесия

Под равновесием (это понятие введено в разделе «Статика» курса теоретической механики) понимаем состояние покоя тела по отношению к другим телам.

Положение равновесия механической системы может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным.

При *устойчивом* положении равновесия система после достаточно малого возмущения в виде начального отклонения и скорости совершает колебания около положения равновесия или стремится к нему.

При *неустойчивом* положении равновесия система после начального возмущения при дальнейшем движении все более удаляется от положения равновесия.

Если система, получив любое малое начальное отклонение, остается в равновесии в новом отклоненном положении, то такое положение равновесия называется *безразличным*.

На рисунке 1.1 представлены *устойчивое (а)*, *неустойчивое (б)* и *безразличное (в)* положения равновесия простейшей механической системы.

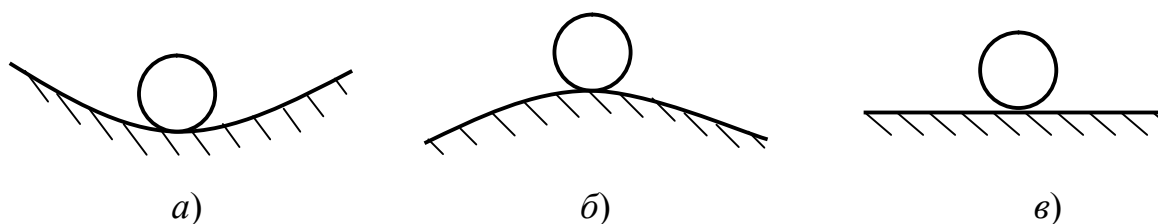


Рисунок 1.1 – Положения равновесия

Понятие устойчивого положения равновесия определим для механической системы с  $n$  степенями свободы, подчиненной идеальным, голономным и стационарным связям, положение которой определяется обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .



Приведем краткие сведения об некоторых понятиях, необходимых для усвоения материала и встречающихся в данном пособии.

*Идеальные связи* – это связи, для которых сумма элементарных работ сил реакций связей при любом возможном перемещении равна нулю [6]:

$$\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0, \quad (1.1)$$

где  $N$  – количество материальных точек системы;

$\bar{R}_k$  - вектор реакции связи, приложенной к  $k$ -ой точке;

$\delta \bar{r}_k$  - вектор возможного перемещения  $k$ -ой точки.

*Голономные связи* – это связи, выражающиеся или конечными уравнениями относительно координат, или неравенствами, или же интегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат [2]. Т.е. голономные связи накладывают ограничения на положения точек механической системы.

*Стационарные связи* – это связи, которые не зависят от времени [2].

*Обобщенные координаты* – это независимые между собой параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы механической системы и которые однозначно определяют ее положение [6].

Положение механические системы с одной степенью свободы, состоящей из одного тела, совершающего поступательное движения, определяется одной обобщенной координатой  $q = x$  (рисунок 1.2(а)), и, совершающего вращательное движение – одной обобщенной координатой  $q = \varphi$  (рисунок 1.2(б)).



Рисунок 1.2 – Механические системы с одной степенью свободы

Положение механической системы, представленной на рисунке 1.3 и имеющей одну степень свободы, определяется одной обобщенной координатой, в качестве которой можно выбрать либо  $q = x$ , или  $q = \varphi$ , так как данные параметры могут выражаться друг относительно друга по формуле:

$$x = \varphi \cdot R.$$

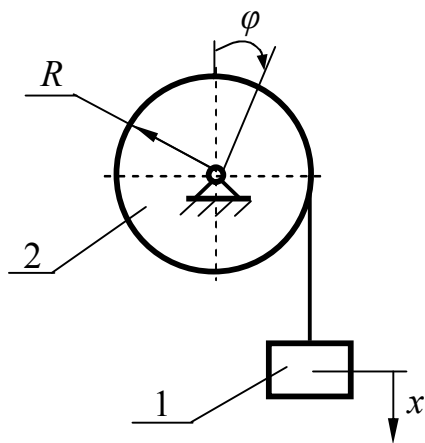


Рисунок 1.3 – Механическая система с одной степенью свободы

В случае, если тела 1 и 2 (рисунок 1.4) будут соединены пружиной, то данная система будет иметь две степени свободы. Положение механической системы, определяется двумя обобщенными координатами  $q_1 = x$  и  $q_2 = \varphi$  так как, если наложить ограничения на вращение тела 2, то тело 1 все равно будет перемещаться.

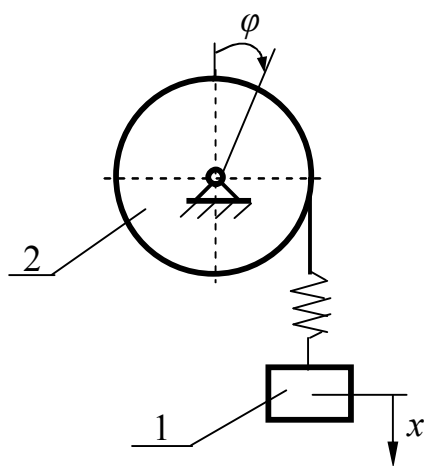


Рисунок 1.4 – Механическая система с двумя степенями свободы

На рисунке 1.5 представлена система с тремя степенями свободы, положение которой определяется тремя обобщенными координатами  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2$  и  $q_3 = \varphi$ .

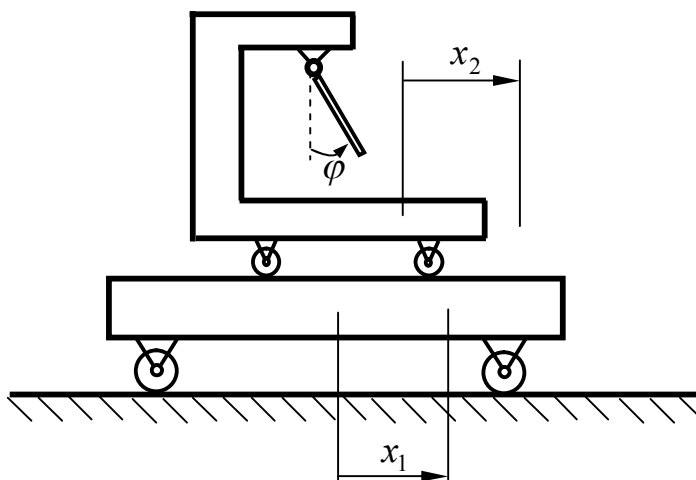


Рисунок 1.5 – Механическая система с тремя степенями свободы

В соответствии с принципом возможных перемещений в положении равновесия все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, равны нулю:

$$Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0,$$

где  $n$  – число степеней свободы.

Для консервативной системы (находящейся под действием только потенциальных сил) эти условия принимают вид:

$$Q_i = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

где  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$  - потенциальная энергия системы;

$q$  – обобщенная координата.

*Потенциальные силы* – это силы, работа которых зависит от начального и конечного положения точек системы и не зависит от траектории движения, например, силы тяжести и силы упругости.

*Потенциальной энергией* системы в рассматриваемом положении  $M$  потенциального силового поля называют сумму работ сил поля, действующих на

систему, которую эти силы совершают при перемещении системы из рассматриваемого положения в начальное [3].

Строгое определение понятия устойчивости равновесия было дано в конце XIX века А.М. Ляпуновым. Условимся отсчитывать обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  от положения равновесия, т. е. считать их в положении равновесия равными нулю. Выведем систему из положения равновесия, сообщив обобщенным координатам в начальный момент времени возмущения (отклонения  $q_i^0$  и скорости  $\dot{q}_i^0$ ). Обозначим значения обобщенных координат и их скоростей при дальнейшем движении через  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)$  соответственно.

По Ляпунову, равновесие системы является устойчивым, если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  можно выбрать два других малых положительных числа  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , что при начальных возмущениях системы, удовлетворяющих условиям

$$|q_i^0| < \eta_1, \quad |\dot{q}_i^0| < \eta_2,$$

при дальнейшем движении системы будут выполняться условие

$$|q_i(t)| < \varepsilon.$$

В противном случае равновесие является неустойчивым.

В соответствии с данным определением безразличное положение равновесия является неустойчивым, поскольку при наличии начальной скорости система будет удаляться от начального положения.

Если при устойчивом положении равновесия все обобщенные координаты и их скорости с течением времени стремятся к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = 0,$$

то рассматриваемое положение равновесия называется асимптотически устойчивым.

## 1.2 Теорема Лагранжа – Дирихле. Теоремы Ляпунова

Вышесказанному ранее определению устойчивого положения равновесия можно дать еще такую формулировку. Представим систему, состоящую из материальных точек  $M_1, M_2, \dots, M_N$  и находящуюся в равновесии под действием приложенных к ней сил. Обозначим положения равновесия точек через  $A_1, A_2, \dots, A_N$  и опишем из этих точек, как из центров, сферические поверхности малого радиуса  $\rho$  (рисунок 1.6).

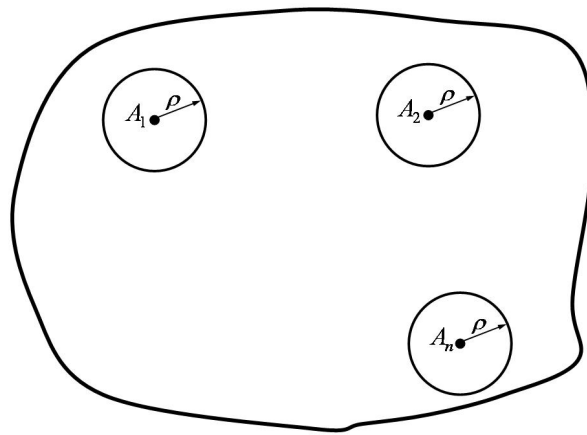


Рисунок 1.6 – Устойчивое положение равновесия системы

Дадим точкам системы незначительные отклонения от их положений равновесия, а также сообщим им незначительные начальные скорости. Данное положение равновесия будет называться устойчивым, если при достаточно малых начальных отклонениях и начальных скоростях движение системы таково, что каждая точка системы во все время движения остается внутри сферы, окружающей ее положение равновесия, как бы мала не была принятая величина радиуса  $\rho$ .

Если механическая система, с голономными, стационарными и идеальными связями, находится в консервативном силовом поле, то устойчивость положения равновесия системы определяется согласно *теореме Лагранжа-Дирихле*: *достаточным условием устойчивости положения равновесия консервативной системы является наличие в ней локального (изолированного) минимума потенциальной энергии.*

Математическая запись этой теоремы будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i^2} > 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.3)$$

Положим, что в положении равновесия  $A_1, A_2, \dots, A_N$  потенциальная энергия системы достигает минимума. Это значит, что потенциальная энергия системы в этом положении, которое обозначим  $\Pi_{\min}$ , меньше, чем во всяком соседнем положении. Рассмотрим значения, которые получает потенциальная энергия, когда, по крайней мере, одна из точек  $M_k$  находится на поверхности сферы радиуса  $\rho$ , окружающей соответствующую точку  $A_k$ . Все эти значения больше, чем  $\Pi_{\min}$ . Возьмем наименьшее из них и обозначим его  $\Pi_{\min} + \varepsilon$ . Величина  $\varepsilon > 0$  и тем меньше, чем меньше взятая величина  $\rho$ . Таким образом, если хотя бы одна точка  $M_k$  находится на поверхности соответствующей сферы радиуса  $\rho$ , то потенциальная энергия системы  $\Pi$  должна удовлетворять условию

$$\Pi \geq \Pi_{\min} + \varepsilon.$$

Дадим точкам нашей системы незначительные начальные отклонения от их положений равновесия  $A_1, A_2, \dots, A_N$  и сообщим им малые начальные скорости.

Если принятые нами начальные отклонения точек системы меньше величины  $\rho$ , то в начальный момент каждая точка будет находиться внутри сферы, окружающей ее положение равновесия.

Докажем, что при достаточно малых начальных отклонениях и начальных скоростях точки системы, во все время последующего движения, не выйдут за пределы соответствующих сфер, как бы мала ни была величина  $\rho$ . На основании этого достаточно доказать, что во все время движения, потенциальная энергия системы будет оставаться меньше, чем  $\Pi_{\min} + \varepsilon$ .

Обозначим значения кинетической и потенциальной энергии системы в некоторый момент движения через  $T$  и  $\Pi$ , соответственно, их значения в начальный момент движения – через  $T_0$  и  $\Pi_0$ . По закону сохранения энергии имеем:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0. \quad (1.4)$$

Так как  $T \geq 0$ , то потенциальная энергия системы, во все время движения, удовлетворяет неравенству:

$$\Pi \leq T_0 + \Pi_0.$$

Примем начальные отклонения настолько малыми, чтобы выполнялось условие

$$\Pi_0 < \Pi_{\min} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Примем начальные скорости настолько малыми, чтобы выполнялось условие

$$T_0 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда во все время движения будем иметь:

$$\Pi < \Pi_{\min} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

или

$$\Pi < \Pi_{\min} + \varepsilon.$$

Однако, в тот момент, когда хотя бы одна из точек системы достигает поверхности соответствующей ей сферы, должно быть

$$\Pi \geq \Pi_{\min} + \varepsilon.$$

Как видно, такого момента не может быть. Значит, во все время движения точки системы будут оставаться внутри соответствующих сфер, окружающих их положения равновесия. Причем радиус  $\rho$  этих сфер может быть сколь угодно малым.

Устойчивость положения равновесия системы этим доказана.

Пусть потенциальная энергия  $\Pi$  рассматриваемой механической системы зависит от обобщенной координаты  $q$  как показано на рисунке 1.7. Положение равновесия будет устойчивым при значении  $q_3$  и  $q_5$ , так как только в этих положениях потенциальная энергия системы имеет строгий минимум.

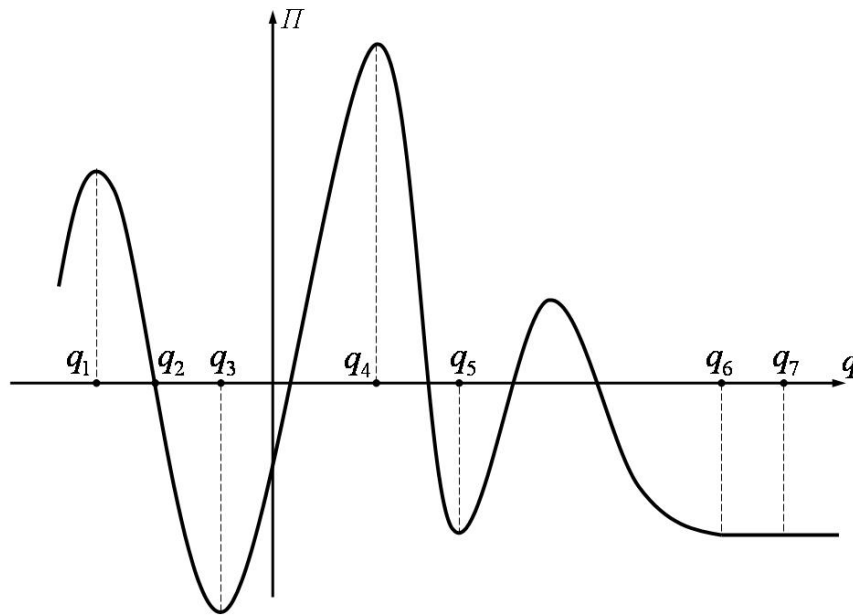


Рисунок 1.7 – Зависимость потенциальной энергии от обобщенной координаты

Если в положении равновесия значение потенциальной энергии не является минимальным, то для суждения об устойчивости равновесия следует применить теоремы Ляпунова, которые формулируются следующим образом [1]:

1 Равновесие системы неустойчиво, если отсутствие минимума потенциальной энергии может быть определено по членам второго порядка в разложении потенциальной энергии, без рассмотрения членов высших порядков.

2 Равновесие системы неустойчиво, если потенциальная энергия системы имеет в положении равновесия максимум и наличие максимума определяется членами наименьшего порядка малости в разложении потенциальной энергии в ряд по степеням обобщенных координат.

Пусть потенциальная энергия есть функция нескольких обобщенных координат  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . В общем виде разложим потенциальную энергию в ряд Макларена по степеням обобщенных координат, в окрестности положения равновесия при  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ , до членов второго порядка малости:

$$\Pi = \Pi(0) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 \cdot q_i + \frac{1}{2} \sum_{k,j} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_j} \right)_0 q_k q_j + \dots$$



При этом

-  $\Pi(0) = 0$  - принимаем за нулевой уровень;

-  $Q_i = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 = 0$  - условия равновесия системы.

Тогда потенциальная энергия системы примет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k,j} c_{kj} q_k q_j,$$

где  $c_{kj} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_j} \right)$  - квазиупругие коэффициенты [1], причем  $c_{kj} = c_{jk}$ .

Квадратичная функция для потенциальной энергии будет иметь вид:

- для системы с одной степенью свободы

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} q^2; \quad (1.5)$$

- для системы с двумя степенями свободы

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} \cdot q_1 q_2 + c_{22} \cdot q_2^2). \quad (1.6)$$

Единица измерения квазиупругого коэффициента  $c$  определяется единицей измерения обобщенной координаты  $q$ : если  $q$  — в  $m$ , то  $c$  — в  $H/m$ , если  $q$  — в  $rad$ , то  $c$  — в  $H \cdot m$ .

Квадратичная форма потенциальной энергии  $\Pi$  определено положительна, т.е. вблизи положения равновесия потенциальная энергия системы будет положительной. Также при  $q_1 = q_2 = \dots q_n = 0$ ,  $\Pi(0) = 0$ , то в этом положении будет строгий минимум и положение равновесия – устойчиво.

Составим из квазиупругих коэффициентов матрицу

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.7)$$

Чтобы квадратичная форма потенциальной энергии  $\Pi$  определено положительна, должен выполнят *критерий Сильвестра*: все главные диагональные миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  матрицы (1.7) квазиупругих коэффициентов квадратичной формы потенциальной энергии были положительны.

Критерий Сильвестра имеет вид [2]:

- для системы с одной степенью свободы

$$\Delta_1 = c_{11} > 0; \quad (1.8)$$

- для системы с двумя степенями свободы

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad (1.9)$$

- для системы с  $n$  степенями свободы

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (1.10)$$

Поскольку всегда можно изменить нумерацию обобщенных координат и любую из них сделать первой, то все элементы матрицы (1.10), стоящие на главной диагонали, должны быть строго больше нуля:

$$c_{ii} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Однако в реальной механической системе всегда существуют силы сопротивления движению, возникающие благодаря трению или вязкости среды. Такие силы названы Кельвином диссипативными (см. п. 3.3 и 4.4.1).

При наличии в системе диссипативных сил для оценки устойчивости положения равновесия можно дополнительно воспользоваться тремя теоремами Кельвина.

*Теорема 1.* Если положение равновесия консервативной системы устойчиво при одних только потенциальных силах, то оно будет оставаться устойчивым и при

добавлении диссипативных сил.

*Теорема 2.* Устойчивое положение равновесия становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией\*.

*Теорема 3.* Изолированное и неустойчивое при одних потенциальных силах положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами.

Первые две теоремы Кельвина указывают на то, что диссипативные силы не могут нарушить устойчивость положения равновесия, а третья — что они не в состоянии трансформировать неустойчивое положение равновесия консервативной системы в устойчивое. Следовательно, для оценки устойчивости положения равновесия реальную колебательную систему с диссипативными силами можно заменить ее консервативной моделью.

Отметим, что наличие в механической системе хотя бы одного упругого (деформируемого) тела автоматически превращает ее в систему с бесконечным числом степеней свободы, поскольку у таких тел каждая материальная частица имеет возможность двигаться относительно других материальных частиц и, следовательно, ее движение должно описываться своими обобщенными координатами, а таких частиц бесконечное множество. Для того чтобы механическая система имела конечное число степеней свободы, в частности одну, необходимо, с одной стороны, все инерционные элементы системы считать абсолютно твердыми, а с другой — все упругие элементы (пружины) безынерционными, т. е. считать их массы пренебрежимо малыми по сравнению с массами твердых тел.

### **1.3 Лабораторная работа на устойчивость положения равновесия системы**

Цель лабораторных работ:

- формирование у студентов положительной мотивации профессиональной деятельности, связанной с проектированием лабораторных занятий с применением ЭВМ;

Задачи лабораторных работ:

- содействие становлению коммуникативной компетентности студентов в условиях групповой деятельности по анализу и разработке цифровых материалов учебного назначения и проектов лабораторных занятий с использованием ресурсов и инструментов виртуальной среды;

- изучение содержания и методики организации лабораторного эксперимента с использованием средств ЭВМ на примере лабораторной работы «Определение частот и форм главных свободных колебаний систем».

При выполнении лабораторного эксперимента на основе инструктивных материалов для студентов происходит отработка следующих умений:

- анализ работы компьютерных моделей опыта по соответствующему обобщенному плану; планирование и выполнение модельных виртуальных экспериментов по исследованию свободных колебаний механической системы;

- формулирование выводов на основе результатов работы с интерактивными моделями опыта;

- использование средств ЭВМ при подготовке и выполнении лабораторного задания.

Работа выполняется с использованием пакета математических программ Mathcad 14.

При выполнении лабораторной работы на устойчивость равновесия системы с одной степенью свободы, находящейся под действием потенциальных сил, рекомендуется следующий порядок действий:

- 1 Выделить тело или систему тел, равновесие которых подлежит рассмотрению, и выбрать обобщенные координаты, задание которых определяет положение системы;

- 2 Составить выражение потенциальной энергии системы;

- 3 Вычислить производные от потенциальной энергии системы по обобщенным координатам и приравняв их к нулю (1.2) и найти возможные положения равновесия системы. Если система имеет одну степень свободы, то необходимо определить производную от потенциальной энергии системы по выбранной одной

обобщенной координате;

4 Вычислить значение вторых производных от потенциальной энергии системы по обобщенной координате для каждого из возможных положений равновесия. Найти знаки этой производной и по ним судить об устойчивости равновесия системы. При выполнении условия (1.3) положение равновесия будет являться устойчивым.

**Лабораторная работа №1 (вариант 1).** Однородный призматический брус квадратного сечения, стороны которого равны  $a$ , опирается своими боковыми гранями на параллельные ребра двух опор, лежащие в одной горизонтальной плоскости на расстоянии  $b$  друг от друга, причем  $b < a\sqrt{2}$  (рисунок 1.8). Масса бруса  $m$ . Грани бруса идеально гладкие.

Найти положения равновесия бруса и определить условия устойчивости положений равновесия.

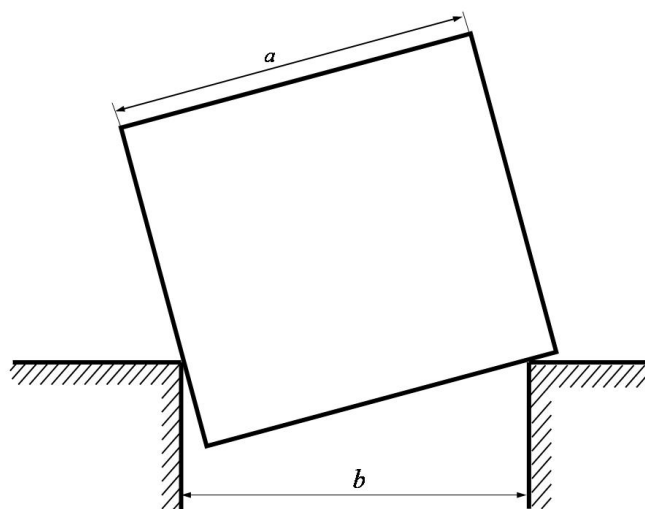


Рисунок 1.8 - Однородный призматический брус

Рассмотрим равновесие бруса, находящегося в консервативном силовом поле тяжести. Брус имеет одну степень свободы. За обобщенную координату, определяющую положение бруса, принимаем угол  $\varphi$  (рисунок 1.9), образованный диагональю вертикального поперечного сечения бруса с вертикалью, проходящей через центр масс  $C$ .



Из треугольника  $СЕН$  можно выразить зависимости между углами  $\varphi$  и  $\beta$ :

$$2(\varphi + \beta) = \frac{\pi}{2},$$

или

$$2\beta = \frac{\pi}{2} - 2\varphi.$$

Выражение (1.12) примет вид

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos \varphi - \frac{b}{2} \sin \left( \frac{\pi}{2} - 2\varphi \right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos \varphi - \frac{b}{2} \cos 2\varphi,$$

а формула (1.11) запишется в виде

$$\Pi = mg \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos \varphi - \frac{b}{2} \cos 2\varphi \right).$$

Находим производную от  $\Pi$  по углу  $\varphi$  и приравниваем ее к нулю

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0; \quad mg \left( -\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sin \varphi + b \sin 2\varphi \right) = 0.$$

Получаем

$$\left( -\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b \cos \varphi \right) \sin \varphi = 0.$$

Из этого уравнения следует, что возможны два положения равновесия:

1  $\sin \varphi_1 = 0$  или  $\varphi_1 = 0$ .

2  $-\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b \cos \varphi_2 = 0$  или  $\cos \varphi_2 = \frac{a}{2\sqrt{2} \cdot b}$ . Это положение равновесия

возможно, если

$$\frac{a}{2} \leq b\sqrt{2}. \quad (1.13)$$

Для решения вопроса об устойчивости положений равновесия следует найти вторую производную от потенциальной энергии по углу  $\varphi$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mg \left( -\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos \varphi + 2b \cos 2\varphi \right), \quad (1.14)$$

и знак этой производной для каждого из возможных положений равновесия.

В первом положении  $\varphi_1 = 0$ . Подставим это значение в выражение (1.14):

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = mg \left( -\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b \right).$$

Следовательно, по теореме Лагранжа-Дирихле, это положение равновесия устойчиво, если

$$-\frac{a}{\sqrt{2}} + 2b > 0,$$

или

$$b > \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Во втором положении равновесия  $\cos \varphi_2 = \frac{a}{2\sqrt{2} \cdot b}$ . Подставим это значение в уравнение (1.14), учитывая, что  $\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1$ , получим

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_2} = mg \left( \frac{a^2}{4b} - 2b \right).$$

Но, согласно (1.13)

$$\frac{a^2}{4} \leq 2b^2.$$

Следовательно

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_2} \leq 0,$$

т.е. положение равновесия во втором случае не будет являться устойчивым.

Таким образом, брус будет находиться в положении устойчивого равновесия только при  $\varphi = 0$  (рисунок 1.10).



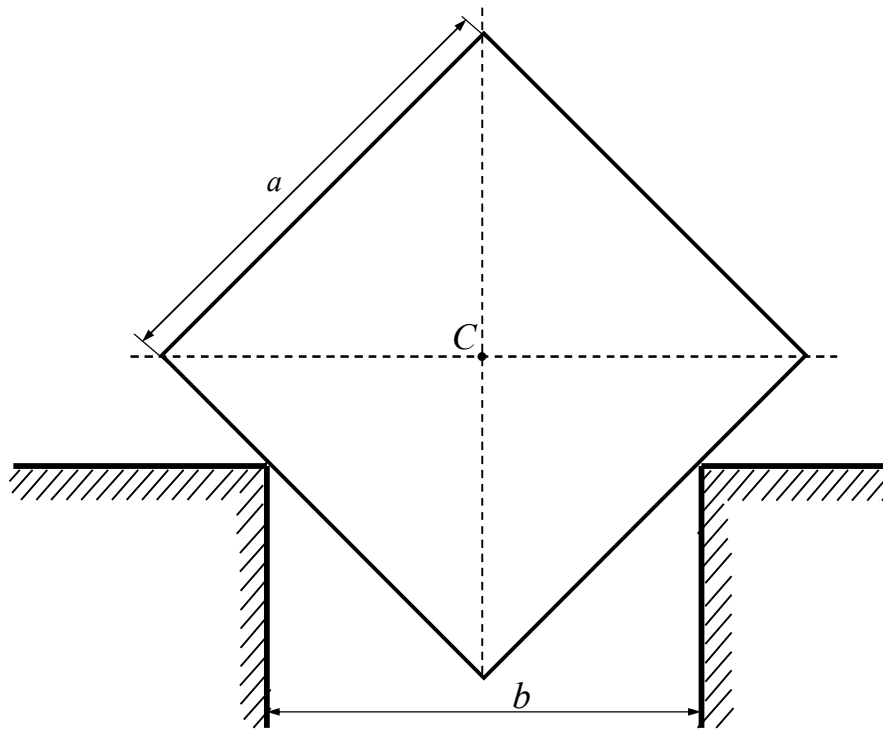


Рисунок 1.10 – Устойчивое положение равновесия бруса

**Лабораторная работа №1 (вариант 2).** Однородный стержень 1 (рисунок 1.11) массой  $m$  и длины  $2a$  шарнирно закреплен в точке  $O$ , а в точке  $A$  опирается на стержень 2 массой  $m$  и длиной  $2a$ , которой укреплен в середине шарниром  $O_1$ . В точке  $B$  к стержню 2 подвешен груз 3 массой  $2m$ . Расстояние  $OO_1 = a$ . Найти положения равновесия и устойчивость равновесия системы.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату, определяющую положение системы, примем угол  $\varphi$ , образованный стержнем 1 с вертикалью (рисунок 1.12).

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальных энергий элементов системы в поле силы тяжести:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3, \quad (1.15)$$

где  $\Pi_1$  - потенциальная энергия стержня 1 в поле силы тяжести;

$\Pi_2$  - потенциальная энергия стержня 2 в поле силы тяжести;

$\Pi_3$  - потенциальная энергия груза 3 в поле силы тяжести.

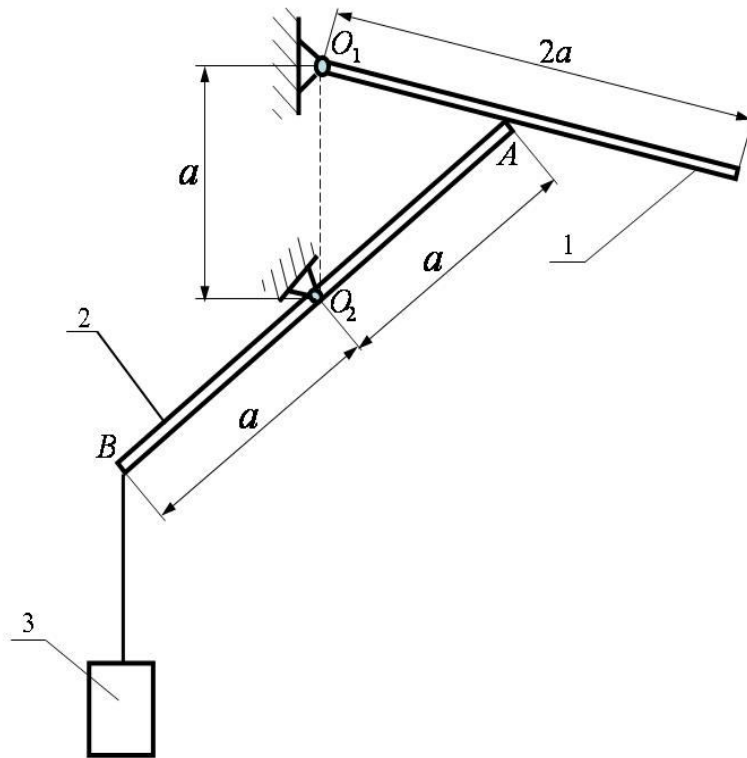


Рисунок 1.11 – Система, состоящая из двух стержней и груза

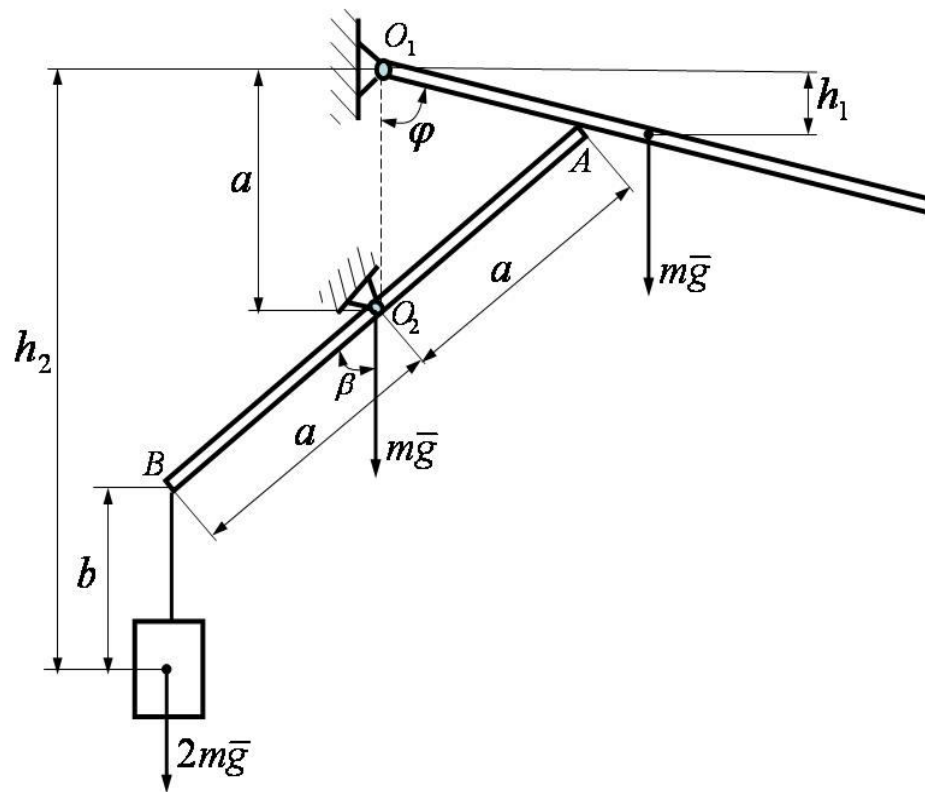


Рисунок 1.12 – Положение равновесия системы

Потенциальная энергия стержня 1:

$$\Pi_1 = mgh_1 = -mga \cdot \cos \varphi. \quad (1.16)$$

Потенциальная энергия  $\Pi_2 = 0$ , так как сила тяжести приложена в неподвижной точке  $O_2$ .

Потенциальная энергия груза 3:

$$\Pi_3 = 2mgh_2 = -2mg(a + a \cdot \cos \beta + b). \quad (1.17)$$

Из треугольника  $AO_1O_2$

$$\angle \beta = \angle AO_2O_1 = 180 - 2\varphi. \quad (1.18)$$

Подставив (1.16) и (1.17), с учетом (1.18) в выражение (1.15), получим

$$\Pi = -mga \cdot \cos \varphi - 2mg(a + a \cdot \cos(180 - 2\varphi) + b),$$

или

$$\Pi = -mga \cdot \cos \varphi - 2mg(a - a \cdot \cos 2\varphi + b).$$

Для определения возможных положений равновесия находим производную от потенциальной энергии по углу  $\varphi$  и приравниваем ее к нулю

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0; \quad mga \cdot \sin \varphi - 4mga \cdot \sin 2\varphi = 0.$$

Учитывая, что  $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi$ , получаем

$$mga \cdot \sin \varphi - 8mga \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0,$$

или

$$mga \cdot \sin \varphi \cdot (1 - 8 \cos \varphi) = 0.$$

Из этого уравнения следует, что возможны два положения равновесия:

1  $\sin \varphi_1 = 0$  или  $\varphi_1 = 0$ .

2  $\cos \varphi_2 = \frac{1}{8}$  или  $\varphi_2 = \arccos \frac{1}{8}$ .

Для определения устойчивости каждого положения равновесия находим

вторую производную от потенциальной энергии по обобщенной координате  $\varphi$ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mga \cdot \cos \varphi - 8mga \cdot \cos 2\varphi.$$

Учитывая, что  $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ , получаем

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mga \cdot (\cos \varphi - 8\cos^2 \varphi + 8\sin^2 \varphi). \quad (1.19)$$

В первом положении  $\varphi_1 = 0$ . Подставим это значение в выражение (1.19):

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = -7mga < 0.$$

Согласно (1.3), это положение равновесия не является устойчивым.

Во втором положении равновесия  $\varphi_2 = \arccos \frac{1}{8}$  получаем

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\arccos \frac{1}{8}} = mga \cdot \left[ \frac{1}{8} - 8 \frac{1}{64} + 8 \left( 1 - \frac{1}{64} \right) \right] = \frac{63}{8} mga > 0.$$

Второе положение равновесия устойчиво.

**Лабораторная работа №1 (вариант 3).** Однородный стержень  $OA$  (рисунок 1.13) массой  $m_1$  и длиной  $a$  закреплен шарнирно в точке  $O$ . Другой конец этого стержня соединен шарнирно с другим однородным стержнем  $AB$  массой  $m_2$  и длиной  $b$ . К точке  $B$  второго стержня приложена горизонтальная сила  $F$ . Найти углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  стержней с вертикалью при равновесии системы.

Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты, определяющие положение системы, примем углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальных энергий стержней в поле силы тяжести и потенциальной энергии силы  $F$ :

$$\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_F, \quad (1.20)$$

где  $\Pi_{mg}$  - потенциальная энергия стержней в поле сил тяжести;

$\Pi_F$  - потенциальная энергия силы  $F$ .

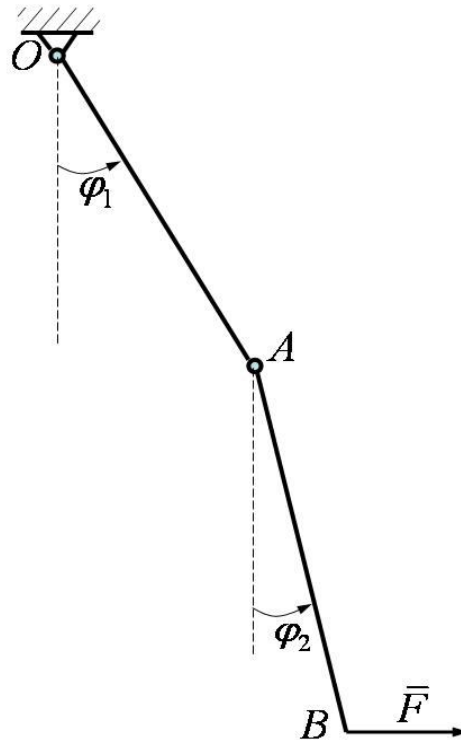


Рисунок 1.13 – Положение системы, состоящей из двух стержней

Потенциальная энергия стержней в поле сил тяжести (рисунок 1.14):

$$\Pi_{mg} = \Pi_{m_1g} + \Pi_{m_2g}, \quad (1.21)$$

где  $\Pi_{m_1g} = m_1gh_1$ ;

$\Pi_{m_2g} = m_2gh_2$ .

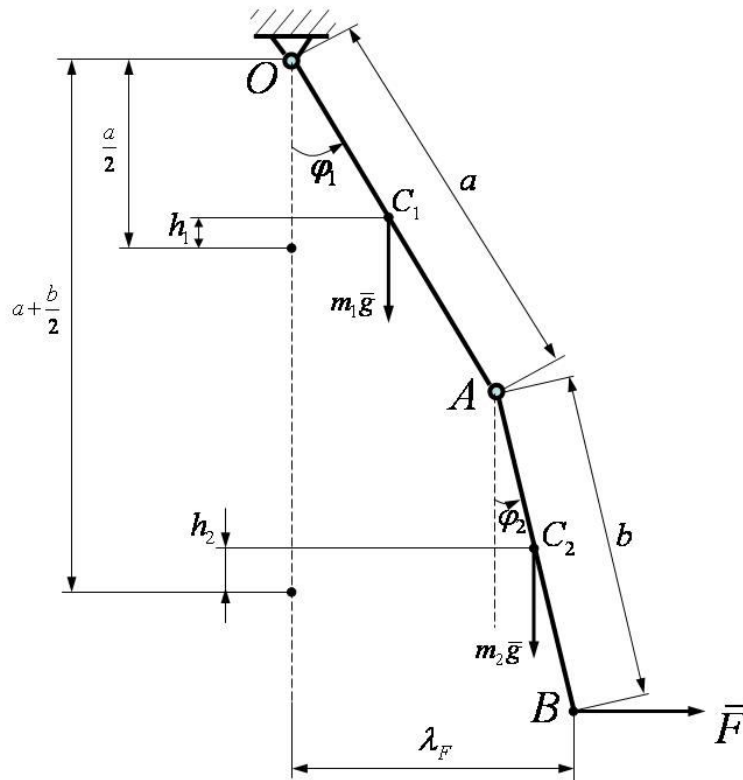
Определим вертикальные перемещения центров масс стержней:

$$h_1 = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos \varphi_1,$$

$$h_2 = (a - a \cos \varphi_1) + \left( \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \cos \varphi_2 \right).$$

Потенциальная энергия  $\Pi_{mg}$  в соответствии с формулой (1.21) примет вид

$$\Pi_{mg} = m_1g \left( \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos \varphi_1 \right) + m_2g \left[ (a - a \cos \varphi_1) + \left( \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \cos \varphi_2 \right) \right].$$



$C_1$  и  $C_2$  - центры масс стержней  $OA$  и  $AB$ , соответственно.

Рисунок 1.14 – Положение равновесия системы

Потенциальная энергия силы  $F$

$$\Pi_F = -F \cdot \lambda_F,$$

где  $\lambda_F$  - горизонтальное перемещение точки  $B$ , определяемое по формуле

$$\lambda_F = a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2.$$

Таким образом,

$$\Pi_F = -F(a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2).$$

Потенциальная энергия системы, в соответствии с формулой (1.20) примет вид:

$$\Pi = m_1 g \left( \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos \varphi_1 \right) + m_2 g \left[ \left( a - a \cos \varphi_1 \right) + \left( \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \cos \varphi_2 \right) \right] - F(a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2).$$

Для определения возможных положений равновесия находим производные от

потенциальной энергии по углам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , и приравниваем их к нулю

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = 0; \quad m_1 g \frac{a}{2} \sin \varphi_1 + m_2 g a \sin \varphi_1 - F a \cos \varphi_1 = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = 0; \quad m_2 g \frac{b}{2} \sin \varphi_2 - F b \cos \varphi_2 = 0. \quad (1.23)$$

Разделив уравнение (1.22) на  $\cos \varphi_1$ , а уравнение (1.23) на  $\cos \varphi_2$ , получим

$$m_1 g \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varphi_1 + m_2 g a \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - F a = 0,$$

$$m_2 g \frac{b}{2} \operatorname{tg} \varphi_2 - F b = 0.$$

Тогда

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2F}{(m_1 + 2m_2)g},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{2F}{m_2 g}.$$

#### 1.4 Задачи для самоконтроля

1 При каком значении обобщенной координаты  $q$ , механическая система будет находиться в равновесии, если потенциальная энергия системы изменяется по закону  $\Pi = 4q^2 - 16q + 4$ .

2 Потенциальная энергия механической системы изменяется по закону  $\Pi = 3q^2 - 9q + 4$ . При каком значении обобщенной координаты система будет находиться в равновесии: а)  $q = 1$  м; б)  $q = 1,5$  м; в)  $q = 2$  м; г)  $q = 2,5$  м; д)  $q = 3$  м.

3 Механическая система изменяется по закону  $\Pi = 3q^2 - 9q + 4$ , и в положении равновесия  $\Pi = 3$ . Чему равно значение обобщенной координаты в положении равновесия системы?

4 Какие механические системы, показанные на рисунке 1.15, находятся в положении устойчивого равновесия.

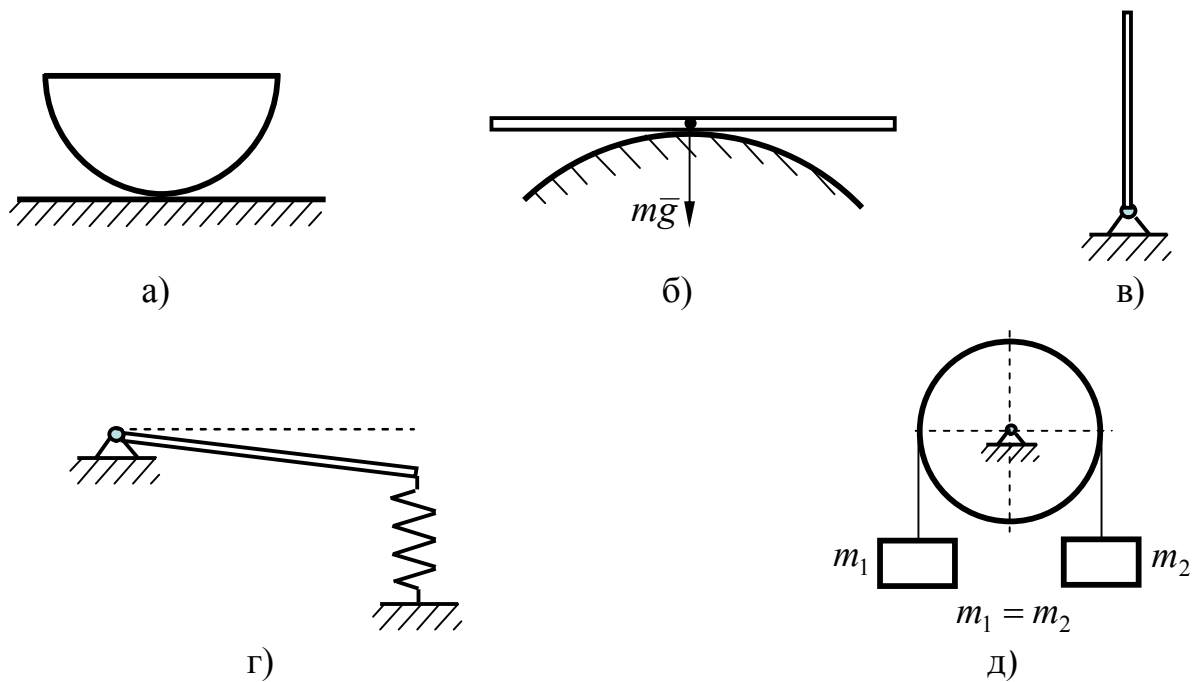


Рисунок 1.15 – Равновесие механических систем

5 Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии системы в поле силы тяжести  $\Pi_1 = -10\varphi^2$  и потенциальной энергии деформированной пружины  $\Pi_2 = \frac{c\varphi^2}{2}$ . При каком значении  $c$ , положение равновесия системы будет устойчивым.

6 Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии системы в поле силы тяжести  $\Pi_1 = -a\varphi^2$  и потенциальной энергии деформированной пружины  $\Pi_2 = c\varphi^2$ . При каком соотношении коэффициентов  $a$  и  $c$ , положение равновесия системы будет устойчивым.

7 Механическая система находится в положении равновесия при значении обобщенной координаты  $q = 3$ . Функция, определяющая потенциальную энергию системы, будет иметь вид: а)  $\Pi = 11q^2 - 6q + 15$ ; б)  $\Pi = q^2 - q + 1$ ; в)  $\Pi = 2q^2 - 4q + 110$ ; г)  $\Pi = 3q^2 - 9q + 27$ .

8 Механическая система имеет устойчивое положение равновесия при значении обобщенной координаты  $q = 5$ . В положении равновесия значение потенциальной энергии равно  $\Pi = 4$ . Функция, определяющая потенциальную энергию системы,



будет иметь вид: а)  $\Pi = q^2 - 8q + 5$ ; б)  $\Pi = 3q^2 - 30q + 40$ ; в)  $\Pi = 2q^2 - 5q + 15$ ; г)  $\Pi = q^2 - 10q + 29$ .

9 При каком значении силы  $F$  однородный стержень  $OA$  длины  $l = 1$  м и массы  $m = 1$  кг (рисунке 1.16), отклоненный от вертикали на угол  $\varphi_0 = 0,01$  рад, будет находиться в положении устойчивого равновесия? Жесткость пружины  $c = 100$  Н/м.

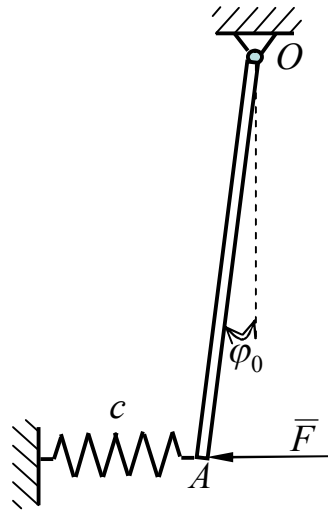


Рисунок 1.16 – Равновесие стержня

## 2 Общие сведения о колебаниях

*Колебательным* называется процесс, сопровождающийся многократным чередованием возрастания и убывания некоторых физических величин. При рассмотрении колебаний механических систем этой величиной является обобщенная координата.

Колебательное движение механической системы около положения равновесия осуществляется только в том случае, когда равновесное положение системы устойчиво.

Все колебательные процессы можно классифицировать по *кинематическим* признакам, т. е. по характеру закона изменения во времени некоторой величины, участвующей в процессе (рисунок 2.1).

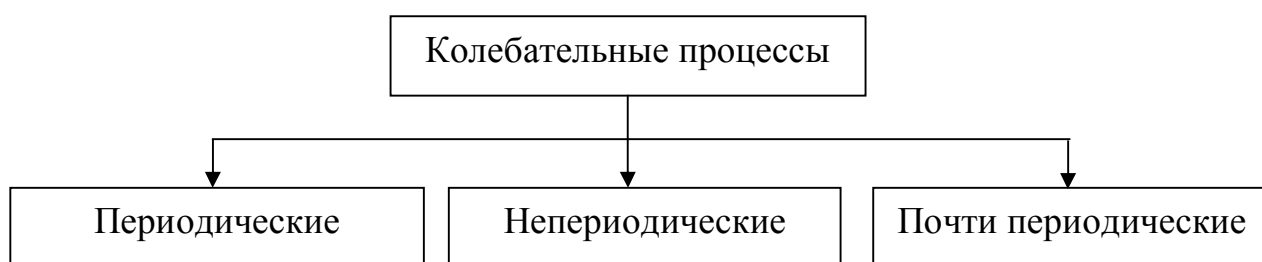


Рисунок 2.1 – Классификация колебательных процессов

Прежде всего, все встречающиеся на практике колебательные процессы разделяют на периодические и непериодические. Кроме того, существенное значение имеют промежуточные *почти периодические процессы*.

*Периодическим* называется такой процесс, при котором обобщенная координата, взятая в любой момент времени, через определенный отрезок времени  $T$  имеет то же самое значение. Математическое определение периодической функции таково: функция  $f(t)$  называется периодической с периодом  $T$ , если существует такая постоянная величина  $T$ , для которой

$$f(t+T) = f(t)$$

при любом значении переменной  $t$ .

*Непериодическими* называются все остальные функции, не удовлетворяющие сформулированному условию периодичности.

Почти периодическая функция обладает следующим свойством:

$$f(t+\tau) - f(t) \leq \varepsilon$$

при любом  $t$ , где  $\tau$  и  $\varepsilon$  – постоянные величины.

Если значение  $\varepsilon$  очень мало по сравнению со средним значением модуля функции  $f(t)$  за время  $\tau$ , то можно считать, что почти периодическая функция на некотором участке практически близка к периодической.

Например, функция

$$f(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$$

почти периодическая. Если приближенно полагать  $\sqrt{2} = 1,41$ , то на ограниченном участке времени  $t$  функцию  $f(t)$  можно рассматривать как периодическую с периодом, равным  $10\pi$ .

Среди периодических огромную роль играют гармонические колебания, при которых изменение физической величины со временем происходит по закону синуса или косинуса.

Непериодические колебания гораздо разнообразнее периодических. Из них отметим лишь «затухающую (нарастающую) синусоиду» и лимитационные движения.

Колебания по закону «затухающей синусоиды» или, как их иногда называют, затухающие гармонические колебания (рисунок 2.2), математически описываются уравнением

$$y = Ae^{-\varepsilon t} \sin(\omega t + a),$$

где  $A$ ,  $\varepsilon$ ,  $\omega$ ,  $a$  – постоянные величины;

$t$  – время.

*Нарастающие гармонические колебания* (рисунок 2.3) и математическое уравнение этих колебаний отличается от затухающих гармонических колебаний только знаком величины  $\varepsilon$ .

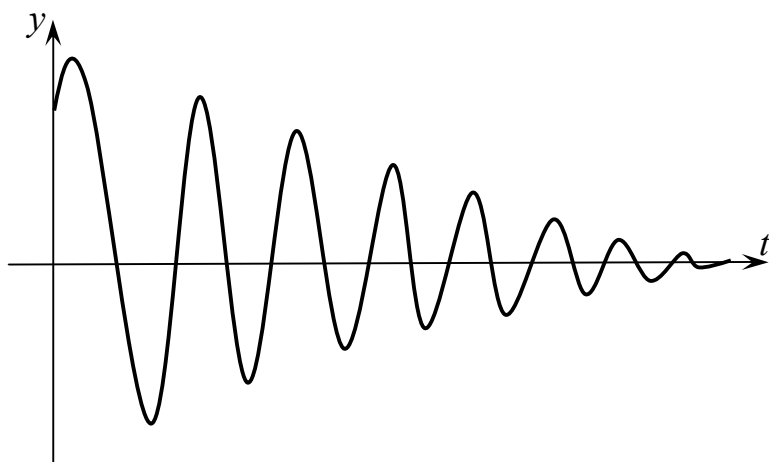


Рисунок 2.2 – Затухающие гармонические колебания

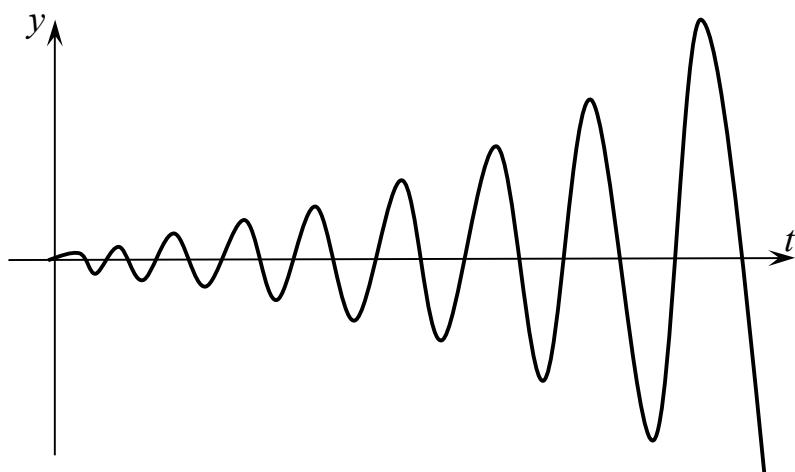


Рисунок 2.3 – Нарастающие гармонические колебания

Характерные примеры лимитационных движений показаны на рисунке 2.4.

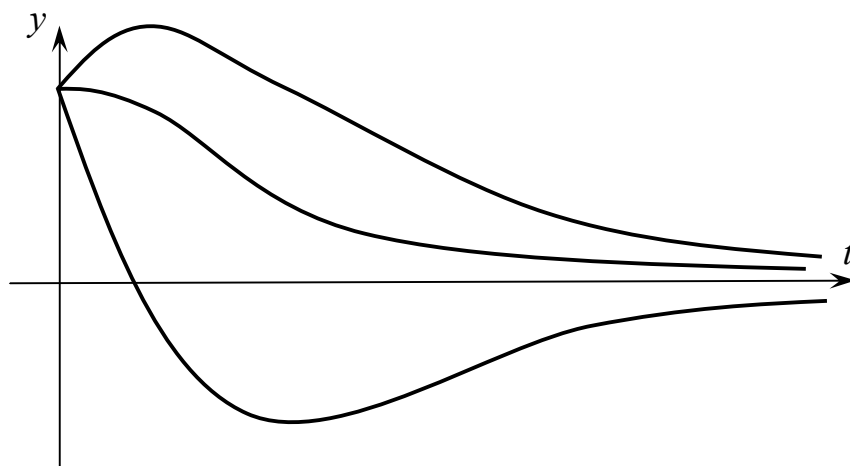


Рисунок 2.4 – Лимитационные движения

Переменная величина здесь изменяет знак не более одного раза и с течением времени стремится к некоторому постоянному значению. Математически лимитационные движения могут быть описаны, например, уравнением вида

$$y = (Ae^{-\varepsilon t} + Be^{\varepsilon t})e^{-\lambda t},$$

где  $A, B, \varepsilon, \lambda$  – действительные числа, причем  $\lambda > \varepsilon$ .

Перечисленные чисто внешние признаки колебательных процессов совершенно недостаточны для их изучения. Поэтому принято классифицировать колебательные процессы по ряду признаков.

1 По числу учитываемых в расчетной схеме степеней свободы различают:

- а) колебания в системах с одной степенью свободы;
- б) колебания в системах с конечным числом степеней свободы;
- в) колебания в системах с распределенными параметрами (с бесконечным числом степеней свободы).

2 По типу колебательного процесса выделяют:

- а) свободные колебания;
- б) вынужденные колебания;
- в) параметрические колебания;
- г) автоколебания.

*Свободные колебания* происходят в изолированной системе после внешнего возмущения. Характер колебательного процесса в основном определяется только внутренними силами системы, зависящими от физического строения системы. Необходимая энергия поступает извне в начальный момент возбуждения колебаний.

*Вынужденные колебания* происходят под действием заданных внешних переменных сил, которые действуют независимо от колебаний в системе. Характер колебаний определяется не только свойствами системы, но и существенно зависит от внешней силы. Необходимая для колебаний энергия обеспечивается источником внешних сил.

*Параметрические колебания* отличаются от вынужденных характером внешнего воздействия. При вынужденных колебаниях извне задана сила или какая-

либо величина, совершающая колебания, а параметры самой системы остаются при этом постоянными. Параметрические колебания вызываются периодическим изменением извне какого-либо физического параметра системы (например, массы, жесткости).

*Автоколебания* возникают в системе в отсутствие внешнего периодического воздействия. Характер колебаний определяется исключительно устройством системы. Источник энергии, компенсирующий потери энергии вследствие выделения теплоты при колебаниях, обычно составляет неотъемлемую часть колебательной системы.

Все типы колебательных процессов исследованы для систем с одной степенью свободы; для систем с конечным числом степеней свободы и систем с распределенными параметрами рассмотрены только свободные и вынужденные колебания.

3 По типу дифференциальных уравнений, описывающих колебательный процесс, различают:

а) линейные колебания, когда движение описывается линейными дифференциальными уравнениями;

б) нелинейные колебания, для описания движения в которых используются нелинейные дифференциальные уравнения.

Анализ последних усложняется отсутствием регулярных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений. Вместе с тем для решения многих технических задач оказывается возможным в этих уравнениях отбрасывать квадраты и более высокие степени обобщенных координат и скоростей. Такая операция называется *линеаризацией уравнений*. Линеаризованные уравнения не могут в точности отобразить движение системы и дают несколько искаженную картину явления. Причем, искажения тем менее существенны, чем меньше отброшенные члены уравнений по сравнению с оставшимися. Если значения обобщенных координат и скоростей во все время движения остаются малыми, то их квадратами и более высокими степенями можно пренебречь. Поэтому, в дальнейшем, все учебное пособие посвящено рассмотрению линейных малых колебательных процессов, составляющих фундаментальную основу теории колебаний.

### 3 Малые колебания системы с одной степенью свободы

#### 3.1 Дифференциальное уравнение колебаний системы с одной степенью свободы в общем случае

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $N$  материальных точек и имеющую одну степень свободы, на которую наложены голономные стационарные неосвобождающие связи. Предположим, что система имеет устойчивое положение равновесия, от которого будем отсчитывать обобщенную координату  $q$ .

В общем случае сила, действующая на  $k$ -ую точку системы, может быть функцией положения точки  $\bar{r}_k$ , ее скорости  $\bar{v}_k$  и времени  $t$ :

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k(\bar{r}_k, \bar{v}_k, t).$$

С учетом малости колебаний  $\bar{F}_k$  можно представить в виде

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k^\Pi(\bar{r}_k) + \bar{F}_k^R(\bar{v}_k) + \bar{F}_k^B(t), \quad (3.1)$$

где  $\bar{F}_k^\Pi(\bar{r}_k)$  - потенциальные силы.

$\bar{F}_k^R(\bar{v}_k)$  - диссипативные силы, которые уменьшают полную механическую энергию, и линейно зависят от скорости:

$$\bar{F}_k^R(\bar{v}_k) = -h_k \bar{v}_k, \quad (3.2)$$

$h_k$  - коэффициент сопротивления  $k$ -ой точки;

$\bar{F}_k^B(t)$  - вынуждающие силы.

Для составления дифференциального уравнения колебаний системы с одной степенью свободы воспользуемся уравнением Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q, \quad (3.3)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;

$\Pi$  – потенциальная энергия системы;

$q$  – обобщенная координата;

$\dot{q}$  - обобщенная скорость;

$Q$  – обобщенная сила.

### 3.1.1 Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы

Напомним, как вычисляется кинетическая энергия точки и твердого тела при различных движениях.

Кинетическая энергия точки:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела, совершающего поступательное движение:

$$T = \frac{Mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где  $J_z$  - момент инерции тела относительно оси вращения  $z$ ;

$\omega$  - угловая скорость тела.

Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_{Cz} \omega^2}{2},$$

где  $v_C$  - скорость центра масс тела;

$J_{Cz}$  - момент инерции тела относительно оси центральной оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения.

Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетических энергий точек системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k^2. \quad (3.4)$$

В силу стационарности наложенных на систему связей  $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q)$ , тогда

$$v_k^2 = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d\bar{r}_k}{dq} \dot{q}, \quad (3.5)$$



и, следовательно, кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left( \frac{d\bar{r}_k}{dq} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} A(q) \cdot \dot{q}^2, \quad (3.6)$$

где  $A(q)$ , также как и  $\bar{r}_k$ , в общем случае является функцией обобщенной координаты  $q$ .

Разложим  $A(q)$  в степенной ряд в окрестности положения равновесия ( $q=0$ ):

$$A(q) = A(0) + \left( \frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 \cdot q + \left( \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \right)_0 \cdot \frac{q^2}{2} + \dots \quad (3.7)$$

Здесь и далее индексом «0» отмечены величины, вычисленные в положении равновесия.

В силу малости колебаний в выражении (3.6) нужно учитывать величины не выше второго порядка малости, а в (3.6) уже содержится квадрат обобщенной скорости  $\dot{q}^2$  — величина второго порядка малости. Поэтому в разложении (3.7) удерживаем только первый член, который обозначаем

$$A(0) = a.$$

Величину  $a$  называют коэффициентом инерции [3], которая характеризует инертность механической системы. Его единица измерения определяется единицей измерения обобщенной координаты: если  $q$  — в м, то  $a$  — в кг, если  $q$  — в рад, то  $a$  — в кг·м<sup>2</sup>. Окончательно имеем

$$T = \frac{1}{2} a \cdot \dot{q}^2. \quad (3.8)$$

В силу допущения о малости колебаний, кинетическая энергия системы является функцией только обобщенной скорости, а, следовательно, в уравнении Лагранжа II рода составляющая  $\frac{\partial T}{\partial q}$  тождественно равна нулю. Поскольку кинетическая энергия — величина существенно положительная, коэффициент инерции может быть только положительным ( $a > 0$ ).

### 3.1.2 Обобщенная сила для системы с одной степенью свободы

В силу (3.1) обобщенную силу  $Q$  представим в виде

$$Q = Q^{\Pi} + Q^R + Q^B, \quad (3.9)$$

где  $Q^{\Pi}$  - составляющая обобщенной силы от потенциальных сил;

$Q^R$  - составляющая обобщенной силы от диссипативных сил;

$Q^B$  - составляющая обобщенной силы от вынуждающих сил, зависящих от времени и действующих извне.

Составляющая обобщенной силы от потенциальных сил

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad (3.10)$$

где  $\Pi$  - потенциальная энергия системы относительно положения равновесия.

На стр. 11 приведено определение потенциальной энергии системы. В данном пособии за начальное положение принимаем положение устойчивого равновесия, а потенциальными силами являются силы тяжести тел, входящих в систему, и силы упругости пружин, поэтому потенциальная энергия системы

$$\Pi = \sum_{i=1}^p m_i g (h_i - h_{0i}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m c_j (\lambda_j^2 - \lambda_{0j}^2),$$

где  $h_i, h_{0i}$  - высота центра тяжести  $i$ -го тела в произвольном и нулевом положениях, соответственно;

$c_j$  - жесткость  $j$ -ой пружины;

$\lambda_j, \lambda_{0j}$  - деформация  $j$ -ой пружины в произвольном и начальном положениях;

$p$  - число тел, входящих в систему;

$m$  - число пружин.

Для системы с одной степенью свободы потенциальная энергия будет иметь вид в соответствии с (1.5), т.е.

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} c q^2, \quad (3.11)$$

где  $c = c_{11}$  - квазиупругий коэффициент.

В соответствии с критерием Сильвестра, выполняется условие (1.8):

$$c > 0. \quad (3.12)$$

Составляющая обобщенных сил от диссипативных сил (3.2) равна

$$Q^R = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^R \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = - \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}.$$

Учитывая вытекающее из (3.5) тождество Лагранжа

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}},$$

получаем

$$Q^R = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^N \frac{h_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^N \frac{h_k v_k^2}{2}.$$

Введем функцию, называемую диссипативной функцией Рэля:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k v_k^2. \quad (3.13)$$

Тогда

$$Q^R = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}. \quad (3.14)$$

Подставим в диссипативную функцию Рэля (3.13) выражение для скорости (3.5):

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 \cdot \dot{q}^2 = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2,$$

где  $B(q) = \sum_{k=1}^N h_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2$ .

Поступим с функцией  $B(q)$  так же, как с функцией  $A(q)$  в выражении для кинетической энергии, т. е. разложим ее в степенной ряд в окрестности положения равновесия ( $q = 0$ )

$$B(q) = B(0) + \left( \frac{\partial B}{\partial q} \right)_0 \cdot q + \left( \frac{\partial^2 B}{\partial q^2} \right)_0 \cdot \frac{q^2}{2} + \dots,$$

а затем учтем только первый член разложения, поскольку диссипативная функция Рэлея, как и кинетическая энергия, уже содержит величину второго порядка малости  $\dot{q}^2$ .

Обозначим  $B(0)$  через  $b$  и назовем его обобщенным коэффициентом сопротивления [3]. Единица измерения  $b$ , также как и коэффициентов  $a$  и  $c$ , определяется единицей измерения обобщенной координаты: если  $q$  — в м, то  $b$  — в  $H \cdot c / m$ , если  $q$  — в рад, то  $b$  — в  $H \cdot c \cdot m$ .

Окончательно имеем

$$\Phi = \frac{1}{2} b \cdot \dot{q}^2. \quad (3.15)$$

Диссипативная функция Рэлея по своему определению (см. (3.13)) не может быть отрицательной, однако в частном случае консервативной системы она может равняться нулю при ненулевой скорости обобщенной координаты. Поэтому обобщенный коэффициентом сопротивления может быть больше или равен нулю ( $b \geq 0$ ).

Для выяснения механического смысла диссипативной функции Рэлея, рассмотрим теорему об изменении кинетической энергии для колебательной системы, на которую действуют только потенциальные и диссипативные силы:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{dA_k^\Pi}{dt} + \sum_{k=1}^N \frac{dA_k^R}{dt}, \quad (3.16)$$

где

$$\sum_{k=1}^N \frac{dA_k^\Pi}{dt} = Q^\Pi \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt}; \quad (3.17)$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{dA_k^R}{dt} = Q^R = \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \dot{q} = -B(q) \dot{q} \dot{q} = -2\Phi. \quad (3.18)$$

Подставив (3.17) и (3.18) в (3.16), получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt} = -2\Phi,$$

или

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt} = \frac{dE}{dt} = -2\Phi,$$

где  $E$  — полная механическая энергия.

Таким образом, удвоенное значение диссипативной функции Рэля равно скорости уменьшения полной механической энергии системы.

Составляющую обобщенной силы от сил  $\bar{F}_k^g(t)$ , зависящих от времени и действующих на систему извне, можно получить стандартным способом, вычисляя сумму элементарных работ от сил  $\bar{F}_k^g(t)$  на перемещениях, определяемых вариацией обобщенной координаты  $\delta q$ , и относя полученное значение к  $\delta q$ :

$$Q^B = \frac{\sum_{k=1}^N \delta A_k}{\delta q}. \quad (3.19)$$

С учетом (3.8), (3.9), (3.11), (3.14), (3.15), (3.19) уравнение Лагранжа II рода (3.3) принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q^B, \quad (3.20)$$

откуда следует

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q^B, \quad (3.21)$$

где  $a > 0$ ;  $b \geq 0$ ;  $c > 0$ .

Выражение (3.21) представляет собой дифференциальное уравнение движения для любой линейной колебательной системы с одной степенью свободы. Разделив каждый член (3.21) на коэффициент инерции  $a$ , и, обозначив положительные величины  $k^2 = \frac{c}{a}$ ,  $2n = \frac{b}{a}$ , получим дифференциальное уравнение в каноническом виде:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \frac{1}{a}Q^B, \quad (3.22)$$

где  $k$  — циклическая частота колебаний,  $1/c$ ;

$n$  — коэффициент затухания [3],  $1/c$ .

## 3.2 Свободные колебания механической системы

### 3.2.1 Закон свободных колебаний механической системы

В случае отсутствия сил сопротивления и вынуждающих сил уравнение (3.20) записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0, \quad (3.23)$$

а дифференциальное уравнение движения системы примет вид (т.к.  $b = 0$ ,  $Q^B = 0$ ):

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (3.24)$$

Дифференциальное уравнение (3.24) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно искать в виде  $q = e^{\lambda t}$ . После подстановки этого выражения в (3.24) получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два чисто мнимых корня  $\lambda_{1,2} = \pm ki$ .

На основе теории дифференциальных уравнений решение уравнения (3.24) можно представить в виде

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (3.25)$$

и для обобщенной скорости

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (3.26)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются с помощью начальных условий: при  $t=0$ ,  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ , где  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  - начальные значения обобщенной координаты и обобщенной скорости, соответственно.

Подставляя в (3.25) и (3.26) значения начальных условий, получаем

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}.$$

Подставляя их значения в (3.25), имеем

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt. \quad (3.27)$$

Уравнение (3.27) – одна из двух форм выражения свободных колебаний системы.

Представим выражение для  $q$  в другой, так называемой, *амплитудной* форме:

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad (3.28)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний;

$\alpha$  – начальная фаза колебаний;

$kt + \alpha$  – фаза колебаний.

Амплитуда колебаний определяет максимальное отклонение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению  $q = 0$ .

Для определения  $A$  и  $\alpha$  разложим синус суммы в уравнение (3.28):

$$q = A \sin \alpha \cdot \cos kt + A \cos \alpha \sin kt. \quad (3.29)$$

Сопоставив уравнения (3.27) и (3.29), получаем

$$\begin{cases} q_0 = A \sin \alpha; \\ \dot{q}_0 = A \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.30)$$

Для определения  $A$ , возведем оба уравнения системы (3.30) в квадрат и сложим, а для определения угла  $\alpha$ , разделим первое уравнение на второе, получим

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{q_0 k}{\dot{q}_0}.$$

Заметим, что при определении  $\alpha$  следует учитывать, что если  $\dot{q}_0 > 0$ , то  $\alpha$  находится в I или IV квадранте, а если  $\dot{q}_0 < 0$ , то во II или III квадранте, и, следовательно, к вычисленному главному значению арктангенса необходимо добавить  $\pi$ . При  $\dot{q}_0 = 0$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , если  $q_0 > 0$ , и  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ , если  $q_0 < 0$ .

Зависимость  $q(t)$  вида (3.28) представлена на рисунке 3.1.

*Гармоническими* называют такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется во времени по закону синуса или косинуса. Как видно из (3.26) и (3.28), свободные колебания в линейной консервативной системе с одной степенью свободы являются гармоническими. Их характеристиками являются:

$k$  – циклическая частота, измеряемая в радианах в секунду ( $rad/c$ );

$kt + \alpha$  – фаза колебаний;

$a$  – начальная фаза колебаний;

$A$  – амплитуда колебаний;

$T$  – период колебаний – время в секундах, за которое фаза колебаний изменится на  $2\pi$  (период синуса),

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (3.31)$$

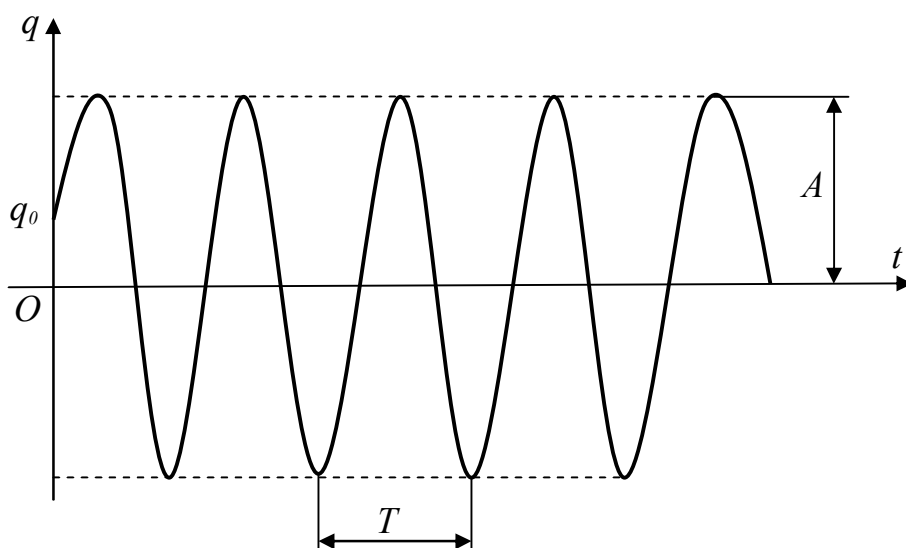


Рисунок 3.1 – График зависимости обобщенной координаты  $q$  от времени  $t$  при свободных колебаниях системы

В инженерной практике используют величину, обратную периоду колебаний называемую частотой колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \quad (3.32)$$

Единица измерения частоты колебаний — 1 герц (Гц).



Отметим, что круговая частота  $k$ , период  $T$  и частота  $\nu$  колебаний не зависят от начальных условий. Эти характеристики иногда называют собственными (например, собственная частота колебаний). Свойство независимости частоты и периода колебаний от начальных условий (свойство изохронности колебаний) связано с линейностью дифференциального уравнения и, следовательно, с допущением о малости колебаний.

### 3.2.2 Лабораторная работа на свободные колебания системы с одной степенью свободы

При выполнении лабораторной работы на свободные колебания системы с одной степенью свободы рекомендуется следующий порядок действий:

- 1 Выбираем обобщенную координату  $q$ ;
- 2 Составляем выражение кинетической энергии  $T$  и находим коэффициент инерции  $a$ ;
- 3 Определяем потенциальную энергию  $\Pi$  и квазиупругий коэффициент  $c$ ;
- 4 Подставляем  $T$  и  $\Pi$  в уравнение Лагранжа и получаем дифференциальное уравнение малых колебаний системы;
- 5 Проинтегрировав это уравнение и определив постоянные интегрирования, находим уравнение движения системы;
- 6 Определяем период колебаний и другие искомые величины.

**Лабораторная работа №2 (вариант 1).** В кривошипно-ползунном механизме, расположенном в вертикальной плоскости (рисунок 3.2), кривошип  $OA$ , представляющий собой однородный стержень длиной  $l = 0,49$  м и массой  $m_1 = 1$  кг, через шатун  $AB$  — также однородный стержень массой  $m_2 = 2$  кг — связан с ползуном  $B$  массой  $m_3 = 1$  кг. С ползуном скреплена пружина, имеющая жесткость  $c_1$ . При вертикальном положении кривошипа  $OA$  пружина не деформирована.

Не учитывая трение в шарнирах и опорах ползуна  $B$ , а также вязкое сопротивление среды, найти, при какой минимальной жесткости пружины  $c_{1кр}$  вертикальное положение кривошипа будет положением устойчивого равновесия. Для значения  $c_1 = 2c_{1кр}$  определить характер движения кривошипа, если в начальный

момент времени его отклонили на угол, равный  $5^\circ$ , в направлении, противоположном направлению движения стрелки часов и отпустили без начальной скорости.

Применим к уравнение Лагранжа II рода. Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота  $\varphi$  кривошипа, отсчитывая его от вертикали и считая малым.

Уравнение Лагранжа II рода в этом случае запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.33)$$

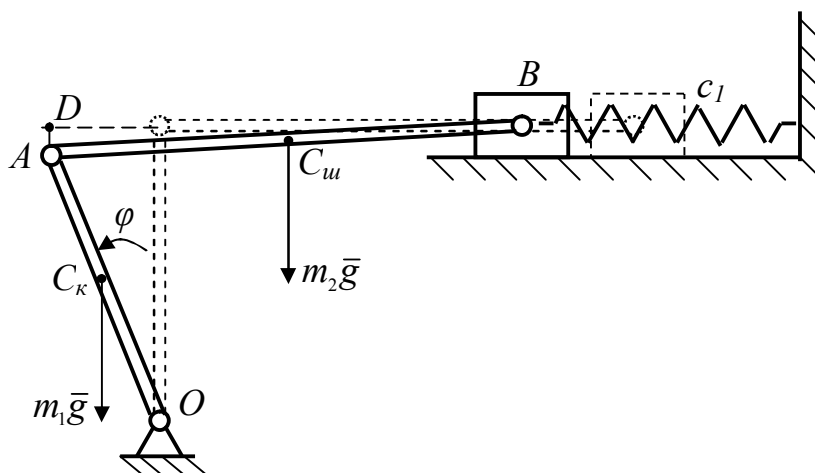


Рисунок 3.2 – Колебание кривошипно-шатунного механизма

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где  $T_1$  - кинетическая энергия кривошипа  $OA$ ;

$T_2$  - кинетическая энергия шатуна  $AB$ ;

$T_3$  - кинетическая энергия ползуна  $B$ .

Кинетическая энергия кривошипа:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_O \omega_{OA}^2,$$

где  $J_O$  - момент инерции кривошипа относительно оси, перпендикулярной плоскости механизма и проходящей через точку  $O$ ,

$$J_O = \frac{m_1 l^2}{3};$$

$\omega_{OA} = \dot{\varphi}$  - угловая скорость кривошипа.

Тогда

$$T_1 = \frac{1}{6} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Шатун  $AB$  в положении, соответствующем  $\varphi = 0$ , совершает мгновенно-поступательное движение. При отклонении кривошипа от вертикали (рисунок 3.2)

$$AD = OA(1 - \cos\varphi) = AB \sin \alpha.$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$OA(\sin \varphi)\dot{\varphi} = AB(\cos \alpha)\dot{\alpha},$$

откуда

$$\omega_{AB} = \dot{\alpha} = \frac{OA(\sin \varphi)\dot{\varphi}}{AB \cos \alpha}.$$

С учетом малости  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  угловая скорость  $\omega_{AB}$  будет иметь второй порядок малости, и, следовательно, при вычислении кинетической энергии шатуна его движение можно считать поступательным, т. е.

$$V_B = V_{C_{ш}} = V_A = l \cdot \omega_{OA} = l \cdot \dot{\varphi}.$$

Кинетическая энергия шатуна  $AB$ :

$$T_2 = \frac{m_2 V_{C_{ш}}^2}{2} = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия ползуна  $B$ :

$$T_3 = \frac{m_3 V_B^2}{2} = \frac{m_3 l^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Тогда суммарная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{3} + m_2 + m_3 \right) l^2 \cdot \dot{\varphi}^2,$$

или

$$T = \frac{1}{2} a \cdot \dot{\varphi}^2,$$

где коэффициент инерции

$$a = \left( \frac{m_1}{3} + m_2 + m_3 \right) l^2.$$

При вычислении потенциальной энергии (точнее ее изменения по сравнению со значением в положении равновесия) учтем деформацию пружины и опускание центров тяжести кривошипа и шатуна. Деформация пружины  $\lambda = l \sin \varphi$ . Так как угол  $\varphi$  мал, то  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Следовательно,  $\lambda = l \varphi$ . Центры тяжести кривошипа  $C_k$  и шатуна  $C_{ш}$  при повороте кривошипа опускаются на высоту

$$h = \frac{1}{2} l (1 - \cos \varphi).$$

Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( c_1 l^2 \varphi^2 - (m_1 + m_2) g l (1 - \cos \varphi) \right).$$

Ограничивая разложение  $\cos \varphi$  величинами второго порядка малости:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

получаем

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( c_1 l^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l \right) \varphi^2,$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2} c \varphi^2,$$

где квазиупругий коэффициент  $c$  равен

$$c = c_1 l^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l.$$

Видим, что если при определении кинетической энергии движение шатуна можно считать поступательным, то при вычислении потенциальной энергии необходимо учитывать его поворот.

Согласно (3.12), для устойчивости положения равновесия достаточно, чтобы квазиупругий коэффициент  $c$  был положительным. Приравняв  $c$  к нулю, находим критическое значение жесткости пружины

$$0 = c_{1кр} l^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl;$$

$$c_{1кр} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{g}{l}, \quad c_{1кр} = 30 \text{ Н/м}$$

Следовательно,  $c_1 = 2c_{1кр} = 60 \text{ Н/м}$ .

Подставив значения кинетической и потенциальной энергий в уравнение Лагранжа II рода (3.33), имеем

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\varphi}} = a\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\varphi}} \right) = a\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c\varphi.$$

Дифференциальное уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0,$$

$$\text{где } k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{c_1 l^2 - 0,5(m_1 + m_2)gl}{\left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3\right)l^2}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 0,49^2 - 0,5 \cdot 3 \cdot 9,8 \cdot 0,49}{3,33 \cdot 0,49^2}} = 3 \text{ рад/с.}$$

В соответствии с (3.25) запишем общее решение

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Воспользовавшись начальными условиями: при  $t = 0$ ;  $\varphi(0) = \varphi_0 = 5^\circ = 0,087 \text{ рад}$ ;

$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 = 0$ , находим

$$C_1 = \varphi(0) = 0,087 \text{ рад};$$

$$C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} = 0,$$

и, следовательно, закон движения примет вид

$$\varphi = 0,087 \cos 3t.$$

Решение в Mathcad 14 представлено на рисунке 3.3

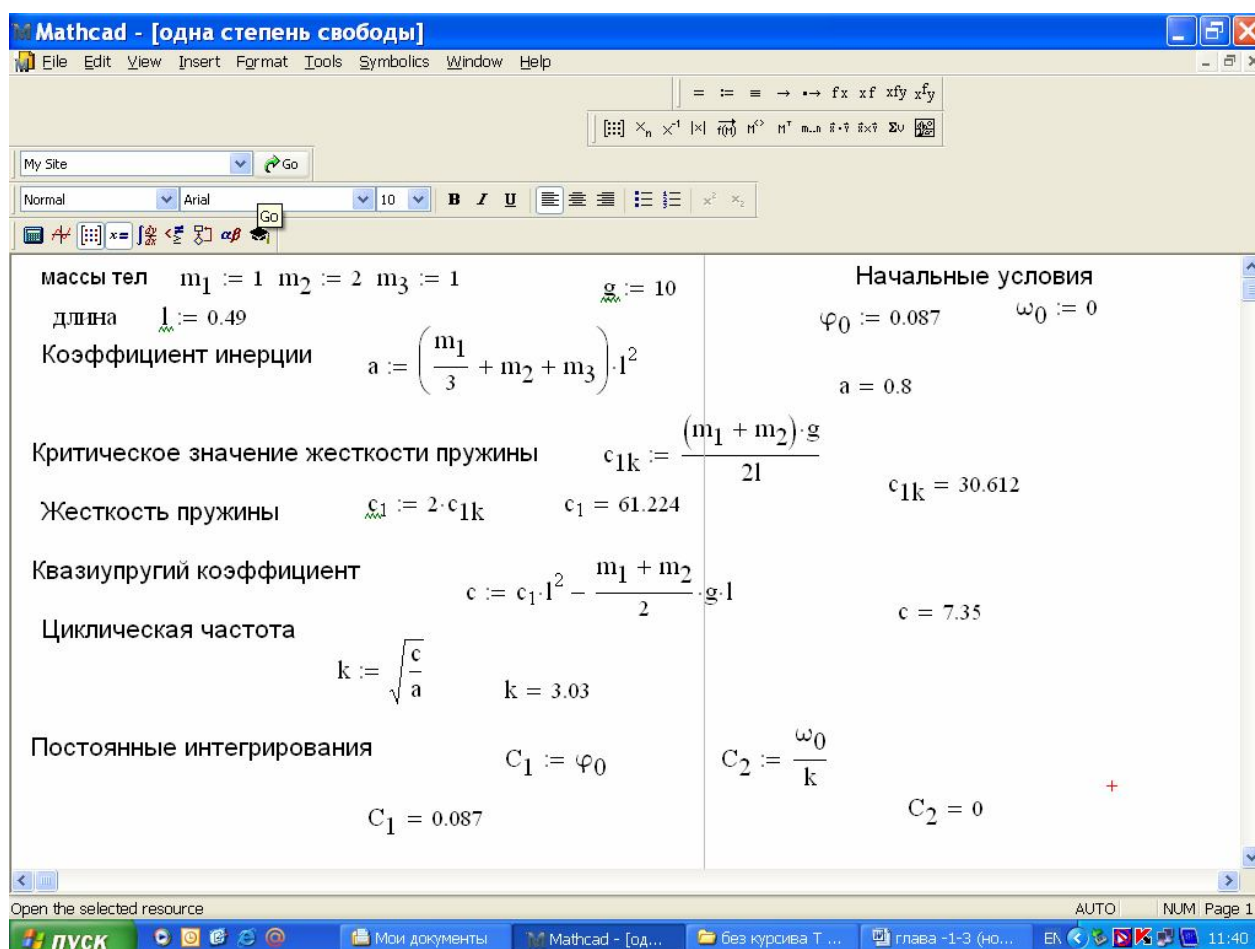


Рисунок 3.3 – Лабораторная работа в Mathcad 14

**Лабораторная работа №2 (вариант 2).** Груз  $A$  массы  $m_1 = 3$  кг подвешен к невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок  $B$  (рисунок 3.4). Блок  $B$  – однородный диск массой  $m_2 = 2$  кг. Груз прикреплен к вертикальной пружине, жесткость которой равна  $c_1 = 100$  Н/м. Определить закон движения груза, если в начальный момент времени грузу сообщили начальную скорость  $V_0 = 0,1$  м/с.

Применим уравнение Лагранжа II рода. Выберем в качестве обобщенной координаты вертикальное перемещение груза  $x$ .

Уравнение Лагранжа II рода в этом случае запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0. \quad (3.34)$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2,$$

где  $T_1$  - кинетическая энергия груза  $A$ ;

$T_2$  - кинетическая энергия блока  $B$ .

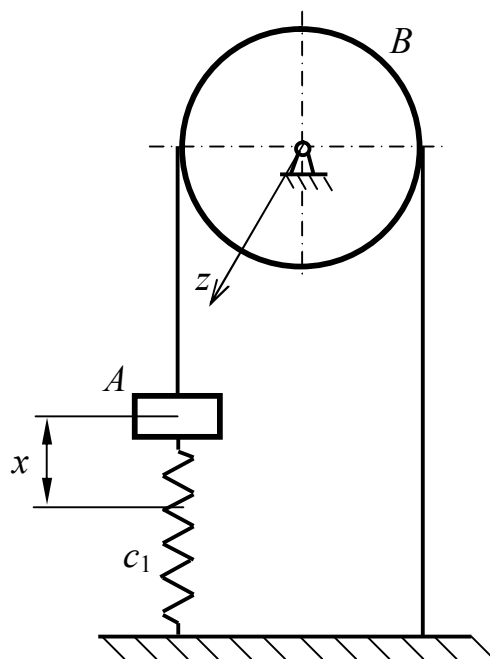


Рисунок 3.4 – Колебание механической системы

Кинетическая энергия груза  $A$ :

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия блока  $B$ :

$$T_2 = \frac{J_z \omega_2^2}{2},$$

где  $\omega_2 = \frac{V_1}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$  - угловая скорость;

$J_z = \frac{m_2 r^2}{2}$  - момент инерции блока  $B$  относительно оси  $z$ .

Тогда

$$T_2 = \frac{m_2 V_1^2}{4}.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \left( m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \dot{x}^2,$$

или

$$T = \frac{1}{2} a \dot{x}^2,$$

где коэффициент инерции

$$a = m_1 + \frac{m_2}{2}.$$

Найдем потенциальную энергию системы, которая определяется работой сил тяжести системы и силы упругости пружины на перемещении системы из отклоненного состояния, когда груз  $A$  имеет координату  $x$ , в нулевое положение, которым считаем положение равновесия системы:

$$\Pi = \Pi_{m_1g} + \Pi_{c_1},$$

где  $\Pi_{m_1g}$  - потенциальная энергия груза в поле силы тяжести  $m_1g$ ,

$$\Pi_{m_1g} = -m_1gx;$$

$\Pi_{c_1}$  - потенциальная энергия деформированной пружины.

Потенциальная энергия деформированной пружины при указанном перемещении равна

$$\Pi_{c_1} = \frac{c_1(x - f_{cm})^2}{2} - \frac{c_1 f_{cm}^2}{2} = \frac{c_1 x^2}{2} - c_1 x f_{cm},$$

где  $f_{cm}$  - статическое отклонение пружины.

Тогда, потенциальная энергия системы:

$$\Pi = -m_1gx + \frac{c_1 x^2}{2} - c_1 x f_{cm}.$$

Из условия равновесия в обобщенных координатах, в случае действия на систему потенциальных сил,



$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \text{ или } -m_1 g - c_1 f_{cm} = 0.$$

Таким образом, потенциальная энергия рассматриваемой механической системы

$$\Pi = \frac{c_1 x^2}{2},$$

или

$$\Pi = \frac{cx^2}{2},$$

где квазиупругий коэффициент  $c = c_1$ .

Подставив значения кинетической и потенциальной энергий в уравнение Лагранжа II рода (3.34), имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = a\ddot{x}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = cx.$$

Дифференциальное уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где  $k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1 + \frac{m_2}{2}}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5 \text{ рад/с.}$

В соответствии с (3.25) запишем общее решение

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Воспользовавшись начальными условиями: при  $t = 0$ ;  $x_0 = 0$ ;  $\dot{x}_0 = V_0$ , находим

$$C_1 = x_0 = 0;$$

$$C_2 = \frac{V_0}{k} = \frac{0,1}{5} = 0,02 \text{ м,}$$

и, следовательно, закон движения примет вид

$$x = 0,02 \sin 5t.$$

Решение в Mathcad 14 представлено на рисунке 3.5.

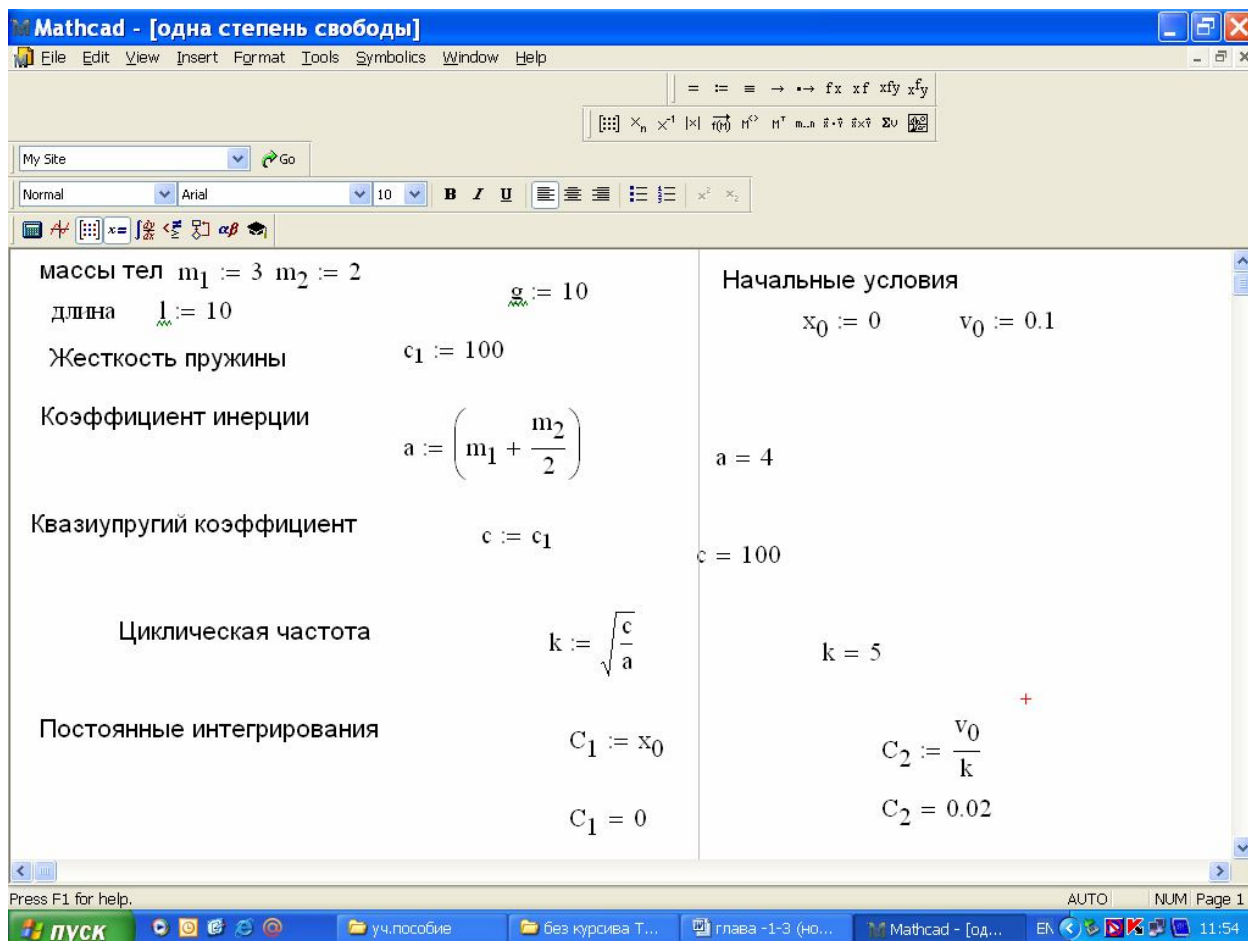


Рисунок 3.5– Лабораторная работа в Mathcad 14

### 3.3 Влияние сил сопротивления на свободные колебания системы

#### 3.3.1 Законы колебаний системы с учетом сил сопротивления

В случае наличия сил сопротивления и отсутствия вынуждающих сил уравнение (3.20) записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \quad (3.35)$$

Дифференциальное уравнение движения в этом случае в соответствии с (3.22) имеет вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0. \quad (3.36)$$

где  $n = b/2a$  — коэффициент затухания, единица измерения которого совпадает с единицей измерения  $k$ .

Представив решение уравнения (3.33) в виде  $q=e^{\lambda t}$ , получим для определения параметра  $\lambda$  характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0,$$

корни которого имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (3.37)$$

Характер движения системы будет существенно зависеть от соотношения между значениями  $n$  и  $k$ . Возможны три случая:

- 1 Малое сопротивление ( $n < k$ ) – корни уравнения (3.37) являются комплексно-сопряженными;
- 2 Критическое сопротивление ( $n = k$ ) – корни уравнения (3.37) кратные;
- 3 Большое сопротивление ( $n > k$ ) – уравнение (3.37) имеет два вещественных отрицательных корня.

В случае *малого сопротивления*

$$\lambda_{1,2} = -n \pm ik_1,$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ .

Общее решение дифференциального уравнения (3.36) имеет вид

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (3.38)$$

а выражение для обобщенной скорости представляется в виде

$$\dot{q} = -ne^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt} (-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t). \quad (3.39)$$

При начальных условиях:  $t = 0$ ,  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ , получаем

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1}.$$

Подставляя их значения в (3.38), имеем

$$q = e^{-nt} \left( q_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} \sin k_1 t \right). \quad (3.40)$$

Закон свободных колебаний системы (3.40) можно представить в амплитудной форме:

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (3.41)$$

где амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\alpha$  определяется из формул:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.42)$$

При определении  $\alpha$  следует учитывать, что при  $\dot{q}_0 + nq_0 > 0$ ,  $\alpha$  находится в I или IV квадранте, а при  $\dot{q}_0 + nq_0 < 0$  — во II или III квадранте и, следовательно, к вычисленному главному значению арктангенса необходимо добавить  $\pi$ . При  $\dot{q}_0 + nq_0 = 0$   $\alpha = \pi/2$ , если  $q_0 > 0$ , и  $\alpha = -\pi/2$ , если  $q_0 < 0$ .

Графически решение (3.41) приведено на рисунке 3.6. Оно представляет собой синусоидальную кривую, расположенную между ограничивающими кривыми  $Ae^{-nt}$  и  $-Ae^{-nt}$ . Колебания такого вида называются затухающими.

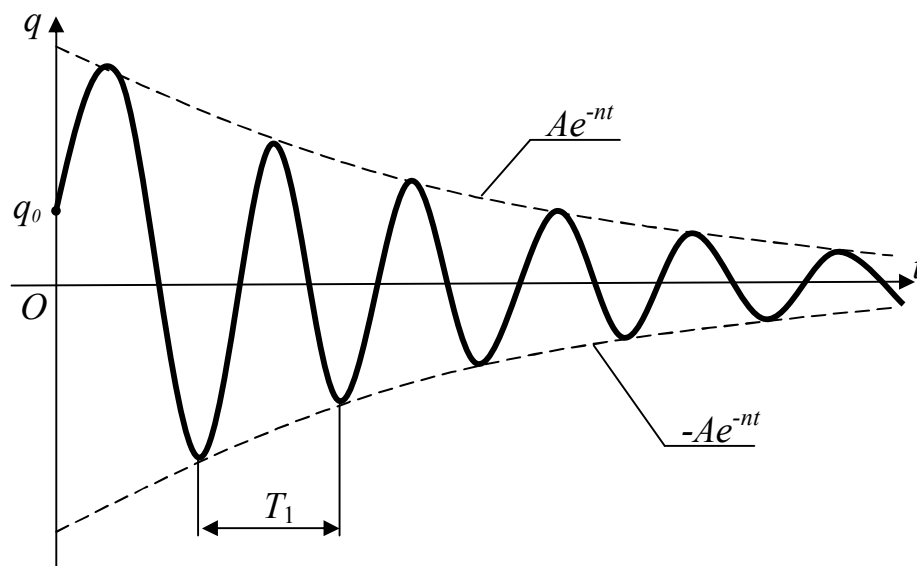


Рисунок 3.6 – График зависимости обобщенной координаты  $q$  от времени  $t$  при затухающих колебаниях системы

Не являясь периодическим движением, затухающие колебания сохраняют некоторые свойства периодичности. Действительно, решение (3.41) представляет

собой произведение двух функций — экспоненты и синусоиды с периодом  $T_1 = 2\pi/k_1$ . Это обстоятельство приводит к чередованию через равный промежуток времени  $T_1$  нулей и максимумов  $q(t)$  (см. рисунок 3.6), что позволяет считать затухающие колебания условно-периодическими.

Величину  $T_1 = 2\pi/k_1 = 2\pi/\sqrt{k^2 - n^2}$  называют условным периодом затухающих колебаний, а  $k_1$  - условной частотой затухающих колебаний. Очевидно, что  $T_1 > T$ .

Функция  $Ae^{-nt}$  можно назвать условной амплитудой затухающих колебаний. Для любого момента времени она дает оценку сверху для  $|q(t)|$ .

При малых значениях коэффициента затухания ( $n \ll k$ ) условная частота затухающих колебаний  $k_1 \approx k$  и аналогично  $T_1 \approx T$ .

Решение (3.41) показывает, что в системе с линейным вязким сопротивлением колебания затухают только при  $t \rightarrow \infty$ , что не соответствует опыту наблюдения колебаний в реальных системах, которые всегда заканчиваются за конечный промежуток времени. Это противоречие есть результат того, что в линейных уравнениях в расчетной схеме не учитываются другие виды сопротивлений, кроме линейного вязкого. Однако, например, учет сил сухого трения приводит к прекращению колебаний через конечный промежуток времени.

Для того чтобы преодолеть это противоречие, введем характеристику  $\tau_0 = 1/n$ , называемую постоянной времени затухающих колебаний и измеряемую в секундах.

Рассмотрим последовательность условных амплитуд колебаний, взятых начиная с любого времени  $t_x$  через интервалы времени, равные  $\tau_0$ :

$$A_1 = Ae^{-nt_1}; \quad A_2 = Ae^{-n(t_1+\tau_0)} = Ae^{-1}; \quad A_3 = Ae^{-2} \dots$$

Видно, что за каждый промежуток времени, равный  $\tau_0$ , условная амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз. Через  $3\tau_0$  условная амплитуда уменьшится в  $e^3$ , т. е. примерно в 20 раз. Обычно полагают, что по истечении времени  $3\tau_0$  затухающие колебания можно условно считать прекратившимися.

Декрементом колебаний  $\Delta$  называют отношение двух последовательных, взятых через условный период  $T_1$  амплитудных значений обобщенной координаты.

Пусть

$$A_i = Ae^{-nt_i} \sin(k_1 t_i + \alpha);$$

$$A_{i+1} = Ae^{-n(t_i+T_1)} \sin[k_1(t_i+T_1) + \alpha] = Ae^{-n(t_i+T_1)} \sin(k_1 t_i + \alpha),$$

где  $t_i$  — время, соответствующее  $i$ -му максимуму координаты.

Тогда

$$\Delta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{nT_1}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний называют натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\delta = \ln \Delta = nT_1.$$

Логарифмический декремент колебаний удобен для характеристики медленно затухающих колебаний, когда  $n \ll k$ . В этом случае изменение максимальных отклонений за условный период мало:

$$\Delta A_i = A_i - A_{i+1} \ll A_i, \tag{3.43}$$

и тогда

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \ln \frac{A_i}{A_i - \Delta A_i} = -\ln \left( 1 - \frac{\Delta A_i}{A_i} \right) \approx \frac{\Delta A_i}{A_i}.$$

Как видно, логарифмический декремент колебаний здесь характеризует относительное изменение максимальных отклонений за условный период. Кроме того, он имеет определенный энергетический смысл.

Вычислим изменение полной механической энергии за условный период колебаний. В положениях максимальных отклонений  $\dot{q}(t_i) = 0$ , полная механическая энергия определяется потенциальной энергией:

$$E_i = \Pi_i = \frac{cA_i^2}{2}; \quad E_{i+1} = \Pi_{i+1} = \frac{c(A_i - \Delta A_i)^2}{2}.$$

С учетом (3.43) для медленно затухающих колебаний имеем

$$E_{i+1} = \Pi_{i+1} = \frac{c(A_i^2 - 2A_i \cdot \Delta A_i)}{2}.$$

Тогда относительное изменение полной механической энергии системы за условный период колебаний будет

$$\frac{E_i - E_{i+1}}{E_i} = \frac{2A_i \cdot \Delta A_i}{A_i^2} = 2 \frac{\Delta A_i}{A_i} = 2\delta = \psi.$$

где  $\psi$  – коэффициент поглощения энергии за один период (цикл) колебаний.

В случае *критического сопротивления*

$$\lambda_{1,2} = -n.$$

При кратных корнях общее решение дифференциального уравнения (3.36) имеет вид

$$q = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt} = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (3.44)$$

а выражение для обобщенной скорости представляется в виде

$$\dot{q} = -n e^{-nt} (C_1 + C_2 t) + e^{-nt} (C_2). \quad (3.45)$$

При начальных условиях:  $t = 0$ ,  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ , получаем

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \dot{q}_0 + n q_0.$$

Подставляя их значения в (3.44), получаем

$$q = e^{-nt} [q_0 + (\dot{q}_0 + n q_0) t]. \quad (3.46)$$

Решение (3.46) представляет собой произведение экспоненты в отрицательной степени и линейной функции времени. Из математики известно, что экспонента в отрицательной степени убывает быстрее, чем возрастает любая степенная функция. Поэтому решение (3.46) стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Решение может обратиться в нуль только единожды, если константы  $C_1$  и  $C_2$  имеют разные знаки. Для этого, начальное отклонение и начальная скорость должны иметь разные

знаки и при этом должно выполняться условие  $|\dot{q}_0| > n|q_0|$ .

На рисунке 3.7 представлено решение (3.46) при различных начальных условиях.

Видно, что движение не имеет колебательного характера. Такое движение называют аperiодическим, а при критическом сопротивлении — предельно аperiодическим.

В случае *большого сопротивления*

$$\lambda_{1,2} = -n \pm k_2,$$

где  $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$ . Поскольку  $k_2 < n$ , оба корня характеристического уравнения будут отрицательными.

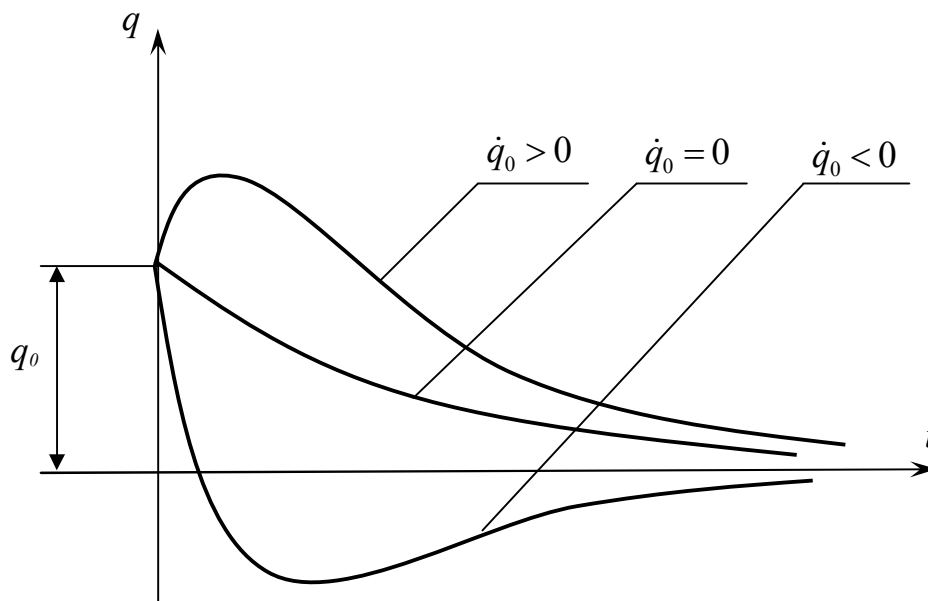


Рисунок 3.7 - Графики зависимости обобщенной координаты  $q$  от времени  $t$  при затухающих движениях системы

Общее решение дифференциального уравнения (3.36) в этом случае имеет вид

$$q = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}). \quad (3.47)$$

Взяв производную по времени  $t$ , определим выражение для обобщенной скорости:

$$\dot{q} = -ne^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}) + e^{-nt} (k_2 C_1 e^{k_2 t} - k_2 C_2 e^{-k_2 t}). \quad (3.48)$$



Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяем с помощью подстановки начальных условий ( $t = 0, q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$ ) в уравнения (3.47) и (3.48):

$$C_1 = \frac{1}{2} \left( q_0 + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_2} \right); \quad C_2 = \frac{1}{2} \left( q_0 - \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_2} \right).$$

Движение в случае большого сопротивления также имеет аperiодический характер, аналогичный представленному на рисунке 3.7. Однако с увеличением  $e$  графики растягиваются вдоль оси абсцисс, поскольку с повышением вязкого сопротивления при прочих равных условиях скорость движения убывает.

### 3.3.2 Лабораторная работа на колебания системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления

Лабораторную работу на колебания системы с учетом сил сопротивления рекомендуется производить в нижеприведенной последовательности:

- 1 Выбираем обобщенную координату  $q$ .
- 2 Составляем выражение кинетической энергии  $T$  и находим коэффициент инерции  $a$ .
- 3 Определяем потенциальную энергию  $\Pi$  и квазиупругий коэффициент  $c$ .
- 4 Находим диссипативную функцию Рэля  $\Phi$  и обобщенный коэффициентом сопротивления  $b$ .
- 5 Составляем дифференциальное уравнение малых колебаний системы.
- 6 В зависимости от соотношения между  $k$  и  $n$ , записываем решение дифференциального уравнения в виде (3.38), (3.44) или (3.47).
- 7 Определив постоянные интегрирования, находим уравнение движения системы.
- 8 Определяем период колебаний и другие искомые величины.

**Лабораторная работа №3 (вариант 1).** Однородный диск массой  $m = 2$  кг (рисунок 3.8) может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. С диском скреплены пружина, жесткость которой  $c_1 = 435$  Н/м, и демпфер, создающий силу, пропорциональную скорости движения поршня:  $\bar{F}^R(\bar{v}) = -h\bar{V}$ , где  $h = 6$

Н·с/м. Центр диска сместили вправо от положения равновесия на 5 см и отпустили без начальной скорости. Определить закон движения центра диска.

Применим уравнение Лагранжа II рода. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение  $x$  центра диска от положения равновесия (см. рисунок 3.8).

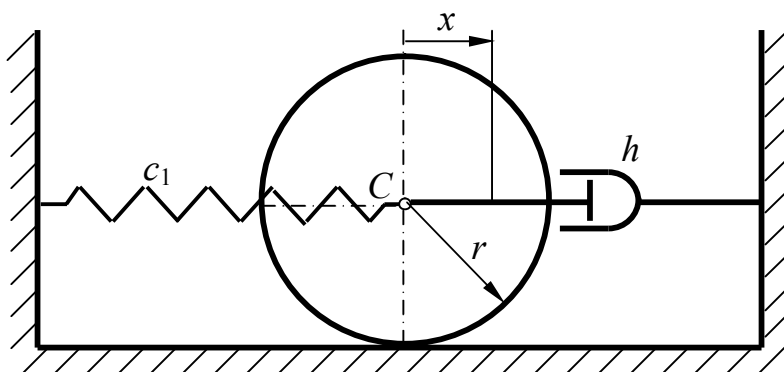


Рисунок 3.8 – Колебание диска

Уравнение Лагранжа II рода в этом случае запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Кинетическая и потенциальная энергии, и диссипативная функция Рэля имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{mr^2}{2} \cdot \left( \frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x^2;$$

$$\Phi = \frac{1}{2} h V^2 = \frac{1}{2} h \dot{x}^2,$$

и, следовательно, в соответствии с (3.8), (3.11) и (3.15), коэффициент инерции, квазиупругий коэффициент и обобщенный коэффициент сопротивления равны, соответственно,

$$a = \frac{3}{2} m = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \text{ кг}; \quad b = h = 6 \text{ Н·с/м}; \quad c = c_1 = 435 \text{ Н/м}.$$

Дифференциальное уравнение движения примет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

где  $n = \frac{b}{2a} = 1$  рад/с;  $k = \sqrt{\frac{c}{a}} = 12,04$  рад/с.

Поскольку  $n < k$ , имеем случай малого сопротивления, т.е. затухающие колебания. Условная частота затухающих колебаний

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 12 \text{ рад/с.}$$

В соответствии с (3.38) и (3.39) имеем

$$x = e^{-t}(C_1 \cos 12t + C_2 \sin 12t),$$

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 \cos 12t + C_2 \sin 12t) + e^{-nt}(-12C_1 \sin 12t + 12C_2 \cos 12t).$$

При начальных условиях:  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0 = 0,05$  м,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0$ , получаем

$$C_1 = 0,05 \text{ м; } C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} = \frac{0 + 1 \cdot 0,05}{12} = 0,042 \text{ м.}$$

Закон изменения обобщенной координаты примет вид:

$$x = e^{-t}(0,05 \cos 12t + 0,042 \sin 12t)$$

Определив амплитуду колебаний и начальную фазу:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{0,05^2 + 0,042^2} = 0,0501 \text{ м;}$$

$$\alpha = \arctg \frac{k_1}{n} = 1,487 \text{ рад,}$$

закон движения можно записать в виде

$$x = 0,0501e^{-t} \sin(12t + 1,487) \text{ м.}$$

Зависимость  $x(t)$  на промежутке времени  $3\tau_0 = 3/n = 3$  с представлена на рисунке 3.9. За это время амплитуда колебаний уменьшится в  $e^3$  (примерно в двадцать) раз.

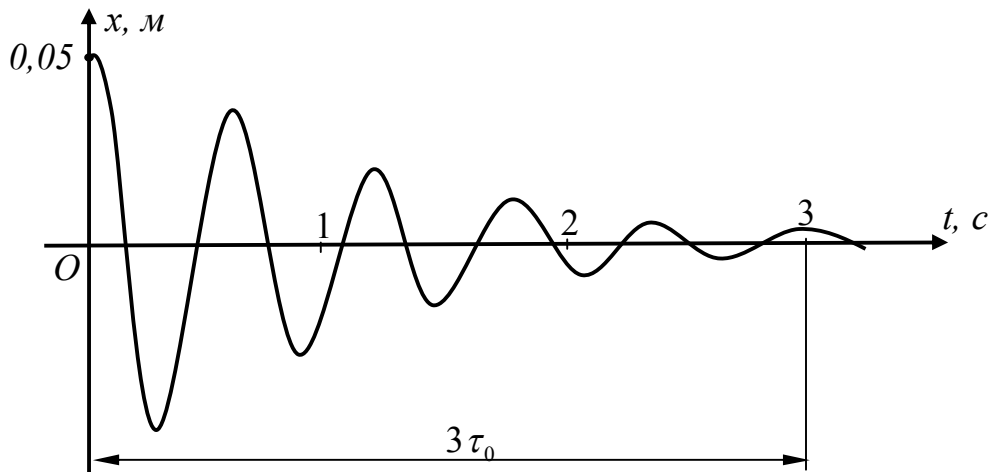


Рисунок 3.9 - Зависимость обобщенной координаты  $q$  от времени  $t$

Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14 представлено на рисунке 3.10.

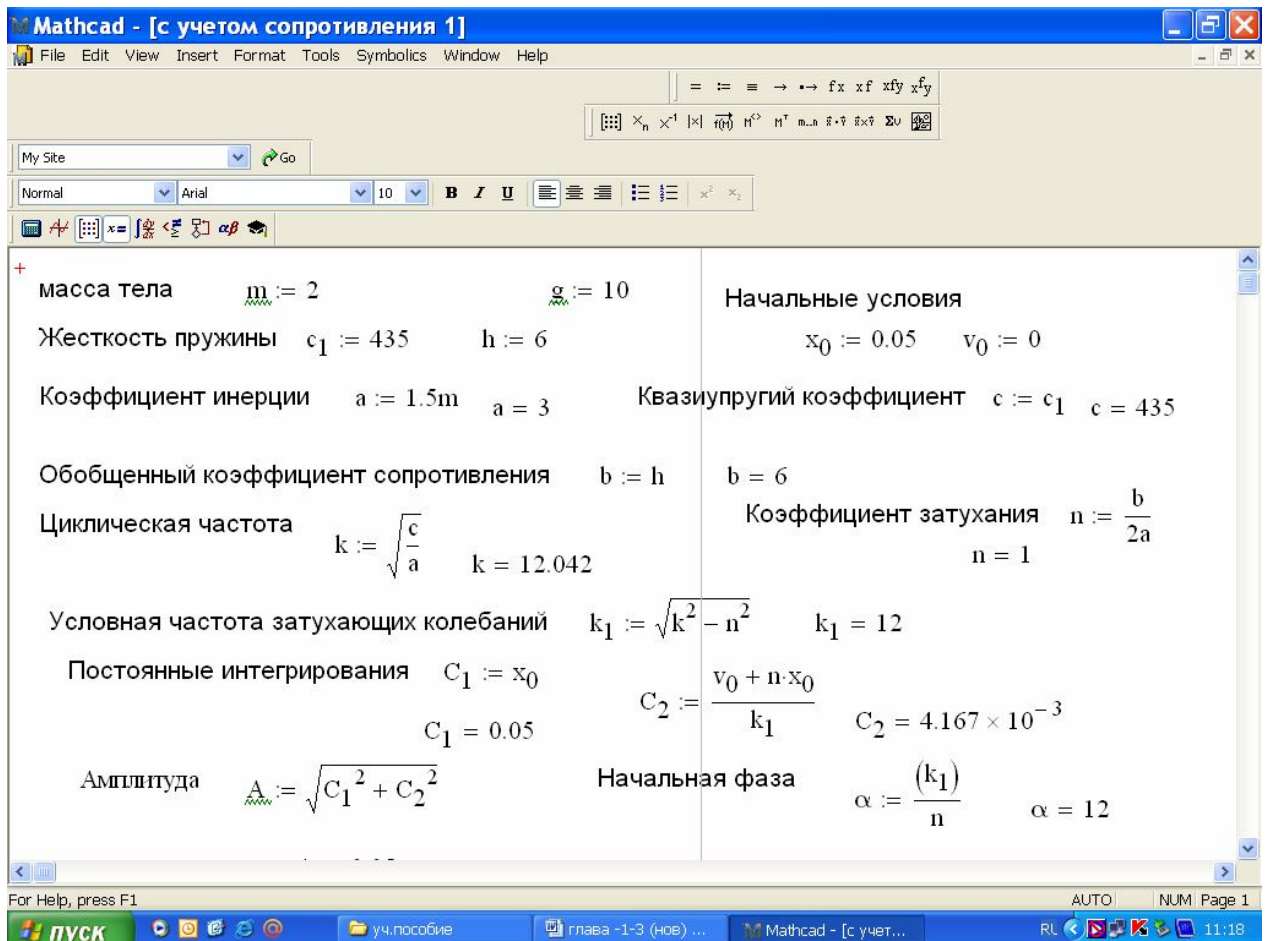


Рисунок 3.10 - Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14

**Лабораторная работа №3 (вариант 2).** Определить закон движения центра диска в варианте №1 предыдущей лабораторной работе, при условии, что жесткость

пружины  $c_1 = 75$  Н/м, коэффициент сопротивления  $h = 366$  Н·с/м и центр диска отпустили с начальной скоростью  $v_{C0} = 0,5$  м/с.

В соответствии с данными условиями задачи коэффициент инерции, квазиупругий коэффициент и обобщенный коэффициент сопротивления будут равны, соответственно,

$$a = \frac{3}{2}m = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \text{ кг}; \quad b = h = 36 \text{ Н·с/м}; \quad c = c_1 = 75 \text{ Н/м}.$$

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

где  $n = \frac{b}{2a} = 6$  рад/с;  $k = \sqrt{\frac{c}{a}} = 5$  рад/с.

Поскольку  $n > k$ , имеем случай большого сопротивления. Условная частота в этом случае равна

$$k_2 = \sqrt{n^2 - k^2} = 3,317 \text{ рад/с}.$$

В соответствии с (3.47) и (3.48) имеем

$$x = e^{-6t} (C_1 e^{3,317t} + C_2 e^{-3,317t});$$

$$\dot{x} = -6e^{-6t} (C_1 e^{3,317t} + C_2 e^{-3,317t}) + e^{-6t} (3,34C_1 e^{3,317t} - 3,34C_2 e^{-3,317t}).$$

При начальных условиях:  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0 = 0,05$  м,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0$ , получаем

$$C_1 = \frac{1}{2} \left( q_0 + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_2} \right) = \frac{1}{2} \left( 0,05 + \frac{0,5 + 6 \cdot 0,05}{3,34} \right) = 0,146 \text{ м};$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left( q_0 - \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_2} \right) = \frac{1}{2} \left( 0,05 - \frac{0,5 + 6 \cdot 0,05}{3,34} \right) = -0,096 \text{ м}.$$

Движение диска будет описываться уравнением:

$$x = e^{-6t} (0,146e^{3,317t} - 0,096e^{-3,317t}).$$

Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14 представлено на рисунке 3.11.

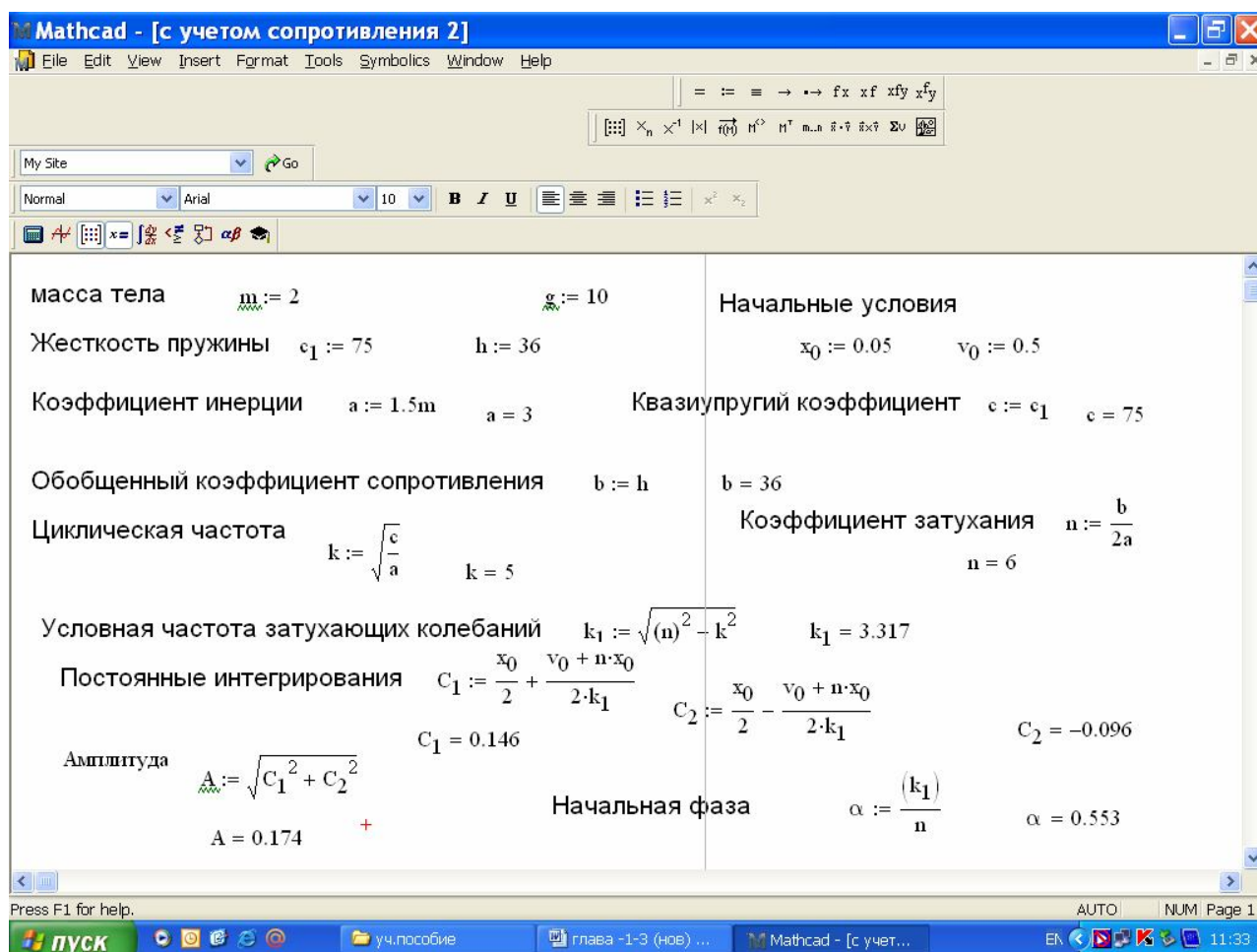


Рисунок 3.11 - Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14

### 3.4 Вынужденные колебания системы при гармоническом возбуждении

Уравнение Лагранжа II рода (3.1) принимает вид (3.20), а дифференциальное уравнение вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы имеет вид (3.22).

В случае, когда обобщенную силу  $Q(t)$ , характеризующую внешнее воздействие на колебательную систему можно представить в виде

$$Q(t) = Q_0 \sin(pt + \beta), \quad (3.49)$$

где  $Q_0$  – амплитуда обобщенной силы;

$p, \beta$  – частота и начальная фаза обобщенной силы, соответственно, то имеет место гармоническое возбуждение колебаний.

### 3.4.1 Способы возмущения колебаний. Определение обобщенной силы $Q(t)$

1 *Силовое возмущение* (рисунок 3.12). Математический маятник, связанный с пружиной, находится под воздействием силы  $\bar{F}(t)$ , где  $F(t) = F_0 \sin(pt + \beta)$ .

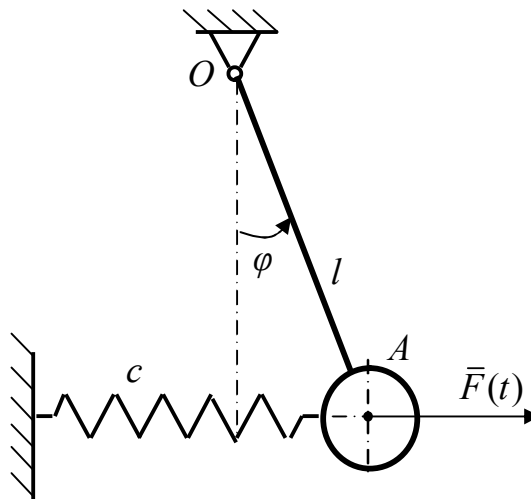


Рисунок 3.12 – Силовое возмущение колебаний

В этом случае для получения  $Q(t)$  необходимо задать вариацию обобщенной координаты  $\delta\varphi$  и, вычислив возможную работу только от  $\bar{F}(t)$ , разделить ее на вариацию обобщенной координаты:

$$Q(t) = \frac{F(t)l \cos(\varphi) \cdot \delta\varphi}{\delta\varphi} = F_0 l \sin(pt + \beta) \cos\varphi.$$

С учетом малости угла  $\varphi$ , полагаем  $\cos\varphi = 1$ . Тогда

$$Q(t) = F_0 l \sin(pt + \beta).$$

2 *Кинематическое возмущение* (рисунок 3.13). Вынужденные колебания возникают в результате задаваемого извне перемещения точки крепления пружины  $s(t) = s_0 \sin(pt + \beta)$ .

Изменение условной потенциальной энергии пружины при одновременном перемещении ее обоих концов с учетом малости угла поворота маятника равно

$$\Pi' = \frac{1}{2} c \lambda^2 = \frac{1}{2} c [l\varphi - s(t)]^2.$$

Тогда

$$-\frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi} = -[cl\varphi + cs(t)]l = -cl^2\varphi + cs_0l \sin(pt + \beta) = Q_{\Pi} + Q(t).$$

Составляющую  $-cl^2\varphi$  перенесем в левую часть дифференциального уравнения движения. Оставшаяся справа составляющая  $cs_0l \sin(pt + \beta)$  представляет собой  $Q(t)$ .

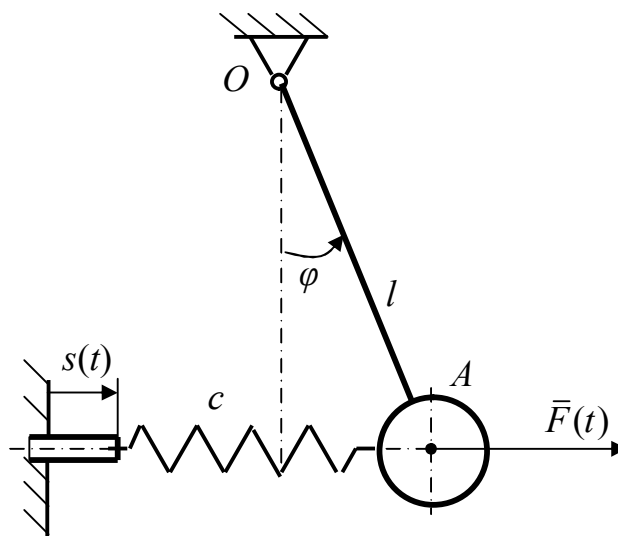


Рисунок 3.13 – Кинематическое возмущение колебаний

3 *Инерционное возмущение.* Рассмотрим два возможных случая.

*Вынужденные относительные колебания* (рисунок 3.14). Пусть маятник связан с подвижным основанием, перемещение которого задается извне. Рассмотрим задачу об исследовании относительных (по отношению к подвижному основанию) колебаний маятника.

Система координат, связанная с подвижным основанием, движется вместе с ним поступательно и прямолинейно, но неравномерно, поэтому при составлении дифференциального уравнения вынужденных относительных колебаний необходимо учитывать переносную силу инерции  $\bar{F}_e^u = -m\bar{a}_e$ , направленную против переносного ускорения. Переносное ускорение считаем сонаправленным с  $s(t)$ . Обобщенная сила  $Q(t)$  будет определяться переносной силой инерции  $F_e^u$ , т. е.



$$Q(t) = \frac{-m\ddot{s}(t) \cos \varphi \delta \varphi}{\delta \varphi} = mp^2 s_0 l \sin(pt + \beta) \cos \varphi,$$

или с учетом малости угла  $\varphi$

$$Q(t) = mp^2 s_0 l \sin(pt + \beta).$$

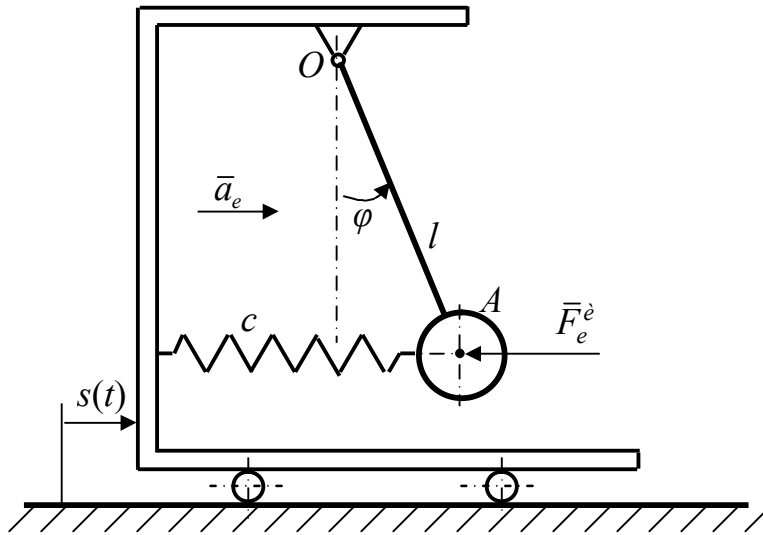


Рисунок 3.14 – Инерционное возмущение в случае относительного колебания

*Вынужденные колебания, вызываемые вращающимся эксцентриком* (рисунок 3.15). Пусть  $s$  телом массой  $m$ , имеющим возможность двигаться поступательно, скреплен эксцентрик, имеющий массу  $m_1 \ll m$ , эксцентриситет  $l_1$  и вращающийся с постоянной угловой скоростью  $p$ . Обозначив через  $\varphi$  угол отклонения эксцентрика от вертикали, выразим  $Q(t)$  через проекцию на горизонталь центробежной силы  $m_1 p^2 l_1$ :

$$Q(t) = \frac{m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta) \delta x}{\delta x} = m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta).$$

Отметим, что при инерционном возмущении колебаний в отличие от силового и кинематического возбуждения амплитуда обобщенной силы  $Q_0$  пропорциональна  $p^2$ .

Приведенные примеры, естественно, не охватывают все возможные способы возбуждения вынужденных колебаний. Например, возможно возмущение колебаний

вследствие перемещения точки прикрепления демпфера или комбинированное возмущение колебаний, объединяющее сразу несколько способов.

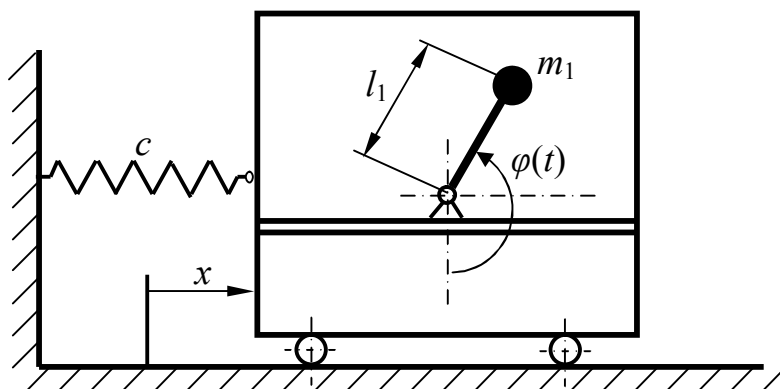


Рисунок 3.15 - Инерционное возмущение, вызываемое вращающимся эксцентриком

### 3.4.2 Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления

В случае отсутствия сопротивления диссипативная функция Рэлея отсутствует и обобщенный коэффициент сопротивления  $b = 0$ .

Уравнение Лагранжа II рода (3.20) принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q^B. \quad (3.50)$$

Дифференциальное уравнение движения при гармоническом возбуждении в соответствии с (3.21) и (3.49) имеет вид

$$a \ddot{q} + cq = Q_0 \sin(pt + \beta),$$

или в каноническом виде

$$\ddot{q} + k^2 q = f_0 \sin(pt + \beta), \quad (3.51)$$

где  $f_0 = Q_0 / a$ .

#### 3.4.2.1 Силовое и кинематическое возбуждение

Представим решение линейного неоднородного уравнения (3.51) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

уравнения

$$q = q_1 + q_2, \quad (3.52)$$

где  $q_1$  - общее решение однородного дифференциального уравнения;

$q_2$  - частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Общее решение однородного уравнения в соответствии с (3.25), (3.28) имеет вид

$$q_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (3.53)$$

или

$$q_1 = A \sin(kt + \alpha). \quad (3.54)$$

Частное решение неоднородного уравнения зависит от соотношения частот собственных колебаний  $k$  и возмущающей силы  $p$ . Возможны два случая: отсутствие резонанса  $p \neq k$  и резонанс  $p = k$ .

1 *Отсутствие резонанса ( $p \neq k$ ).*

Представим частное решение в виде

$$q_2 = B \sin(pt + \beta),$$

где  $B$  — искомая величина.

Тогда

$$\ddot{q}_2 = -Bp^2 \sin(pt + \beta).$$

Подставив  $q_2$  и  $\ddot{q}_2$  в уравнение (3.51) получим

$$-Bp^2 \sin(pt + \beta) + Bk^2 \sin(pt + \beta) = f_0 \sin(pt + \beta).$$

Учитывая, что синус переменного аргумента равен нулю не при всех значениях  $t$ , разделим это уравнение на  $\sin(pt + \beta)$ :

$$B(k^2 - p^2) = f_0,$$

откуда следует

$$B = \frac{f_0}{k^2 - p^2}.$$

В соответствии с (3.52), общее решение уравнения (3.51) будет иметь вид:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{f_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \beta), \quad (3.55)$$

а уравнение для обобщенной скорости:

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{f_0 p}{k^2 - p^2} \cos(pt + \beta). \quad (3.56)$$

Уравнение (3.55) можно записать, с учетом (3.54), в виде

$$q = A \sin(kt + \alpha) + \frac{f_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \beta). \quad (3.57)$$

Произвольные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  получим подставив начальные условия:  $t = 0$ ,  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ , в уравнения (3.55) и (3.56):

$$q_0 = C_1 + \frac{f_0}{k^2 - p^2} \sin \beta; \quad \dot{q}_0 = C_2 k + \frac{f_0 p}{k^2 - p^2} \cos \beta.$$

Отсюда

$$C_1 = q_0 - \frac{f_0}{k^2 - p^2} \sin \beta; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} - \frac{f_0 p}{k(k^2 - p^2)} \cos \beta.$$

Произвольные постоянные  $A$  и  $\alpha$  при необходимости определим через  $C_1$  и  $C_2$  по формулам

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}.$$

Как видно из (3.55) и (3.57), решение состоит из двух гармонических колебаний с частотами  $k$  и  $p$  соответственно. Первое слагаемое с частотой  $k$  можно по аналогии со случаем отсутствия возмущающей силы условно назвать свободными колебаниями, а второе, с частотой  $p$ , - вынужденными колебаниями. Условность названия «свободные колебания» связана с тем, что определяющие их произвольные постоянные зависят не только от начальных условий ( $q_0$ ,  $\dot{q}_0$ ), но и от параметров возмущающей силы ( $f_0$ ,  $p$ ,  $\beta$ ), а следовательно, первое слагаемое в

решении фактически также определяет вынужденные колебания. Однако данное название все же получило широкое распространение, поскольку лишь второе слагаемое содержит частоту возмущающей силы  $p$ , в то время как первое — частоту свободных колебаний (собственную частоту)  $k$ .

В реальных системах, где всегда присутствуют силы сопротивления, свободные колебания с частотой  $k$  с течением времени затухают, и устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные вынужденные колебания с частотой  $p$ , уравнение которых имеет вид

$$q = \frac{f_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \beta).$$

Если  $p < k$ , то установившиеся вынужденные колебания будут совпадать по фазе с возмущающей силой, если же  $p > k$ , то вынужденные колебания будут находиться с ней в противофазе (сдвинуты по фазе на  $\pi$  по отношению к возмущающей силе). Введем амплитуду вынужденных колебаний  $D$ :

$$D = |A| = \frac{f_0}{|k^2 - p^2|}.$$

Тогда уравнение установившихся вынужденных колебаний можно будет представить в виде

$$q = D \sin(pt + \beta - \gamma), \tag{3.58}$$

где  $\gamma$  — сдвиг по фазе вынужденных колебаний от колебаний возмущающей силы,

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{при } p < k; \\ \pi, & \text{при } p > k. \end{cases}$$

Разделим числитель и знаменатель  $D$  на  $\omega^2$ . Учитывая, что  $f_0/k^2 = Q_0/c = D_{cm}$  есть статическое смещение системы от положения равновесия под действием постоянной силы, совпадающей по величине с амплитудой  $Q(t)$ , получаем

$$D = D_{cm} \frac{1}{|1 - z^2|},$$

где  $z = p/k$  — коэффициент расстройки, или относительная частота возмущающей силы.

Величину  $\lambda = \frac{1}{|1-z^2|}$  называют коэффициентом динамичности. Коэффициент

динамичности показывает во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при гармоническом воздействии больше статического смещения системы от постоянной силы  $Q_0$ .

2 *Резонанс*. В случае совпадения частоты возмущающей силы с частотой свободных колебаний (собственной частотой) возникает явление резонанса. При отсутствии сил сопротивления в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний, нарастая во времени, стремится к бесконечности.

Будем искать частное решение уравнения (3.51) при  $p = k$  в виде

$$q_2 = Gt \cos(pt + \beta).$$

Определив

$$\ddot{q}_2 = -Gp \sin(pt + \beta) - Gtp^2 \cos(pt + \beta),$$

и подставив его вместе с  $q_2$  в (3.51), получим

$$-Gp \sin(pt + \beta) = f_0 \sin(pt + \beta).$$

Отсюда  $G = -f_0 / 2p$  и, следовательно,

$$q_2 = -\frac{f_0 t}{2p} \cos(pt + \beta) = \frac{f_0 t}{2p} \sin(pt + \beta - \frac{\pi}{2}). \quad (3.59)$$

Резонанс, сопровождающийся нарастанием амплитуды колебаний пусть до конечных, но больших значений, может стать причиной разрушения конструкции. Видим, что, с одной стороны, вынужденные колебания при резонансе смещены по фазе (запаздывают по фазе) от вынуждающей силы на  $\pi/2$ . С другой стороны, можно заметить, что вынужденные колебания при резонансе происходят с нарастающей пропорционально времени амплитудой.

Отметим, что в реальной колебательной системе, во-первых, всегда имеется сопротивление и во-вторых, при достижении больших размахов колебаний нарушается допущение о малости колебаний и становятся существенными

нелинейные восстанавливающие силы. Все это приводит к тому, что амплитуда колебаний при резонансе в реальной колебательной системе хотя и может достигать больших значений, но не является неограниченно возрастающей.

Резонанс, сопровождающийся нарастанием амплитуды колебаний до больших значений может стать причиной разрушения конструкций или возникновения опасных напряжений, сокращающих срок их службы. Поэтому при проектировании машиностроительных конструкций надо, по возможности, избегать резонанса.

### 3.4.2.2 Инерционное возбуждение

В случае инерционного возбуждения колебаний

$$f_0 = \tilde{f}_0 p,$$

где  $\tilde{f}_0 = Q_0 / ap^2$  и измеряется в тех же единицах, что и обобщенная координата.

Тогда, согласно (3.59), амплитуда вынужденных колебаний  $D$  имеет вид

$$D = \frac{\tilde{f}_0 p^2}{|\omega^2 - p^2|} = \tilde{f}_0 \frac{z^2}{|1 - z^2|} = \tilde{f}_0 \lambda_u.$$

где  $\lambda_u$  - коэффициент динамичности при инерционном возбуждении колебаний,

$$\lambda_u = \frac{z^2}{|1 - z^2|}.$$

Коэффициент динамичности  $\lambda_u$  показывает во сколько раз амплитуда колебаний при инерционном возбуждении с конечной частотой  $p$  отличается от амплитуды вынужденных колебаний при бесконечно большой частоте  $p \rightarrow \infty$  ( $z \rightarrow \infty$ ).

### 3.4.3 Лабораторная работа на вынужденные колебания системы без учета сил сопротивления

Выполнение лабораторной работы на вынужденные колебания механических систем с одной степенью свободы без учета сил сопротивления рекомендуется производить по следующему алгоритму:

- 1 Выбрать обобщенную координату, определяющую положение системы;
- 2 Составляем выражение кинетической энергии  $T$  и находим коэффициент инерции  $a$ ;
- 3 Определяем потенциальную энергию  $\Pi$  и квазиупругий коэффициент  $c$ ;
- 4 Составить дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в виде (3.47), подставив в него обобщенную силу  $Q(t)$ , соответствующую обобщенной координате;
- 5 Сопоставить собственную частоту с частотой возмущающей силы, определив наличие или отсутствие резонанса;
- 6 Проинтегрировать дифференциальное уравнение колебаний и найти закон движения системы.

**Лабораторная работа №4 (вариант 1).** Маятник состоит из невесомого стержня длины  $2l$ , несущего массу  $m_1$  на своем конце (рисунок 3.16). В точке  $A$  к стержню прикреплен пружина жесткости  $c_1$  на расстоянии  $l$  от его верхнего конца и невесомый шатун  $AC$ . Противоположный конец пружины закреплен. В точке  $C$  с шатуном, закреплен ползун массой  $m_2$ , способный совершать движения по горизонтали. К ползуну  $C$  приложена сила  $F = F_0 \sin pt$ , направленная влево. Полагая, что движение начинается из положения статического равновесия, начальная скорость ползуна равна  $v_0$  и сонаправлена с силой  $\bar{F}$ , найти уравнение движения маятника.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол поворота  $\varphi$  маятника от положения статического равновесия (рисунок 3.17).

Уравнение Лагранжа II рода, в соответствии с (3.50) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = Q_F, \quad (3.60)$$

где  $Q_F$  - обобщенная сила, соответствующая возмущающей силе  $F$ .

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_B + T_C, \quad (3.61)$$

где  $T_B$  - кинетическая энергия тела  $B$ ;

$T_C$  - кинетическая энергия ползуна  $C$ .



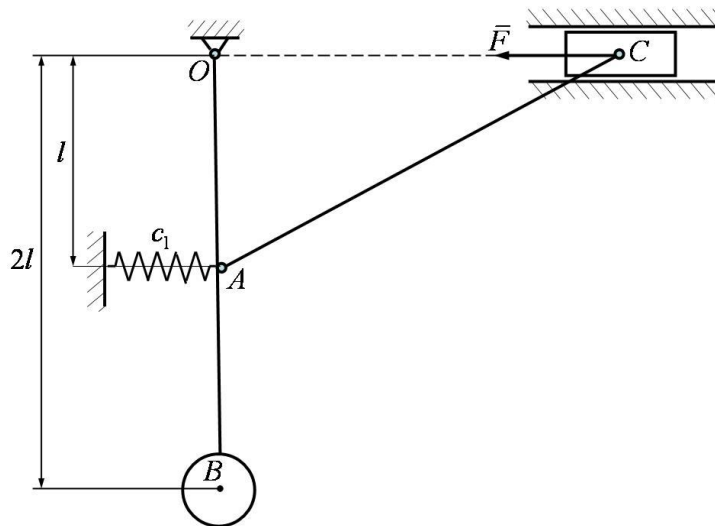


Рисунок 3.16 – Система, состоящая из маятника и ползуна

Выразим скорость тела  $B$  через обобщенную скорость  $\dot{\varphi}$ :

$$v_B = 2\dot{\varphi}l.$$

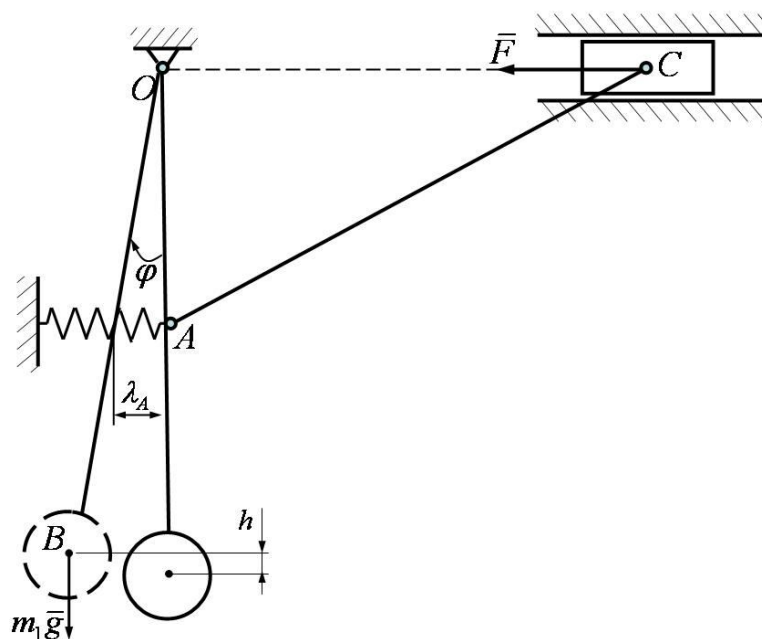


Рисунок 3.17 – Колебания механической системы

Для выражения скорости ползуна  $C$  через обобщенную скорость  $\dot{\varphi}$ , будем иметь в виду, что стержень  $AC$  совершает плоское движение; скорости  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_C$  параллельны. Таким образом, мгновенный центр скоростей шатуна  $AC$  находится в бесконечности и, в данном положении, скорости точек  $A$  и  $C$  равны.

Рассматриваемые колебания являются малыми, следовательно, считаем, что в соседних положениях это условие тоже выполняется. Тогда

$$v_C = v_A = \dot{\phi}l.$$

Кинетическая энергия тела  $B$ :

$$T_B = \frac{m_1 v_B^2}{2} = 2m_1 \dot{\phi}^2 l^2.$$

Кинетическая энергия ползуна  $C$ :

$$T_C = \frac{m_2 v_C^2}{2} = \frac{m_2 \dot{\phi}^2 l^2}{2}.$$

Подставив полученные значения в формулу (3.61), имеем

$$T = 2m_1 \dot{\phi}^2 l^2 + \frac{m_2 \dot{\phi}^2 l^2}{2} = \frac{\dot{\phi}^2 l^2}{2} (4m_1 + m_2) = \frac{a \dot{\phi}^2}{2}, \quad (3.62)$$

где коэффициент инерции

$$a = l^2 (4m_1 + m_2).$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \Pi_{m_1 g} + \Pi_{c_1}, \quad (3.63)$$

где  $\Pi_{m_1 g}$  - потенциальная энергия тела  $B$  в поле силы тяжести;

$\Pi_{c_1}$  - потенциальная энергия деформируемой пружины.

Потенциальная энергия ползуна  $C$  в поле силы тяжести равна нулю, так как вертикальное перемещение ползуна равно нулю.

Потенциальная энергия  $\Pi_{m_1 g}$  равна

$$\Pi_{m_1 g} = m_1 g h,$$

где  $h$  - вертикальное смещение центра тяжести тела  $B$ , вычисленное с точностью до величин второго порядка малости.

Из рисунка 3.17 видно, что

$$h = 2l - 2l \cos \varphi.$$

Ограничиваясь в формуле разложения  $\cos \varphi$  двумя первыми членами

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

получаем

$$h = 2l - 2l\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = l\varphi^2.$$

Тогда

$$\Pi_{m_1g} = m_1gl\varphi^2.$$

Потенциальная энергия пружины найдем, рассматривая перемещение системы из отклоненного положения в положение соответствующее недеформированным пружинам, а так как, по условию, движение системы начиналось из положения статического равновесия, значит, это положение соответствует положению покоя. Т.е. статическое отклонение пружины равно нулю ( $f_{cm} = 0$ ).

Таким образом

$$\Pi_{c_1} = \frac{c_1\lambda_C^2}{2},$$

где  $\lambda_C$  - деформация пружины,  $\lambda_C = \lambda_A = l \sin \varphi = l\varphi$ .

Следовательно,

$$\Pi_{c_1} = \frac{c_1l^2\varphi^2}{2}.$$

Подставим полученные значения в формулу (3.63)

$$\Pi = m_1gl\varphi^2 + \frac{c_1l^2\varphi^2}{2} = \frac{\varphi^2}{2}(2m_1gl + c_1l^2) = \frac{c\varphi^2}{2}, \quad (3.64)$$

где квазиупругий коэффициент

$$c = 2m_1gl + c_1l^2.$$

Определим обобщенную силу  $Q_F$ , соответствующую возмущающей силе  $F$ :

$$Q_F = \frac{Fl\delta\varphi}{\delta\varphi} = Fl = F_0l \sin pt .$$

Подставив  $T$ ,  $\Pi$  и  $Q_F$  в уравнение Лагранжа (3.60), получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы:

$$a\ddot{\varphi} + c\varphi = F_0l \sin pt ,$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = f_0 \sin pt , \quad (3.65)$$

где  $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ ;  $f_0 = \frac{F_0l}{a}$ .

В соответствии с (3.52), представим решение линейного неоднородного уравнения (3.65) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 .$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\varphi_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt .$$

Частное решение запишем в виде

$$\varphi_2 = D \sin pt .$$

Тогда

$$\ddot{\varphi}_2 = -Dp^2 \sin pt .$$

Подставив  $\varphi_2$  и  $\ddot{\varphi}_2$  в уравнение (3.65), получим

$$-Dp^2 \sin pt + Dk^2 \sin pt = f_0 \sin pt ,$$

или

$$D(k^2 - p^2) = f_0 .$$

Откуда следует

$$D = \frac{f_0}{k^2 - p^2} = \frac{F_0la}{c - ap^2} .$$

Общее решение уравнения (3.65) будет иметь вид

$$\varphi = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot t\right) + \frac{F_0 l a}{c - a p^2} \sin p t,$$

а уравнение для обобщенной скорости:

$$\dot{\varphi} = -C_1 \sqrt{\frac{c}{a}} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot t\right) + C_2 \sqrt{\frac{c}{a}} \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot t\right) + \frac{F_0 l a p}{c - a p^2} \cos p t.$$

Произвольные постоянные  $C_1, C_2$  получим подставив в полученные уравнения начальные условия:  $t = 0, \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{a}$ :

$$C_1 = 0; \quad C_2 = v_0 \sqrt{\frac{a}{c}} - \frac{F_0 l a p}{c - a p^2}.$$

Уравнение движения системы запишется в виде

$$\varphi = \left( v_0 \sqrt{\frac{a}{c}} - \frac{F_0 l a p}{c - a p^2} \right) \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot t\right) + \frac{F_0 l a}{c - a p^2} \sin p t.$$

Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14 представлено на рисунке 3.18.

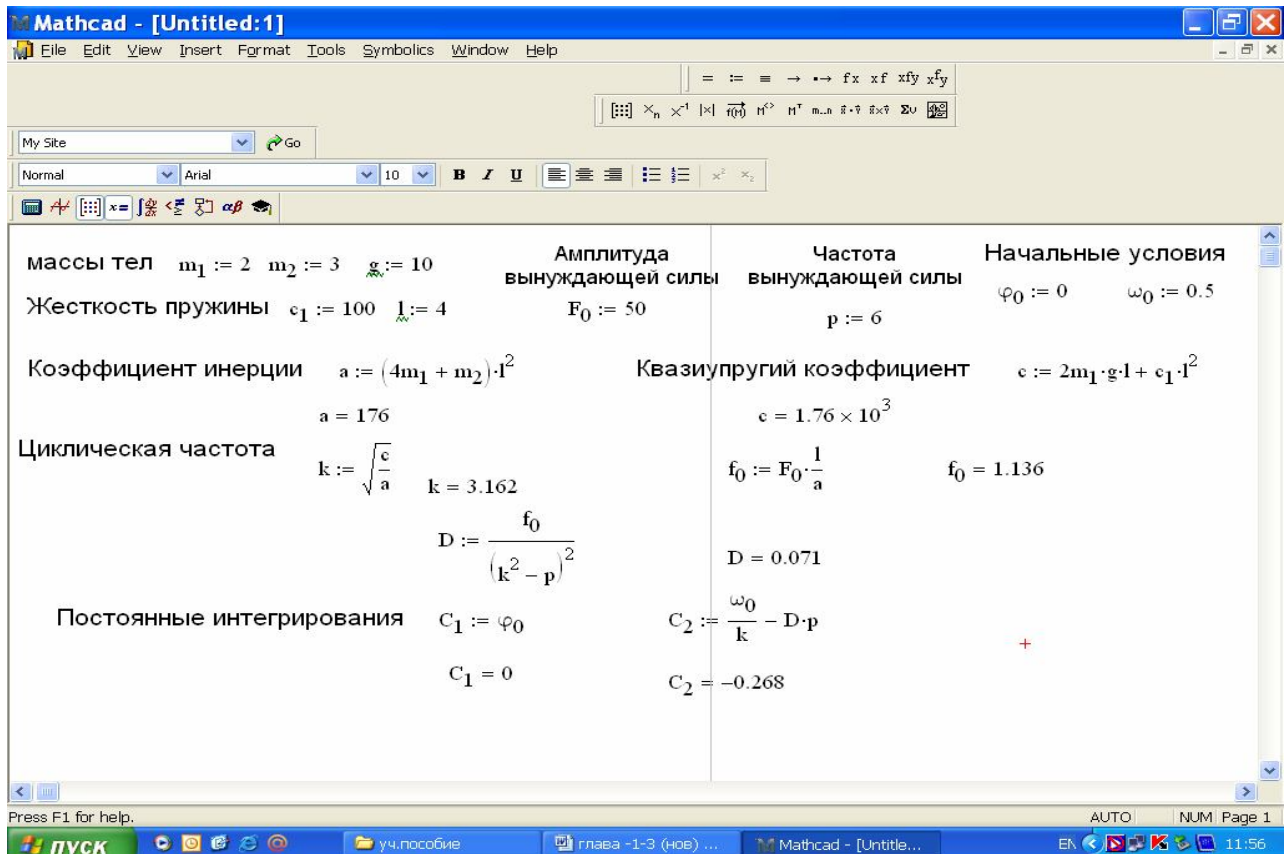


Рисунок 3.18 - Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14

**Лабораторная работа №4 (вариант 2).** К однородному диску массы  $m = 10$  кг, в точке  $A$ , прикреплена пружина жесткости  $c_1 = 60$  Н/м (рисунок 3.19). Противоположный конец пружины совершает горизонтальные колебания согласно уравнению  $y = 3 \sin 2t$ . Движение диска по неподвижной поверхности происходит без скольжения. В положении покоя пружина не деформирована. Найти уравнение движения диска, если в начальном положении центр масс  $C$  диска отклонен вправо на  $0,05$  м, а его начальная скорость равна  $v_{C0} = 0,2$  м/с и направлена влево.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем перемещение  $x$  центра масс диска (рисунок 3.20).

Уравнение Лагранжа II рода запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = Q_F, \quad (3.66)$$

где  $Q_F$  - обобщенная сила, соответствующая возмущающей силе.

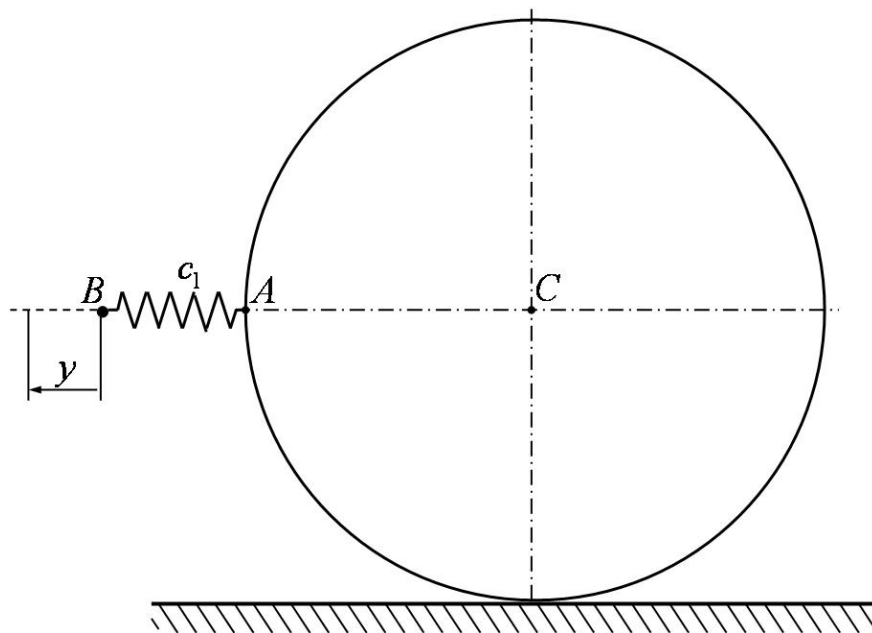


Рисунок 3.19 – Колебание диска при кинематическом возмущении

Кинетическая энергия диска:

$$\Gamma = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}.$$

Выразим скорость  $v_C$  и угловую скорость  $\omega$  через обобщенную скорость  $\dot{x}$ :

$$v_C = \dot{x}; \quad \omega = \frac{\dot{x}}{R}.$$

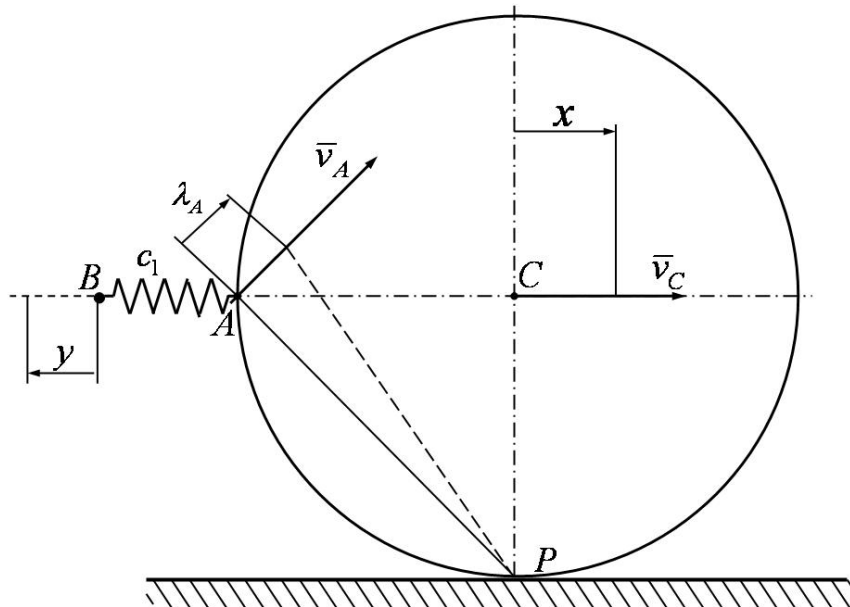


Рисунок 3.20 – Вынужденные колебания диска

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс

$$J_C = \frac{mR^2}{2}.$$

Тогда кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{3m\dot{x}^2}{4} = \frac{1}{2}a\dot{x}^2, \quad (3.67)$$

где  $a = \frac{3}{2}m = 15 \text{ кг}$ .

Потенциальная энергия системы равна:

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1\lambda^2,$$

где  $\lambda$  - перемещение пружины, которое складывается из перемещения точек A и B пружины:

$$\lambda = \lambda_A - y.$$

Так как

$$v_A = \omega \cdot AP = \frac{v_C}{R} \cdot R\sqrt{2} = \dot{x}\sqrt{2},$$

то

$$\lambda_A = x\sqrt{2}.$$

Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1(x\sqrt{2} - y)^2 = \frac{1}{2}c_1(2x^2 - 2\sqrt{2}xy + y^2),$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2c_1x - \sqrt{2}c_1y. \quad (3.68)$$

Обобщенная сила  $Q_F$ , соответствующая возмущающей силе равна нулю.

Подставив  $T$ ,  $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$  и  $Q_F$  в уравнение (3.66), получим дифференциальное

уравнение вынужденных колебаний системы:

$$a\ddot{x} + 2c_1x - \sqrt{2}c_1y = 0,$$

или, после подстановки  $y$

$$\ddot{x} + k^2x = 180\sqrt{2} \sin 2t, \quad (3.69)$$

где  $k = \sqrt{\frac{2c_1}{a}} = \sqrt{\frac{120}{15}} = 2,83$  рад/с.

Так как  $k \neq p$ , то резонанс отсутствует.

Представим решение линейного неоднородного уравнения (3.69) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$x = x_1 + x_2.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Частное решение запишем в виде

$$x_2 = D \sin 2t.$$



Тогда

$$\ddot{x}_2 = -4D \sin 2t.$$

Подставив  $\varphi_2$  и  $\ddot{\varphi}_2$  в уравнение (3.69), получим

$$-4D \sin 2t + 8D \sin 2t = 180\sqrt{2} \sin 2t.$$

Откуда следует

$$D = 7 \text{ м.}$$

Общее решение уравнения (3.69) будет иметь вид

$$x = C_1 \cos 2,83t + C_2 \sin 2,83t + 7 \sin 2t,$$

а уравнение для обобщенной скорости:

$$\dot{x} = -2,83C_1 \sin 2,83t + 2,83C_2 \cos 2,83t + 7 \cos 2t.$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  найдем подставив в полученные уравнения начальные условия:  $t = 0$ ,  $x_0 = 0,05 \text{ м}$ ,  $\dot{x}_0 = -v_{C0} = -0,2 \text{ м/с}$  (знак минус указывает на то, что направление начальной скорости противоположно принятому направлению изменения обобщенной координаты):

$$C_1 = 0,05 \text{ м}; \quad C_2 = -14,07 \text{ м.}$$

Уравнение движения системы запишется в виде

$$x = 0,05 \cos 2,83t - 14,07 \sin 2,83t + 7 \sin 2t.$$

Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14 представлено на рисунке 3.21.

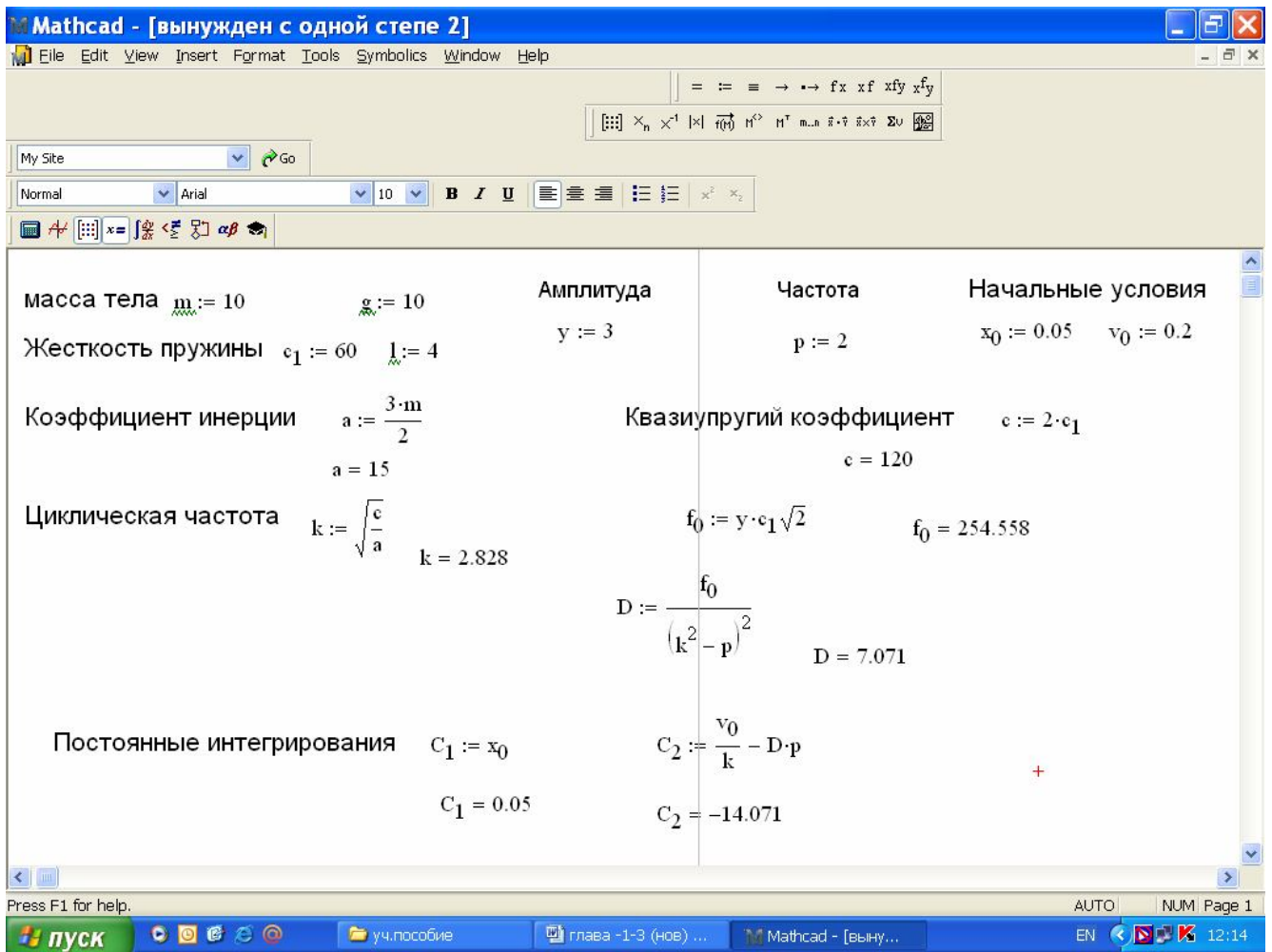


Рисунок 3.21 - Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14

### 3.4.4 Вынужденные колебания при наличии линейного сопротивления

Уравнение Лагранжа II рода принимает вид (3.20), а дифференциальное уравнение при гармоническом возбуждении имеет вид (3.22).

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = f_0 \sin(pt + \beta). \quad (3.70)$$

Решение уравнения (3.70) будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$q = q_1 + q_2.$$

Как было показано в 3.3, общее решение однородного уравнения в зависимости от соотношения между  $n$  и  $k$  может быть представлено в одной из трех форм:

$$q_1 = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) \quad \text{при } n < k;$$

$$q_1 = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}) \quad \text{при } n > k; \quad (3.71)$$

$$q_1 = e^{-nt} (C_1 + C_2 t) \quad \text{при } n = k.$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Частное решение (3.70) получим, воспользовавшись методом комплексных амплитуд.

Известно, что

$$f_0 e^{i(pt+\beta)} = f_0 \cos(pt + \beta) + i f_0 \sin(pt + \beta),$$

где  $i$  — мнимая единица, и, следовательно,

$$f_0 \sin(pt + \beta) = \text{Im } f_0 e^{i(pt+\beta)}.$$

Введем вспомогательное уравнение

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = f_0 e^{i(pt+\beta)},$$

и найдем его частное решение  $y_2$ . Воспользовавшись линейностью введенного уравнения, для которого справедлив принцип суперпозиции, получим  $q_2$  как  $\text{Im } y_2$ .

Задав  $y_2$  в виде

$$y_2 = B f_0 e^{i(pt+\beta)},$$

где  $B$  — комплексная амплитуда,

получим

$$(k^2 - p^2 + 2nip)B = f_0.$$

Отсюда

$$B = \frac{f_0}{(k^2 - p^2 + 2nip)} = \frac{f_0}{D^* e^{i\gamma}} \sqrt{2}.$$

Здесь

$$D^* = \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}; \quad \gamma = \text{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (3.72)$$

Тогда

$$B = De^{-i\gamma},$$

где

$$D = \frac{f_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad (3.73)$$

и, следовательно,

$$y_2 = De^{(pt + \beta - \gamma)}.$$

Таким образом,

$$q_2 = \text{Im } y_2 = D \sin(pt + \beta - \gamma). \quad (3.74)$$

причем  $\gamma$  есть фазовое запаздывание (сдвиг по фазе) вынужденных колебаний от колебаний возмущающей силы.

Общее решение (3.70) будет иметь вид

$$\begin{aligned} q &= e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + D \sin(pt + \beta - \gamma) \quad \text{при } n < k; \\ q &= e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}) + D \sin(pt + \beta - \gamma) \quad \text{при } n > k; \\ q &= e^{-nt} (C_1 + C_2 t) + D \sin(pt + \beta - \gamma) \quad \text{при } n = k, \end{aligned} \quad (3.75)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Структура общих решений (3.70) однородного уравнения такова, что при любых отличных от нуля значениях  $n$  с течением времени из-за наличия множителя  $e^{-nt}$  они стремятся к нулю, и в решении (3.75) остается только  $q_2$ . В этом случае говорят об установившихся вынужденных колебаниях.

На основании решения (3.74) можно сформулировать основные свойства установившихся вынужденных колебаний:

- 1 Эти колебания являются незатухающими; они длятся так долго, как долго действует возмущающая сила;
- 2 Вынужденные колебания не зависят от начальных условий;
- 3 При гармоническом возбуждении они происходят с частой возмущающей силы;
- 4 Установившиеся вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей

силы на величину  $\gamma$ , изменяющуюся, как будет показано ниже, в пределах от 0 до  $\pi$ .

Амплитуда  $D$  и фазовое запаздывание  $\gamma$  установившихся вынужденных колебаний в силу (3.72) и (3.73) зависят от соотношения между частотами  $p$  и  $k$  и коэффициента затухания  $n$ . Проанализируем эти зависимости, называемые амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками.

Для большей общности результатов перейдем к безразмерным параметрам.

Безразмерным коэффициентом затухания  $d$  называют отношение

$$d = 2n/k.$$

Добротностью  $D$  называют величину, обратную к  $d$ :

$$D = \frac{1}{d} = \frac{k}{2n}.$$

Разделив числитель и знаменатель амплитуды (3.72) на  $k^2$ , получим

$$D = D_{cm} \lambda,$$

где  $D_{cm} = Q_0/c$  - статическое смещение системы от положения равновесия;

$\lambda$  - коэффициент динамичности,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + d^2 z^2}}; \quad (3.76)$$

$z$  - коэффициент расстройки.

Исследуем зависимость коэффициента динамичности  $\lambda$  от  $z$  и  $d$ , представляющую собой амплитудно-частотную характеристику системы в безразмерном виде:

$$\lambda = 1 \text{ при } z = 0;$$

$$\lambda \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty;$$

$$\lambda = 1/d = D \text{ при } z = 1.$$

Видим, что добротность  $D$  представляет собой коэффициент динамичности при резонансе. Она показывает, во сколько раз амплитуда колебаний при резонансе отличается от статического смещения. В отличие от случая, когда вязкое сопротивление

отсутствует, амплитуда при резонансе имеет конечное значение. Если частота  $p$  изменения возмущающей силы мала по сравнению с частотой со свободных колебаний, т. е.  $p \ll k$ , то амплитуда вынужденных колебаний близка к статическому смещению, а коэффициент динамичности близок к единице. Если же частота изменения возмущающей силы значительно больше частоты свободных колебаний, т. е.  $p \gg k$ , то колебательная система ведет себя как фильтр, практически не воспринимая возмущения с частотами, существенно превышающими собственную частоту.

### 3.4.5 Лабораторная работа на вынужденные колебания системы с учетом сил сопротивления

Выполнение лабораторной работы на вынужденные колебания механических систем с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления рекомендуется производить по следующему алгоритму:

- 1 Выбрать обобщенную координату, определяющую положение системы;
- 2 Определяем кинетическую энергию  $T$  и коэффициент инерции  $a$ ;
- 3 Определяем потенциальную энергию  $\Pi$  и квазиупругий коэффициент  $c$ ;
- 4 Находим диссипативную функцию Рэлея  $\Phi$  и обобщенный коэффициент сопротивления  $b$ ;
- 5 Составить дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в виде (3.70), подставив в него обобщенную силу  $Q(t)$ , соответствующую обобщенной координате;
- 6 Проинтегрировать дифференциальное уравнение колебаний и найти уравнение вынужденных колебаний системы в виде (3.74).

**Лабораторная работа №5 (вариант 1).** Найти уравнение вынужденных колебаний стержня  $OB$  в лабораторной работе №4 (вариант 1), учитывая, что к телу  $B$  прикреплен демпфер, создающий силу сопротивления, пропорциональную скорости с коэффициентом пропорциональности  $\mu = 5 \text{ кг} \cdot \text{с}/\text{м}$ . Известны значения следующих величин:  $m_1 = 1 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 6 \text{ кг}$ ,  $l = 2 \text{ м}$ ,  $c_1 = 30 \text{ Н}/\text{м}$ ,  $F_0 = 20 \text{ Н}$ ,  $p = 4 \text{ рад}/\text{с}$ .

За обобщенную координату примем угол поворота  $\varphi$  маятника от положения статического равновесия (рисунок 3.22).

Уравнение Лагранжа II рода запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = Q_F, \quad (3.77)$$

где  $Q_F$  - обобщенная сила, соответствующая возмущающей силе  $F$ .

Кинетическая энергия системы определена по формуле (3.62) и равна

$$T = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2},$$

где коэффициент инерции

$$a = l^2(4m_1 + m_2) = 40 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

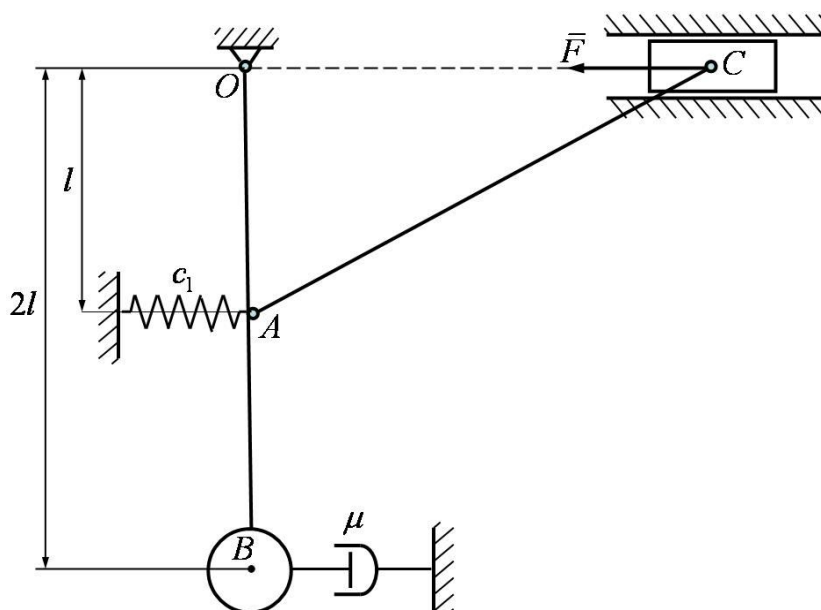


Рисунок 3.22 – Вынужденные колебания системы с учетом сопротивления

Потенциальная энергия системы определена по формуле (3.64) и равна

$$\Pi = \frac{c\varphi^2}{2}.$$

где квазиупругий коэффициент

$$c = 2m_1gl + c_1l^2 = 160 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Диссипативная функция Рэлея имеет вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \cdot (OB)^2 \cdot \dot{\varphi}^2,$$

или

$$\Phi = \frac{1}{2} b \cdot \dot{q}^2,$$

где обобщенный коэффициент сопротивления  $b = \mu \cdot (OB)^2 = \mu \cdot (2l)^2 = 80 \text{ кг} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$ .

Обобщенная сила, соответствующая возмущающей силе  $F$  равна

$$Q_F = F_0 l \sin pt.$$

Подставим полученные функции в уравнение Лагранжа II рода вида (3.77), получим:

$$a\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi = F_0 l \sin pt,$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = f_0 \sin pt,$$

где  $n = \frac{b}{2a} = 1 \text{ рад/с}$ ;  $k = \sqrt{\frac{c}{a}} = 2 \text{ рад/с}$ ;  $f_0 = \frac{F_0 l}{a} = 1 \text{ с}^{-2}$ .

Амплитуду вынужденных колебаний найдем по формуле (3.73):

$$D = \frac{f_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2^2 - 4^2)^2 + 4 \cdot 1^2 \cdot 4^2}} = 0,069 \text{ м}.$$

Фазовое запаздывание вынужденных колебаний от колебаний возмущающей силы определим по формуле (3.72):

$$\gamma = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2} = \arctg \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{2^2 - 4^2} = -0,64.$$

Уравнение вынужденных колебаний стержня  $OB$ , согласно (3.74), примет вид

$$\varphi = 0,11 \sin(4t + 0,64).$$

Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14 представлено на рисунке 3.23.



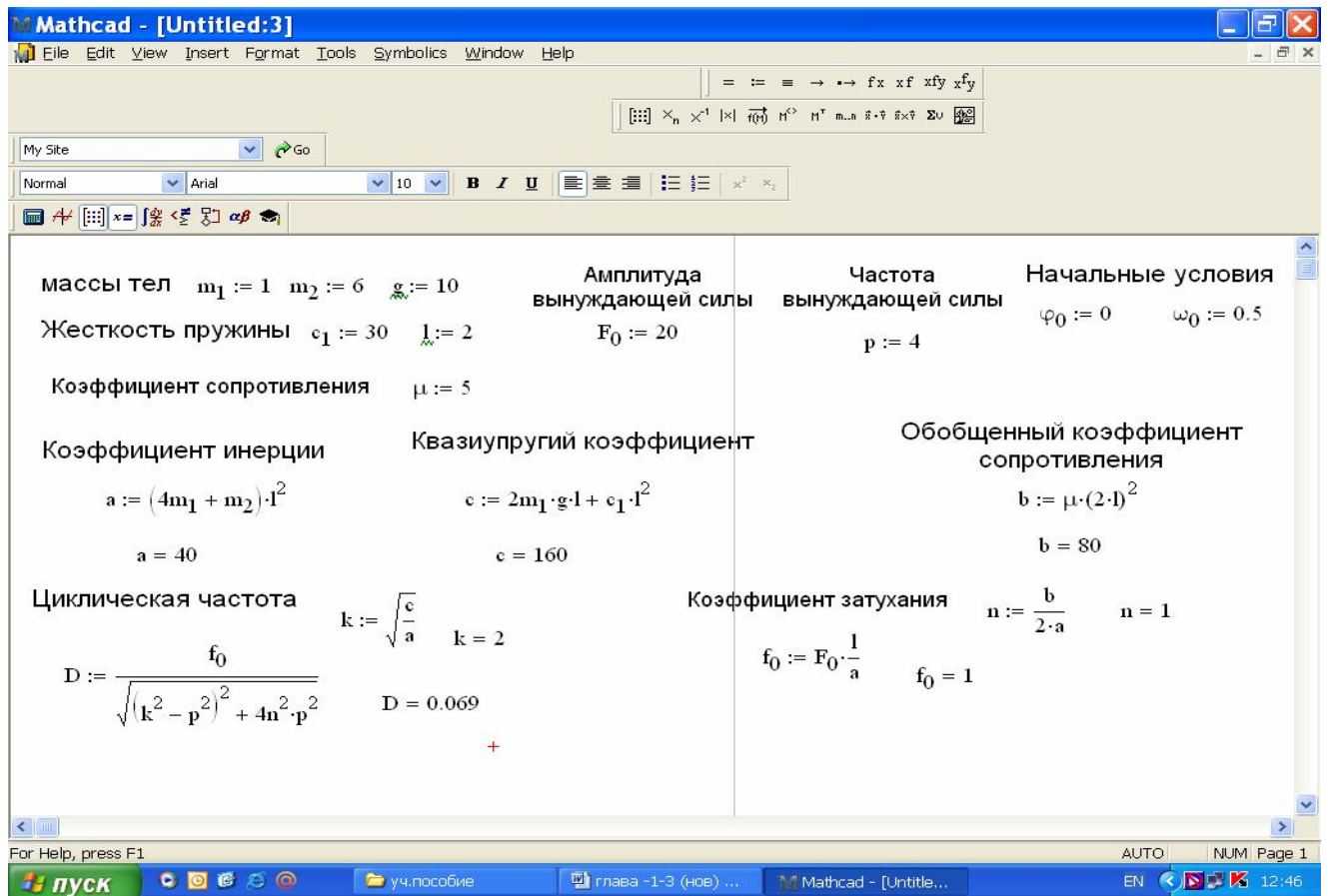


Рисунок 3.23 - Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14

**Лабораторная работа №5 (вариант 2).** Найти уравнение вынужденных колебаний однородного диска в лабораторной работе №4 (вариант 2), учитывая, что к точке  $B$  диска прикреплен демпфер, создающий силу сопротивления, пропорциональную скорости с коэффициентом пропорциональности  $\mu = 1,5 \text{ кг} \cdot \text{с}/\text{м}$ .

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем перемещение  $x$  центра масс диска (рисунок 3.24).

Уравнение Лагранжа II рода запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = Q_F, \quad (3.78)$$

Кинетическая энергия диска вычислена по формуле (3.67) и равна

$$T = \frac{1}{2} a \dot{x}^2,$$

где  $a = \frac{3}{2} m = 15 \text{ кг}$ .

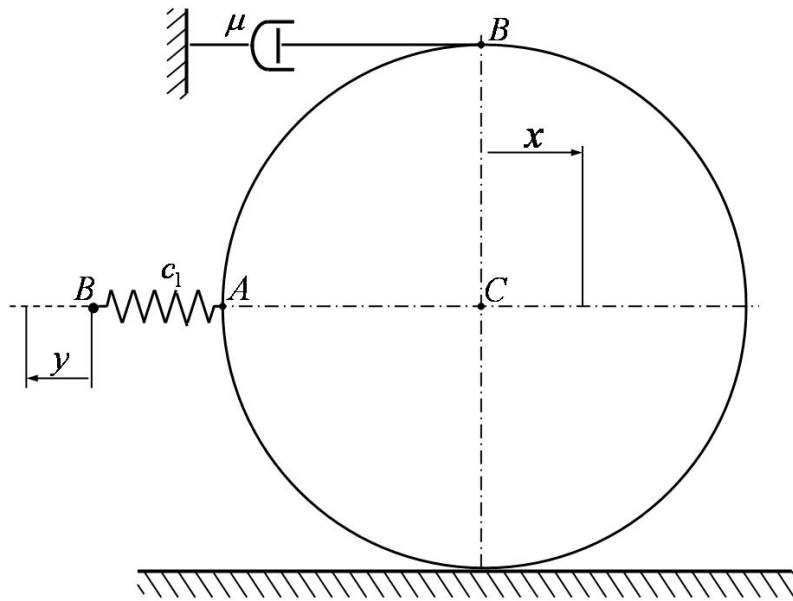


Рисунок 3.24 – Вынужденные колебания диска

Производная от потенциальной энергии системы по обобщенной координате определяется по формуле (3.68):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2c_1 x - \sqrt{2}c_1 y = 2c_1 x - 3\sqrt{2}c_1 \sin 2t.$$

Диссипативная функция Рэля имеет вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \cdot v_B^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot (2\dot{x})^2,$$

или

$$\Phi = \frac{1}{2} b \cdot \dot{q}^2,$$

где обобщенный коэффициент сопротивления  $b = 4\mu = 6 \text{ кг} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$ .

Обобщенная сила  $Q_F$ , соответствующая возмущающей силе равна нулю.

Подставив  $T$ ,  $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ ,  $\Phi$  и  $Q_F$  в уравнение (3.78), получим дифференциальное

уравнение вынужденных колебаний системы:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + k^2 x = 180\sqrt{2} \sin 2t,$$

где  $n = \frac{b}{2a} = 0,2 \text{ рад/с}$ ;  $k = \sqrt{\frac{2c_1}{a}} = \sqrt{\frac{120}{15}} = 2,83 \text{ рад/с}$ .

Амплитуду вынужденных колебаний найдем по формуле (3.73):

$$D = \frac{f_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{180\sqrt{2}}{\sqrt{(4^2 - 2^2)^2 + 4 \cdot 0,2^2 \cdot 2^2}} = 62,4 \text{ м.}$$

Фазовое запаздывание вынужденных колебаний от колебаний возмущающей силы определим по формуле (3.72):

$$\gamma = \text{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2} = \text{arctg} \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 2}{2,83^2 - 2^2} = 0,07.$$

Уравнение вынужденных колебаний стержня *OB*, согласно (3.74), примет вид

$$\varphi = 62,4 \sin(2t - 0,07).$$

Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14 представлено на рисунке 3.25.

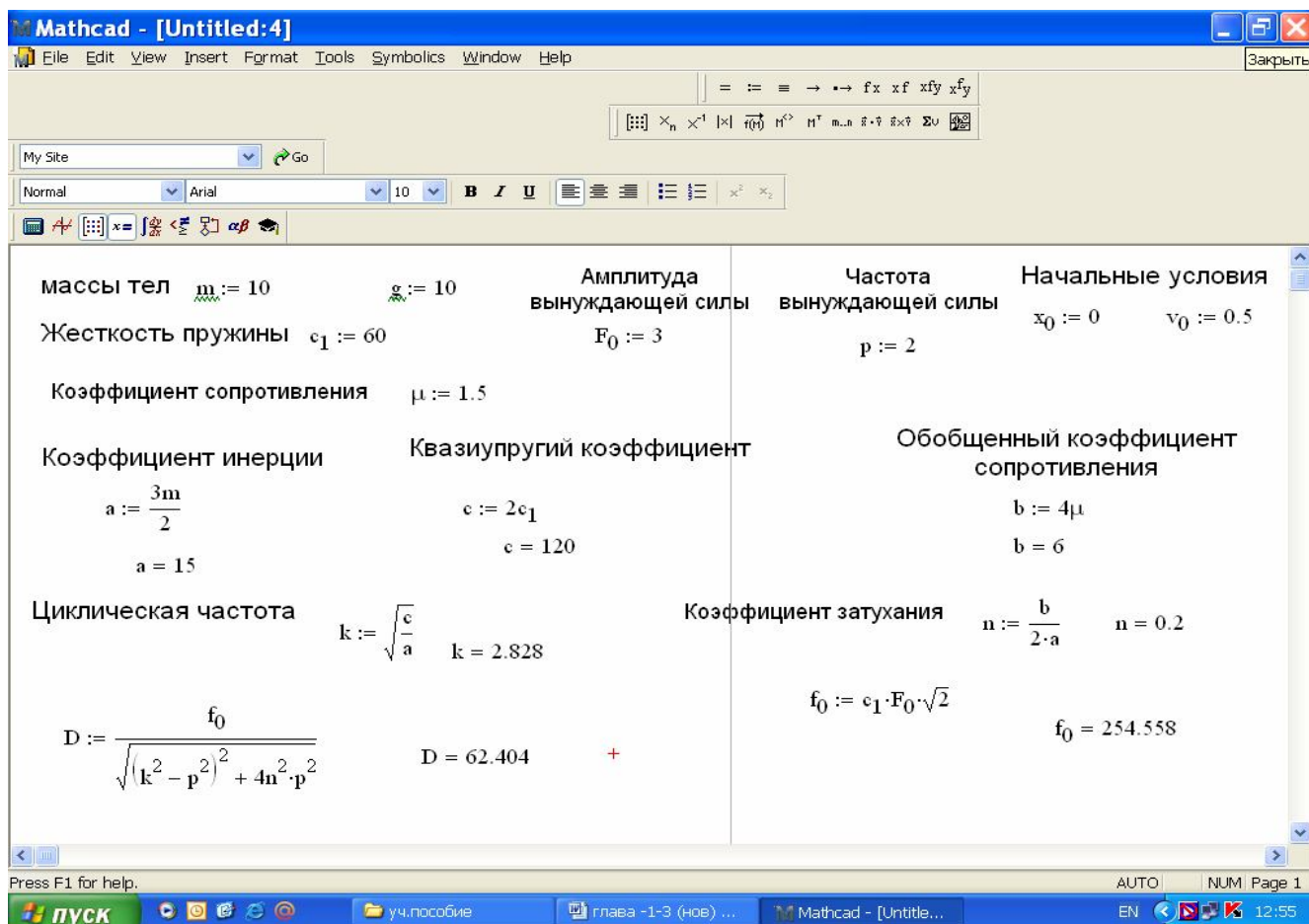


Рисунок 3.25 - Выполнение лабораторной работы в в Mathcad 14

### 3.4.6 Переходные процессы

Важной характеристикой колебательной системы является временная характеристика – изменение колебаний во времени.

Анализ решения (3.75) показывает, что по истечении определенного промежутка времени с начала колебаний свободное движение затухает. Однако оно возникает каждый раз, когда изменяется возмущающая сила. Возникнув, свободное движение осуществляет плавный переходный процесс от одного установившегося режима вынужденных колебаний к другому.

Чтобы получить переходный процесс, необходимо зафиксировать значения отклонения и скорости в момент изменения параметров возмущающей силы, а затем, считая эти значения начальными условиями, использовать полное решение (3.75), определив в нем произвольные постоянные.

### 3.5 Вынужденные колебания в случае периодической возмущающей силы

Часто в технических задачах возмущающая сила является периодической, но негармонической. Это, например, силы, приведенные на рисунках 3.26.

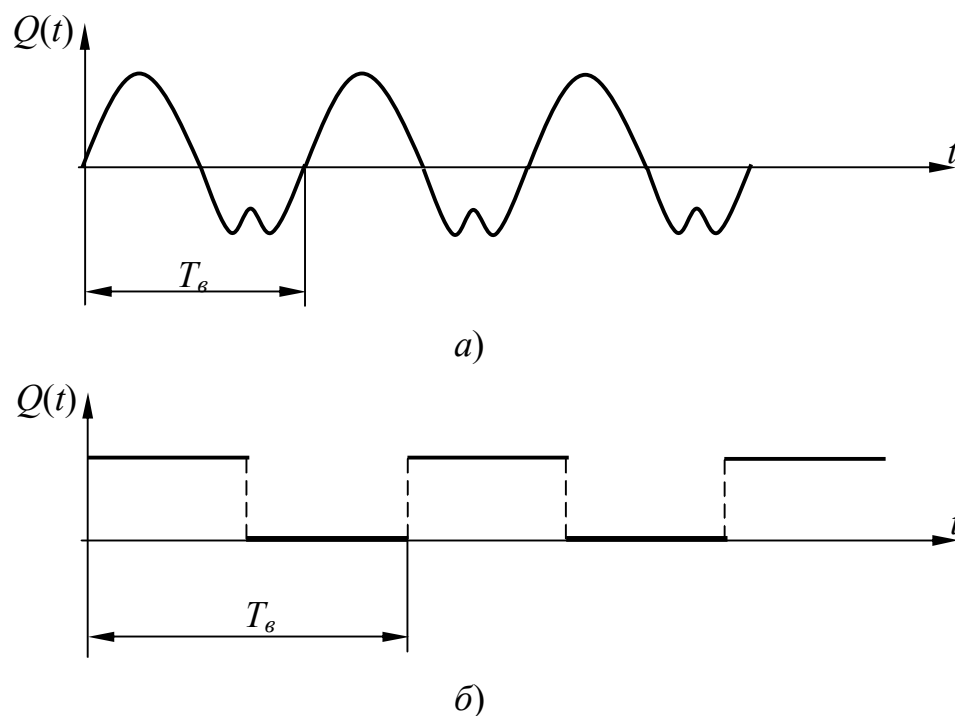


Рисунок 3.26 – Зависимость негармонической возмущающей силы от времени

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t), \quad (3.79)$$

где  $Q(t) = Q(t + T_B)$ ;

$T_B$  — период возмущающей силы.

Ограничимся случаями силового и кинематического возбуждения. Пусть функция  $Q(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. она ограничена, имеет разрывы первого рода и конечное число экстремумов на конечном интервале.

Тогда  $Q(t)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos npt + b_n \sin npt),$$

где

$$Q_0 = \frac{1}{T_B} \int_0^{T_B} Q(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T_B} \int_0^{T_B} Q(t) \cos(npt) dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T_B} \int_0^{T_B} Q(t) \sin npt dt; \quad p = \frac{2\pi}{T_B}; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

или в амплитудной форме

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(p_n t + \beta_n), \quad (3.80)$$

где  $Q_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ;  $p_n = np$ ;  $\beta_n = \text{arctg} \frac{a_n}{b_n}$ .

Отдельные члены этого ряда называются *гармониками*. Значениям  $n = 1, 2, 3, \dots$  соответствуют гармоники первого, второго, третьего и т. д. порядков.

Подставив (3.80) в (3.79) и разделив на  $a$ , получим дифференциальное уравнение в канонической форме:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(p_n t + \beta_n).$$

Решение уравнения, как и в случае гармонической возмущающей силы, можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения, характеризующего свободное движение, и частного решения

неоднородного уравнения, характеризующего установившиеся вынужденные колебания.

### 3.6 Вынужденные колебания при произвольном возбуждении

При отсутствии сопротивления ( $n = 0$ ) дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{1}{a} Q(t). \quad (3.81)$$

Используя метод вариации произвольных постоянных представим решение (3.81) в виде

$$q = C_1(t) \cos kt + C_2(t) \sin kt, \quad (3.82)$$

где  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  - искомые функции времени.

Дифференцируя по времени, получаем

$$\dot{q} = \dot{C}_1(t) \cos kt + \dot{C}_2(t) \sin kt - C_1(t)k \sin kt + C_2(t)k \cos kt.$$

В соответствии с методом варьирования произвольных постоянных полагаем

$$\dot{C}_1(t) \cos kt + \dot{C}_2(t) \sin kt = 0. \quad (3.83)$$

Тогда

$$\dot{q} = -C_1(t)k \sin kt + C_2(t)k \cos kt. \quad (3.84)$$

Продифференцируем  $\dot{q}$  по времени:

$$\ddot{q} = -\dot{C}_1(t)k \sin kt + \dot{C}_2(t)k \cos kt - k^2(C_1(t) \cos kt + C_2(t) \sin kt). \quad (3.85)$$

Подставив (3.82) и (3.84) в (3.81), имеем

$$\ddot{q} = -\dot{C}_1(t)k \sin kt + \dot{C}_2(t)k \cos kt = \frac{1}{ak} Q(t). \quad (3.86)$$

Уравнения (3.83) и (3.86) представляют собой неоднородную алгебраическую систему относительно  $\dot{C}_1(t)$  и  $\dot{C}_2(t)$ , невырожденную при любых значениях  $k$ ,

поскольку определитель этой системы

$$\Delta = \cos^2 kt + \sin^2 kt = 1.$$

Решая систему по способу Крамера, получаем

$$\dot{C}_1(t) = \frac{1}{ak} Q(t) \sin kt; \quad \dot{C}_2(t) = \frac{1}{ak} Q(t) \cos kt.$$

Откуда

$$C_1(t) = H_1 - \int_0^t \frac{1}{ak} Q(t) \sin kt dt; \quad C_2(t) = H_2 - \int_0^t \frac{1}{ak} Q(t) \cos(kt) dt, \quad (3.87)$$

где  $t$  - время, изменяющееся от 0 до  $\tau$ ;  $H_1, H_2$  — произвольные постоянные, равные соответственно  $C_1$  и  $C_2$  при  $t = 0$  и определяемые из начальных условий: при  $t = 0$ ,  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ .

В соответствии с выражениями (3.82) и (3.84)

$$H_1 = q_0; \quad H_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}.$$

Подставив (3.87) с учетом начальных условий в (3.82), получим

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{ak} \left( \sin k\tau \int_0^\tau Q(t) \cos kt dt - \cos k\tau \int_0^\tau Q(t) \sin kt dt \right). \quad (3.88)$$

Множители  $\sin kt$  и  $\cos kt$ , стоящие перед интегралами и независящие от переменной интегрирования  $t$ , можно внести под знаки интегралов:

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{ak} \int_0^\tau Q(t) \cdot (\sin k\tau \cdot \cos kt dt - \cos k\tau \cdot \sin kt) dt,$$

или

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{ak} \int_0^\tau Q(t) \cdot \sin k(\tau - t) dt.$$

Если сила  $Q(t)$  действует на покоящуюся систему ( $q_0=0$ ,  $\dot{q}_0=0$ ), то решение имеет вид

$$q = \frac{1}{ak} \int_0^\tau Q(t) \cdot \sin k(\tau - t) dt.$$

Слагаемое

$$q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt,$$

описывает свободные колебания, возникающие в результате начального отклонения и начальной скорости.

При наличии вязкого сопротивления дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \frac{1}{a}Q(t). \quad (3.89)$$

Ограничимся важным для инженерной практики случаем малого сопротивления ( $n < k$ ). Сделаем замену переменных

$$q = e^{-nt}y, \quad \dot{q} = e^{-nt}(\dot{y} - n \cdot y); \quad \ddot{q} = e^{-nt}(\ddot{y} - 2n \cdot \dot{y} + n^2y),$$

где  $y$  — новая переменная.

Подставив  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  в (3.89), получаем

$$e^{-nt}\ddot{y} + (k^2 - n^2)y \cdot e^{-nt} = \frac{1}{a}Q(t).$$

Разделив на  $e^{-nt}$  и учитывая, что  $k^2 - n^2 = k_1^2$ , находим

$$\ddot{y} + k_1^2y = \frac{1}{a}Q(t)e^{nt}.$$

Решение этого уравнения аналогично решению уравнения (3.81) с заменой  $k$  на  $k_1$  и  $Q(t)$  на  $Q(t)e^{nt}$ .

### 3.7 Основы теории регистрирующих приборов

Рассмотрим принципы работы некоторых приборов, предназначенных для регистрации переменных во времени физических величин. Ограничимся случаем, когда измеряемая величина является периодической (и, следовательно, может быть представлена в виде суммы гармоник) или, в частном случае, гармонической.

Практически все приборы в качестве одного из основных элементов имеют



пружину того или иного типа, деформация которой, порождаемая воздействием измеряемой величины (непосредственно или через систему датчик - усилитель - преобразователь) и определяет показания прибора.

Остановимся на двух типах приборов.

1 Приборы, предназначенные для непосредственного измерения некоторой физической величины. Простейшая схема такого прибора представлена на рисунке 3.27, где  $F$  - сила, определяемая измеряемой величиной  $x$ ;  $x_I = f(x)$  - показания прибора, пропорциональные деформации пружины под действием силы  $F$ . В идеале должно выполняться условие  $x_I(t) = Ax(t)$ , где  $A$  — постоянная величина, т. е. так, как это было бы, если воздействие на прибор было статическим. Поэтому иногда эти приборы называют квазистатическими.

Отметим, что получить такой результат очень трудно, практически невозможно, если не ввести ограничения на измеряемые процессы и не подобрать для них прибор.

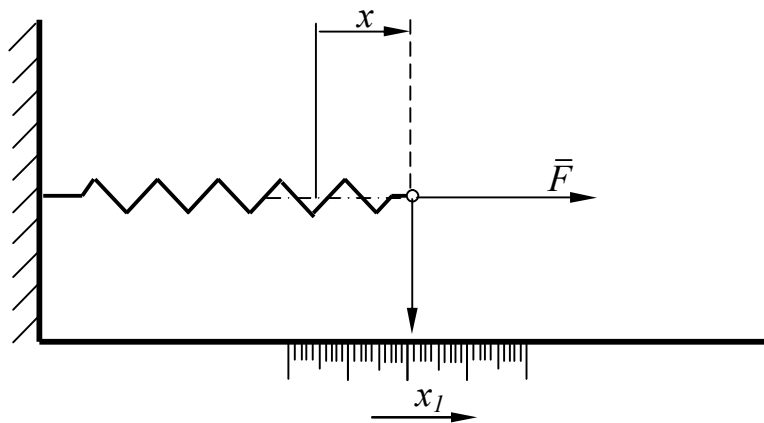


Рисунок 3.27 – Прибор для непосредственного измерения физических величин

Идеальным прибором такого типа была бы пружина со стрелкой без массы, представленная на рисунке 3.27. Однако в действительности и стрелка, и некоторые другие части прибора обладают массой и движутся при измерении физических величин. Поэтому нельзя пренебрегать как инерцией подвижных частей, так и возникающим при движении вязким сопротивлением, т. е. необходимо рассматривать прибор как некоторую колебательную систему с одной степенью свободы,

подверженную силовому воздействию от измеряемой величины. Для исключения фазовых искажений, необходимо в приборе предусматривать как можно большую добротность и, соответственно, как можно меньший безразмерный коэффициент затухания.

Однако нельзя использовать приборы с большой добротностью, поскольку возникающие в этом случае свободные колебания (переходные процессы) будут затухать очень медленно и совершенно искажать показания прибора. Поэтому необходимо выбирать достаточно малые, близкие к единице значения добротности.

2 Приборы, используемые для замера вибраций подвижных объектов (автомобилей, железнодорожных вагонов, самолетов и т. д.). Иногда их называют сейсмическими, поскольку они построены по такому же принципу, что и сейсмографы - приборы для регистрации колебаний земной коры.

Проблема состоит в том, что необходимо измерить абсолютные колебания изучаемого объекта, т. е. его колебания относительно некоторой «неподвижной» системы отсчета, не имея возможности опереться на нее. Следовательно, в приборе должно быть тело, покоящееся относительно «неподвижной» системы отсчета, чтобы измерять колебания исследуемого объекта относительно этого тела.

Таким телом отсчета может служить тело  $A$ , упругоскрепленное с исследуемым объектом  $B$  (рисунок 3.28).

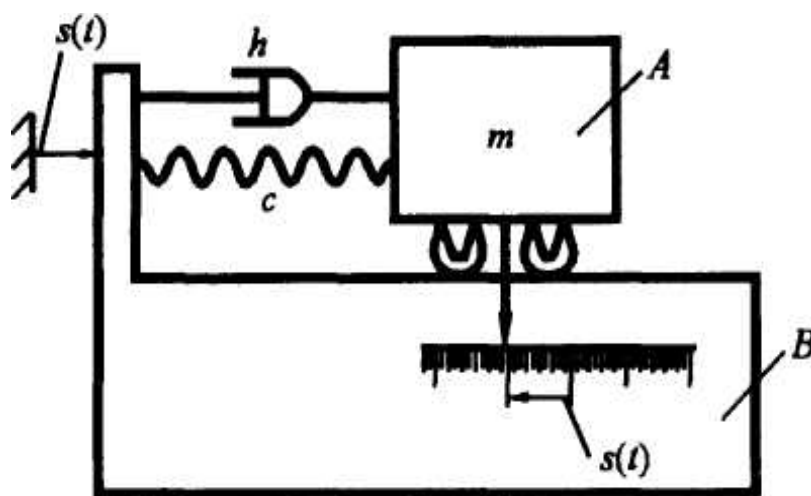


Рисунок 3.28 – Прибор, используемый для замера вибраций подвижных объектов

В этом случае собственная частота прибора существенно меньше частоты низшей гармоники и коэффициент динамичности  $\lambda \approx 0$ , т. е. тело  $A$  остается практически неподвижным. В этом случае запись движения объекта относительно тела с точностью до знака будет соответствовать колебаниям объекта.

Таким образом, в сейсмических приборах соотношение между собственной частотой и частотами регистрируемых гармоник обратно тому, которое имеет место в квазистатических приборах.

Вопрос о выборе добротности решают так же, как и для квазистатических приборов.

### 3.8 Основы виброзащиты

Проблемы, связанные с защитой от вредного воздействия вибраций (виброзащитой), рассмотрим на простейших примерах системы с одной степенью свободы, представляющей собой тело массой  $m$ , совершающее вынужденные прямолинейные колебания.

Необходимость виброзащиты возникает в двух случаях:

1 Когда необходимо уменьшить воздействие вибраций, возникающих в процессе работы на фундамент какой-либо машины;

2 Когда нужно защитить какое-либо устройство (экипаж, прибор и т. д.) от вредного воздействия вибраций, возникающих при транспортировке или являющихся результатом работы находящихся рядом машин.

В первом случае возмущающая сила приложена непосредственно к телу (рисунок 3.21(*a*)) - силовое возбуждение колебаний, во втором (рисунок 3.21(*б*)) имеет место кинематическое возбуждение колебаний из-за вибрации основания.

При силовом возбуждении необходимо, чтобы воздействие на фундамент было по возможности малым. Поскольку станки, двигатели или другие аналогичные машины, создающие в процессе работы вибрации, устанавливают на фундамент, как правило, через амортизирующие подушки (прокладки), изготовленные из специальных сортов резины, обладающей помимо упругости большим внутренним

неупругим сопротивлением, эти подушки можно аппроксимировать пружиной жесткостью  $c$  и демпфером с коэффициентом вязкого сопротивления  $h$  (рисунок 3.29(a)). Тогда динамическое воздействие на фундамент будет равно

$$R(t) = cx_c + hx_c, \quad (3.90)$$

где  $x_c$  — перемещение тела относительно положения статического равновесия.

При кинематическом возбуждении колебаний необходимо, чтобы как можно более малыми были абсолютные перемещения  $x_k$  тела (рисунок 3.29(б)).

При силовом возбуждении, так как сила тяжести компенсируется статической деформацией пружины, уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x}_c + h\dot{x}_c + cx_c = F(t), \quad (3.91)$$

а при кинематическом возбуждении

$$m\ddot{x}_k + h(\dot{x}_k - \dot{s}(t)) + c(x_k - s(t)) = 0,$$

или

$$m\ddot{x}_k + h\dot{x}_k + cx_k = cs(t) + h\dot{s}(t), \quad (3.92)$$

где  $h$  - коэффициент вязкого сопротивления в материале пружины или специально установленного демпфера (например, амортизатора автомобиля);  $c$  - жесткость пружины подвески.

Будем считать, что возмущающая сила и вибрация основания изменяются во времени по гармоническому закону. Согласно изложенному выше методу комплексных амплитуд, зададим частное решение уравнения (3.91) в виде  $x_c = Ge^{ipt}$ . Подставив  $x_c$  в (3.90) и (3.91), получим

$$R(t) = (c + hip)Ge^{ipt};$$

$$F(t) = (-mp^2 + c + hip)Ge^{ipt}.$$

Следовательно, отношение динамического воздействия на фундамент к действующей силе

$$\frac{R(t)}{F(t)} = \frac{c + hip}{-mp^2 + c + hip} = \frac{k^2 + 2nip}{k^2 - p^2 + 2nip}.$$

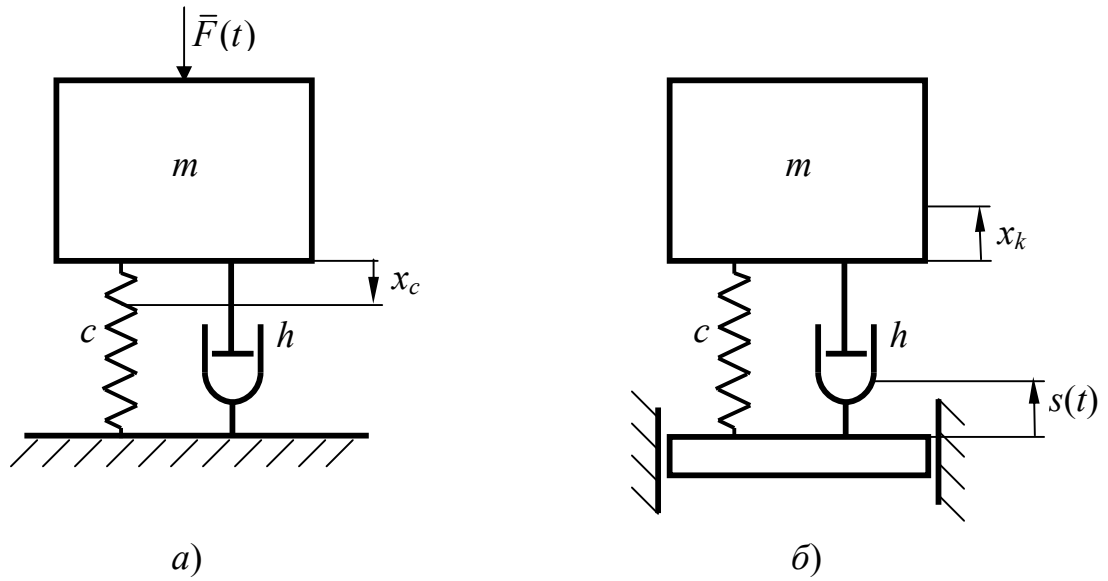


Рисунок 3.29 – Примеры виброзащиты механической системы

В данной задаче важно только соотношение между амплитудами  $R(t)$  и  $F(t)$ , а фазовый сдвиг между ними интереса не представляет. Обозначим отношение этих амплитуд через  $\beta_c$ :

$$\beta_c = \frac{\sqrt{k^4 + 4n^2 p^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \quad (3.93)$$

При кинематическом возбуждении, подставив  $x_k = Ge^{ipt}$  и  $s(t) = s_0 e^{ipt}$  в (3.92), получим

$$(c - mp^2 + hip) \cdot x_k(t) = (c + hip) \cdot s(t).$$

Откуда

$$\frac{x(t)}{s(t)} = \frac{c + hip}{c - mp^2 + hip} = \frac{k^2 + 2nip}{k^2 - p^2 + 2nip}.$$

Как и в случае силового возбуждения, интерес представляет только отношение амплитуд  $x_k(t)$  и  $s(t)$ . Обозначим это отношение через  $\beta_k$ :

$$\beta_k = \frac{\sqrt{k^4 + 4n^2 p^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \quad (3.94)$$

Сопоставляя (3.93) и (3.94), видим, что эти выражения совпадают. Таким образом, условие виброзащиты для случаев силового и кинематического возбуждения имеет вид

$$\beta = \beta_c = \beta_k = \frac{\sqrt{k^4 + 4n^2 p^2}}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} < 1. \quad (3.95)$$

Введем, как и ранее, коэффициент расстройки  $z = p/k$  и безразмерный коэффициент затухания  $d = 2n/k$ . Тогда, разделив числитель и знаменатель (3.95) на  $k^2$ , получим условие виброзащиты в виде

$$\beta = \frac{\sqrt{1 + d^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}} < 1.$$

Отсюда

$$(1 - z^2)^2 + d^2 z^2 > 1 + d^2 z^2,$$

или

$$z^2(z^2 - 2) > 0.$$

Это неравенство имеет место при  $z > \sqrt{2}$  или  $p > k\sqrt{2}$ .

Отсюда следует что, для виброзащиты независимо от способа возмущения и значения вязкого сопротивления необходимо, чтобы собственная частота колебаний системы была бы значительно ниже (по крайней мере в  $\sqrt{2}$  раза) частоты возбуждения.

При  $p > k\sqrt{2}$ , т.е. в области виброзащиты, демпфирование играет отрицательную роль, поскольку, чем меньше демпфирование, тем больше эффект виброзащиты. Поэтому, кажется, что необходимо уменьшать демпфирование, однако это не всегда так.

Следует учитывать, что при силовом возбуждении любая машина при пуске проходит режим раскрутки, а при остановке — торможения. Частота возбуждения при этом изменяется от нуля до  $p$  и наоборот, т. е. система проходит через резонанс,

что вынуждает конструктора в ущерб виброзащите повышать демпфирование, чтобы уменьшить амплитуду резонансных колебаний. При кинематическом возбуждении возможно скачкообразное перемещение основания (наезд на препятствие, попадание колеса в яму и т. д.), что при отсутствии демпферов (амортизаторов) может привести к недопустимым перемещениям и, следовательно, перегрузкам виброзащищаемого объекта, а также к длительному процессу затухания возникающих свободных колебаний.

### 3.9 Задачи для самоконтроля

1 Определить период свободных колебаний механической системы, если дифференциальное уравнение колебаний этой системы имеет вид  $26\ddot{q} + 104q = 0$ , где  $q$  - обобщенная координата.

2 Определить амплитуду малых колебаний механической системы описываемых дифференциальным уравнением  $\ddot{q} + 16q = 0$ , где  $q$  - обобщенная координата., м. Начальное смещение  $q_0 = 0,01$  м, начальная скорость  $\dot{q}_0 = 0,2$  м/с.

3 Определить частоту свободных колебаний однородного диска (рисунок 3.30), если его масса  $m = 3$  кг, а коэффициент жесткости пружины  $c = 100$  Н/м.

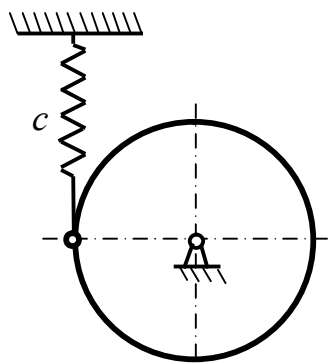


Рисунок 3.30 – Однородный диск

4 Определить момент инерции твердого тела (рисунок 3.31) относительно его оси вращения  $x$ , если период малых колебаний тела равен  $T = 8\pi$  с, расстояние  $l = 2$  м, коэффициент жесткости пружины  $c = 40$  Н/м.

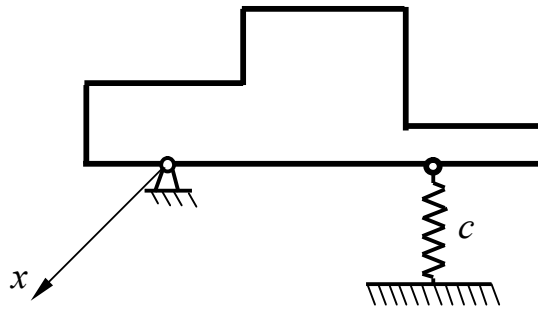


Рисунок 3.31 – Твердое тело

5 Консервативная механическая система (рисунок 3.32) совершает малые свободные колебания с периодом 4 с. Определить амплитуду колебаний кривошипа 1, если в начальный момент времени система находилась в положении статического равновесия, а угловая скорость кривошипа  $\omega_0 = 2$  рад/с.

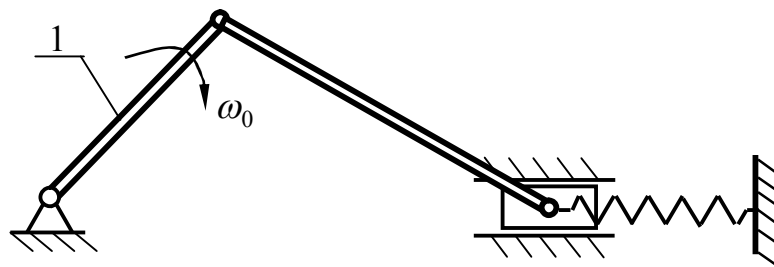


Рисунок 3.32 – Консервативная механическая система

6 На рисунках 3.33 изображены графики движения механических систем с одной степенью свободы ( $q$  – обобщенная координаты,  $t$  – время). Начальные условия  $q(0)$  и  $\dot{q}(0)$  выбраны произвольно. Какой график соответствует дифференциальным уравнениям:  $\ddot{q} + 4q = 0$ ;  $\ddot{q} + 3\dot{q} + 4q = 0$ ;  $\ddot{q} + \dot{q} + 4q = 0$ ?

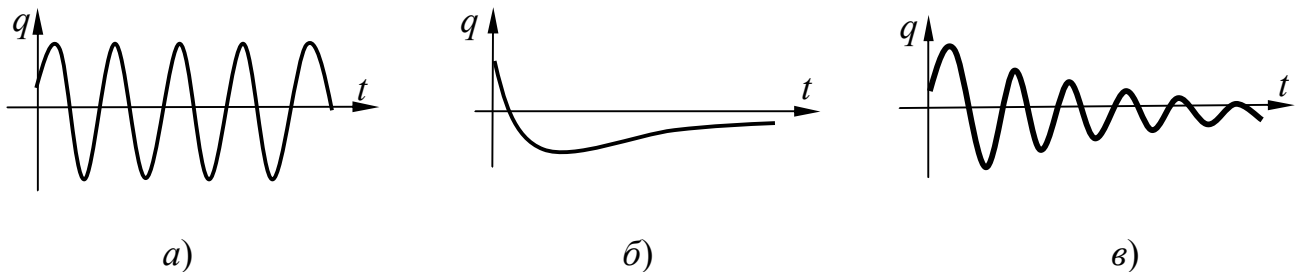


Рисунок 3.33 - Графики движения механических систем

7 Какое движение механической системы соответствует дифференциальным



уравнениям:  $\ddot{q} + 100q = 0$ ;  $\ddot{q} + 4\dot{q} + 4q = 0$ ;  $\ddot{q} + 16\dot{q} + 4q = 0$ ;  $\ddot{q} + \dot{q} + q = 0$ .

а) свободные колебания;

в) аperiodическое движение;

б) затухающие колебания;

г) предельно аperiodическое движение.

8 Определить период колебаний механической системы, если дифференциальное уравнение колебаний этой системы имеет вид  $2\ddot{q} + 12\dot{q} + 32q = 0$ , где  $q$  – обобщенная координата.

9 Колебания механической системы описывается дифференциальным уравнением  $\ddot{q} + 6\dot{q} + \pi^2 q = 0$ , где  $q$  – обобщенная координата, м. Определить обобщенную координату в момент времени  $t = 1$  с, если в начальный момент времени обобщенная координата  $q_0 = 0$ , а обобщенная скорость  $\dot{q}_0 = 1$  м/с.

10 Определить логарифмическим декрементом колебаний механической системы, если дифференциальное уравнение колебаний этой системы имеет вид  $6\ddot{q} + 12\dot{q} + 1200q = 0$ , где  $q$  – обобщенная координата.

11 Колебания механической системы описывается дифференциальным уравнением  $\ddot{q} + 9q = 4 \sin 3t$ , где  $q$  – обобщенная координата, м. Определить амплитуду обобщенной координаты вынужденных колебаний.

12 Механическая система совершает вынужденные колебания. Циклическая частота системы  $k = 3$  с<sup>-1</sup>, частота вынуждающей силы  $p = 2$  с<sup>-1</sup>, амплитуда вынуждающей силы  $Q = 10$  Н, коэффициент инерции  $a = 1$  кг. Записать дифференциальное уравнение движения этой системы в случае отсутствия сопротивления.

13 Механическая система совершает вынужденные колебания. Циклическая частота системы  $k = 3$  с<sup>-1</sup>, коэффициент затухания  $n = 2$  с<sup>-1</sup>, частота вынуждающей силы  $p = 2$  с<sup>-1</sup>, амплитуда вынуждающей силы  $Q = 10$  Н, квазиупругий коэффициент  $c = 3$  Н/м. Записать дифференциальное уравнение движения этой системы.

14 Во сколько раз уменьшится амплитуда установившихся вынужденных колебаний механической системы, описываемых дифференциальным уравнением  $\ddot{q} + 4\dot{q} + 25q = 100 \sin 2t$ , если коэффициент затухания увеличить на 5 с<sup>-1</sup>.

## 4 Малые колебания системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $N$  материальных точек и имеющую две степени свободы, на которую наложены голономные стационарные неосвобождающие связи. Предположив, что система имеет устойчивое положение равновесия, будем отсчитывать от этого положения обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$ . В соответствии с предположением о малости колебаний будем считать обобщенные координаты и их скорости величинами первого порядка малости.

Дифференциальные уравнения малых колебаний системы с двумя степенями свободы получим из уравнений Лагранжа II рода [2]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_2} = Q_2. \quad (4.1)$$

Как известно из п. 3.1.2, каждая из обобщенных сил состоит из трех сил: обобщенной силы потенциальных сил  $Q^П$ , сил сопротивления  $Q^R$  и возмущающих сил  $Q^B$ .

Для рассмотрения малых колебаний системы в окрестности устойчивого положения равновесия необходимо получить разложения в ряды кинетической и потенциальной энергий и диссипативной функции.

### 4.1 Кинетическая энергия системы с двумя степенями свободы в обобщенных координатах

Кинетическая энергия системы вычисляется по формуле

$$\Gamma = \sum_1^N \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} = \sum_1^N \frac{m_k (\dot{\bar{r}}_k)^2}{2}. \quad (4.2)$$

Для системы с двумя степенями свободы, на которую наложены стационарные, идеальные, голономные, неосвобождающие связи, радиус-вектор каждой точки  $\bar{r}_k$  является функцией только обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ . При движении системы обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$  зависят от времени.

Следовательно, производная по времени от радиуса-вектора

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в выражение кинетической энергии (4.2), получаем

$$T = \sum_1^N \frac{m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 \right)^2}{2}.$$

Раскрывая скобки, имеем

$$T = \frac{1}{2} \left[ \sum_1^N m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + 2 \sum_1^N m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \sum_1^N m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \right)^2 \dot{q}_2^2 \right],$$

или

$$T = \frac{1}{2} (A_{11} \dot{q}_1^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_{22} \dot{q}_2^2), \quad (4.4)$$

где введены обозначения:

$$A_{11} = \sum_1^N m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right)^2; \quad A_{12} = \sum_1^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}; \quad A_{22} = \sum_1^N m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \right)^2. \quad (4.5)$$

Величины  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  зависят только от  $q_1$  и  $q_2$ . Разложим каждую из этих функций в ряд Макларена по степеням обобщенных координат в окрестности положения равновесия, приняв в положении равновесия  $q_1 = q_2 = 0$ . Имеем для  $A_{11}$ :

$$A_{11}(q_1, q_2) = (A_{11})_0 + \left( \frac{\partial A_{11}}{\partial q_1} \right)_0 \cdot q_1 + \left( \frac{\partial A_{11}}{\partial q_2} \right)_0 \cdot q_2 + \dots \quad (4.6)$$

Индекс «0» у величин здесь и далее указывает, что их следует вычислять при  $q_1 = q_2 = 0$ . Аналогичные разложения получаются для  $A_{12}$  и  $A_{22}$ . Так как рассматриваем малые отклонения системы от положения равновесия, то в равенстве (4.6) ограничимся только первыми постоянными членами.

Введем обозначения:

$$A_{11}(q_1, q_2) = (A_{11})_0 = a_{11},$$

$$A_{12}(q_1, q_2) = (A_{12})_0 = a_{12},$$

$$A_{22}(q_1, q_2) = (A_{22})_0 = a_{22}.$$

Постоянные величины  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  и  $a_{22}$  называются коэффициентами инерции системы. С точностью до членов третьего и более высокого порядка по отношению к  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$  получаем следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}q_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2). \quad (4.7)$$

Так как кинетическая энергия всегда положительна и равняется нулю только при нулевых значениях обобщенных скоростей, значит, ее коэффициенты должны удовлетворять критерию Сильвестра [2]:

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (4.8)$$

## 4.2 Потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы в обобщенных координатах

Потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы зависит только от обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ , если силовое поле и связи стационарны. Разлагая потенциальную энергию  $\Pi$  в окрестности положения равновесия в ряд по степеням обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ , для системы с двумя степенями свободы, имеем:

$$\Pi(q_1, q_2) = (\Pi)_0 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 \frac{q_1^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 \frac{q_2^2}{2} + \dots$$

Потенциальную энергию в положении равновесия  $(\Pi)_0$  принимаем равной нулю. Значения обобщенных сил в положении равновесия системы равны нулю:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 = 0.$$

Окончательно, удерживая члены второго порядка и пренебрегая членами третьего и более высокого порядка, потенциальную энергию выразим в форме:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \quad (4.9)$$

где  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  - квазиупругие коэффициенты, которые характеризуют упругие свойства системы и равны, соответственно,

$$c_{11} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right)_0, \quad c_{12} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0, \quad c_{22} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} \right)_0. \quad (4.10)$$

В положении устойчивого равновесия квадратичная форма для потенциальной энергии определено положительна и ее коэффициенты удовлетворяют следующим критерию Сильвестра [2]:

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (4.11)$$

### 4.3 Свободные колебания системы с двумя степенями свободы

#### 4.3.1 Дифференциальные уравнения свободных колебаний

Для системы с двумя степенями свободы, учитывая формулы для кинетической и потенциальной энергии, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_1} = \frac{\partial \Gamma}{\partial q_2} &= 0; \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_2} = a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_1} \right) &= a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_2} \right) = a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2; \\ Q_1 = Q_1^\Pi &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -(c_{11}q_1 + c_{12}q_2), \quad Q_2 = Q_2^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -(c_{12}q_1 + c_{22}q_2). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения величин в уравнение (4.1), получаем систему

линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Коэффициенты  $a_{12}$  и  $c_{12}$ , связывающие в уравнениях (4.12) обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$ , называют коэффициентами инерционной и упругой связи, соответственно. Если в колебательной системе коэффициент  $a_{12} = 0$ , ее называют системой с упругой связью, а если  $c_{12} = 0$  - системой с инерционной связью.

#### 4.3.2 Общее решение дифференциальных уравнений свободных колебаний системы с двумя степенями свободы

Решение системы уравнений (4.12) следует искать в виде  $q_1 = C_1 e^{\lambda t}$ ,  $q_2 = C_2 e^{\lambda t}$ . В случае малых колебаний в окрестности устойчивого равновесия все значения  $\lambda$  мнимые и, следовательно, решение можно искать в виде

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha); \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha), \quad (4.13)$$

где  $k$  - круговая частота колебаний;  $A_1$  и  $A_2$  - амплитуды;  $\alpha$  - начальная фаза. Постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $k$  и  $\alpha$  подлежат определению.

Подставим значения  $q_1$  и  $q_2$  (4.13) и их производные

$$\ddot{q}_1 = -k^2 A_1 \sin(kt + \alpha); \quad \ddot{q}_2 = -k^2 A_2 \sin(kt + \alpha),$$

в систему уравнений (4.12). Получим тождества, в которых коэффициенты при  $\sin(kt + \alpha)$  должны равняться нулю. Это дает систему двух однородных линейных

уравнений для определения амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{cases} A_1(c_{11} - a_{11}k^2) + A_2(c_{12} - a_{12}k^2) = 0; \\ A_1(c_{12} - a_{12}k^2) + A_2(c_{22} - a_{22}k^2) = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Однородная линейная система уравнений (4.14) имеет решения, отличные от нуля, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{12} - a_{12}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.15)$$

Раскрывая определитель (4.15), получаем уравнение частот:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \quad (4.16)$$

Только для значений  $k$ , удовлетворяющих уравнению частот, существуют отличные от нуля значения  $A_1, A_2$  и, следовательно,  $q_1(t), q_2(t)$ .

Уравнение частот, как биквадратное уравнение, в общем случае имеет два значения для квадрата частоты  $k^2$ . Для системы с двумя степенями свободы, если квадратичные формы для кинетической и потенциальной энергии удовлетворяют условиям определенной положительности (4.8) и (4.11), то эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы оба решения для  $k^2$  были действительными и положительными. Только для действительных и положительных значений  $k^2$  обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$  выражаются синусоидальной зависимостью от времени. Для значений  $k^2$ , не удовлетворяющих этим условиям, движение системы не является колебательным.

Отбрасывая отрицательные значения частот, как не дающие новых решений и не имеющих физического значения, получаем две частоты. Меньшую из частот обозначают  $k_1$  и называют низшей, большую -  $k_2$  и называют высшей. Частоты  $k_1$  и  $k_2$  являются частотами собственных колебаний системы. Они не зависят от начальных условий и полностью определяются значениями коэффициентов инерции и квазиупругих коэффициентов.

В случае равных частот каждое из уравнений системы является тождеством, справедливым при любых значениях  $A_1, A_2$ . Система дифференциальных уравнений в этом случае распадается на два независимых уравнения – одно для  $q_1$ , другое для  $q_2$ . Их решения имеют вид:

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha); \quad q_2 = A_2 \sin(k_1 t + \alpha). \quad (4.17)$$

Постоянные  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$  определяются из начальных условий:

$$(4.18)$$

$$t=0, \quad q_1 = q_1^{(0)}, \quad q_2 = q_2^{(0)}, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_1^{(0)}, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_2^{(0)}.$$

Система в этом случае совершает гармонические колебания. Каждая из обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  изменяется по синусоидальному закону независимо друг от друга с одинаковыми частотами.

В случае разных частот, каждой из них соответствуют определенные значения  $A_1, A_2, \alpha: A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \alpha_1$  – для частоты  $k_1$  и  $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \alpha_2$  – для частоты  $k_2$ .

В соответствии с этим получим по два значения обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ :

$$\begin{cases} q_1^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1), \\ q_2^{(1)} = A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1), \\ q_1^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2^{(2)} = A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \end{cases} \quad (4.19)$$

где  $q_1^{(1)}$  и  $q_2^{(1)}$  составляют главные колебания для частоты  $k_1$ , а  $q_1^{(2)}$  и  $q_2^{(2)}$  – для частоты  $k_2$ . Каждое из главных колебаний является гармоническим для обеих обобщенных координат.

Система однородных линейных уравнений (4.14) дает возможность определить только отношение амплитуд. Для первого и второго главных колебаний соответственно получаем:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2}, \\ \beta_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Отношения амплитуд в главных колебаниях  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , называют коэффициентами формы. Коэффициенты формы равны отношениям обобщенных координат в главных колебаниях:

$$\beta_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{q_2^{(1)}}{q_1^{(1)}}, \quad \beta_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{q_2^{(2)}}{q_1^{(2)}}. \quad (4.21)$$

Коэффициенты формы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  характеризуют формы главных колебаний. Они



могут быть положительными и отрицательными. Если, например,  $\beta_1 > 0$ , то  $q_1^{(1)}$  и  $q_2^{(1)}$  имеют одинаковые фазы; если  $\beta_1 < 0$ , то их фазы отличаются на  $\pi$ .

Общее решение системы уравнений с учетом (4.19) и (4.21) можно выразить в форме:

$$\begin{cases} q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = \beta_1 q_1^{(1)} + \beta_2 q_1^{(2)} = \beta_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + \beta_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{cases} \quad (4.22)$$

Четыре произвольных постоянных  $A_1^{(1)}$ ,  $A_1^{(2)}$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются из начальных условий.

Итак, собственные линейные колебания системы с двумя степенями свободы состоят из суммы двух главных гармонических с частотами  $k_1$  и  $k_2$ , которые содержатся в каждой обобщенной координате  $q_1$  и  $q_2$ .

### 4.3.3 Главные координаты

Если за обобщенные координаты системы выбрать  $q_1^{(1)}$  и  $q_2^{(1)}$ , то главное колебание с частотой  $k_1$  будет содержаться только в одной обобщенной координате, а главное колебание с частотой  $k_2$  — в другой. Обобщенные координаты, которые содержат только по одному главному колебанию, называются *главными координатами системы*. Произвольные обобщенные координаты через главные, должны выражаться их линейными комбинациями:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \quad q_2 = \beta_1 q_1^{(1)} + \beta_2 q_1^{(2)}. \quad (4.23)$$

В случаях равных частот любые обобщенные координаты являются главными. Для главных координат система уравнений должна распадаться на два отдельных, независимых уравнения, как в случае равных частот.

Для того чтобы система уравнений распалась на отдельные независимые уравнения, выражения потенциальной и кинетической энергий не должны содержать членов с произведениями переменных ( $a_{12} = 0$ ,  $c_{12} = 0$ ). Это можно положить в основу для отыскания главных координат. Действительно, пусть  $q_1$  и  $q_2$  — произвольные обобщенные координаты, а  $q_1^*$  и  $q_2^*$  — главные координаты.

Попытаемся получить равенства нулю членов с произведениями в разложениях кинетической и потенциальной энергий, приняв линейную зависимость между  $q_1, q_2$  и  $q_1^*, q_2^*$  т. е.

$$q_1 = \alpha_1 q_1^* + \alpha_2 q_2^*, \quad q_2 = \beta_1 q_1^* + \beta_2 q_2^*. \quad (4.24)$$

Постоянные  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  включим в  $q_1^*$  и  $q_2^*$ , т. е. положим  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . Тогда неизвестные постоянные  $\beta_1$  и  $\beta_2$  можно определить из условий, что для главных координат

$$\Gamma = \frac{1}{2}(a_{11}^* \dot{q}_1^{*2} + a_{22}^* \dot{q}_2^{*2}), \quad \Pi = \frac{1}{2}(c_{11}^* q_1^{*2} + c_{22}^* q_2^{*2}), \quad (4.25)$$

т. е.  $a_{12}^* = \tilde{n}_{12}^* = 0$ . Сохраним для неизвестных постоянных  $\beta_1$  и  $\beta_2$  обозначения коэффициентов формы, так как в действительности они ими и являются.

Подставляя (4.24) в выражения кинетической и потенциальной энергий (4.7) и (4.9), получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \frac{1}{2} [(a_{11} + 2a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_1^2) \dot{q}_1^{*2} + (a_{11} + a_{12}(\beta_1 + \beta_2) + a_{22}\beta_1\beta_2) \dot{q}_1^* \dot{q}_2^* + \\ \quad + (a_{11} + 2a_{12}\beta_2 + a_{22}\beta_2^2) \dot{q}_2^{*2}]; \\ \Pi = \frac{1}{2} [(c_{11} + 2c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_1^2) q_1^{*2} + (c_{11} + c_{12}(\beta_1 + \beta_2) + c_{22}\beta_1\beta_2) q_1^* q_2^* + \\ \quad + (c_{11} + 2c_{12}\beta_2 + c_{22}\beta_2^2) q_2^{*2}]. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Из сравнения (4.25) и (4.26), используя условия  $a_{12}^* = 0$  и  $\tilde{n}_{12}^* = 0$ , имеем:

$$\begin{cases} a_{12}^* = a_{11} + a_{12}(\beta_1 + \beta_2) + a_{22}\beta_1\beta_2 = 0; \\ c_{12}^* = c_{11} + c_{12}(\beta_1 + \beta_2) + c_{22}\beta_1\beta_2 = 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

а также формулы связи новых и старых коэффициентов инерции и жесткости:

$$\begin{aligned} a_{11}^* &= a_{11} + 2a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_1^2, & a_{22}^* &= a_{11} + 2a_{12}\beta_2 + a_{22}\beta_2^2, \\ c_{11}^* &= c_{11} + 2c_{12}\beta_1 + c_{22}\beta_1^2, & c_{22}^* &= c_{11} + 2c_{12}\beta_2 + c_{22}\beta_2^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из (4.27) получаем

$$\beta_1\beta_2 = \frac{a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}, \quad \beta_1 + \beta_2 = \frac{a_{22}c_{11} - a_{11}c_{22}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}. \quad (4.29)$$

Эти соотношения позволяют получить квадратное уравнение, корнями которого являются  $\beta_1$  и  $\beta_2$ :

$$(a_{11}c_{22} - a_{22}c_{12})\beta^2 - (a_{22}c_{11} - a_{11}c_{22})\beta + (a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}) = 0. \quad (4.30)$$

Таким образом, коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  можно определять двумя путями: как коэффициенты формы по формулам (4.20), или как корни квадратного уравнения (4.30).

Система уравнений малых колебаний (4.12) для главных координат  $q_1^*$ ,  $q_2^*$ , с учетом  $a_{12}^* = \tilde{n}_{12}^* = 0$ , распадется на два независимых уравнения:

$$a_{11}^*\ddot{q}_1^* + c_{11}^*q_1^* = 0, \quad a_{22}^*\ddot{q}_2^* + c_{22}^*q_2^* = 0. \quad (4.31)$$

Их решения имеют вид

$$q_1^* = A_1^{(1)}\sin(k_1^*t + \alpha_1), \quad q_2^* = A_2^{(2)}\sin(k_2^*t + \alpha_2), \quad (4.32)$$

где  $k_1^*$  и  $k_2^*$  — частоты главных колебаний. Они вычисляются по формулам:

$$k_1^* = \sqrt{\frac{c_{11}^*}{a_{11}^*}}, \quad k_2^* = \sqrt{\frac{c_{22}^*}{a_{22}^*}}. \quad (4.33)$$

Используя (4.24) и (4.32) для произвольных обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ , можно получить выражения (4.22).

Частоты изменения главных координат совпадают с частотами главных колебаний, т. е.

$$k_1^* = k_1, \quad k_2^* = k_2, \quad (4.34)$$

так как частоты не зависят от выбора тех или иных обобщенных координат. Они определяются свойствами системы и потенциальным силовым полем, в котором движется система. В случае системы с двумя степенями свободы в справедливости (4.34) можно убедиться прямыми вычислениями, используя формулы (4.28).

Кажется, что по (4.33) вычислять частоты проще, чем из уравнения частот (4.16), но предварительное отыскание главных координат представляет собой задачу, равноценную по трудности решению уравнения частот. Главные координаты удобны для теоретических исследований, особенно исследования вынужденных колебаний ни без учета сопротивления.

Итак, каждая из главных координат системы изменяется по гармоническому закону, имея определенную чистоту, амплитуду и фазу, так же, как и в случае системы с одной степенью свободы. Этот результат остается справедливым и для собственных колебаний системы с любым конечным числом степеней свободы. Некоторые частоты могут оказаться одинаковыми, но это не приводит к резонансным явлениям.

#### 4.3.4 Лабораторная работа на малые свободные колебания систем с двумя степенями свободы

При выполнении лабораторной работы на свободные колебания системы с двумя степенями свободы рекомендуется следующий порядок действий:

7 Выбираем обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$ ;

8 Составляем выражение кинетической энергии  $T$  и находим коэффициенты инерции  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  и  $a_{22}$ ;

9 Определяем потенциальную энергию  $\Pi$  и квазиупругие коэффициенты  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  и  $c_{22}$ ;

10 Подставляем  $T$  и  $\Pi$  в уравнения Лагранжа и получаем дифференциальное уравнение малых колебаний системы с двумя степенями свободы;

11 Составляем уравнение частот вида (4.16) и находим две частоты колебаний системы;

12 Определяем коэффициенты формы по формулам (4.20);

13 Общее решение дифференциальных уравнений колебаний системы записываем в виде (4.22).

**Лабораторная работа №6 (вариант 1).** Определить частоты свободных колебаний и найти формы главных колебаний системы состоящей из однородного диска 1 массы  $m_1 = 2$  кг, к центру которого шарнирно прикреплен однородный

стержень 2 массой  $m_2 = 4 \text{ кг}$  и длиной  $l = 3 \text{ м}$  (рисунок 4.1). На расстоянии  $d = 2 \text{ м}$  от центра диска к стержню присоединена пружина жесткости  $c = 1000 \text{ Н/м}$ . При вертикальном положении стержня пружина не деформирована.

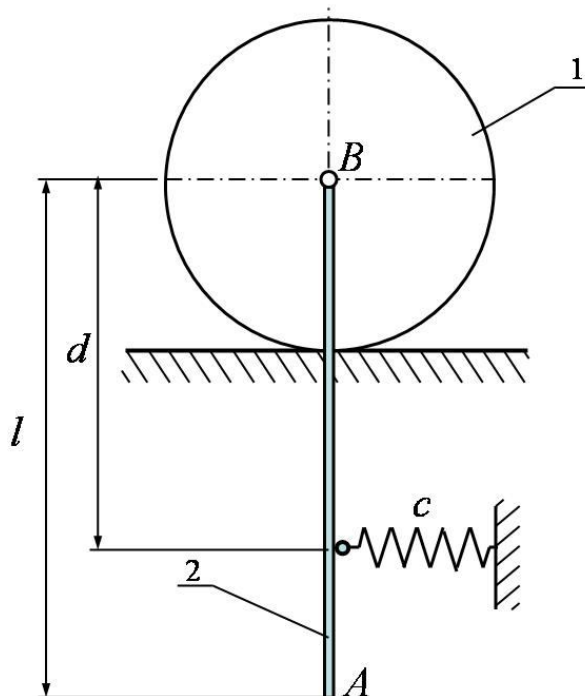


Рисунок 4.1 – Система, состоящая из диска 1 и стержня 2

Данная механическая система имеет две степени свободы.

За обобщенные координаты примем:  $x$  – горизонтальное перемещение центра диска  $C$ ;  $\varphi$  – угол поворота стержня  $AC$  от положения покоя. Положение системы показано на рисунке 4.7.

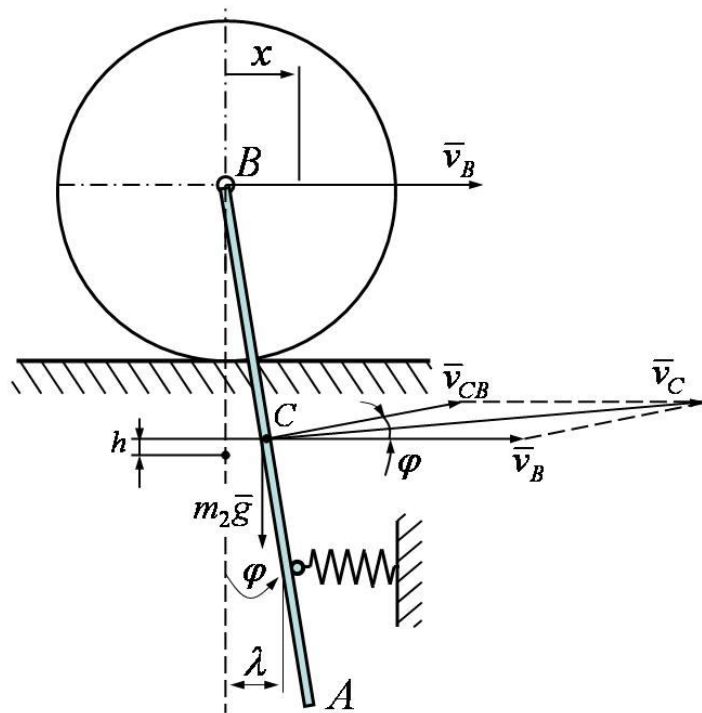


Рисунок 4.2 – Свободные колебания механической системы

Вычислим кинетическую энергию этой системы как сумму кинетических энергий диска 1 и стержня 2:

$$T = T_1 + T_2.$$

Кинетическая энергия диска 1:

$$T_1 = \frac{m_1 v_B^2}{2} + \frac{J_B \omega_1^2}{2},$$

где  $J_B$  – момент инерции диска 1 относительно оси вращения, проходящей через

точку  $B$ ,  $J_B = \frac{m_1 R^2}{2}$ ;

$v_B$  – скорость центра масс  $B$  диска,  $v_B = \dot{x}$ ;

$\omega_1$  – угловая скорость диска,  $\omega_1 = \frac{\dot{x}}{R}$ .

Отсюда

$$T_1 = \frac{3m_1 \dot{x}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия стержня 2:

$$T_2 = \frac{m_2 v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_2^2}{2}, \quad (4.35)$$

где  $J_C$  – момент инерции стержня 2 относительно оси вращения, проходящей через центр масс  $C$ ,  $J_C = \frac{m_2 l^2}{12}$ ;

$v_C$  - скорость центра масс  $C$  стержня;

$\omega_2$  - угловая скорость диска,  $\omega_2 = \dot{\varphi}$ .

Определим скорость центра масс стержня 2 по теореме о сложении скоростей при плоском движении тела:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB},$$

или

$$v_C^2 = v_B^2 + v_{CB}^2 + 2v_B v_C \cos \varphi.$$

Учитывая, что  $v_{CB} = \dot{\varphi} \cdot \frac{l}{2}$  и в выражении кинетической энергии принимаем  $\cos \varphi = 1$ , то

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2 l^2}{4} + \dot{x} \dot{\varphi} l.$$

Подставим полученные значения в выражение (4.35):

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \left( \dot{x}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2 l^2}{4} + \dot{x} \dot{\varphi} l \right) + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{24}.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \dot{x}^2 + m_2 \dot{x} \dot{\varphi} l + \frac{m_2 l^2}{3} \dot{\varphi}^2 \right],$$

или

$$T = \frac{1}{2} \left[ a_{11} \dot{x}^2 + 2a_{12} \dot{x} \dot{\varphi} + a_{22} \dot{\varphi}^2 \right],$$

где:  $a_{11} = \frac{3}{2} m_1 + m_2 = 7 \text{ кг}$ ,  $a_{12} = \frac{m_2 l}{2} = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}$ ,  $a_{22} = \frac{m_2 l^2}{3} = 21,33 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Найденные значения коэффициентов инерции удовлетворяют критериям Сильвестра (4.8).

Для определения потенциальной энергии системы следует вычислить работу, которую совершают разности силы упругости пружины и сил тяжести тел при перемещении системы из рассматриваемого положения в положение равновесия:

$$\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_C,$$

где  $\Pi_{mg}$  - потенциальная энергия системы в поле сил тяжести;

$\Pi_C$  - потенциальная энергия деформированной пружины.

Центр тяжести диска 1 не совершает вертикального перемещения, поэтому потенциальная энергия в поле силы тяжести этого тела равна нулю.

Потенциальная энергия в поле силы тяжести стержня 2:

$$\Pi_{mg} = m_2gh,$$

где  $h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi$ .

Ограничивая разложение  $\cos\varphi$  величинами второго порядка малости:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

получаем

$$\Pi_{mg} = \frac{m_2gl\varphi^2}{4}.$$

Разность силы упругости пружины изменяются в зависимости от смещения тел из статических положений равновесия по линейному закону аналогично тому, как изменяется сила упругости пружины при деформации пружины из недеформированного состояния.

Статическое отклонение пружины равно нулю, т.к. по условию задачи при вертикальном положении стержня пружина не деформирована.



Потенциальная энергия деформированной пружины равна

$$\Pi_C = \frac{c}{2}(x + \lambda)^2,$$

где  $\lambda = d \sin \varphi = d\varphi$ , т.к. угол  $\varphi$  мал и можем принять синус этого угла за единицу.

Таким образом,

$$\Pi_C = \frac{c}{2}(x + d \cdot \varphi)^2.$$

Потенциальная энергия всей системы

$$\Pi = \frac{m_2 g l \varphi^2}{4} + \frac{c}{2}(x + d \cdot \varphi)^2 = \frac{1}{2} \left[ c x^2 + 2c \cdot d \cdot x \varphi + \left( \frac{m_2 g l}{2} + c \cdot d^2 \right) \varphi^2 \right],$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} x^2 + 2c_{12} x \varphi + c_{22} \varphi^2),$$

где  $c_{11} = c = 1000 \text{ Н/м}$ ,

$$c_{12} = c \cdot d = 2000 \text{ Н},$$

$$c_{22} = \frac{m_2 g l}{2} + c \cdot d^2 = 4080 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Найденные значения квазиупругих коэффициентов удовлетворяют критериям Сильвестра (4.11).

Подставив полученные выражения для кинетической и потенциальной энергий в уравнения Лагранжа (4.1), получим систему дифференциальных уравнений малых собственных колебаний вида (4.12):

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{x} + a_{12} \ddot{\varphi} + c_{11} x + c_{12} \varphi = 0, \\ a_{12} \ddot{x} + a_{22} \ddot{\varphi} + c_{12} x + c_{22} \varphi = 0. \end{cases}$$

Уравнение частот согласно (4.16) имеет вид

$$(c_{11} - a_{11} k^2)(c_{22} - a_{22} k^2) - (c_{12} - a_{12} k^2)^2 = 0.$$

Подставив известные значения коэффициентов, получим

$$(1000 - 7k^2)(4030 - 12k^2) - (2000 - 6k^2)^2 = 0.$$

## Решения биквадратного уравнения

$$48k^4 - 16210k^2 + 30000 = 0,$$

ИМЕЮТ ВИД

$$k_1^2 = \frac{16210 - \sqrt{16210^2 - 4 \cdot 48 \cdot 30000}}{2 \cdot 48} = 4,56 \text{ c}^{-2},$$

$$k_2^2 = \frac{16210 + \sqrt{16210^2 - 4 \cdot 48 \cdot 30000}}{2 \cdot 48} = 205,4 \text{ c}^{-2}.$$

Частоты первого и второго главных колебаний соответственно равны

$$k_1 = 2,14 \text{ c}^{-1}, \quad k_2 = 14,33 \text{ c}^{-1}.$$

Определяем коэффициенты формы:

$$\beta_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{1000 - 7 \cdot 1,86}{2000 - 6 \cdot 1,86} = -0,493;$$

$$\beta_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{1000 - 7 \cdot 335,847}{2000 - 6 \cdot 335,847} = 1,214.$$

Проверка:

$$\beta_1 = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2} = -\frac{2000 - 6 \cdot 1,86}{4030 - 12 \cdot 1,86} = -0,493;$$

$$\beta_2 = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2} = -\frac{2000 - 6 \cdot 335,847}{4030 - 12 \cdot 335,847} = 1,214.$$

Первое главное колебание с частотой  $k_1$  состоит из  $x^{(1)}$  и  $\varphi^{(1)} = \beta_1 x^{(1)}$ . Так как  $\beta_1 < 0$ , то знаки смещений  $x^{(1)}$  и  $\varphi^{(1)}$  в первом главном колебании противоположны и колебания отличаются по фазе на  $\pi$ . Второе главное колебание с частотой  $k_2$  включает в себя смещения  $x^{(2)}$  и  $x_2^{(2)} = \beta_2 \varphi^{(2)}$ . Так как  $\beta_2 > 0$ , то знаки смещений  $x^{(1)}$  и  $\varphi^{(1)}$  одинаковы. Колебания совпадают по фазе.

Уравнения колебаний системы будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = x^{(1)} + x^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(2,14t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(14,33t + \alpha_2), \\ \varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} = \beta_1 x_1^{(1)} + \beta_2 x_1^{(2)} = -0,493 A_1^{(1)} \sin(2,14t + \alpha_1) + 1,214 A_1^{(2)} \sin(14,33t + \alpha_2). \end{cases}$$

Формы главных колебаний можно изобразить графически. Для этого отложим смещения грузов в главных колебаниях вправо по горизонтали положительные, влево — отрицательные (рисунок 4.3). По вертикали отложим расстояния грузов от верхнего конца первой пружины.

Для первого главного колебания смещение центра масс изобразится горизонтальным отрезком  $x^{(1)}$ , смещения стержня — поворотом стержня вокруг точки  $B$  на угол  $\varphi^{(1)}$ , противоположный показанному на рисунке 4.3, так как величина  $\varphi^{(1)}$  будет отрицательной.

Для второго главного колебания поворот стержня следует отложить, как показано на рисунке 4.3, так как величина  $\varphi^{(2)}$  - положительная.

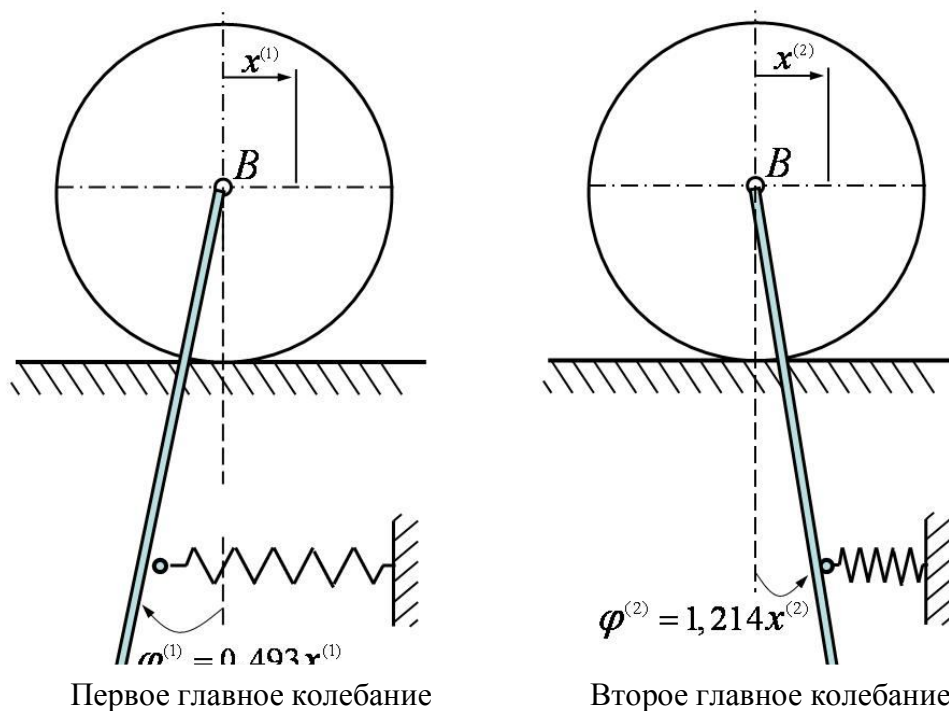


Рисунок 4.3 – Формы главных колебаний

Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14 представлено на рисунке 4.4.

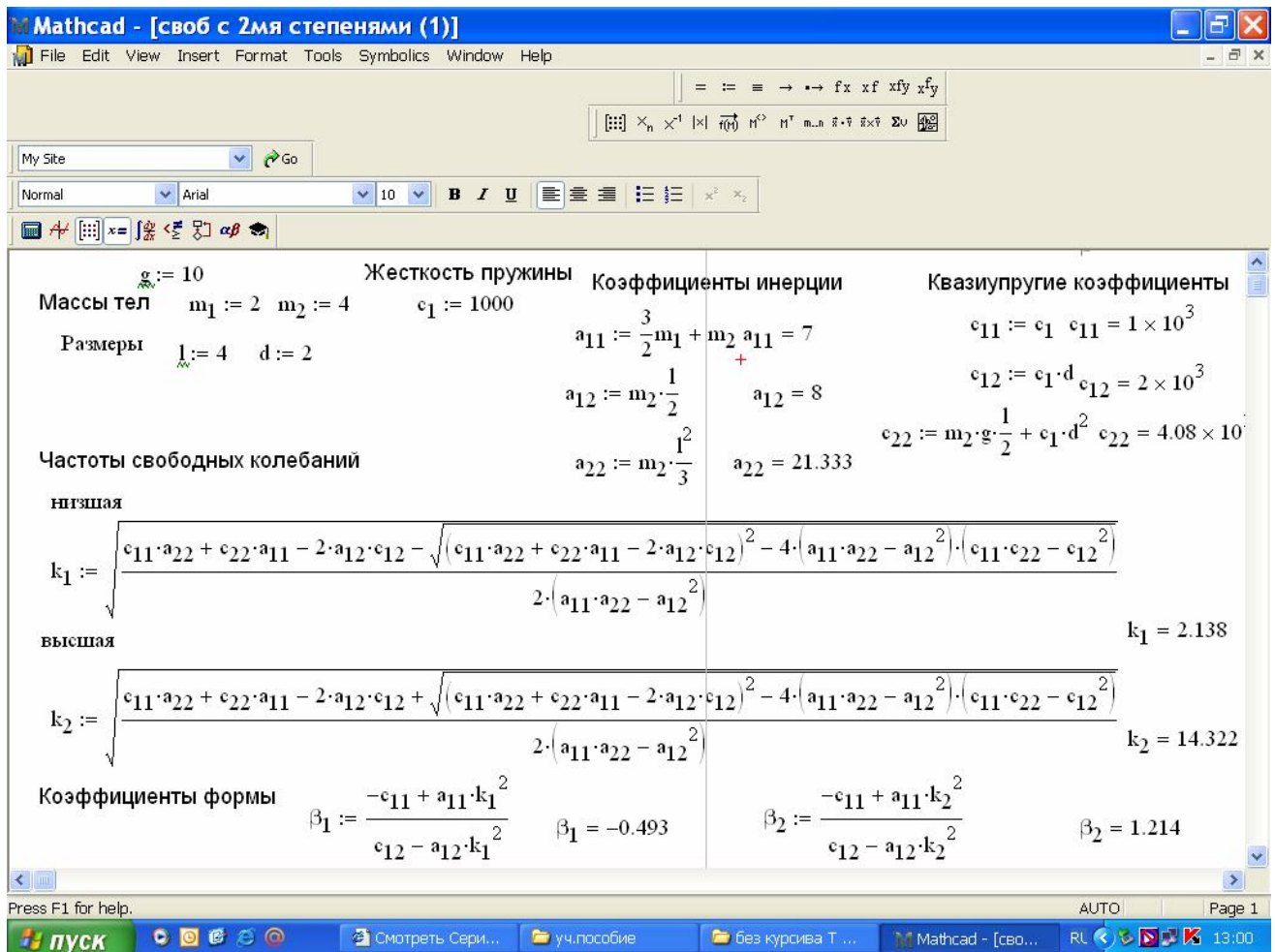


Рисунок 4.4 - Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14

**Лабораторная работа №6 (вариант 2).** Однородный стержень 1, шарнирно закрепленный в точке  $C$ , соединен концами  $A$  и  $B$  пружинами с телом 2.

Определить частоты свободных колебаний и найти формы главных колебаний системы, если известны значения следующих величин: массы  $m_1 = 8$  кг и  $m_2 = 10$  кг; жесткости пружин:  $c_1 = 1000$  Н/м и  $c_2 = 5000$  Н/м и длина стержня  $AB$   $l = 0,6$  м

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы.

В состоянии покоя стержень занимает горизонтальное положение. Пружины с коэффициентами жесткости  $c_1$  и  $c_2$  деформированы соответственно на величины  $\lambda_{1cm}$ ,  $\lambda_{2cm}$ .

За обобщенные координаты примем:  $\varphi$  – угол поворота стержня  $AB$  от положения покоя,  $z$  – вертикальное перемещение груза 2 от положения покоя. Положение системы показано на рисунке 4.5.

Вычислим кинетическую энергию этой системы как сумму кинетических энергий стержня 1 и груза 2:

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T = \frac{J_D \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{z}^2}{2} = \frac{1}{2} \left( J_D \dot{\varphi}^2 + m_2 \dot{z}^2 \right),$$

где  $J_D$  – момент инерции стержня 1 относительно оси вращения, проходящей через точку  $D$ .

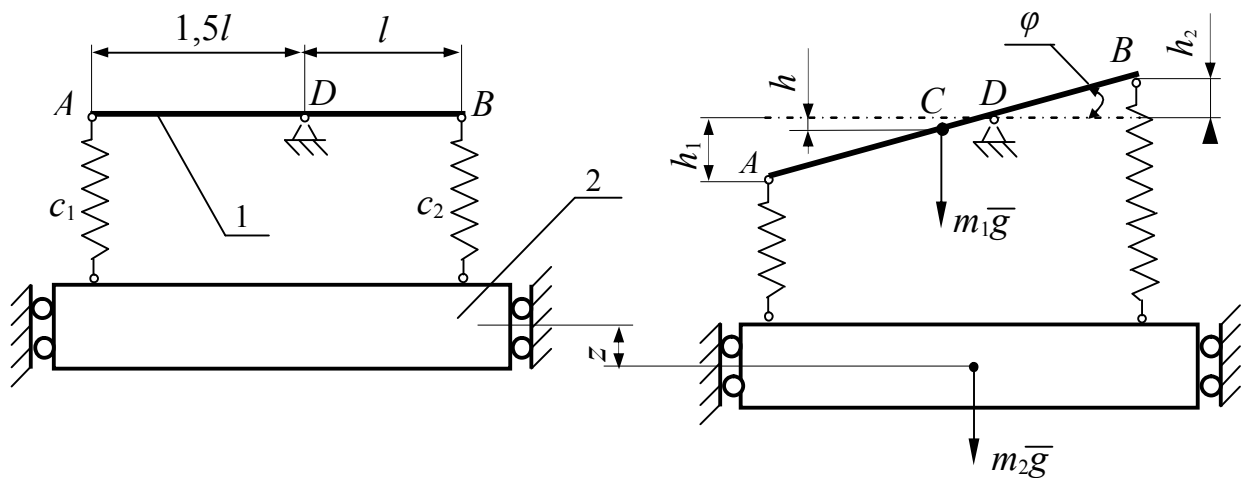


Рисунок 4.5 – Схема механической системы

Момент инерции

$$J_D = J_C + m_1 \cdot d^2,$$

где  $J_C$  – момент инерции стержня 1 относительно оси, проходящей через центр масс стержня, точку  $C$ ,

$d = CD$  – расстояние от центра масс  $C$  стержня до оси вращения  $D$ :

$$d = 1,5l - (1,5l + l)/2 = 0,25l = 0,15 \text{ м.}$$

Тогда

$$J_D = \frac{m_1 \cdot (1,5l + l)^2}{12} + m_1 \cdot d^2 = \frac{8 \cdot (1,5 \cdot 0,6 + 0,6)^2}{12} + 8 \cdot 0,15^2 = 1,68 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Кинетическая энергия системы будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2}(a_{11} \dot{z}^2 + 2a_{12} \dot{z}\dot{\varphi} + a_{22} \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}(a_{11} \dot{z}^2 + a_{22} \dot{\varphi}^2),$$

где  $a_{11} = m_2 = 10 \text{ кг}$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = J_D = 1,68 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

Найденные значения коэффициентов инерции удовлетворяют критериям Сильвестра (4.8).

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальных энергий в поле сил тяжести  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , а также потенциальных энергий деформированных пружин  $\Pi_{c1}$  и  $\Pi_{c2}$ , т.е.:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_{c1} + \Pi_{c2}.$$

$$\Pi_1 = -m_1gh,$$

где  $h = CD \cdot \sin\varphi$ , учитывая, что для малых углов  $\sin\varphi \approx \varphi$ , получаем

$$\Pi_1 = -m_1g \cdot 0,25l\varphi.$$

$$\Pi_2 = -m_2gz.$$

Потенциальную энергию пружин найдем, рассматривая сначала перемещение системы из отклоненного положения в положение, соответствующее недеформированным пружинам, а затем из этого положения – в положение покоя.

Из рисунка 4.5 видно, что деформация пружины  $c_1$  от положения равновесия равна  $z - h_1$  или  $z - 1,5l\varphi$ , а с учетом статической деформации:

$$\varepsilon_1 = z - 1,5l\varphi \pm \lambda_{cm1}.$$

Деформация пружины  $c_2$ :

$$\varepsilon_2 = z + l\varphi \pm \lambda_{cm2}.$$

Потенциальные энергии пружин:

$$\Pi_{c1} = \frac{1}{2}c_1(z - 1,5l\varphi \pm \lambda_{cm1})^2 - \frac{1}{2}c_1\lambda_{cm1}^2,$$

$$\Pi_{c_2} = \frac{1}{2}c_2(z+l\varphi \pm \lambda_{cm2})^2 - \frac{1}{2}c_2\lambda_{cm2}.$$

Потенциальная энергия системы:

$$\begin{aligned} \Pi = & -m_1g \cdot 0,25l\varphi - m_2gz + \frac{1}{2}c_1(z-1,5l\varphi \pm \lambda_{cm1})^2 - \frac{1}{2}c_1\lambda_{cm1} + \\ & + \frac{1}{2}c_2(z+l\varphi \pm \lambda_{cm2})^2 - \frac{1}{2}c_2\lambda_{cm2}. \end{aligned}$$

Раскроем скобки в выражении для потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \Pi = & -m_1g0,25l\varphi - m_2gz + \frac{1}{2}(c_1z^2 + 2,25c_1l^2\varphi^2 + c_1\lambda_{cm1}^2 - 3c_1zl\varphi \pm 2c_1z\lambda_{cm1} \pm \\ & \pm 3c_1l\varphi\lambda_{cm1} - c_1\lambda_{cm1}^2 + c_2z^2 + c_2l^2\varphi^2 + c_2\lambda_{cm2}^2 + 2c_2zl\varphi \pm 2c_2z\lambda_{cm2} \pm 2c_2l\varphi\lambda_{cm2} - c_2\lambda_{cm2}^2). \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа-Дирихле в положении равновесия при  $z=0$  и  $\varphi=0$  должны выполняться равенства:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = 0.$$

Имеем

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = -m_2g + \frac{1}{2}(2c_1z - 3c_1l\varphi \pm 2c_1\lambda_{cm1} + 2c_2z + 2c_2l\varphi \pm 2c_2\lambda_{cm2}) \Big|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = -m_2g \pm c_1\lambda_{cm1} \pm c_2\lambda_{cm2},$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} &= -m_1g \cdot 0,25l + \frac{1}{2}(4,5c_1l^2\varphi - 3c_1zl \pm 3c_1l\lambda_{cm1} + 2c_2l^2\varphi + 2c_2zl \pm 2c_2l\lambda_{cm2}) \Big|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = \\ &= -m_1g \cdot 0,25l \pm 1,5c_1l\lambda_{cm1} \pm c_2l\lambda_{cm2}. \end{aligned}$$

Следовательно, параметры системы удовлетворяют условиям

$$-m_2g \pm c_1\lambda_{cm1} \pm c_2\lambda_{cm2} = 0; \quad -m_1g \cdot 0,25l \pm 1,5c_1l\lambda_{cm1} \pm c_2l\lambda_{cm2} = 0.$$

Учитывая это, выражение для потенциальной энергии примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_1z^2 + 2,25c_1l^2\varphi^2 - 3c_1zl\varphi + c_2z^2 + c_2l^2\varphi^2 + 2c_2zl\varphi),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}[(c_1 + c_2)z^2 + (-3c_1l + 2c_2l)z\varphi + (2,25c_1l^2 + c_2l^2)\varphi^2],$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}z^2 + c_{12}z\varphi + c_{22}\varphi^2),$$

где:  $c_{11} = c_1 + c_2 = 1000 + 5000 = 6000 \text{ Н/м}$ ,

$$c_{12} = -1,5c_1l + c_2l = -1,5 \cdot 1000 \cdot 0,6 + 5000 \cdot 0,6 = 2100 \text{ Н},$$

$$c_{22} = 2,25c_1l^2 + c_2l^2 = 2,25 \cdot 1000 \cdot 0,6^2 + 5000 \cdot 0,6^2 = 2610 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Найденные значения квазиупругих коэффициентов удовлетворяют критериям Сильвестра (4.11).

После подстановке выражений для кинетической и потенциальной энергий в уравнения Лагранжа II рода, дифференциальные уравнения малых колебаний системы примут следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\varphi = 0; \\ a_{22}\ddot{\varphi} + c_{12}z + c_{22}\varphi = 0. \end{cases}$$

Уравнение частот (4.16) после раскрытия определителя (4.15) и группировки членов примет вид:

$$a_{11}a_{22}k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})k^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0.$$

Подставив значения коэффициентов и решив полученное биквадратное уравнение:

$$16,8k^4 - 48180k^2 + 18450000 = 0,$$

получим значения частот свободных колебаний:

$$k_1 = 19,41 \text{ с}^{-1}; \quad k_2 = 42,15 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициенты формы, соответствующие частотам  $k_1$  и  $k_2$ , определим по формулам (4.20):

$$\beta_1 = -\frac{6000 - 10 \cdot 19,41^2}{2100} = -\frac{2100}{2610 - 1,68 \cdot 19,41^2} = -1,06;$$



$$\beta_2 = -\frac{6000 - 10 \cdot 42,15^2}{2100} = -\frac{2100}{2610 - 1,68 \cdot 42,15^2} = 5,6.$$

Уравнения, определяющие первое главное колебание:

$$z_1 = A_{z_1} \sin(19,41t + \alpha_1); \quad \varphi_1 = -1,06 A_{z_1} \sin(19,41t + \alpha_1).$$

Уравнения, определяющие второе главное колебание:

$$z_2 = A_{z_2} \sin(42,15t + \alpha_2); \quad \varphi_2 = 5,6 A_{z_2} \sin(42,15t + \alpha_2).$$

Общее решение дифференциальных уравнений представляет собой сумму частных решение:

$$z = z_1 + z_2 = A_{z_1} \sin(19,41t + \alpha_1) + A_{z_2} \sin(42,15t + \alpha_2);$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -1,06 A_{z_1} \sin(19,41t + \alpha_1) + 5,6 A_{z_2} \sin(42,15t + \alpha_2).$$

Значения  $A_{z_1}$ ,  $A_{z_2}$  и  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  определяются из начальных условий.

Графическое изображение форм главных колебаний показано на рисунке 4.6.

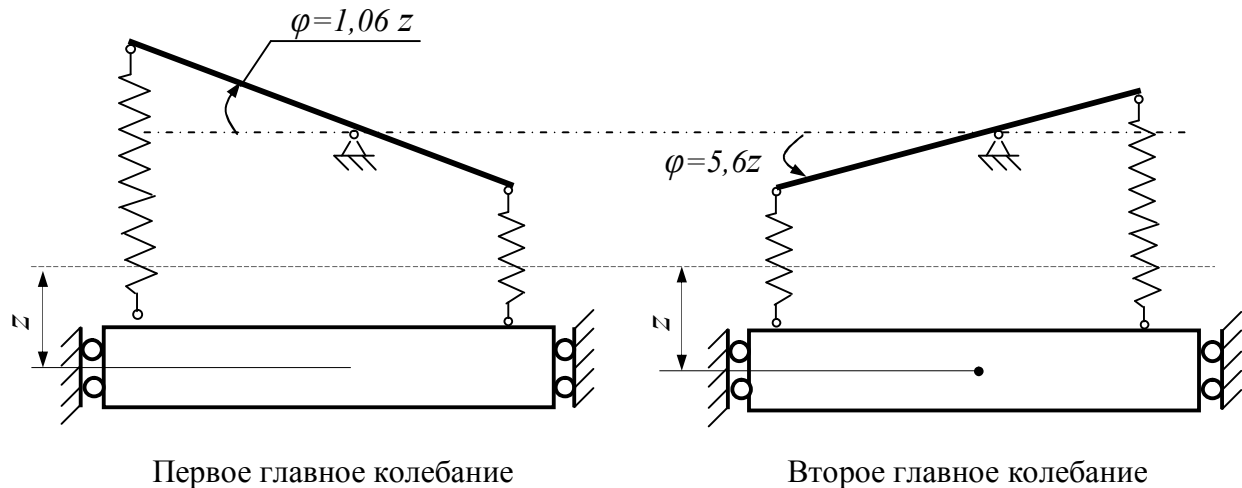


Рисунок 4.6– Графическое изображение форм главных колебаний

Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14 представлено на рисунке 4.7.

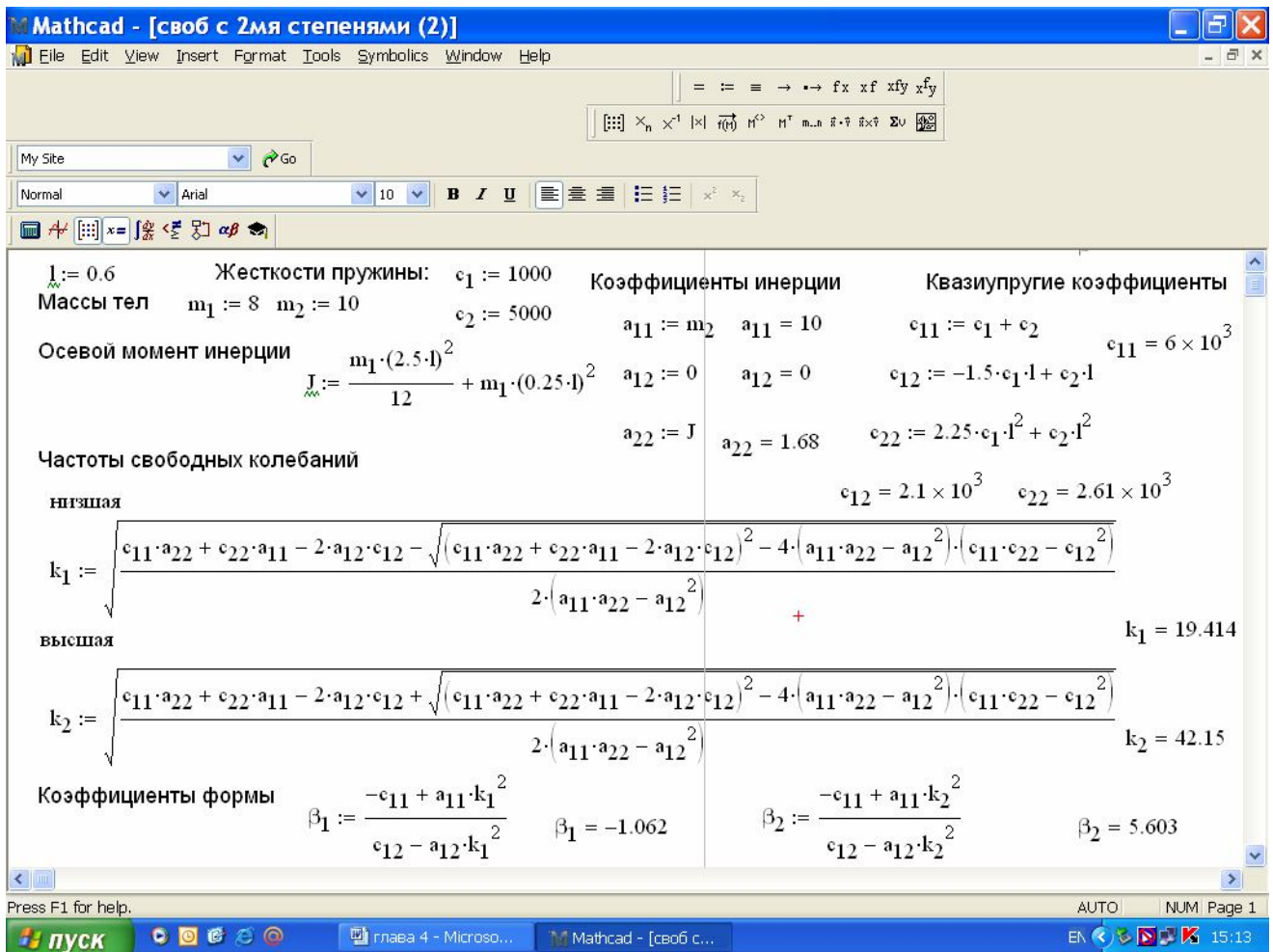


Рисунок 4.7 - Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14

## 4.4 Влияние линейного сопротивления на собственные колебания

### 4.4.1 Диссипативная функция для системы с двумя степенями свободы

Пусть на точки системы действуют линейные силы сопротивления  $\bar{R}_k$ , пропорциональные скоростям точек  $\bar{v}_k$  т. е.

$$\bar{R}_k = -\mu_k \bar{v}_k = -\mu_k \dot{\bar{r}}_k,$$

где  $\mu_k$  - коэффициенты сопротивления (постоянные величины).

Обобщенная сила  $Q_1^R$  сил сопротивления согласно определению обобщенной силы, если использовать тождество Лагранжа

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_1},$$

может быть выражена в форме

$$Q_1^R = \sum_1^N \bar{R}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_1} = - \sum_1^N h_k \bar{r}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_1} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_1^N \frac{h_k \bar{v}_k^2}{2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1}.$$

Здесь  $\Phi = \sum_1^N \frac{h_k \bar{v}_k^2}{2} = \sum_1^N \frac{h_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2}$  - *диссипативная функция*. Аналогично  $Q_2^R$  через диссипативную функцию выразится как

$$Q_2^R = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2}.$$

Так же, как и в случае системы с одной степенью свободы, для системы с двумя и любым конечным числом степеней свободы, можно получить энергетическое соотношение

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi,$$

где  $E = T + \Pi$  — полная механическая энергия системы.

Таким образом, диссипативная функция в общем случае характеризует скорость убывания полной механической энергии вследствие действия сил сопротивления.

Диссипативная функция по своей структуре аналогична кинетической энергии, только в ней вместо масс  $m_k$  входят коэффициенты сопротивления  $\mu_k$ .

Выполнив для  $\Phi$  разложение в ряд в окрестности положения равновесия и отбросив члены третьего и более высокого порядка, так же как и для кинетической энергии, получим

$$\Phi = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{22} \dot{q}_2^2). \quad (4.36)$$

Постоянные величины  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  называются *обобщенными коэффициентами сопротивления*.

Квадратичная форма для  $\Phi$ , так же как и для кинетической энергии, по своей физической сущности, является определено положительной и, следовательно, ее коэффициенты удовлетворяют условиям [2]:

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \\ \left| \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{array} \right| > 0. \quad (4.37)$$

4.4.2 Дифференциальные уравнения колебаний системы с учетом линейного сопротивления и их решения

Пусть  $q_1$  и  $q_2$  - главные координаты системы. Тогда квадратичные формы для кинетической и потенциальной энергий содержат только квадраты своих переменных:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \\ \Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2). \end{cases} \quad (4.38)$$

Диссипативная функция в общем случае сохраняет член с произведением даже для случая главных координат:

$$\Phi = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2 + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2^2). \quad (4.39)$$

Подставляя (4.38) и (4.39) в уравнения Лагранжа (4.1), получаем следующую систему уравнений собственных колебаний с учетом линейного сопротивления:

$$\begin{cases} (a_{11}\ddot{q}_1 + b_{11}\dot{q}_1 + c_{11}q_1) + b_{12}\dot{q}_2 = 0, \\ b_{12}\dot{q}_1 + (a_{22}\ddot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{22}q_2) = 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

Коэффициенты системы уравнений удовлетворяют условиям (4.8), (4.11) и (4.37):

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0.$$

Использование главных координат не приводит к распадению системы уравнений на независимые уравнения, но система уравнений становится несколько проще. Решение системы (4.10) можно искать в форме

$$(4.41)$$

$$q_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad q_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

Подставляя (4.41) в систему уравнений (4.40) и сокращая на  $e^{\lambda t}$ , получаем:

$$\begin{cases} C_1(a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11}) + C_2 b_{12}\lambda = 0, \\ C_1 b_{12}\lambda + C_2(a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22}) = 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Для того чтобы эта система однородных линейных уравнений относительно неизвестных  $C_1, C_2$  имела не нулевые решения, должен равняться нулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & b_{12}\lambda \\ b_{12}\lambda & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Получено характеристическое уравнение для  $\lambda$ , являющееся уравнением четвертой степени, В развернутом виде характеристическое уравнение имеет форму

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}\lambda^4 + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})\lambda^3 + (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\lambda^2 + \\ + (b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11})\lambda + c_{11}c_{22} = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Каждому из четырех его корней  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  соответствуют определенные значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ .

Из уравнений (4.42) определяются не величины  $C_1$  и  $C_2$  для каждого корня  $\lambda_i$ , а только их отношения:

$$\frac{C_2^i}{C_1^i} = -\frac{a_{11}\lambda_i^2 + b_{11}\lambda_i + c_{11}}{b_{12}\lambda_i} = -\frac{b_{12}\lambda_i}{a_{22}\lambda_i^2 + b_{22}\lambda_i + c_{22}}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Индекс  $i$  указывает, для какого корня  $\lambda_i$  берутся постоянные  $C_1$  и  $C_2$ .

Не проводя подробного исследования, отметим, что возможны три варианта корней характеристического уравнения (4.43) и, соответственно, решения системы дифференциальных уравнений (4.40).

1 Корни комплексные.

Они попарно сопряженные, так как коэффициенты уравнения вещественны и имеют отрицательные вещественные части:

$$\lambda_{1,2} = -n_1 \pm k_1 i, \quad \lambda_{3,4} = -n_2 \pm k_2 i.$$

Этот случай получается при малом сопротивлении. Подставляя эти значения  $\lambda$  в (4.41), после несложных преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} q_1 &= e^{-n_1 t} (B_1^{(1)} \cos k_1 t + D_1^{(1)} \sin k_1 t) + e^{-n_2 t} (B_1^{(2)} \cos k_2 t + D_1^{(2)} \sin k_2 t) = \\ &= A_1^{(1)} e^{-n_1 t} \sin(k_1 t + \alpha_1^{(1)}) + A_1^{(2)} e^{-n_2 t} \sin(k_2 t + \alpha_1^{(2)}); \\ q_2 &= e^{-n_1 t} (B_2^{(1)} \cos k_1 t + D_2^{(1)} \sin k_1 t) + e^{-n_2 t} (B_2^{(2)} \cos k_2 t + D_2^{(2)} \sin k_2 t) = \\ &= A_2^{(1)} e^{-n_1 t} \sin(k_1 t + \alpha_2^{(1)}) + A_2^{(2)} e^{-n_2 t} \sin(k_2 t + \alpha_2^{(2)}), \end{aligned}$$

где  $B, D, A, \alpha$  - постоянные величины.

Каждая главная координата является суммой двух затухающих колебаний. Четыре из восьми постоянных  $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_2^{(1)}, A_2^{(2)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$  определяются из начальных условий; другие четыре — через величины  $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$ .

## 2 Корни действительные.

Их можно представить в форме:

$$\lambda_{1,2} = -n_1 \pm k_1, \quad \lambda_{3,4} = -n_2 \pm k_2,$$

причем  $k_1 < n_1, k_2 < n_2$ . Для главных координат  $q_1$  и  $q_2$  в этом случае

$$\begin{aligned} q_1 &= e^{-n_1 t} (C_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_1^{(2)} e^{-k_1 t}) + e^{-n_2 t} (C_1^{(3)} e^{k_2 t} + C_1^{(4)} e^{-k_2 t}); \\ q_2 &= e^{-n_1 t} (C_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2^{(2)} e^{-k_1 t}) + e^{-n_2 t} (C_2^{(3)} e^{k_2 t} + C_2^{(4)} e^{-k_2 t}). \end{aligned}$$

Движение неперриодическое, затухающее. Оно получается при большом сопротивлении.

## 3 Два корня действительные, а два – комплексно - сопряженные:

$$\lambda_{1,2} = -n_1 \pm k_1, \quad \lambda_{3,4} = -n_2 \pm k_2 i.$$

Для  $q_1$  и  $q_2$  получаем:

$$\begin{aligned} q_1 &= e^{-n_1 t} (C_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_1^{(2)} e^{-k_1 t}) + A_1^{(2)} e^{-n_2 t} \sin(k_2 t + \alpha_1^{(2)}); \\ q_2 &= e^{-n_1 t} (C_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2^{(2)} e^{-k_1 t}) + A_2^{(2)} e^{-n_2 t} \sin(k_2 t + \alpha_2^{(2)}). \end{aligned}$$

В этом случае имеем наложение затухающих колебаний на затухающее движение. Не главные обобщенные координаты линейно выражаются через главные в соответствии с (4.23). Следовательно, для них каждая из обобщенных координат является линейной комбинацией рассмотренных трех видов движений. Аналогичное

положение будет в случае любого конечного числа степеней свободы.

## 4.5 Вынужденные колебания системы без учета сопротивления

### 4.5.1 Уравнения вынужденных колебаний без учета сопротивления

Рассмотрим вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы без учета сопротивления под действием гармонических возмущающих обобщенных сил, отнесенных к главным координатам. Гармонические возмущающие силы для других координат можно привести к гармоническим возмущающим силам для главных координат, если частоты первоначальных возмущающих сил одинаковы. Действие возмущающих сил, имеющих разные частоты, следует рассматривать по отдельности, используя свойство суперпозиции решений линейных дифференциальных уравнений. В этом случае кинетическая и потенциальная энергии выражаются (4.7) и (4.9). Обобщенные возмущающие силы считаем гармоническими:

$$Q_1^B = H_1 \sin(pt + \delta); \quad Q_2^B = H_2 \sin(pt + \delta),$$

где  $Q_1^B$  и  $Q_2^B$  - амплитуды обобщенных возмущающих сил,

$p$  - частота возмущающей силы;

$\delta$  - начальная фаза возмущающей силы.

Итак, для обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  из уравнений Лагранжа (4.1) получим следующую систему уравнений вынужденных колебаний:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = H_1 \sin(pt + \delta); \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = H_2 \sin(pt + \delta). \end{cases} \quad (4.44)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (4.44) складывается из общего решения однородной системы уравнений и частного решения неоднородной системы. Общее решение системы представляет ранее рассмотренные свободные колебания и находится согласно методу, приведенному в п. 4.3. Остановимся только на определении частного решения этой системы уравнений, представляющих вынужденные колебания системы.

Частное решение ищем в виде

$$q_1 = D_1 \sin(pt + \delta), \quad q_2 = D_2 \sin(pt + \delta). \quad (4.45)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  - величины, подлежащие определению.

Подставив значения (4.45) и их вторые производные,

$$\ddot{q}_1 = -D_1 p^2 \sin(pt + \delta), \quad \ddot{q}_2 = -D_2 p^2 \sin(pt + \delta),$$

в уравнения (4.44) и разделив на  $\sin(pt + \delta)$ , получим

$$\begin{cases} (c_{11} - p^2 a_{11})D_1 + (c_{12} - p^2 a_{12})D_2 = H_1; \\ (c_{12} - p^2 a_{12})D_1 + (c_{22} - p^2 a_{22})D_2 = H_2. \end{cases} \quad (4.46)$$

Из системы (4.46) определяем величины  $D_1$  и  $D_2$ .

При резонансе, когда  $k_1 = k_2 = p$  и определитель системы (4.45) обращается в нуль, т.е.

$$(c_{11} - p^2 a_{11})(c_{22} - p^2 a_{22}) - (c_{12} - p^2 a_{12})^2 = 0, \quad (4.47)$$

Частное решение системы не может быть найдено по формулам (4.45).

Если обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  являются главными ( $a_{12} = 0$ ,  $c_{12} = 0$ ), то система дифференциальных уравнений (4.44) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 = H_1 \sin(pt + \delta); \\ a_{22} \ddot{q}_2 + c_{22} q_2 = H_2 \sin(pt + \delta), \end{cases}$$

или после деления первого уравнения на  $a_{11}$ , второго — на  $a_{22}$ :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + k_1^2 q_1 = h_1 \sin(pt + \delta); \\ \ddot{q}_2 + k_2^2 q_2 = h_2 \sin(pt + \delta). \end{cases} \quad (4.48)$$

Здесь введены обозначения для постоянных:  $k_1^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$ ,  $k_2^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}$  - квадраты собственных частот и  $h_1 = \frac{H_1}{a_{11}}$ ,  $h_2 = \frac{H_2}{a_{22}}$  - относительные амплитуды возмущающих сил.

Частные решения будем искать в форме (4.45), т.е.

$$q_1 = D_1 \sin(pt + \delta), \quad q_2 = D_2 \sin(pt + \delta).$$



Подставляя эти значения и их вторые производные по времени в (4.48) и приравнивая к нулю коэффициенты при синусах в полученных тождествах, имеем следующие уравнения для определения постоянных  $D_1$  и  $D_2$ :

$$-D_1 p^2 + k_1^2 D_1 = h_1, \quad -D_2 p^2 + k_2^2 D_2 = h_2.$$

Отсюда

$$D_1 = \frac{h_1}{k_1^2 - p^2}, \quad D_2 = \frac{h_2}{k_2^2 - p^2}.$$

Вынужденные колебания через главные координаты выражаются в форме

$$q_1 = \frac{h_1}{k_1^2 - p^2} \sin(pt + \delta), \quad q_2 = \frac{h_2}{k_2^2 - p^2} \cos(pt + \delta).$$

Если частота возмущающей силы совпадает с одной из частот собственных колебаний, например  $p = k_1$ , то этот случай называется *резонансом* на данной частоте. Решение для вынужденных колебаний тогда ищем в виде

$$q_1 = D_1 t \cos(pt + \delta), \quad q_2 = D_2 \sin(pt + \delta). \quad (4.49)$$

Подставляя (4.49) в систему уравнений (4.48) получаем уравнения для определения постоянных  $D_1$  и  $D_2$ . Из этих уравнений находим:

$$D_1 = -\frac{h_1}{2k_1}, \quad D_2 = \frac{h_2}{k_2^2 - p^2}.$$

Вынужденные колебания для главных координат выражаются в форме:

$$q_{1B} = -\frac{h_1 t}{2k_1} \cos(pt + \delta) = -\frac{h_1 t}{2k_1} \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$q_{2B} = \frac{h_2}{k_2^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

По одной главной координате получается резонанс.

#### 4.5.2 Лабораторная работа на вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы без учета сопротивления

При выполнении лабораторной работы на определение вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы без учета сопротивления

рекомендуется следующая последовательность действий:

- 1 Выбираем обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$ ;
- 2 Составляем выражение кинетической энергии  $T$  и находим коэффициенты инерции  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  и  $a_{22}$ ;
- 3 Определяем потенциальную энергию  $\Pi$  и квазиупругие коэффициенты  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  и  $c_{22}$ ;
- 4 Подставляем  $T$ ,  $\Pi$  и обобщенные силы в уравнения Лагранжа и получаем дифференциальное уравнение малых колебаний системы с двумя степенями свободы;
- 5 Находим частные решения дифференциальных уравнений движения системы и ищем значения амплитуд обобщенных координат;
- 6 Определяем значения частот возмущающей силы, при которых возникает резонанс, воспользовавшись уравнение (4.47) .

**Лабораторная работа №7 (вариант 1).** К условиям лабораторной работы №6 (вариант 2) добавить, приложенную в точке  $A$ , горизонтальную силу  $F = 20\sin 6t$  (Н).

Пренебрегая сопротивлением, исследовать вынужденные колебания системы.

Данная механическая система имеет две степени свободы.

За обобщенные координаты примем:  $\varphi$  – угол поворота стержня  $AB$  от положения покоя,  $z$  – вертикальное перемещение груза 2 от положения покоя. Положение системы показано на рисунке 4.8.

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{z}^2 + a_{22}\dot{\varphi}^2),$$

где коэффициенты инерции:

$$a_{11} = m_2 = 10 \text{ кг}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = J_D = 1,68 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

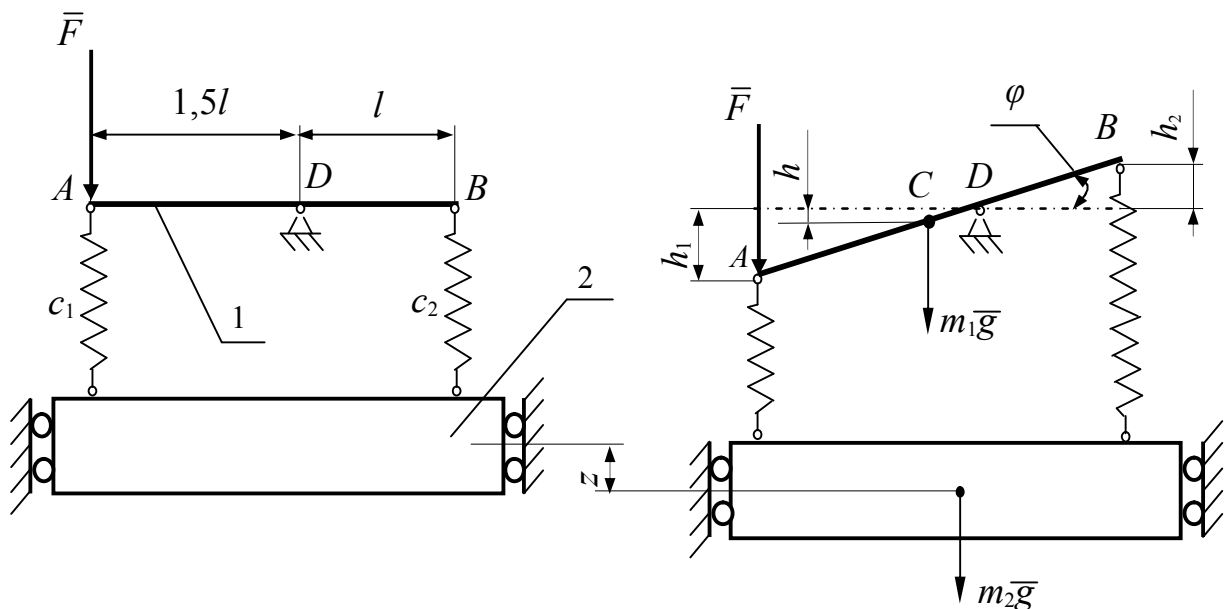


Рисунок 4.8 – Схема механической системы

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}z^2 + c_{12}z\varphi + c_{22}\varphi^2),$$

где квазиупругие коэффициенты:

$$c_{11} = 6000 \text{ Н/м}, \quad c_{12} = 2100 \text{ Н}, \quad c_{22} = 2610 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Обобщенные силы, связанные с действием вынуждающей силы  $F$ :

$$Q_z = \frac{\delta A_{Fz}}{\delta z}; \quad Q_\varphi = \frac{\delta A_{F\varphi}}{\delta \varphi}, \quad (4.50)$$

где  $\delta A_{Fz}$  - элементарная работа вынуждающей силы  $F$  на перемещении системы, вызываемом элементарным приращением обобщенной координаты  $z$  при  $\varphi = \text{const}$ ;

$\delta A_{F\varphi}$  - элементарная работа вынуждающей силы  $F$  на перемещении системы, вызываемом элементарным приращением обобщенной координаты  $\varphi$  при  $z = \text{const}$ ;

$\delta z$ ,  $\delta \varphi$  - элементарные приращения обобщенных координат.

Если принять направление вынуждающей силы при  $t = 0$  положительным и считать, что оно совпадает с направлением отсчета положительных значений угла  $\varphi$ , то из соотношений (4.50) получаем

$$Q_z = 0;$$

$$Q_\varphi = \frac{F \cdot 1,5l\delta\varphi}{\delta\varphi} = 1,5Fl = 30l \sin 6t.$$

Дифференциальные уравнения малых колебаний системы будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\varphi = 0; \\ a_{22}\ddot{\varphi} + c_{12}z + c_{22}\varphi = 30l \sin 6t. \end{cases} \quad (4.51)$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений (4.51) будем искать в виде

$$z = D_1 \sin 6t; \quad \varphi = D_2 \sin 6t. \quad (4.52)$$

Подставляем выражения (4.52) и вторые производные от обобщенных координат по времени,

$$\ddot{z} = -36D_1 \sin 6t; \quad \ddot{\varphi} = -36D_2 \sin 6t,$$

в дифференциальные уравнения (4.51), получаем

$$\begin{cases} -a_{11}36D_1 \sin 6t + c_{11}D_1 \sin 6t + c_{12}D_2 \sin 6t = 0; \\ -a_{22}36D_2 \sin 6t + c_{12}D_1 \sin 6t + c_{22}D_2 \sin 6t = 30l \sin 6t, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} D_1(c_{11} - a_{11} \cdot 36) + c_{12}D_2 = 0; \\ c_{12}D_1 + (c_{22} - a_{22} \cdot 36)D_2 = 30l. \end{cases} \quad (4.53)$$

После подстановки известных величин в уравнение (4.53) примет вид:

$$\begin{cases} 5640D_1 + 2100D_2 = 0; \\ 2100D_1 + 3749,52D_2 = 18, \end{cases}$$

откуда значения амплитуд равны:

$$D_1 = 0,0071\text{м}, \quad D_2 = 0,0026\text{м}.$$

Из уравнения (4.47) находим значение частот  $p$ , при которых возникает резонанс:

$$\begin{aligned} (6000 - 10p^2)(3810 - 1,68p^2) - 2100^2 &= 0, \\ p_1 &= 19,4 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = 42,15 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14 представлено на рисунке 4.9.

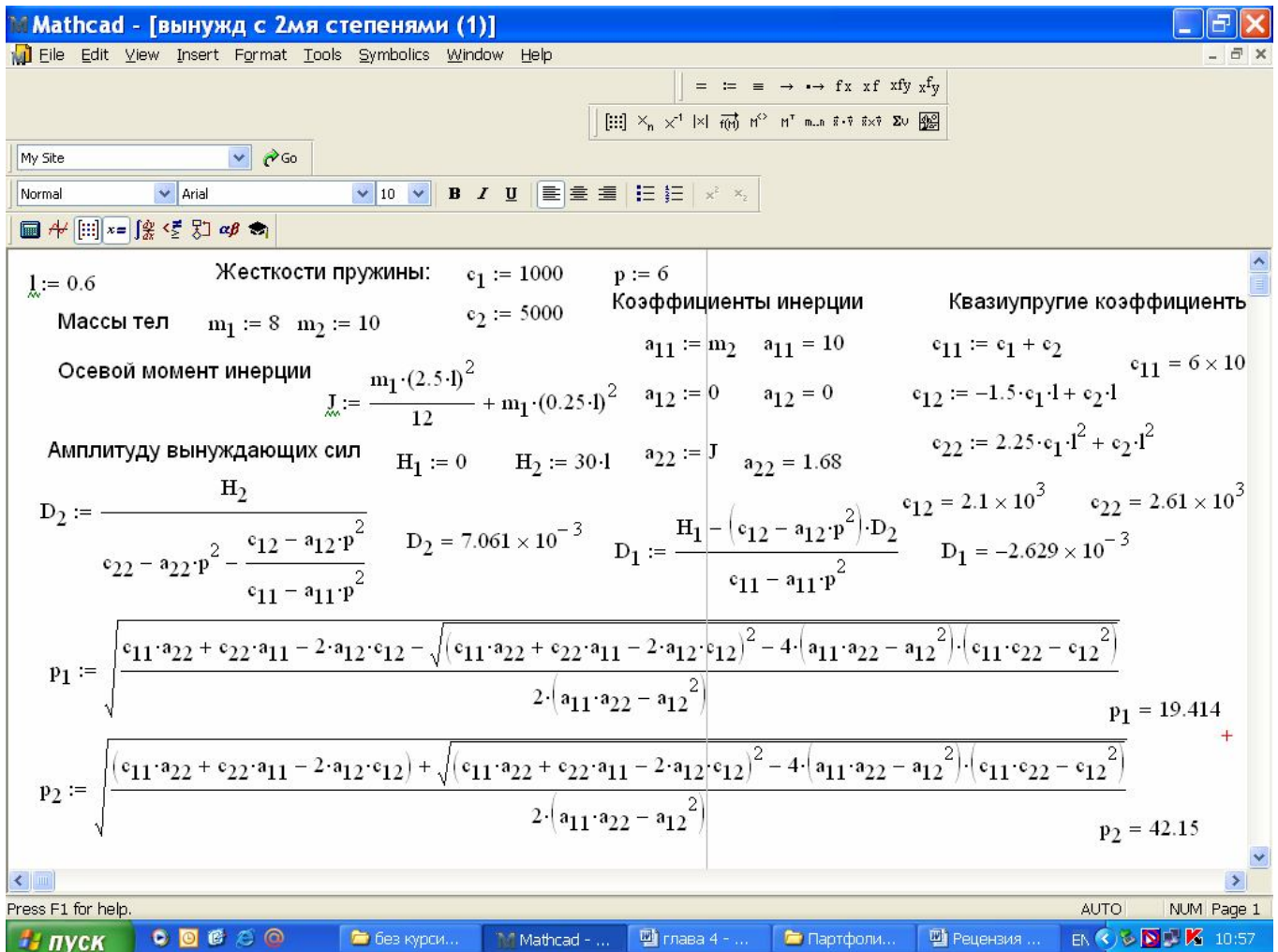


Рисунок 4.9 - Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14

**Лабораторная работа №7 (вариант 2).** Исследовать вынужденные колебания системы, которая состоит из двух грузов массами  $m_1=2$  кг и  $m_2=1$  кг, прикрепленными к пружинам жесткостей  $c_1=300$  Н/м и  $c_2=200$  Н/м (рисунок 4.10). На тело 2 действует сила, изменяющаяся по закону  $F = 10\cos 5t$  (Н).

Система имеет две степени свободы, если рассматривать только движения грузов по вертикали. Примем за обобщенные координаты системы вертикальные смещения грузов ( $q_1 = x_1, q_2 = x_2$ ).

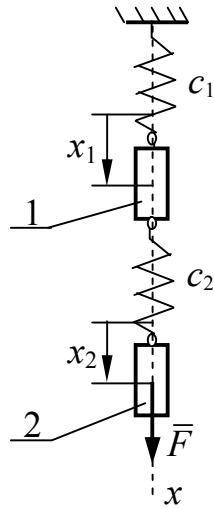


Рисунок 4.10– Схематическое изображение механической системы

Вычисляем кинетическую энергию системы. Имеем:

$$T = T_1 + T_2,$$

или

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2).$$

Сравнивая ее с разложением кинетической энергии (4.7), получаем коэффициенты инерции:

$$a_{11} = m_1 = 2 \text{ кг}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = m_2 = 1 \text{ кг}.$$

Найденные значения коэффициентов инерции удовлетворяют критериям Сильвестра (4.8).

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальных энергий в поле сил тяжести  $\Pi_{m_1g}$  и  $\Pi_{m_2g}$ , а также потенциальных энергий деформированных пружин  $\Pi_{c1}$  и  $\Pi_{c2}$ , т.е.:

$$\Pi = \Pi_{m_1g} + \Pi_{m_2g} + \Pi_{c1} + \Pi_{c2}.$$

Потенциальные энергии в поле сил тяжести

$$\Pi_{m_1g} = -m_1 g x_1,$$

$$\Pi_{m_2g} = -m_2 g x_2.$$

Потенциальную энергию пружин найдем, рассматривая сначала перемещение системы из отклоненного положения в положение, соответствующее недеформированным пружинам, а затем из этого положения – в положение покоя.

Деформация пружин жесткости  $c_1$  и  $c_2$  равны, соответственно:

$$\varepsilon_1 = x_1 \pm \lambda_{cm1}, \quad \varepsilon_2 = x_1 - x_2 \pm \lambda_{cm2}.$$

Тогда потенциальные энергии пружин:

$$\Pi_{c1} = \frac{1}{2}c_1(x_1 \pm \lambda_{cm1})^2 - \frac{1}{2}c_1\lambda_{cm1}^2,$$

$$\Pi_{c2} = \frac{1}{2}c_2(x_1 - x_2 \pm \lambda_{cm2})^2 - \frac{1}{2}c_2\lambda_{cm2}^2.$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = -m_1gx_1 - m_2gx_2 + \frac{1}{2}c_1(x_1 \pm \lambda_{cm1})^2 - \frac{1}{2}c_1\lambda_{cm1}^2 + \frac{1}{2}c_2(x_1 - x_2 \pm \lambda_{cm2})^2 - \frac{1}{2}c_2\lambda_{cm2}^2.$$

Раскроем скобки в выражении для потенциальной энергии:

$$\Pi = -m_1gx_1 - m_2gx_2 + \frac{1}{2}(c_1x_1^2 \pm 2c_1x_1\lambda_{cm1} + c_2x_1^2 + c_2x_2^2 - 2c_2x_1x_2 \pm 2c_2x_1\lambda_{cm2} \pm 2c_2x_2\lambda_{cm2}).$$

По теореме Лагранжа-Дирихле в положении равновесия, при  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ , должны выполняться равенства:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 0.$$

Имеем

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = -m_1g \pm c_1\lambda_{cm1} \pm 2c_2\lambda_{cm2} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = m_2g \pm 2c_2x_2\lambda_{cm2} = 0.$$

Учитывая это, выражение для потенциальной энергии примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_1 x_1^2 + c_2 x_1^2 + c_2 x_2^2 - 2c_2 x_1 x_2),$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11} x_1^2 + c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2),$$

где:  $c_{11} = c_1 + c_2 = 300 + 200 = 500 \text{ Н/м}$ ,

$c_{12} = -c_2 = 200 \text{ Н}$ ,

$c_{22} = c_2 = 200 \text{ Н·м}$ .

Найденные значения квазиупругих коэффициентов удовлетворяют критериям Сильвестра (4.11).

Обобщенные силы, связанные с действием вынуждающей силы  $F$ :

$$Q_1 = \frac{\delta A_{F_1}}{\delta x_1}; \quad Q_2 = \frac{\delta A_{F_2}}{\delta x_2}, \quad (4.54)$$

где  $\delta A_{F_1}$  - элементарная работа вынуждающей силы  $F$  на перемещении системы, вызываемом элементарным приращением обобщенной координаты  $x_1$  при  $x_2 = \text{const}$ ;

$\delta A_{F_2}$  - элементарная работа вынуждающей силы  $F$  на перемещении системы, вызываемом элементарным приращением обобщенной координаты  $x_2$  при  $x_1 = \text{const}$ ;

$\delta x_1, \delta x_2$  - элементарные приращения обобщенных координат.

Если принять направление вынуждающей силы при  $t = 0$  положительным и считать, что оно совпадает с направлением отсчета положительных значений  $x_2$ , то из соотношений (4.54) получаем

$$Q_1 = 0;$$

$$Q_2 = \frac{F \cdot \delta x_2}{\delta x_2} = F = 10 \sin 5t.$$

Дифференциальные уравнения малых колебаний системы будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{x}_1 + c_{11} x_1 + c_{12} x_2 = 0; \\ a_{22} \ddot{x}_2 + c_{12} x_1 + c_{22} x_2 = 10 \sin 5t. \end{cases} \quad (4.55)$$



Частное решение системы дифференциальных уравнений (4.55) будем искать в виде

$$x_1 = D_1 \sin 5t; \quad x_2 = D_2 \sin 5t. \quad (4.56)$$

Подставляем выражения (4.56) и вторые производные от обобщенных координат по времени,

$$\ddot{x}_1 = -25D_1 \sin 5t; \quad \ddot{x}_2 = -25D_2 \sin 5t,$$

в дифференциальные уравнения (4.55), получаем

$$\begin{cases} -a_{11}25D_1 \sin 5t + c_{11}D_1 \sin 5t + c_{12}D_2 \sin 5t = 0; \\ -a_{22}25D_2 \sin 5t + c_{12}D_1 \sin 5t + c_{22}D_2 \sin 5t = 10 \sin 5t, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} D_1(c_{11} - a_{11} \cdot 25) + c_{12}D_2 = 0; \\ c_{12}D_1 + (c_{22} - a_{22} \cdot 25)D_2 = 10. \end{cases} \quad (4.57)$$

После подстановки известных величин в уравнение (4.57) определяем значения амплитуд:

$$D_1 = 0,057 \text{ м}, \quad D_2 = 0,025 \text{ м}.$$

Из уравнения (4.47) находим значение частот  $p$ , при которой возникает резонанс:

$$\begin{aligned} (500 - 2p^2)(200 - p^2) - 200^2 &= 0, \\ p_1 &= 9,0 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = 19,2 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14 представлено на рисунке 4.11.

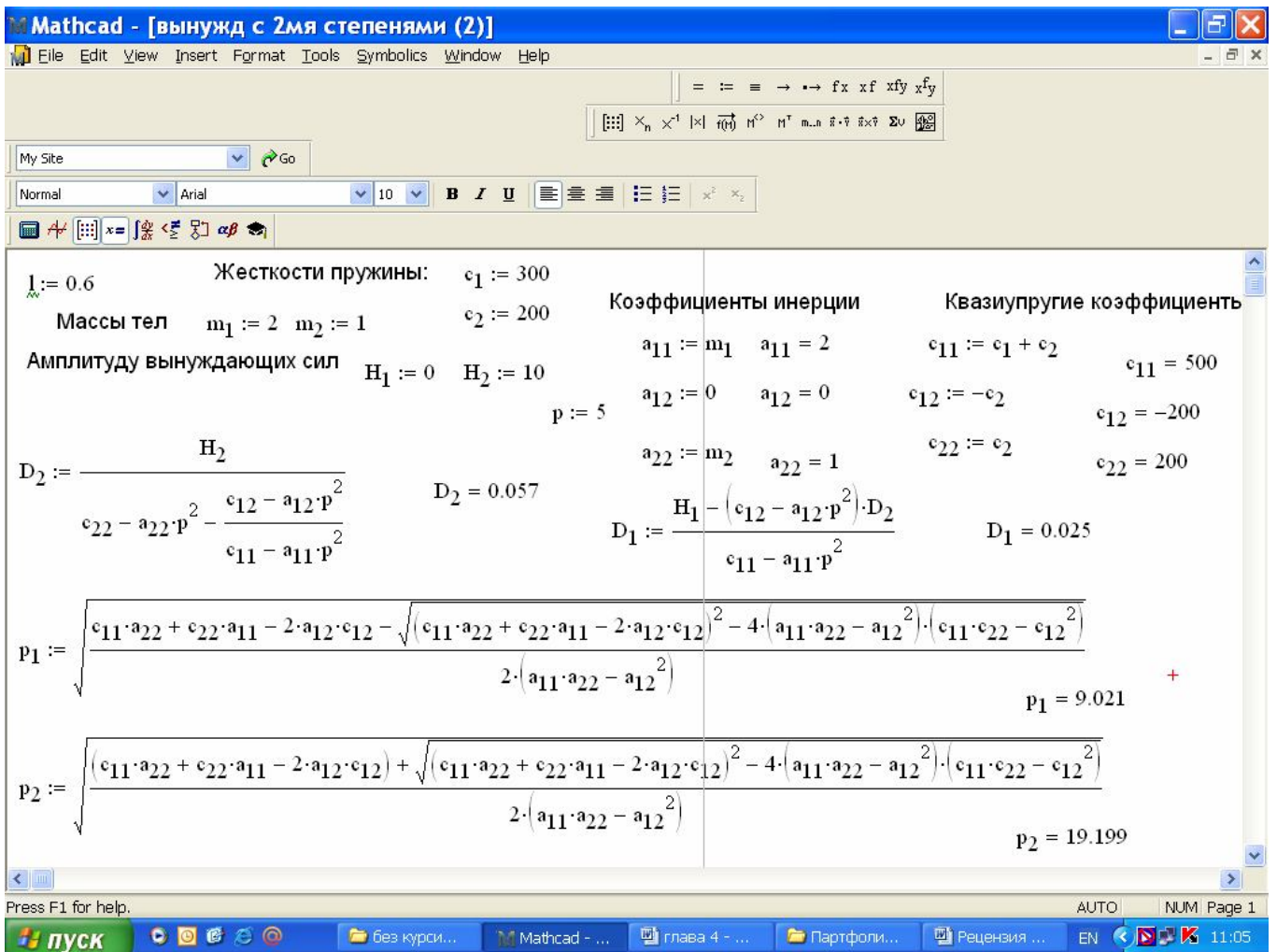


Рисунок 4.11 - Выполнение лабораторной работы в Mathcad 14

#### 4.6 Влияние линейного сопротивления на вынужденные колебания

Так как использование главных координат при учете линейно сопротивления не ведет к существенным упрощениям системы дифференциальных уравнений, но в то же время нарушает симметрии то целесообразно использовать произвольные обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$ . В этом случае кинетическая и потенциальная энергии выражаются (4.7) и (4.9), а диссипативная функция - (4.35).

Обобщенные возмущающие силы считаем гармоническими:

$$Q_1^B = H_1 \sin(pt + \delta), \quad Q_2^B = H_2 \sin(pt + \delta).$$

Подставляя эти значения указанных величин в уравнения Лагранжа (4.1), получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений вынужденных колебаний с учетом линейного сопротивления:

$$\begin{cases} (a_{11}\ddot{q}_1 + b_{11}\dot{q}_1 + c_{11}q_1) + (a_{12}\ddot{q}_2 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{12}q_2) = H_1 \sin(pt + \delta); \\ (a_{12}\ddot{q}_2 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{12}q_2) + (a_{22}\ddot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{22}q_2) = H_2 \sin(pt + \delta). \end{cases} \quad (4.58)$$

Решение системы уравнений (4.58) для каждой координаты является суммой собственных движений  $q_{1c}$ ,  $q_{2c}$  и вынужденных колебаний  $q_{1\delta}$ ,  $q_{2\delta}$ :

$$q_1 = q_{1c} + q_{1\delta}, \quad q_2 = q_{2c} + q_{2\delta}.$$

В зависимости от корней характеристического уравнения для однородной системы уравнений, которая получается из (4.58) путем отбрасывания правых частей, они могут быть линейной комбинацией затухающих колебаний с затухающими не периодическими движениями или этими движениями по отдельности.

Рассмотрим вынужденные колебания  $q_{1\delta}$ ,  $q_{2\delta}$ . Они являются частными решениями системы уравнений (4.58). В этом случае их следует искать в форме

$$\begin{cases} q_1 = B_1 \sin(pt + \delta) + D_1 \cos(pt + \delta) = A_1 \sin(pt + \delta - \varepsilon_1); \\ q_2 = B_2 \sin(pt + \delta) + D_2 \cos(pt + \delta) = A_2 \sin(pt + \delta - \varepsilon_2). \end{cases} \quad (4.59)$$

Постоянные  $B_1$ ,  $D_1$ ,  $B_2$ ,  $D_2$  связаны с постоянными  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  соотношениями:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cos \varepsilon_1, & D_1 &= -A_1 \sin \varepsilon_1, \\ B_2 &= A_2 \cos \varepsilon_2, & D_2 &= -A_2 \sin \varepsilon_2. \end{aligned}$$

соответственно амплитуды  $A_1$ ,  $A_2$  и сдвиги фаз  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{B_1^2 + D_1^2}, & \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= -\frac{D_1}{B_1}, \\ A_2 &= \sqrt{B_2^2 + D_2^2}, & \operatorname{tg} \varepsilon_2 &= -\frac{D_2}{B_2}. \end{aligned}$$

Подставим (4.59) в систему уравнений (4.58). Получим тождества, справедливые для любого момента времени. Если в каждом тождестве собрать отдельно члены с синусами и косинусами, то коэффициенты при них должны равняться нулю. Это дает систему четырех уравнений для определения неизвестных  $B_1$ ,  $D_1$ ,  $B_2$ ,  $D_2$ :

$$\begin{cases} B_1(c_{11} - a_{11}p^2) - D_1b_{11}p + B_2(c_{12} - a_{12}p^2) - D_2b_{12}p = H_1; \\ B_1b_{11}p + D_1(c_{11} - a_{11}p^2) + B_2b_{12}p + D_2(c_{12} - a_{12}p^2) = 0; \\ B_1(c_{12} - a_{12}p^2) - D_1b_{12}p + B_2(c_{22} - a_{22}p^2) - D_2b_{22}p = H_2; \\ B_1b_{12}p + D_1(c_{12} - a_{12}p^2) + B_2b_{22}p + D_2(c_{22} - a_{22}p^2) = 0. \end{cases} \quad (4.60)$$

Можно доказать, что эта система неоднородных линейных уравнений совместна, т. е. ее определитель не равняется нулю ни при каких значениях  $p$ . Решая систему уравнений (4.60), полностью определим постоянные  $B_1, D_1, B_2, D_2$ , а следовательно,  $A_1, A_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

Не выполняя решения системы уравнений (4.60), можно сделать выводы о влиянии линейного сопротивления на вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы. Как и для случая системы с одной степенью свободы, вынужденные колебания являются незатухающими гармоническими колебаниями и происходят с частотой возмущающей силы. Они не зависят от начальных условий. При резонансе амплитуды вынужденных колебаний остаются постоянными в отличие от случая отсутствия сопротивления.

#### 4.7 Задачи для самоконтроля

1 Механическая система, состоящая из двух однородных стержней одинаковой длины  $l=3$  м (рисунок 4.12) и массами  $m_1=3$  кг и  $m_2=5$  кг совершают малые свободные колебания. Определить коэффициенты инерции? За обобщенные координаты принять углы поворота стержней  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

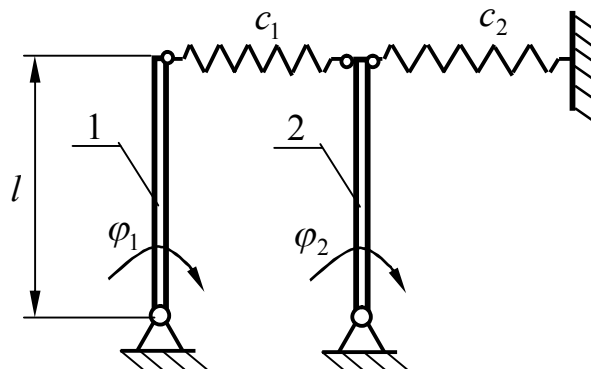


Рисунок 4.12 – Механическая система

2 Определить квазиупругие коэффициенты механической системы, изображенной на рисунке 4.12, если длина стержней  $l=3$  м, коэффициенты

жесткости пружин равны  $c_1=3 \text{ Н/м}$  и  $c_2=5 \text{ Н/м}$ . За обобщенные координаты принять углы поворота стержней  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

3 Кинетическая энергия механической системы имеет вид:

$$T = 10\dot{q}_1^2 + 15\dot{q}_2^2,$$

где  $q_1$  и  $q_2$  - обобщенные координаты системы.

Определить коэффициенты инерции системы?

4 Потенциальная энергия механической системы имеет вид:

$$\Pi = 100q_1^2 + 200q_1q_2 + 300q_2^2,$$

где  $q_1$  и  $q_2$  - обобщенные координаты системы.

Определить квазиупругие коэффициенты системы?

5 Кинетическая и потенциальная энергии механической системы имеют вид, соответственно:

$$T = 3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2,$$

$$\Pi = 6q_1^2 + 10q_1q_2 + 10q_2^2,$$

где  $q_1$  и  $q_2$  - обобщенные координаты системы.

Определить низшую частоту колебаний системы?

6 Дифференциальные уравнения колебаний механической системы имеют вид:

$$\begin{cases} 3\ddot{q}_1 + 60q_1 + 200q_2 = 0; \\ 6\ddot{q}_2 + 200q_1 + 150q_2 = 0, \end{cases}$$

где  $q_1$  и  $q_2$  - обобщенные координаты.

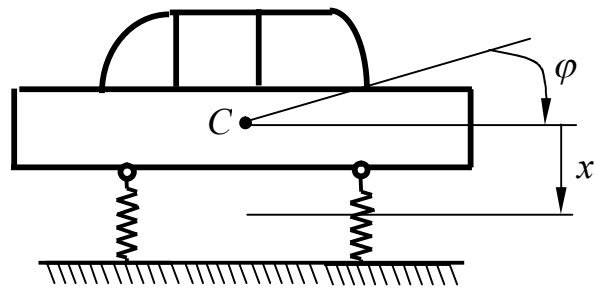
Определите низшую частоту колебаний автомобиля?

7 Дифференциальные уравнения колебаний автомобиля в вертикальной плоскости (рисунок 4.13) имеют вид:

$$\begin{cases} 6\ddot{x} + 2\ddot{\varphi} + 100x + 120\varphi = 0; \\ 2\ddot{x} + 8\ddot{\varphi} + 120x + 150\varphi = 0, \end{cases}$$

где  $x$  и  $\varphi$  - обобщенные координаты.

Определите высшую частоту колебаний автомобиля?



$C$  – центр масс автомобиля

Рисунок 4.13 – Колебание автомобиля

8 Определить обобщенные силы, связанные с действием вынуждающих сил  $F_1 = 100$  Н и  $F_2 = 200$  Н? За обобщенные координаты принять перемещения центров масс дисков  $x_1$  и  $x_2$  (рисунок 4.14).

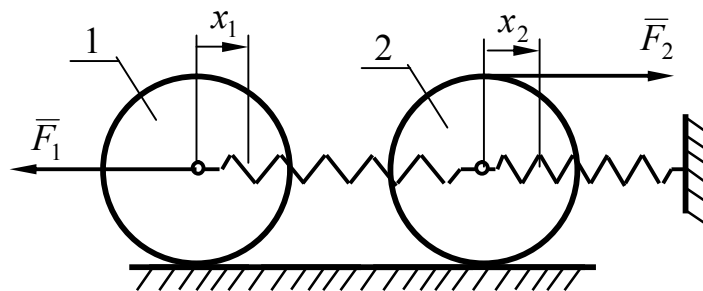


Рисунок 4.14 – Колебание механической системы

9 Определить обобщенные силы, связанные с действием вынуждающей силы  $F = 75$  Н и пары сил с моментом  $250$  Н·м? Длина стержня  $l = 3$  м, радиус диска  $R = 2$  м. За обобщенные координаты принять угол поворота стержня  $\varphi$  и перемещение центра масс диска  $x$  (рисунок 4.15).

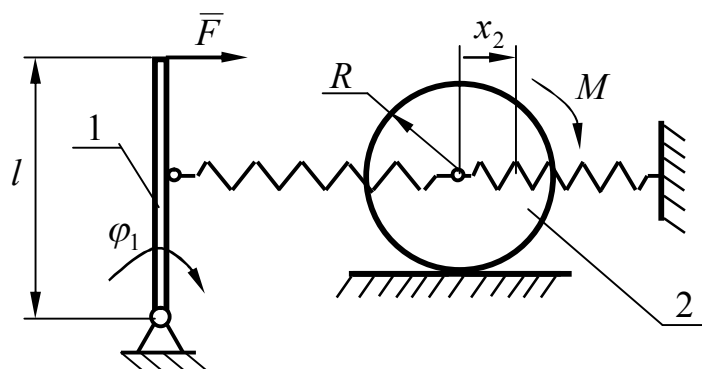


Рисунок 4.15 – Механическая система

## 5 Малые колебания системы с $n$ степенями свободы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $N$  материальных точек и имеющую  $n$  степеней свободы, на которую наложены голономные, стационарные и неосвобождающие связи. Предположив, что система имеет устойчивое положение равновесия, будем отсчитывать от этого положения обобщенные координаты  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Сохраним допущения относительно сил, действующих на систему, сделанные при выводе дифференциальных уравнений малых колебаний в системах с одной и двумя степенями свободы, т.е. с учетом малости колебаний представим силу  $\bar{F}_k$ , действующую на  $k$ -ую точку, в виде

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k^\Pi(\bar{r}_k) + \bar{F}_k^R(\bar{v}_k) + \bar{F}_k^B(t),$$

где  $\bar{F}_k^\Pi(\bar{r}_k)$  - потенциальные силы, зависящие от положения точек системы;

$\bar{F}_k^R(\bar{v}_k)$  - диссипативные силы, линейно зависящие от скоростей;

$\bar{F}_k^B(t)$  - силы, характеризующие внешнее воздействие на систему.

Дифференциальные уравнения малых колебаний системы получим из  $n$  уравнений Лагранжа II рода [8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_1} = Q_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = Q_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_n} = Q_n, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

где каждая из обобщенных сил состоит из трех составляющих: обобщенной силы: от потенциальных сил  $Q_i^\Pi$ , от сил сопротивления  $Q_i^R$  и возмущающих сил  $Q_i^B$ .

## 5.1 Кинетическая энергия системы с $n$ степенями свободы

Вектор скорости  $k$ -ой точки, в силу стационарности связей, определяется по формуле:

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i. \quad (5.2)$$

Тогда кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \sum_1^N \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} = \sum_1^N \frac{m_k}{2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Обозначив

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j},$$

получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где  $A_{ij} = A_{ij}(q_1, \dots, q_n)$  являются функциями обобщенных координат.

Разлагая  $A_{ij}$  в ряд Макларена в окрестности положения равновесия

$$A_{ij}(q_1, \dots, q_n) = (A_{ij})_0 + \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_r} \right)_0 \cdot q_r + \dots,$$

будем, как в системах с одной и двумя степенями свободы, в силу малости колебаний учитывать только первый член разложения. Обозначим  $(A_{ij})_0$  через  $a_{ij}$ , который и будет называться коэффициентом инерции, причем  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Окончательно имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (5.3)$$

Видно, что при сделанных допущениях кинетическая энергия является квадратичной формой скоростей обобщенных координат. Известно, что кинетическая энергия механической системы может быть либо положительной, если



отлична от нуля хотя бы одна обобщенная скорость, либо равной нулю, если равны нулю все обобщенные скорости. Следовательно, квадратичная форма кинетической энергии (5.3) является положительно-определенной квадратичной формой, т.е. коэффициенты инерции должны удовлетворять критерию Сильвестра [8]:

$$a_{11} > 0; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Поскольку всегда можно изменить нумерацию обобщенных координат и любую из них сделать первой, то все элементы матрицы, находящиеся на главной диагонали, должны быть строго больше нуля.

## 5.2 Потенциальная энергия системы с $n$ степенями свободы

Потенциальную энергию системы  $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$  разложим в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия:

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) = & (\Pi)_0 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 \cdot q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \cdot q_i q_j + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_i \partial q_j \partial q_r} \right)_0 \cdot q_i q_j q_r + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

Первый член в разложении (5.4) равен нулю, поскольку потенциальную энергию и обобщенные координаты отсчитывают от положения равновесия; вторые члены в разложении также равны нулю, так как потенциальная энергия в положении равновесия имеет экстремум (минимум) и, следовательно  $\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 = 0$ ; четвертые и последующие члены отбрасываем в силу предположения о малости колебаний.

Обозначим  $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0$  через  $c_{ij}$ , который называется квазиупругим

коэффициентом, причем  $c_{ij} = c_{ji}$ . Окончательно имеем

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot q_i q_j, \quad (5.5)$$

т.е. потенциальная энергия системы представляет собой квадратичную форму относительно обобщенных координат и квазиупругие коэффициенты должны удовлетворять критерию Сильвестра [8]:

$$c_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \dots; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{11} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Как и в случае с обобщенными коэффициентами инерции, все квазиупругие коэффициенты, находящиеся на главной диагонали, должны быть строго больше нуля.

### 5.3 Диссипативная функция Рэлея для системы с $n$ степенями свободы

Учитывая выражение для скорости (5.2), запишем диссипативную функцию Рэлея  $\Phi$  для системы с  $n$  степенями свободы:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mu_k \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mu_k \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mu_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где коэффициенты

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j},$$

в общем случае являются функциями обобщенных координат

$$B_{ij} = B_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Так как диссипативная функция Релея уже содержит величины второго порядка малости (произведения скоростей обобщенных координат) в разложении  $B_{ij}$  в ряд Макларена, как и в разложении коэффициентов  $A_{ij}$ , удержим только первые члены разложения – значения  $B_{ij}$  в положении равновесия.

Обозначим  $(B_{ij})_0$  через  $b_{ij}$ , который называется обобщенным коэффициентом сопротивления, причем  $b_{ij} = b_{ji}$ . Тогда

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (5.7)$$

Функция  $\Phi$  представляет, в общем случае, в силу (5.6), неотрицательную квадратичную форму. и обобщенные коэффициенты сопротивления удовлетворяют критерию Сильвестра [8]:

$$b_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \dots; \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{11} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

#### 5.4 Дифференциальные уравнения колебаний системы с $n$ степенями свободы

Составляющая обобщенной силы от потенциальных сил, с учетом (5.5) будет иметь вид:

$$Q_i^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^n c_{ij} q_j. \quad (5.8)$$

Например,  $Q_1^{\Pi} = -c_{11}q_1 - c_{12}q_2 - \dots - c_{1n}q_n$ ,  $Q_2^{\Pi} = -c_{21}q_1 - c_{22}q_2 - \dots - c_{2n}q_n$  и т.д.

Составляющая обобщенной силы от диссипативных сил, с учетом (5.7) будет определяться по формуле:

$$Q_i^R = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_j. \quad (5.9)$$

Например,  $Q_1^R = -b_{11} \dot{q}_1 - b_{12} \dot{q}_2 - \dots - b_{1n} \dot{q}_n$ ,  $Q_2^R = -b_{21} \dot{q}_1 - b_{22} \dot{q}_2 - \dots - b_{2n} \dot{q}_n$  и т.д.

Составляющую обобщенной силы  $Q_i^B$  возмущающих сил  $\bar{F}_k^B(t)$ , зависящих от времени и действующих на систему извне,

$$Q_i^B = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^B(t) \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i},$$

можно получить, полагая, что вариация только  $i$ -ой обобщенной координаты  $\delta q_i$  не равна нулю, вычисляя сумму элементарных работ от сил  $\bar{F}_k^B(t)$  на перемещениях, определяемых  $\delta q_i$ , и отнеся полученное значение работы к вариации обобщенной координаты, т.е.

$$Q_i^B = \frac{\left( \sum_{k=1}^N \delta A_k \right)_i}{\delta q_i}. \quad (5.10)$$

Подставив выражения кинетической энергии (5.3), обобщенных сил от потенциальных (5.8), диссипативных (5.9) и возмущающих (5.10) сил в уравнения Лагранжа (5.1), и перенеся все слагаемые в левую часть равенства, получим в самом общем случае дифференциальные уравнения малых колебаний системы с  $n$  степенями свободы:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots + a_{1n}\ddot{q}_n + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + \dots + b_{1n}\dot{q}_n + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \dots + c_{1n}q_n = 0; \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \dots + a_{2n}\ddot{q}_n + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + \dots + b_{2n}\dot{q}_n + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \dots + c_{2n}q_n = 0; \\ a_{31}\ddot{q}_1 + a_{32}\ddot{q}_2 + \dots + a_{3n}\ddot{q}_n + b_{31}\dot{q}_1 + b_{32}\dot{q}_2 + \dots + b_{3n}\dot{q}_n + c_{31}q_1 + c_{32}q_2 + \dots + c_{3n}q_n = 0; \\ \dots \\ a_{n1}\ddot{q}_1 + a_{n2}\ddot{q}_2 + \dots + a_{nn}\ddot{q}_n + b_{n1}\dot{q}_1 + b_{n2}\dot{q}_2 + \dots + b_{nn}\dot{q}_n + c_{n1}q_1 + c_{n2}q_2 + \dots + c_{nn}q_n = 0. \end{cases}$$

## Список использованных источников

1 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие. В 3 т. Т.3. Специальные главы механики / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Керзон. – М.: Наука. 1973. – 488 с.

2 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учебник для вузов. В 2 т. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. - 2-е изд., исправл. – М.: Наука, 2000. - 271 с.

3 Добронравов, В.В. Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин, А.Л. Дворников. – 3-е изд. перераб. – М.: Высшая школа, 1974. – 528 с.

4 Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. - 40-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2004. - 448 с.

5 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон; под ред. А.А. Яблонского. - 16-е изд., стер. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. - 384 с.

6 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С.М. Тарг. - 18-е изд., стер. – М.: Наука, 2008. – 416 с.

7 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. - 11-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2004. - 768 с.

8 Яблонский, А. А. Курс теории колебаний: учебное пособие для вузов / А. А. Яблонский, С. С. Норейко. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Высшая школа, 1975. - 248 с.