МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

Т.А. ТАРАСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 517.5(07)
ББК 22.161 я7
Т 19

Рецензент: доктор технических наук, профессор И.П. Болодурина

Тарасова Т.А.
Т 19 **Математический анализ функции одной переменной: методические указания / Тарасова Т.А. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 37 с.**

Методические указания составлены для студентов экономических и химико-биологических специальностей, но могут быть использованы и студентами других специальностей, изучающих раздел математики «Математический анализ функции одной переменной».

УДК 517.5(07)
ББК 22.161 я7

© Тарасова Т.А., 2009
© ГОУ ОГУ, 2009

Содержание

Введение

Предлагаемые методические указания состоят из четырех разделов.

1 раздел – теоретические вопросы курса «Математический анализ функции одной переменной».

2 раздел – задания для проведения практических занятий и домашней работы. Каждый преподаватель вправе решать сам, какие из предложенных заданий рассматривать на практических занятиях, а какие – рекомендовать студентам для самостоятельной работы вне учебной аудитории.

3 раздел – задания для проведения индивидуальных проверочных самостоятельных работ на практических занятиях. Эти задания составлены с целью: постоянного контроля за индивидуальной работой каждого студента; проверки знаний студентов по теоретической и практической части изучаемого курса. Задания каждой из пяти самостоятельных работ составлены с учетом тех вопросов курса, которые студент должен изучить к занятию, на котором будет проводиться данная самостоятельная работа.

4 раздел – тестовые задания для проверки знаний студентов по всему курсу «Математический анализ функции одной переменной».

Для выполнения каждой самостоятельной работы рекомендуется выделять не более 15 – 20 минут, для проведения тестового контроля – 2 академических часа.

При написании этих методических указаний автор ставил цель не только помочь преподавателям и студентам работать эффективно на практических занятиях, студентам – дома, но и постоянно проверять самостоятельную работу каждого студента по данному разделу программы. Для контроля самостоятельной работы студентов создано достаточное количество заданий, содержащихся как теоретические, так и практические вопросы курса «Математический анализ функции одной переменной».

1 Теоретические вопросы

1 Основные множества вещественных чисел: $[a;b]$, $(a;b)$, $O_b(a)$, $\dot{O}_b(a)$ – определение, геометрическая иллюстрация.

2 Определение ограниченного множества.

3 Предельная точка множества.

4 Замкнутое множество.

5 Переменная величина и ее предел: $\lim x = a$, $\lim x = \infty$.

6 Определение функции $y = f(x)$.

7 Определение предела функции и его геометрическая иллюстрация:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b_1, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = b_2.$$

8 Определение бесконечно малой функции.

9 Определение бесконечно большой функции.

10 Свойства бесконечно малых:

- теорема о сумме двух бесконечно малых;
- теорема о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию;
- теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функции.

11 Теорема о представлении функции, имеющей конечный предел.

12 Теорема об ограниченности функции, имеющей конечный предел.

13 Свойства пределов, выраженные равенствами (арифметические действия над пределами).

14 Понятие неопределенности под знаком предела.

15 Правило Лопиталя.

16 Первый и второй замечательные пределы.

17 Сравнение бесконечно малых (4 определения).

18 Свойства эквивалентных бесконечно малых.

19 Таблица эквивалентных бесконечно малых.

20 Свойства пределов, выраженные неравенствами.

21 Три определения функции непрерывной в точке.

22 Теорема о непрерывности всякой элементарной функции

23 Три условия непрерывности функции в точке.

24 Классификация точек разрыва функции – определение, примеры.

25 Свойства функций, непрерывных на отрезке.

26 Определение производной функции.

27 Геометрический смысл производной.

28 Необходимое условие существование конечной производной функции в точке.

29 Арифметические действия над производными.

30 Теорема о производной сложной функции.

31 Таблица производных.

32 Специальные методы нахождения производных:

а) производная сложно-показательной функции;

б) неявно заданная функция и ее производная.

33 Определение функции, дифференцируемой в точке.

34 Определение дифференциала функции в точке.

35 Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

36 Определение производной функции *n*-го порядка.

37 Исследование функции и построение ее графика:

а) определение области определения функции;

б) определение возрастающей (убывающей) функции;

в) достаточное условие монотонности функции;

г) определение минимума (максимума) функции;

д) необходимое условие существования локального экстремума функции;

е) достаточное условие существования локального экстремума функции;

ж) определение выпуклой (вогнутой) функции;

з) достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции;

и) определение точки перегиба функции;

й) достаточное условие существования точки перегиба функции;

к) определение асимптоты функции;

л) виды асимптот функции и их уравнения.

2 Задания для проведения практических занятий и домашней работы

2.1 Предел функции

Практическое занятие №1

1) Дать определение предела функции $y = f(x)$, построить схематично её график в малой окрестности точки *a* или при $x \to \infty$, если:

а) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3;$ б) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 3;$ в) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty;$

г) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty;$ д) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 1;$ е) $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = -2;$

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 4;$ з) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1;$ и) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$

2) Задать аналитически функцию $y = f(x)$, для которой:

а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} f(x) = 1;$ б) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty;$ в) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty;$

г) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0;$ д) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty \end{cases};$ е) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}.$

3) Построить схематично график функции $y = f(x)$, если известно, что:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; б) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \\ f(1) = 3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1+0} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1-0} f(x) = -\infty \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1} f(x) = 3 \\ f(1) = 3 \end{cases}$; д) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0+0} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to0-0} f(x) = -1 \end{cases}$; е) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4 \end{cases}$.

4) Известно, что $\exists\delta > 0 \forall x \in \dot{O}_\delta(1) : f(x) = 3 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 1$. Чему равен $\lim\limits_{x\to1} f(x)$?

5) Известно, что $\begin{cases} \lim\limits_{x\to2} f(x) = 5 \\ f(2) = 5 \end{cases}$. Как может быть представлена функция $y = f(x)$ в $O_\delta(2)$? Нарисовать схематично график этой функции в $O_\delta(2)$.

Практическое занятие № 2

1) Какие арифметические действия можно совершить над пределами и по каким правилам?

2) Дать определения:

а) бесконечно малой функции;

б) бесконечно большой функции;

в) эквивалентных бесконечно малых функций и привести примеры таких функций.

3) $f(x) \sim x - 2$ при $x \to 2$. Привести пример функции *f*(*x*).

4) $\lim\limits_{x\to a}\left(e^{x-5} - 1\right) = 0$. Чему равно *a*? Назвать функцию эквивалентную бесконечно малой $e^{x-5} - 1$.

5) Написать формулы первого и второго замечательных пределов. Какой из ниже перечисленных пределов находится с помощью второго замечательного предела?

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{\frac{3x+1}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{3x}$.

6) Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x + 2x\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x$; 3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x+2}$;

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-2}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4 - x^5 + 3x^6}{1 + x + x^2}$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3 + 2x - 1}{2x^3 + 5}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 - x + 4}{x^5 - 2x^2 + 6}$; 8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$; 9. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$;

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)$; 11. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-12x+12}{x^3-x-6}$; 12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}\right)$; 14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 10x}{\sin 2x}$; 15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x}$;

16. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^{x^2-4}-1}{x-2}$; 17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-tg^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$; 18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{1-\cos x}$; 20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}$; 21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{x}{2}}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2x}}$; 23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{4/x}$; 24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{2}{x}}$;

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{3x}$; 26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^{2x}$; 27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{5x}$.

2.2 Непрерывность функции

Практическое занятие №3

1) Какое определение записано в строке:
$\forall\varepsilon>0\exists\delta\left(\varepsilon\right)>0\ \ \forall x:0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$?

2) Что нужно изменить в предыдущем определении, чтобы функция $y=f(x)$ стала непрерывной в точке x_0?

3) Известно, что $x_0\in D\left(f\right)$ вместе с некоторой своей окрестностью и
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0),\\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=b.\end{cases}$$

Каким должно быть число b, чтобы функция $y=f(x)$:

а) была непрерывна в точке x_0;

б) имела неустранимый разрыв первого рода в точке x_0;

в) имела в точке x_0 разрыв второго рода.

4) Изобразите схематично функцию $y=f(x)$ в малой окрестности точки x_0, если известно, что:

а) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=b\end{cases}$; б) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)\end{cases}$; в) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty\end{cases}$;

Как можно охарактеризовать поведение функции $y=f(x)$ в точке x_0 в каждом задании а) – в) ?

5) Функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Будет ли эта функция непрерывна в точке x_0, если:

а) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x: \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

б) $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon(\delta) > 0\ \forall x: \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

в) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x: \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$?

6) Привести пример функции, имеющей:

а) в точке 0 устранимый разрыв первого рода;

б) в точке 2 неустранимый разрыв первого рода;

в) в точке $\dfrac{\pi}{2}$ разрыв второго рода.

7) Известно, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\exists \delta > 0\ \forall x \in O_\delta(x_0): f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

а) Чему равен $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$?

б) Является ли функция непрерывной в точке x_0?

8) При каком значении a функция $y = f(x)$ будет непрерывной в точке 0, если:

а) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+2x)} & \text{при } x \neq 0 \\ a & \text{при } x=0 \end{cases}$, б) $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0 \\ a & \text{при } x=0 \end{cases}$,

в) $y = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{3}{x}} & \text{при } x \neq 0 \\ a & \text{при } x=0 \end{cases}$, г) $y = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ a & \text{при } x=0 \end{cases}$.

9) Найти точки разрыва функции, определить их вид; построить схематично график функции в малой окрестности точки разрыва, если у функции такая точка существует

а) $y = \dfrac{1+x^2}{1+x}$, б) $y = \dfrac{x}{x^2+x-6}$, в) $y = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$, г) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$,

д) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sin 3x}$, е) $y = 3^{\frac{x}{1-x^2}}$, ж) $y = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, з) $y = \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$,

и) $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-3}}}$, к) $y = e^{-\frac{1}{|x|}}$, л) $y = 5^{\frac{2}{x-1}}$, м) $y = (1+\sin 2x)^{\frac{1}{4x}}$.

2.3 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Практические занятия № 4, № 5

1) Какой из ниже перечисленных пределов определяет производную функции $y = f(x)$ в точке x_0?

а) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0)}{\Delta x}$, б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x}$.

2) Какие арифметические действия можно совершить под знаком производной и по каким правилам?

3) Записать вид функции, для которой производная в точке x_0 находится по формуле $f'_\varphi(\varphi_0)\cdot\varphi'_x(x_0)$, где $\varphi_0=\varphi(x_0)$.

4) Указать правильное утверждение «Если у функции в точке x_0 существует конечная производная, то функция в этой точке…»

а) непрерывна; б) разрывна; в) дифференцируема.

5) Существует ли $y'(0)$, если $y=e^{\frac{1}{x}}$?

6) Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение в этой точке $\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Что представляет собой A и $\alpha(\Delta x)$ в этом определении?

7) Если $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то её дифференциал $df(x_0)$ в этой точке равен:

а) $df(x_0)=f'(x_0)$; б) $df(x_0)=f(x_0)\cdot\Delta x$;

в) $df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$; г) $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

8) Для каких значений Δx справедлива формула $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$?

9) Найти производную $y'(x)$ для функции:

а) 1. $y=7x^5-5x^{-2}$, 2. $y=\dfrac{\ln 3}{x}+e^3$, 3. $y=3x^2\cdot\cos x$,

4. $y=\dfrac{x+1}{tgx}-xe^2$, 5. $y=\dfrac{\log_2 x}{arctgx}$, 6. $y=x^4\cdot 4^x$,

7. $y=\sin 2x$, 8. $y=\sin^2 x$, 9. $y=\sin e^x$,

10. $y=\cos\ln x$, 11. $y=(3x-10)^5$, 12. $y=\arccos^3 2x$,

13. $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$, 14. $y=\mathrm{arc}tg\ln 4x$, 15. $y=\dfrac{1}{2}\log_3^2(4x+8)$,

16. $y=2^{\sin x}$, 17. $y=\ln\log_3\lg 2x$, 18. $y=e^{-x}\cdot arctg\,e^x$,

19. $y=\cos^2(4x-5)-8$, 20. $y=\ln\dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$, 21. $y=\arccos\sqrt{tgx}$,

22. $y=tg^2 10x$, 23. $y=(\ln 2x)\log_2\sqrt{x+1}$, 24. $y=2^{\arcsin x^2}$,

25. $y=\ln^5\cos 4x$, 26. $y=\arcsin^2(e^x\cdot\cos x)$, 27. $y=ctg\sqrt{1+\cos^2 2x}$.

б) 1. $y=(tgx)^{\sin 2x}$, 2. $y=(4x-1)^{ctg 2x}$, 3. $y=(\cos x)^{\sin 3x}$,

4. $y=(arctgx)^{x^2}$, 5. $y=(\ln x)^{2x}$, 6. $y=(2+3x)^{\ln x}$,

7. $y=\dfrac{x^2(2x+4)^3}{(x-1)^5}$, 8. $y=\dfrac{(3x-1)^2\cos 2x}{tg^3(x+4)}$, 9. $y=\dfrac{(x-1)^3(5x+8)^2}{\sin 2x}$.

в) 1. $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$, 2. $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, 3. $\begin{cases} x=e^{-3t} \\ y=e^{3t} \end{cases}$,

4. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$, 5. $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\ln\cos 2t \end{cases}$, 6. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos t} \\ y=tgt-t \end{cases}$.

г) 1. $x^2+y^2=4$, 2. $x^2-y^2=a^2$, 3. $y^2=2px$,

4. $e^{x-y}=x+y$, 5. $e^{2y}-2\ln x-1=0$, 6. $e^x-\ln(x+y)=0$.

10) Найти $df(x)$ для функций

а) $y=\sin x$, б) $y=x^2$, в) $y=e^x$, г) $y=\cos 2x$, д) $y=\ln(x-1)$,

е) $y=\sqrt{x^2+1}$, ж) $y=\sin^2 x$.

11) Используя формулу нахождения приближенного значения функции $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$, вычислить:

а) $tg47^0$, б) $\sqrt{9,04}$, в) $\sqrt[4]{17}$, г) $\arcsin 0,51$ с точностью до 0,01

2.4 Исследование функции и построение её графика

Практическое занятие №6

1) Если $y=f_1(x)+f_2(x),\ D(f_1)=(-\infty;4);\ D(f_2)=(1;9]$, то $D(y)=?$

2) Каким свойством обладает функция $y=f(x)$ на множестве *X*, если справедливо:

а) $\forall x_1,x_2\in X:\quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,

б) $\forall x_1,x_2\in X:\quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$,

в) $\forall x_1,x_2\in X:\quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$?

3) Как называется точка x_0 для функции $y=f(x)$, если справедливо следующее:

а) $\exists\delta>0\ \forall x\in O_\delta(x_0):\quad f(x)\le f(x_0)$,

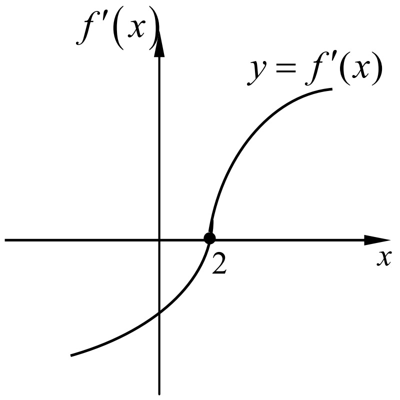
б) $\exists\delta>0\ \forall x\in O_\delta(x_0):\quad f(x)\ge f(x_0)$?

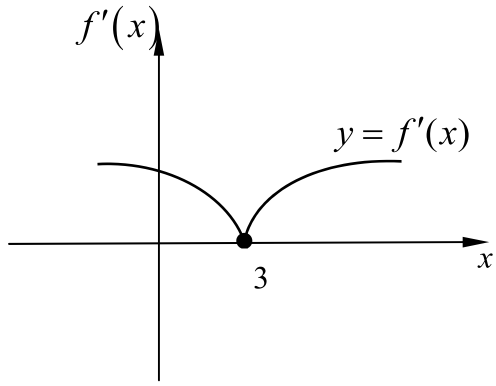
4) Схематично изобразить функцию $y=f(x)$, если известно, что

а) $\begin{cases} f'(1)=0 \\ \forall x<1: f'(x)<0 \\ \forall x>1: f'(x)>0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \exists f(1), \bar{\exists} f'(1) \\ \forall x<1: f'(x)<0 \\ \forall x>1: f'(x)>0 \end{cases}$;

в) $\forall x \in (a;b): \begin{cases} f'(x)>0 \\ f''(x)<0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty \\ \forall x>a;\ f''(x)>0 \\ \forall x<a;\ f''(x)<0 \end{cases}$.

д)





5) Как называется прямая $y=kx+b$ для функции $y=f(x)$, если числа k и b находятся по формулам: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$?

6) Провести полное исследование функции и построить её график:

а) $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$; б) $y=x-\ln x$; в) $y=x^2e^{1/x}$;

г) $y=\dfrac{x^2-1}{2x+3}$; д) $y=2x^2-\dfrac{1}{3}x^3$; е) $y=xe^{1-x}$;

ж) $y=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$; з) $y=\left(x^2-4\right)^{2/3}$; и) $y=\dfrac{e^{2(x-1)}}{x-1}$;

к) $y=\dfrac{x^2}{(1+x)^3}$; л) $y=x-arctgx$; м) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

3 Задания для проведения самостоятельных работ

***Самостоятельная работа* №1**

Вариант 1

1 Дать определение $\lim x = a$

2 Сформулировать теорему о сумме двух бесконечно малых.

3 Изобразить схематично функцию $y = f\left(x\right)$, если известно, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = 2.$

4 Известно, что $\alpha \to 0.$ Назвать бесконечно малую функцию, эквивалентную α .

5 Как называется функция $y = f\left(x\right)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = \infty$?

Вариант 2

1 Дать определение $\lim x = \infty.$

2 Сформулировать теорему о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию.

3 Изобразить схематично функцию $y = f\left(x\right)$, если известно, что $\lim\limits_{x \to 2} f\left(x\right) = \infty.$

4 Как называются функции $1 - \cos\alpha$ и $\dfrac{\alpha^2}{2}$, если $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{1 - \cos\alpha}{\frac{\alpha^2}{2}} = 1$?

5 Привести пример функции $y = f\left(x\right)$, для которой $\lim\limits_{x \to 0} f\left(x\right) = 0.$

Вариант 3

1 Дать определение $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = b.$

2 Сформулировать теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой.

3 Изобразить схематично функцию $y = f\left(x\right)$, если известно, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = 0, f\left(1\right) = 2$.

4 Написать формулу первого замечательного предела.

5 Если функция $\alpha\left(x\right)$ является бесконечно малой при $x \to a$, то чему равен $\lim\limits_{x \to a} \alpha\left(x\right)$?

Вариант 4

1 Дать определение $O_\delta\left(a\right).$

2 Сформулировать теорему о представлении функции, имеющей конечный предел (прямая часть).

3 Изобразить схематично функцию $y=f\left(x\right)$, если известно, что $\lim\limits_{x\to -1-0} f\left(x\right)=+\infty, \lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=1.$

4 Если $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln\left(1+\alpha\right)}{\alpha}=1,$ то как называется функция $\ln\left(1+\alpha\right)$ по отношению к α?

5 Если $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx=\infty,$ то tgx - является …. при $x\to {\pi}/{2}$.

Вариант 5

1 Дать определение $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=b.$

2 Сформулировать теорему об ограниченности функции, имеющей конечный предел.

3 Изобразить схематично функцию $y=f\left(x\right)$, если известно, что $\begin{cases} f\left(0\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=-2 \end{cases}.$

4 Дать определение эквивалентных бесконечно малых.

5 Если $\alpha\left(x\right)$ - бесконечно малая при $x\to a$, $f(x)$ – ограничена в $O_\delta\left(a\right)$, то чему равен $\lim\limits_{x\to a}\alpha\left(x\right)\cdot f(x)$?

Вариант 6

1 Дать определение $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\infty.$

2 Сформулировать теорему об арифметических действиях над пределами.

3 Известно, что $\lim\limits_{x\to +0} f\left(x\right)=2, \lim\limits_{x\to -0} f\left(x\right)=-\infty.$

Изобразить функцию $y=f\left(x\right)$ схематично.

4 Написать формулу второго замечательного предела.

5 Если $\alpha\left(x\right)$- бесконечно большая при $x\to a$, то чему равен $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\alpha\left(x\right)}$?

Вариант 7

1 Дать определение $\overset{\circ}{O}_\delta\left(a\right)$

2 Сформулировать теорему о представлении функции, имеющей конечный предел (обратная часть).

3 Изобразить схематично функцию $y=f\left(x\right)$, если известно, что $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=0, \lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=1$.

4 При $x\to 1$ функция $\arcsin\left(1-x\right)$ является бесконечно малой; назовите для неё эквивалентную.

5 Если $\alpha(x)$- бесконечно малая при $x \to a$, то чему равен $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\alpha(x)}$?

Вариант 8

1 Дать определение $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

2 Назвать свойства, которыми обладают эквивалентные бесконечно малые функции.

3 Изобразить схематично функцию $y = f(x)$, если известно, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty, f(1) = 1$.

4 Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то как называется функция $y = f(x)$ при $x \to a$? Приведите пример такой функции.

5 Если функция $y = \sin(x-1)$ является бесконечно малой при $x \to a$, то чему равно a?

Вариант 9

1 Как называется множество точек x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$?

2 Известно, что $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Является ли функция $y = f(x)$ ограниченной в $\dot{O}_\delta(a)$?

3 Изобразить схематично функцию $y = f(x)$, если известно, что $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 2, \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -3$..

4 Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$, то чему равен $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)$?.

5 $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = ?$

Вариант 10

1 Дать определение $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.

2 Сформулировать теорему об арифметических действиях над пределами.

3 Изобразить схематично функцию $y = f(x)$, если известно, что $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2, \overline{\exists} f(1)$.

4 Как называется $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$?

5 Функция $y = tg(x-2)$ является бесконечно малой при $x \to ....$?

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1

1 Дать определение $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=b$.

2 Сформулировать теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой.

3 Дать определение функции непрерывной в точке.

4 Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$.

Вариант 2

1 Дать определение $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\infty$.

2 Сформулировать теорему о представлении функции, имеющей конечный предел (прямая часть).

3 Назвать три условия непрерывности функции в точке.

4 Найти: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{4}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Вариант 3

1 Дать определение $\lim\limits_{x\to a-0} f\left(x\right)=b$

2 Сформулировать теорему о сумме двух бесконечно малых.

3 Какая точка называется точкой разрыва первого рода для функции $y=f\left(x\right)$?

4 Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$.

Вариант 4

1 Дать определение $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=b$.

2 Сформулировать теорему о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию.

3 Какая точка называется точкой разрыва второго рода для функции $y=f\left(x\right)$?

4 Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tgx\right)^{\frac{1}{3x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

Вариант 5

1 Дать определение $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

2 Сформулировать теорему о представлении функции, имеющей конечный предел (обратная часть).

3 Известно, что $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0\forall x:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Что можно сказать о поведении функции $y=f(x)$ в точке x_0?

4 Найти: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{arctg(x-2)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{2x}$.

Вариант 6

1 Дать определение $\overset{\circ}{O}_\delta(a)$.

2 Сформулировать теорему об арифметических действиях над пределами.

3 Известно, что $\exists\begin{cases}\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\neq\infty\\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x)\neq\infty\end{cases}$; и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Изобразить схематично функцию $y=f(x)$.

4 Найти: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\ln(1+x^2)}$; $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Вариант 7

1 Как называется множество точек *x*, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$?

2 Сформулировать правило Лопиталя.

3 Известно, что $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Как ведет себя функция $y=f(x)$ в точке x_0?

4 Найти: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^{x-2}-1}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{4x}$.

Вариант 8

1 Определение ограниченной функции в $O_\delta(a)$.

2 Известно, что $\alpha(x)\to0;\beta(x)\to0$ и $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Как называются функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$?

3 Функция $y=f\left(x\right)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=5$.

Чему должно равняться $f(x_0)$, чтобы функция $y=f\left(x\right)$ была непрерывной в точке x_0?

4 Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin x\right)}{tgx^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{5x}$.

Вариант 9

1 Дать определение $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$.

2 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \exists\delta>0\forall x\in \dot{O}_\delta\left(a\right): f(x)=b+\alpha\left(x\right)$, где $\alpha\left(x\right)\to 0$ при $x\to a$.

Какая теорема сформулирована выше?

3 $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$. Что можно сказать о поведении функции $y=f\left(x\right)$ в точке x_0?

4 Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{\sin x}}{e^{\sqrt{x}}-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tgx\right)^{\frac{3}{x}}$.

Вариант 10

1 Дать определение $O_\delta\left(2\right)$

2 $\exists\delta>0, C>0\forall x\in O_\delta\left(a\right):\left|f(x)\right|\le C$.

Каким свойством обладает функция $y=f\left(x\right)$ в $O_\delta\left(a\right)$?

3 Дать первое определение функции непрерывной в точке.

4 Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x+x^2\right)}{2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{3x}$.

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1

1 Какие две бесконечно малые называются эквивалентными?

2 Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$ и $f\left(x\right)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Что можно сказать о поведении функции $y=f\left(x\right)$ в точке x_0?

3 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$.

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график каждой функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$; б) $y = \frac{|x+1|}{x+1} + 2$.

Вариант 2

1 Дать первое определение функции, непрерывной в точке.

2 Сформулировать теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой функции.

3 Найти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - tg^2 x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график каждой функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; б) $y = \frac{1 - \cos x}{2x^3}$.

Вариант 3

1 Дать второе определение функции, непрерывной в точке.

2 Привести графический пример функции, которая в точке $x = 1$ имеет неустранимый разрыв первого рода.

3 Найти $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + tg 4x\right)^{\frac{1}{2x}}$.

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график каждой функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y = \frac{1}{1+x}$; б) $y = \frac{\arcsin 2x}{x}$.

Вариант 4

1 Дать третье определение функции, непрерывной в точке.

2 Чему равно произведение бесконечно малой на ограниченную функцию?

3 Привести пример функции, для которой точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода.

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график каждой функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$; б) $y = \frac{1}{\ln\left(x+1\right)}$.

Вариант 5

1 Сформулировать три условия непрерывности функции в точке.

2 Сформулировать теорему о представлении функции, имеющей конечный предел (прямая часть).

3 Привести пример функции, для которой точка $x=1$ является точкой разрыва первого рода.

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}$; б) $y=4^{\frac{x}{1+x}}$.

Вариант 6

1 Известно, что $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$. Что можно сказать о поведении функции в точке x_0?

2 Сформулировать теорему об ограниченности функции, имеющей конечный предел.

3 Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-3x}$.

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график каждой функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; б) $y=2^{-\frac{1}{|x-1|}}$.

Вариант 7

1 Дать определение точки разрыва функции первого рода.

2 Сформулировать теорему о представлении функции, имеющей конечный предел (обратная часть).

3 Привести пример функции, которая удовлетворяет следующему условию $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0\forall x:\ |x-2|<\delta\Rightarrow|f(x)-4|<\varepsilon$.

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график каждой функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$; б) $y=2^{-\frac{1}{x+3}}$.

Вариант 8

1 Дать определение $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

2 Дано: $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0\forall x:\ |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$.

Чему должно равняться b, чтобы функция $y=f(x)$ была непрерывной в точке x_0?

3 Найти $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{4x}}$

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график каждой функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y = 1 - \frac{|x|}{x}$; б) $y = 3^{\frac{1}{(x-1)^2}}$.

Вариант 9

1 Дать определение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

2 Известно, что $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = a$ и $f(x)$ определена в $O_\delta(1)$.

Чему должны равняться a и b, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывной в точке x=1?

3 Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{4x}$.

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график каждой функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y = \frac{|x+1|}{x+1} - 1$; б) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 10

1 Известно, что $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 2, f(x) -$ ограничена в $O_\delta(2)$. Чему равен $\lim\limits_{x \to 2} \alpha(x) \cdot f(x)$?

2 Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то будет ли функция $y = f(x)$ непрерывной в точке x_0?

3 Привести пример функции непрерывной на всей числовой оси.

4 Следующие функции исследовать на непрерывность, построить схематично график каждой функции в малой окрестности её точки разрыва:

а) $y = \frac{2}{x-3}$; б) $y = \frac{\sin 2x}{x}$.

Самостоятельная работа № 4

Вариант 1

1 Дать определение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

2 Будет ли существовать $f'(1)$ для функции $y = \frac{1}{x-1}$? Ответ обосновать.

3 $\left[u(x) + v(x)\right]' = ?$

4 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-1}{x^2}$.

5 Функцию $y=e^{\frac{1}{x-3}}$ исследовать на непрерывность.

Вариант 2

1 Сформулировать необходимое условие $\exists f'(x_0)\neq\infty$.

2 В какой области у функции $y=\ln x$ будет существовать производная и чему она равна?

3 $\left[u(x)\cdot v(x)\right]'=?$

4 Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{x^2-\frac{\pi^2}{16}}$.

5 Функцию $y=1-\frac{|x-2|}{x-2}$ исследовать на непрерывность.

Вариант 3

1 $\exists\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=b\\ \lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=e\end{cases}\Rightarrow\exists f'(x_0)-?$

2 $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=?$

3 В чем состоит геометрический смысл значения производной функции в точке?

4 Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{6x}}$.

5 Функцию $y=1-\frac{x^2-4}{x-2}$ исследовать на непрерывность.

Вариант 4

1 Что определяет $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}$ для функции $y=f(x)$ в точке $x_0=1$?

2 Сформулировать правило нахождения производной сложной функции.

3 Известно, что $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. Достаточно ли этого условия для $\exists f'(x_0)$?

4 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\ln(1+2x^2)}$.

5 Функцию $y=(1+x)^{\frac{2}{x}}$ исследовать на непрерывность.

Вариант 5

1 Допишите определение: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ldots-f(x_0)}{\Delta x}$.

2 Сформулировать теорему об арифметических действиях над производными.

3 Чему равен $tg\alpha$, где α - угол между касательной к графику функции $y=x^3$ в точке $x_0=1$ и положительным направлением оси OX?

4 Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{\frac{x}{6}}$.

5 Функцию $y=\dfrac{\arcsin(x-1)}{x-1}$ исследовать на непрерывность.

Вариант 6

1 Известно, что $y=f(x)$ - непрерывна в точке x_0 и $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0\forall\Delta x:|\Delta x|<\delta\Rightarrow\left|\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)\right|<\varepsilon.$

Какое определение записано выше?

2 $y=f\left[\varphi(x)\right]\Rightarrow y'_x=?$

3 В какой области у функции $y=\arcsin x$ существует производная и чему она равна?

4 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

5 Функцию $y=3^{\frac{1}{x-1}}$ исследовать на непрерывность.

Вариант 7

1 Дать определение производной функции $y=\sin x$ в точке $x_0=2$.

2 Будет ли существовать производная функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ в точке $x_0=0$?

3 $\left[u(x)\cdot v(x)\right]'=?$

4 Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{-x}$.

5 Функцию $y=\dfrac{1}{2^x-1}$ исследовать на непрерывность.

Вариант 8

1 Допишите определение $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - ....}{\Delta x}$

2 Чему равен $tg\alpha$, где α - угол между касательной к графику функции $y = x^2$ в точке x_0=3 и положительным направлением оси OX?

3 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in T \end{cases} \Rightarrow y'_x = ?$

4 Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\sin x^2}$.

5 Функцию $y = \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$ исследовать на непрерывность.

Вариант 9

1 Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0 представимо в виде $\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\begin{cases} A \neq \infty \\ \alpha(\Delta x) \to 0, \text{ при } \Delta x \to 0 \end{cases}$; то как называется главная часть приращения функции в точке x_0?

2 Сформулировать правило нахождения производной функции $y = f[\varphi(x)]$.

3 $\forall x \in R : f'(x) = 0$. Чуму равна функция $f(x)$ на R?

4 Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x} \right)^{4x}$

5 Функцию $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ исследовать на непрерывность.

Вариант 10

1 Чему равен $df(x_0)$?

2 В чем состоит геометрический смысл значения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?

3 Если у функции существует производная в точке, то какой должна быть функция в этой точке?

4 Найти $\lim\limits_{x \to 0} (1 + arctg 2x)^{\frac{1}{x}}$.

5 Функцию $y = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ исследовать на непрерывность.

Самостоятельная работа № 5

Вариант 1

1 Найти $y'(x)$ для следующих функций:

а) $y = 3^x \cdot \cos x$; б) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$; в) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y = xe^{1-x}$.

Вариант 2

1 Найти $y'(x)$ для следующих функций:

а) $y = \dfrac{e^x}{tgx}$; б) $y = \ln\left(1 + 2arctgx\right)$; в) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = 2\cos^2 t \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Вариант 3

1 Найти $y'(x)$ для следующих функций:

а) $y = \left(\log_2 x\right) \cdot ctgx$; б) $y = \arccos^5\left(3x-1\right)$; в) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^2 + t \\ y = \ln\left(1+t\right) \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x$.

Вариант 4

1 Найти $y'(x)$ для следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^4}{4^x}$; б) $y = \sin 3\ln^2 x$; в) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y = x^3 + 2x^2 + x - 6$.

Вариант 5

1 Найти $y'(x)$ для следующих функций:

а) $y=(ctgx)e^x$; б) $y=\left[4+\ln(2x-1)\right]^5$; в) $\begin{cases} x=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2 \\ y=t^2-1 \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y=\dfrac{x^2}{x-9}$.

Вариант 6

1 Найти $y'(x)$ для следующих функций:

а) $y=\dfrac{6arctgx}{x^2}$; б) $y=\cos\sqrt[4]{2x-1}$; в) $\begin{cases} x=ctgt \\ y=1-\cos t \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y=-\frac{1}{4}x^4+3x^3$.

Вариант 7

1 Найти $y'(x)$ для следующих функций:

а) $y=\dfrac{4^x}{\sin x}$; б) $y=tg^2(1-\cos 2x)$; в) $\begin{cases} x=\ln tgt \\ y=\cos t \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y=x-\ln x$.

Вариант 8

1 Найти $y'(x)$ для следующих функций:

а) $y=\dfrac{\cos x}{\log_2 x}$; б) $y=\ell^{arctg(4x^2+1)}$; в) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y=\dfrac{e^x}{x+1}$.

Вариант 9

1 Найти $y'(x)$ для следующих функций:

а) $y=\sqrt{x^3}\cdot ctgx$; б) $y=\arcsin^2(1+\ln 2x)$; в) $\begin{cases} x=\ell^{2t-1} \\ y=\ell^{2t+1} \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

Вариант 10

1 Найти $y'\left(x\right)$ для следующих функций:

а) $y = 4^x \cdot \arccos x$; б) $y = arctg^5\left(1 + \sqrt{x}\right)$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$.

2 Найти локальные экстремумы и интервалы выпуклости (вогнутости) функции $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

4 Задания для проведения тестового контроля

1) Отрезок с граничными точками a и b $(a<b)$ обозначается

а) $(a;b)$; б) $[a;b)$; в) $(a;b]$; г) $[a;b]$.

2) $O_\delta(x_0)$ называется множество действительных чисел x, удовлетворяющих условию:

а) $x_0-\delta<x<x_0+\delta$; б) $x_0-\delta<x<x_0$;

в) $x_0<x<x_0+\delta$; г) $\delta-x_0<x<\delta+x_0$.

3) Выколотой $\delta-$окрестностью точки 2 называется множество действительных чисел x, удовлетворяющих условию

а) $2<x<2+\delta$; б) $2-\delta<x<2$;

в) $2-\delta<x<2+\delta$; г) $\delta-2<x<\delta+2$.

4) Если функция $y=f(x)$ ограничена на $[a;b]$, то

а) $\exists c \forall x\in[a;b]:\quad f(x)>c$; б) $\exists c>0\ \forall x\in[a;b]:\quad |f(x)|\le c$;

в) $\forall\, c\ \forall x\in[a;b]:\quad f(x)\ge c$; г) $\forall\, c\ \forall x\in[a;b]:\quad f(x)<c$.

5) Третий член последовательности $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n!}\right\}$ равен

а) 0; б) 1; в) $-\dfrac{1}{3}$; г) $-\dfrac{1}{6}$.

6) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, если:

а) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x:\quad |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

б) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x:\quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

в) $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta(\varepsilon)>0\ \forall x:\quad |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$;

г) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x:\quad 0<|x-a|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)-b|<\delta$.

7) Если $\exists\delta>0\ \forall x\in\dot{O}_\delta(a): f(x)=b+\alpha(x)$, где $b\ne\infty$, $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, то

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$; б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$; в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$; г) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

8) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\ne\infty$, то в некоторой выколотой окрестности точки a функция $f(x)$ будет

а) ограниченной; б) непрерывной;

в) монотонной; г) дифференцируемой.

9) Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$, то

а) $\lim\limits_{x\to a}(\beta-\alpha)=1$; б) $\lim\limits_{x\to a}\beta\cdot\alpha=1$; в) $\lim\limits_{x\to a}(\alpha+\beta)=1$; г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$.

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+3x^2+5}{bx^3-2x+10}=1$. Отношение $\dfrac{a}{b}$ равно:

а) 2; б) -3; в) 0; г) 1.

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{arctg 10x}$ равен:

а) 0; б) $\dfrac{1}{5}$; в) 5; г) ∞.

12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\sin\left(x^2-1\right)}$ равен:

а) 1; б) 2; в) ∞; г) $\dfrac{1}{2}$.

13) Вторым замечательным пределом называется выражение вида

а) $\lim\limits_{n\to 0}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; в) $\lim\limits_{n\to 0}\left(1+n\right)^n$; г) $\lim\limits_{n\to a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

14) Если $\lim\limits_{\alpha\to a}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\ell$, то a равно:

а) 0; б) ∞; в) 1; г) -1.

15) Если $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^{bx}=e^2$, то b равно:

а) 0; б) 1; в) -8; г) 8.

16) $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ находится с помощью второго замечательного предела, если под знаком предела содержится неопределенность вида:

а) $\left(0\cdot\infty\right)$; б) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$; в) $\left(1^{\infty}\right)$; г) $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$.

17) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}$. Число a равно:

а) 0; б) 1; в) ∞; г) 5.

18) В точке 2 разрывной является функция

а) $y=tgx$; б) $y=e^{\frac{1}{x-2}}$; в) $y=e^{\frac{1}{x}}$; г) $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

19) В точке 0 неустранимый разрыв первого рода имеет функция

а) $y=e^{1/x}$; б) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; в) $y=\dfrac{|x|}{x}$; г) $y=ctgx$.

20) В точке 1 функция $y=e^{\frac{1}{x-a}}$ имеет разрыв. Значение a равно:

а) ∞; б) 1; в) 2; г)0.

21) Если функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, то функция $y=f(x)$ в точке x_0:

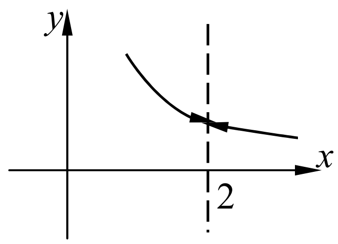
а) непрерывна; б) разрывна; в) дифференцируема; г) имеет минимум.

22) Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=b\neq\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, то функция $y=f(x)$ в точке x_0:

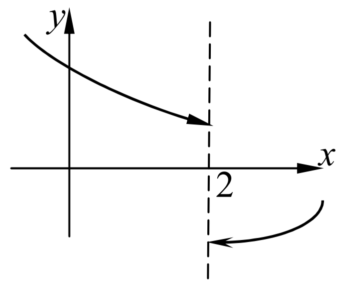
а) непрерывна; б) имеет разрыв первого рода; в) имеет разрыв второго рода.

23) Функция $y = f(x)$, имеющая в точке 2 разрыв второго рода, изображена на чертеже

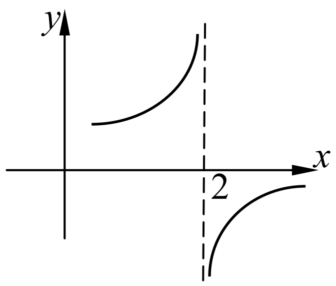
а)



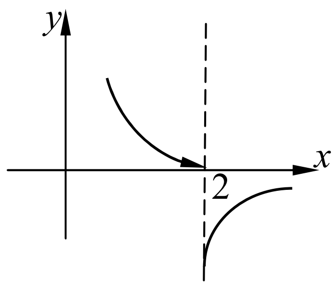
б)



в)



г)



24) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то верно:

а) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = 0$; б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$; г) $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta f(x) = \Delta f(x_0)$.

25) Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 − это:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}$; б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

в) $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$; г) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

26) Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, называется выражение вида:

а) $f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)$; б) $f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x)$;

в) $f\left(x_0 + \Delta x\right) + f(x_0)$; г) $f\left(x + \Delta x\right) - f(x_0)$.

27) Если у функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует конечная производная, то в этой точке функция

а) монотонна; б) имеет локальный экстремум; в) разрывна; г) непрерывна.

28) Производная сложной функции $y = f\left[\varphi(x)\right]$ находится по формуле:

а) $y'_x = f'_x \cdot \varphi'_x$; б) $y'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$; в) $y'_x = f'_\varphi + \varphi'_x$; г) $y'_x = f'_x + \varphi'_x$.

29) Производная функции $y = e^{x^2}$ равна:

а) $2xe^{x^2}$; б) $2e^{x^2}$; в) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}$; г) e^{x^2}.

30) $y = \ln\cos x$. Производная этой функции в точке $\frac{\pi}{4}$ равна:

а) 2; б) 0; в) -1; г) 5.

31) $y'(x) = \frac{3x^2}{1+x^6}$. Функция $y(x)$ равна:

а) $\ln(1+x^6)$; б) $\ln(1+x^3)$; в) $arctgx^3$; г) tgx^3.

32) Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то справедлива формула:

а) $\Delta f(x_0) = df(x_0)$; б) $\Delta f(x_0) > df(x_0)$; в) $\Delta f(x_0) < df(x_0)$; г) $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$.

33) Приращение дифференцируемой в точке x_0 функции $y = f(x)$ представимо в виде:

а) $A\cdot\alpha(\Delta x)$; б) $A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$; в) $A + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$; г) $A + \alpha(\Delta x)$.

34) Значение функции $y = \sin x$ для x=0.2 может быть найдено с помощью формулы:

а) $\sin 0.2 \approx \sin 0 + (\cos 0)\cdot 0.2$; б) $\sin 0.2 \approx \cos 0 + (\sin 0)\cdot 0.2$;

в) $\sin 0.2 \approx \cos 0 + \sin 0$; г) $\sin 0.2 \approx (\cos 0)\cdot 0.2$.

35) Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид:

а) $y - f(x_0) = x - x_0$; б) $y - f(x_0) = f'(x_0)$;

в) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; г) $y = f'(x_0) + (x - x_0)$.

36) Главная часть приращения дифференцируемой в точке функции называется её

а) детерминантом; б) дискриминантом;

в) дифференциалом; г) делимым.

37) Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен:

а) $f'(x_0)dx$; б) $f'(x_0) + dx$; в) $f(x_0)dx$; г) $f'(x_0)$.

38) $y = ctgx$. Дифференциал функции в точке $\frac{\pi}{2}$ равен:

а) $2dx$; б) $-dx$; в) $\frac{1}{2}dx$; г) dx.

39) Если $t = x^3$, то dt равен:

а) x^3dx; б) $3x^2$; в) dx; г) $3x^2dx$.

40) Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, Δx мало, то значение функции в точке $x_0 + \Delta x$ находится по формуле

а) $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$; б) $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x$;

в) $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0)\Delta x$; г) $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.

41) Если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то функция $y = f(x)$ на множестве X называется:

а) постоянной; б) возрастающей; в) невозрастающей; г) убывающей.

42) Если функция $y = f(x)$ убывает на множестве X, то $\forall x_1, x_2 \in X$ справедливо

а) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; б) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$;

в) $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; г) $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

43) Если $\exists \delta > 0\ \forall x \in O_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$, то точка x_0 – называется точкой:

а) максимума функции $y = f(x)$; б) минимума функции $y = f(x)$;

в) перегиба функции $y = f(x)$; г) пересечения функции $y = f(x)$ с осью OX.

44) Если точка x_0 является точкой перегиба дважды дифференцируемой в некоторой её окрестности функции $y = f(x)$, то:

а) при переходе через x_0 $f''(x)$ меняется знак на противоположный;

б) $f''(x_0) > 0$; в) $f''(x_0) < 0$; г) $f'(x_0) > 0$.

45) Известно, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right] = b$. Прямая $y = kx + b$ является для функции $y = f(x)$:

а) касательной; б) горизонтальной асимптотой;

в) наклонной асимптотой; г) вертикальной асимптотой.

46) Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой функции $y = f(x)$, если:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$; б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = a$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$.

47) Прямая $x = \frac{\pi}{2}$ для функции $y = tgx$ является:

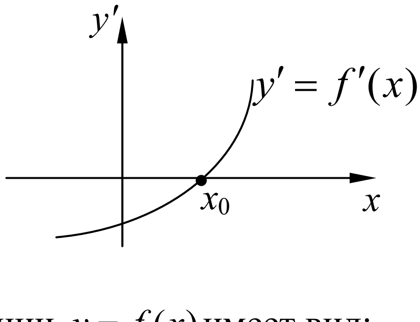
а) касательной; б) наклонной асимптотой;

в) горизонтальной асимптотой; г) вертикальной асимптотой.

48) Для функции $y = x^3$ точкой перегиба является точка:

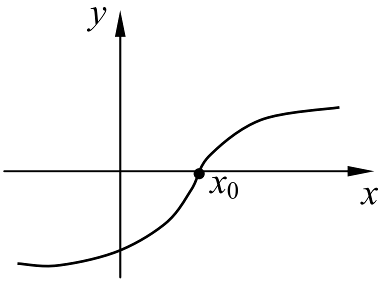
а) 0; б) 1; в) -1; г) 10.

49) Пусть y' изображена на графике

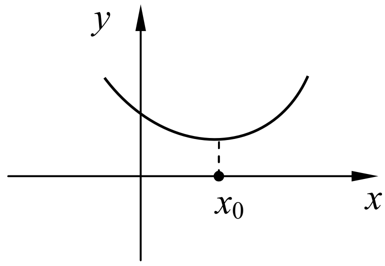


Тогда график функции $y = f(x)$ имеет вид:

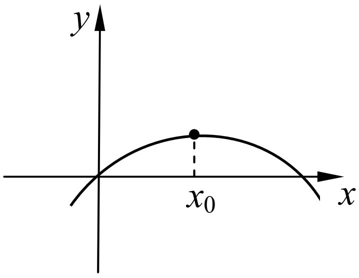
а)



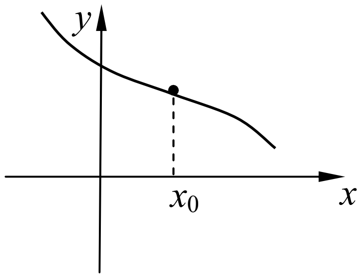
б)



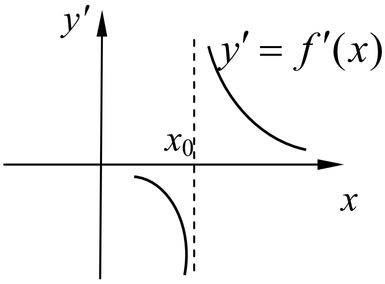
в)



г)

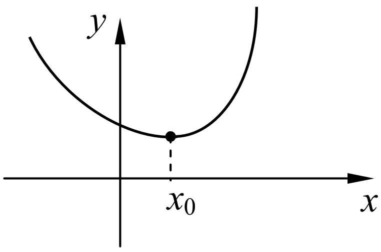


50) Пусть y' изображена на графике

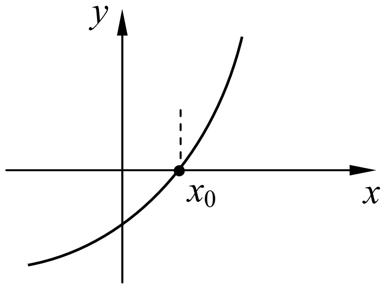


Тогда график функции $y = f(x)$ имеет вид:

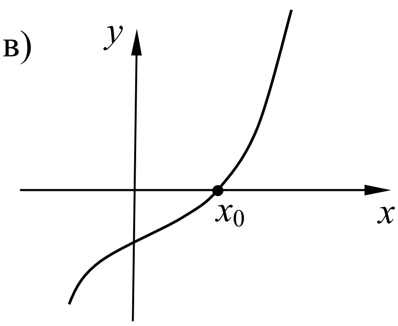
а)



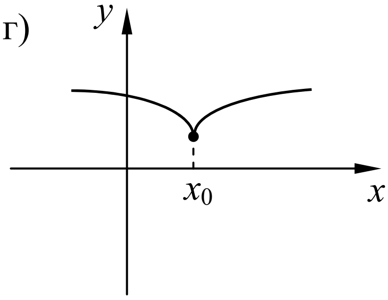
б)



в)

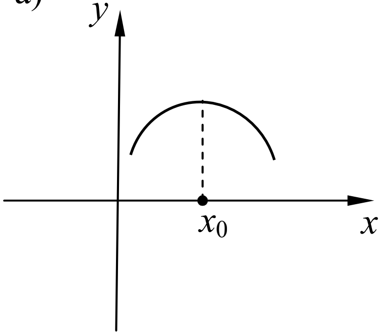


г)

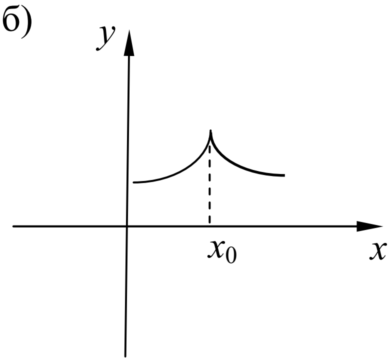


51) Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям: $\forall x \in X : f(x) > 0,\ f''(x) < 0; \exists x_0 \in X : f'(x_0) = 0$, то график этой функции имеет вид:

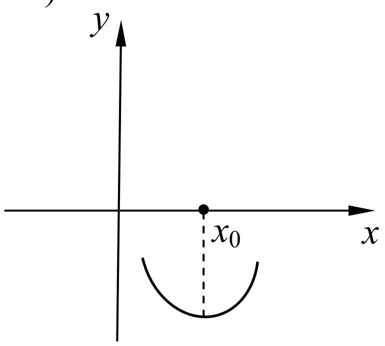
а)



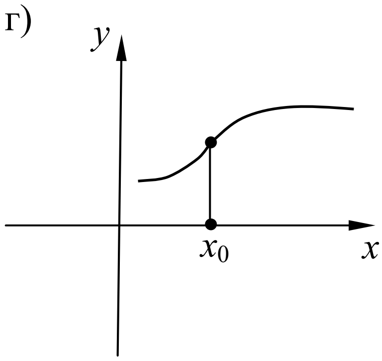
б)



в)



г)



52) Известно, что функция не имеет локальных экстремумов. Этой функцией является:

а) $y = x^2$; б) $y = e^x$; в) $y = \cos x$; г) $y = \sin x$.

53) Наибольшее значение функции $y = e^x$ на $[-2;0]$ равно:

а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) -1; г) 1.

54) Вертикальная асимптота существует у функции:

а) $y = x^2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \sin x$.

55) Выпуклой на всей области своего определения является функция:

а) $y = \cos x$; б) $y = \ln x$; в) $y = a^x$; г) $y = tgx$.

56) Если функция $y = f(x)$ - выпукла и возрастает на множестве *X*, то на *X* для этой функции справедливы условия:

а) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$; б) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$;

в) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$; г) $f'(x) = 0, f''(x) > 0$.

57) Наименьшее значение, которое принимает функция $y = x^2 - 2x + 2$ на $D(y)$ равно:

а) 0; б) -2; в) 1; г) 3.

58) Функция $y = f(x)$ не обладает свойством четности (нечетности). Этой функцией является:

а) $y = \sin x$; б) $y = x^2$; в) $y = tgx$; г) $y = log_a x$.

59) Функция $f(x)$ и $g(x)$ является нечетными на множестве X, на этом множестве функции $y = f(x) \cdot g(x)$

а) является нечетной; б) является четной;

в) не обладает свойством четности (нечетности).

60) Функция $y = f(x)$ является периодической с периодом T. Эта функция удовлетворяет условию

а) $f\left(x+T\right)=f(x)$; б) $f\left(x\right)+T=f(x)$; в) $Tf(x)=f(x)$; г) $f\left(x+T\right)=f(x)+T$.

61) Функция является всюду положительной и вогнутой. Этой функцией является

а) $y = x^3$; б) $y = \ln x$; в) $y = \dfrac{1}{x}$; г) $y = e^x$.

Список использованных источников

1 **Высшая математика для экономистов**; под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 440с.

2 **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов в 2Ч. /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. 5-е изд. – М.: Высшая школа, 1996. Ч.1 – 304с.: ил.

3 **Сборник задач по высшей математике для экономистов**: учебное пособие; под редакцией В.И. Ермакова. – М.: ИНФОРА-М, 2001. – 575с. – (Серия «Высшее образование»).

Приложение А
(*справочное*)

Методика проведения контрольного занятия по проверке итоговых базовых знаний по теме «Математический анализ функции одной переменной»

Количество оценок 4	
Название оценок	Неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично.
Пороги оценок: удовлетворительно хорошо отлично	36 правильных ответов, 48 правильных ответов, 60 правильных ответов.
Предел длительности всего контроля	90 минут
Предел длительности ответа на каждый вопрос	1,5 минуты
Предложенное количество вопросов	61