Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
″Оренбургский государственный университет″

М. Н. Перунова

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Рекомендовано к изданию Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования ″Оренбургский государственный университет″ в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования инженерно-технических направлений подготовки

Оренбург
2012

УДК 534 (07)
ББК 22.336 я 7
П 27

Рецензент – доктор физико-математических наук В.Л. Бердинский

Перунова, М. Н.
П 27 Колебания и волны: учебное пособие / М. Н. Перунова; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2012. – 386 с.
ISBN

В учебном пособии представлено систематическое изложение курса «Колебания и волны». Особое внимание уделено всеобщему характеру закономерностей колебательных процессов. Все разделы иллюстрированы примерами решения задач, от простых до сложных, олимпиадных. В пособие включены тестовые задания и задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования инженерно-технических направлений подготовки.

П $\frac{1604010000}{}$

УДК 534 (07)
ББК 22.336 я 7

ISBN

Содержание

Введение

Колебание – это более или менее регулярно повторяющийся процесс. Таково очень нестрогое, «качественное» определение понятия «колебание». Приведем несколько примеров периодических процессов, относящихся к различным областям физики (и не только физики). Колеблется груз, подвешенный на пружине; колеблется поверхность воды; колеблется струна музыкального инструмента; колеблется давление воздуха, вызывая колебания барабанной перепонки человеческого уха; периодически изменяется солнечная активность и т.д.

Кроме того, более или менее периодически меняется температура воздуха в течение года; периодически изменяется количеств автомобилей на улицах города (больше в часы пик - меньше поздней ночью); периодически изменяется экономическая ситуация в жизни общества - кризисные явления сменяются подъемами экономики и т.д.

По существу периодические процессы – это наиболее часто встречающие процессы в природе, а закономерности колебательных процессов – фундаментальные законы природы.

Наша задача – познакомиться с наиболее простейшими видами колебательного движения, основными характеристиками колебательных процессов, с математическим способом описания колебаний.

Время, через которое движение полностью повторяется, называется периодом Т. Число колебаний, совершаемых в единицу времени – частота ν. Очевидно, $T = \dfrac{1}{\nu}$.

Колебания можно классифицировать различными способами. По причине, вызывающей колебания, их можно разделить на свободные и вынужденные.

Свободные колебания происходят под действием внутренних сил, возникающих в системе при выведении ее из положения равновесия. Таковы колебания груза, подвешенного на пружине – достаточно вывести маятник из положения равновесия и больше не «вмешиваться» в его поведение, груз будет периодически изменять свое положение в пространстве.

Вынужденные колебания происходят под действием внешней периодически действующей силы. Например, вибрирует опора станка под действие регулярных толчков со стороны вращающихся деталей; колеблется корпус музыкального инструмента и столб воздуха внутри него под действием толчков со стороны прикрепленной к корпусу колеблющейся струны.

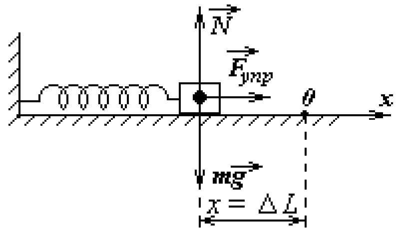
Другой способ классификации колебательных процессов основан на сравнении законов, по которым происходит изменение колеблющейся величины. Если какая-либо физическая величина изменяется по гармоническому закону (закону синуса или косинуса), то колебания называют *гармоническими*. Любые другие периодические изменения называются негармоническими. Заметим, что гармоническими могут быть как свободные, так и вынужденные колебания.

Глава 1 Гармонические колебания

§1 Пружинный маятник

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Пружинный маятник – система, состоящая из пружины и прикрепленного к ней груза. Система располагается на горизонтальной поверхности. Рассмотрим идеальный случай, когда поверхность, по которой двигается груз, гладкая. Отсутствие трения в системе означает, что энергия, сообщенная системе при выведении ее из положения равновесия, будет сохраняться, не переходя во внутреннюю.



Выберем ноль на оси OX, вдоль которой колеблется груз, в положении недеформированной пружины. Такой выбор нуля позволяет приравнять координату тела x и деформацию пружины ΔL: $x = \Delta L$.

Запишем второй закон Ньютона для груза, выведенного из положения равновесия:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр}$$
$$ma_x = F_{упрx}.$$

Согласно закону Гука $F_{упрx} = -k\Delta l = -kx$, а проекция ускорения – вторая производная от координаты тела по времени $a_x = x''$. Тогда

$$mx'' = -kx$$
$$x'' = -\frac{k}{m}x \qquad (1)$$

Введем обозначение

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

С учетом этого обозначения уравнение (1) примет вид

$$x'' = -\omega^2 x. \tag{2}$$

Получили дифференциальное уравнение, содержащее функцию $x = (t)$ и ее вторую производную, причем вторая производная прямо пропорциональна самой функции, взятой с противоположным знаком.

Решением дифференциального уравнения (2) является функция вида

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{3}$$

Физический смысл констант A, ω, φ_0 выясним, исходя из свойств гармонической функции.

а) Функция $\cos(\omega t + \varphi_0)$ ограниченная, ее максимальное значение равно 1. Когда косинус принимает максимальное значение, равное единице, отклонение тела от положения равновесия тоже принимает максимальное значение $x_{мах} = A \cdot 1 = A$. Таким образом, A - *максимальное отклонение груза от положения равновесия – амплитуда.*

б) Функция $\cos(\omega t + \varphi_0)$ периодическая, ее значение повторяется при изменении аргумента на 2π. С другой стороны, движение полностью повторяется через время, равное периоду колебаний Т. Тогда нетрудно видеть, что через время, равное периоду, аргумент косинуса изменяется на 2π:

$$\omega(t+T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi$$

$$\omega t + \omega T + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi \tag{4}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Величину ω, отличающуюся от обычной частоты ν в 2π раз, называют циклической частотой. *Циклическая частота ω – величина, численно равная числу колебаний, совершаемых за 2π секунды*.

в) Аргумент косинуса называют фазой φ. В момент начала колебаний t = 0 аргумент косинуса становится равным φ_0; поэтому величину φ_0 называют начальной фазой колебаний. Фаза измеряется в радианах.

Кинематика гармонических колебаний

Поговорим подробнее о фазе. Фаза колебаний полностью определяет состояние колебательной системы в рассматриваемый момент времени – зная фазу, можно рассчитать координату, скорость, ускорение тела, кинетическую и потенциальную энергию, силу, действующую на тело.

Покажем это. По определению проекция скорости – это первая производная от координаты тела по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (A\cos(\omega t + \varphi_0))' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) =$$
$$= A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = v_{\max}\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Видим, что скорость пружинного маятника, совершающего гармонические колебания, тоже меняется по гармоническому закону. Но аргумент функции $v_x(t)$ в любой момент времени больше аргумента функции $x(t)$ на π/2. В этом случае говорят, что скорость колеблющегося тела опережает координату по фазе на π/2.

Проекция ускорения – первая производная от проекции скорости и вторая производная от координаты:

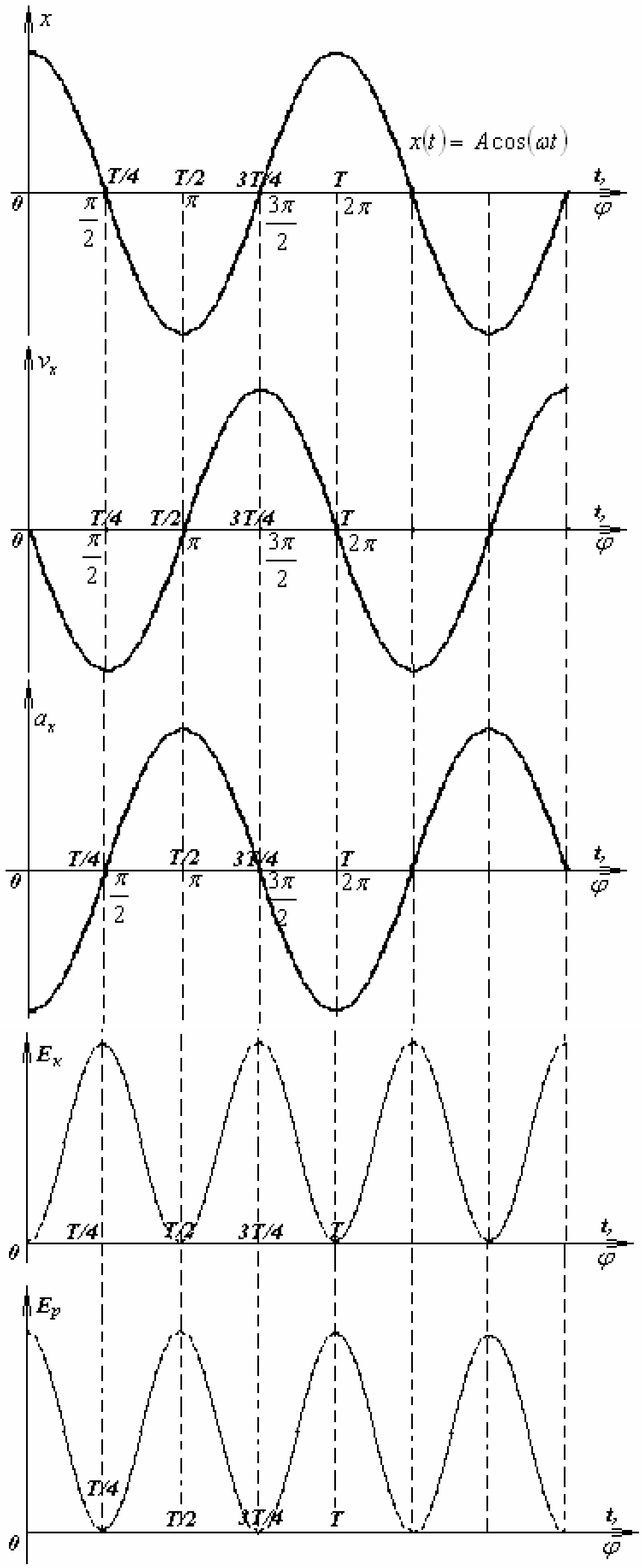
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) =$$
$$= a_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x.$$

Фаза ускорения отличается от фазы координаты на π радиан – в этом случае говорят, что ускорение и координата колеблются в противофазе.

Зная деформацию пружины, скорость и ускорение колеблющегося тела, можно рассчитать его кинетическую и потенциальную энергии и силу, действующую на него:

$$F_x = ma_x = ma_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -F_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$E_k = \frac{m\vartheta_x^2}{2} = \frac{m\vartheta_{\max}^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{m\vartheta_{\max}^2\cdot 0{,}5(1-\cos(2\omega t + \varphi_0))}{2}$$
$$E_p = \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{kA^2\cdot 0{,}5(\cos(2\omega t + \varphi_0)+1)}{2}.$$

Видим, что обе энергии, кинетическая и потенциальная, тоже меняются по гармоническому закону, только с удвоенной частотой.



x
$x(t) = A\cos(\omega t)$
T/4
T/2
3T/4
T
t, φ
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
v_x
a_x
E_k
E_p

Подведем некоторые итоги

Мы показали, что пружинный маятник, будучи выведенными из положения равновесия, совершает колебания, при которых ***все*** кинематические характеристики движения (координата, скорость, ускорение), сила, кинетическая и потенциальная энергии ***меняются по закону синуса или косинуса.*** Поэтому колебания пружинного маятника и называются гармоническими.

Осталось выяснить, от чего зависит численные значения констант A - амплитуды, ω – циклической частоты , φ_0 - начальной фазы , входящих в уравнение движения колеблющегося тела (3).

Константа ω – циклическая частота – появилась в дифференциальном уравнении, когда мы ввели обозначение:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Видим, что циклическая частота $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ зависит только от свойств самой колебательной системы. В случае пружинного маятника она зависит от жесткости пружины и массы прикрепленного к ней груза. Зная циклическую частоту на основании формулы (4), можем рассчитать период колебаний пружинного маятника $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Он не зависит от размаха колебаний (только бы выполнялся закон Гука!), от способа выведения маятника из положения равновесия. Для данной пружины и данного груза период колебаний всегда одинаков!

Амплитуда колебаний зависит от энергии, сообщенной пружинному маятнику при выведении его из положения. Очевидно, в крайнем положении деформация пружины максимальна и равна амплитуде колебаний А. Полная энергия колебательной системы в этот момент состоит только из потенциальной энергии деформированной пружины $\frac{kA^2}{2}$, кинетическая энергия в этот момент отсутствует, ибо в крайнем положении маятник остановился.

Тогда

$$E_{полная} = E_{p\max} = \frac{kA^2}{2},$$

$$A = \sqrt{\frac{2E_{полная}}{k}}.$$

Начальная фаза зависит от того, каким образом маятник вывели из положения равновесия. Например, маятник отклонили от положения равновесия на расстояние А и отпустили без начальной скорости. Запишем уравнение движения колеблющегося тела и учтем тот факт, что в начальный момент координата тела равна А:

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

$$x\left(0\right) = A\cos\left(\omega \cdot 0 + \varphi_0\right) = A\cos\left(\varphi_0\right) = A \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\varphi_0\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0$$

Уравнение движения маятника, выведенного из положения равновесия таким способом, выглядит просто $x = A\cos(\omega t)$.

Другая ситуация – маятник привели в колебания, толкнув его в положении равновесия. Тогда начальная координата тела равна нулю:

$$x(0) = A\cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A\cos(\varphi_0) = 0 \;\Rightarrow\; \cos(\varphi_0) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$$

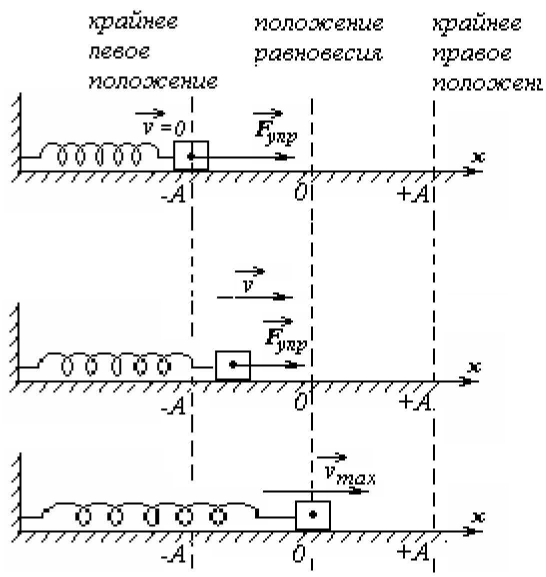
Уравнение движения маятника тогда будет выглядеть следующим образом:

$$x = A\cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm A\sin(\omega t).$$

Знак, плюс или минус, зависит от выбора положительного направления оси 0X. Если направление оси 0X совпадает с направлением начальной скорости, то в уравнении движения будет знак плюс, и наоборот.

Динамика гармонических колебаний пружинного маятника

Рассмотрим процессы, происходящие в процессе колебаний пружинного маятника.



В крайнем положении деформация пружины максимальна, следовательно, сила упругости, ускорение и потенциальная энергия деформированной пружины тоже максимальны. Скорость груза и кинетическая энергия равны нулю. Полная энергия системы состоит только из потенциальной энергии деформации пружины.

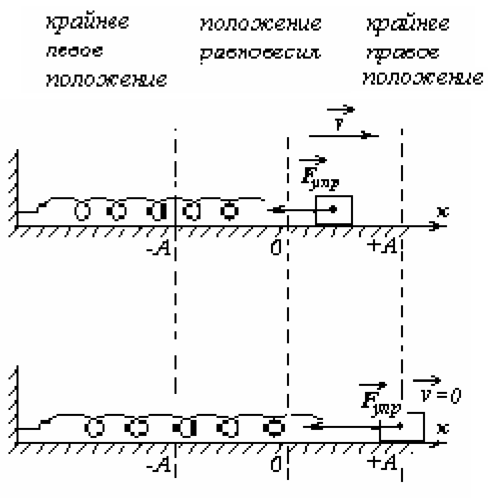
Первая четверть периода.

Пружина распрямляется, ее деформация уменьшается. Следовательно, уменьшается величина силы упругости и ускорения груза. Потенциальная энергия деформированной пружины уменьшается, переходя в кинетическую. Модуль скорости груза увеличивается.

Маятник проходит положение равновесия. В этом положении пружина не деформирована, значит, сила упругости обращается в ноль (это и есть условие равновесия). Согласно второму закону Ньютона ускорение тоже обращается в ноль. Потенциальная энергия деформации пружины перешла в кинетическую, этот вид энергии принимает максимальное значение. Скорость груза достигла максимального значения.

Вследствие своей инертности маятник не может изменить свою скорость мгновенно, он проскакивает положение равновесия. Начинается *вторая четверть периода.*

Груз удаляется от положения равновесия, растягивая пружину. Сила упругости, изменившая свое направление, растет по модулю. Увеличивается потенциальная энергия упругой деформации пружины. Кинетическая энергия и скорость груза уменьшаются.



Груз удаляется от положения равновесия пока не остановится. В крайнем положении кинетическая энергия груза обращается в ноль, она полностью перешла в потенциальную энергию упругой деформации. Деформация пружины максимальна, модуль силы упругости и ускорения приняли наибольшее значение. Нетрудно видеть, что отклонения груза от положения в обе стороны одинаковы.

Вторая половина периода происходит аналогично.

Подведем итоги

В крайнем положении – это точки остановки маятника – скорость и кинетическая энергия маятника равны нулю. Отклонение маятника от положения равновесия максимально (и равно амплитуде). Деформация пружины максимальна, модуль силы упругости, ускорения и потенциальная энергия упругой деформации пружины максимальны. Полная энергия системы состоит только из потенциальной энергии.

В положении равновесия сила, под действием которой происходят колебания, обращается в ноль. Согласно второму закону Ньютона ускорение тоже обращается в ноль. Скорость и кинетическая энергия максимальна. Потенциальная энергия минимальна.

При ***переходе из крайнего положения в положение равновесия*** скорость и кинетическая энергия груза растут, а деформация пружины, модуль силы, ускорения и потенциальная энергия систему уменьшаются.

В процессе движения ***из положения равновесия в крайнее положение*** растут деформация пружины, модуль силы упругости и ускорения, потенциальная энергия упругой деформации. Скорость и кинетическая энергия груза уменьшаются (таблица 1).

Таблица 1

	Крайнее положение	⟶	Положение равновесия	⟶	Крайнее положение
Отклонение от положения равновесия	Max	Уменьшается	0	Увеличивается	Max
Деформация пружины	Max	Уменьшается	0	Увеличивается	Max
Модуль силы упругости	Max	Уменьшается	0	Увеличивается	Max
Модуль ускорения	Max	Уменьшается	0	Увеличивается	Max
Модуль скорости	0	Увеличивается	Max	Уменьшается	0
Кинетическая энергия	0	Уменьшается	Max	Уменьшается	0
Потенциальная энергия	Max	Уменьшается	Min	Увеличивается	Max

*Фазовая траектория**

Состояние частицы полностью характеризуется заданием ее координат (x, y, z) и скоростей $\left(v_x, v_y, v_z\right)$. Почему? Координаты тела определяют потенциальную энергию взаимодействия тела с другими телами, а скорости – импульс тела и его кинетическую энергию. Именно поэтому хочется иметь наглядное изображение движения тела, в нашем случае маятника, позволяющее «увидеть» состояние колебательной системы в любой момент времени.

Задача решается несложно, если в декартовой системе координат по оси абсцисс откладывать координату тела, а по оси ординат – соответствующую проекцию скорости. Такая координатная плоскость называется фазовой плоскостью. Состояние тела на фазовой плоскости задается ***изображающей точкой***, координаты которой x и v_x. С течение времени x и v_x тела изменяются, следовательно, точка, изображающая состояние тела на фазовой плоскости, перемещается, описывая так называемую ***фазовую траекторию***.

В случае гармонического осциллятора координата и проекция скорости тела изменяются с течением времени следующим образом

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$v_x = x' = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Отсюда несложно получить уравнение фазовой траектории:

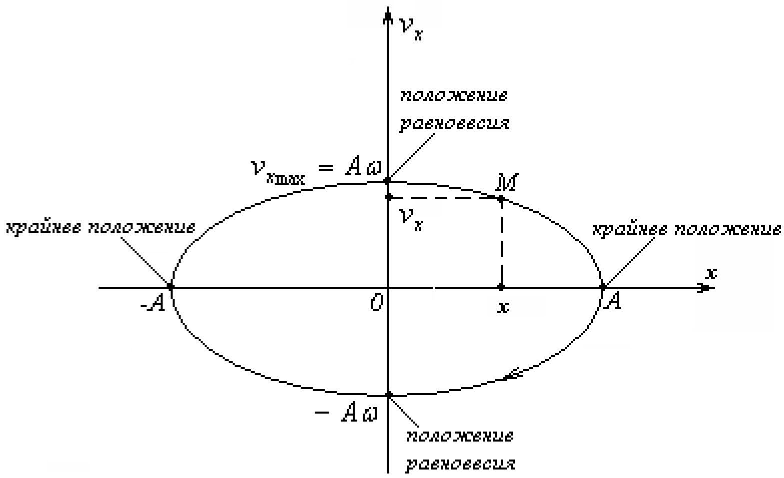
$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$\frac{v_x}{A\omega} = -\sin\left(\omega t + \phi_0\right).$$

Возведем обе части каждого уравнения в квадрат и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v_x^2}{(A\omega)^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0) = 1$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v_x^2}{(A\omega)^2} = 1. \qquad (5)$$

Это уравнение эллипса с полуосями А и $A\omega$. Фазовая траектория гармонического осциллятора выглядит следующим образом:



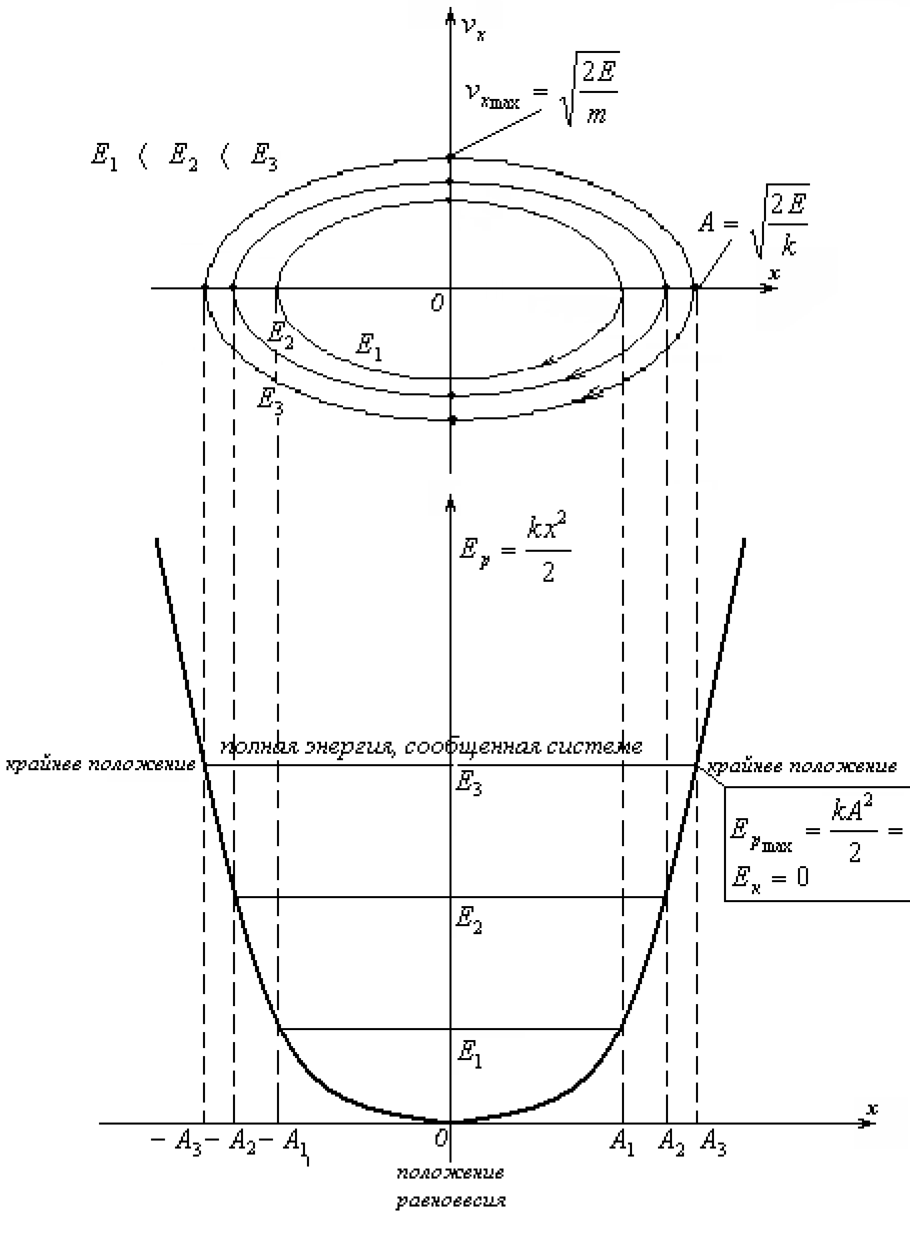
То, о чем мы говорили ранее, теперь стало наглядно. Явно видно, что движение тела ограничено в пространстве – оно колеблется на отрезке от – А до А. Проекция скорости тела тоже принимает ограниченные значения от $-A\omega$ до $A\omega$.

Вспомним, что амплитуда колеблющегося тела определяется энергией, сообщенной системе при выведении ее из положения равновесия:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$v_{x\max} = A\omega = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Очевидно, что сообщение колебательной системе большей энергии при выведении ее из положения равновесия приведет к увеличению амплитуды колебаний и максимального значения скорости. Фазовая траектория по-прежнему останется эллипсом, пропорционально увеличатся только его полуоси. Мы получаем семейство фазовых траекторий, отличающихся амплитудой колебаний вследствие отличия энергий, сообщенных системе.



По существу, фазовая траектория - это наглядное изображение закона сохранения механической энергии.

Нетрудно показать, что выражение для закона сохранения энергии $\frac{kx^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2} = E$ преобразуется к виду (5). Для этого достаточно обе части равенства разделить на Е и вспомнить связь между полной энергией системы и амплитудой колебаний:

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{v_x^2}{2E/m} = 1$$

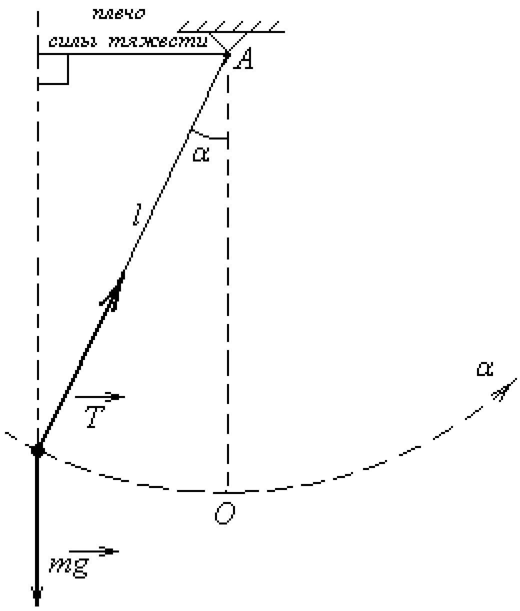
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v_x^2}{(A\omega)^2} = 1.$$

Если энергию колебательной системы каким-либо образом увеличивать, размах колебаний будет возрастать – колебания будут «раскачиваться». Фазовая траектория при этом будет «раскручиваться».

Если по каким-либо причинам энергия колебательной системы будет уменьшаться, размах колебаний будет уменьшаться. В этом случае колебания будут затухать. Фазовая траектория будет все больше «скручиваться».

§2 Математический маятник

Математическим маятником называют материальную точку массы m, подвешенную на нерастяжимой нити длины *l*. При выведении из положения равновесия маятник начинает качаться, совершать колебательное движение.



Траекторией груза при этом будет дуга окружности.

Запишем основной закон вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}.$$

Учтем, что по определению угловое ускорение ε – вторая производная от угла поворота α, а вращающий момент относительно точки А создает только сила тяжести:

$$\varepsilon = \alpha'' \qquad M = -mg \cdot l \sin\alpha.$$

Знак «-» делает момент силы тяжести положительным, что соответствует ситуации на рисунке, ибо угол отклонения маятника отрицателен. Тогда с учетом малости угла отклонения маятника от положения равновесия ($\sin\alpha \approx \alpha$) получаем

$$ml^2 \cdot \alpha'' = -mgl\alpha$$

$$\alpha'' = -\frac{g}{l} \cdot \alpha.$$

Обозначим $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Окончательно получаем дифференциальное уравнение

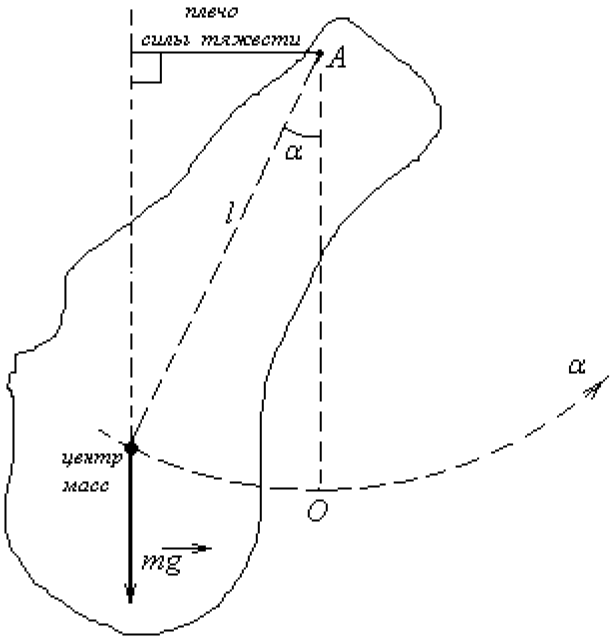
$$\alpha'' = -\omega^2 \cdot \alpha.$$

Это не что иное, как уравнение гармонических колебаний. Следовательно, математический маятник при отклонении на малые углы от положения равновесия будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§3 Физический маятник

Физический маятник – это любое тело с закрепленной осью вращения, не совпадающей с центром масс.



Пусть тело закреплено в точке А и может свободно вращаться относительной этой точки. Центр масс тела находится на расстоянии *l* от точки закрепления. Нетрудно видеть, что при выведении тела из положения равновесия его центр масс будет двигаться по дуге окружности радиуса *l*.

Поскольку сила реакции опоры, действующая в точке закрепления, вращающего момента не создает, второй закон Ньютона для вращательного движения будет выглядеть так:

$$I \cdot \alpha'' = -mgl\alpha,$$

где I – момент инерции тела относительно точки А. Преобразуем полученное выражение

$$\alpha'' = -\frac{mgl}{I} \cdot \alpha.$$

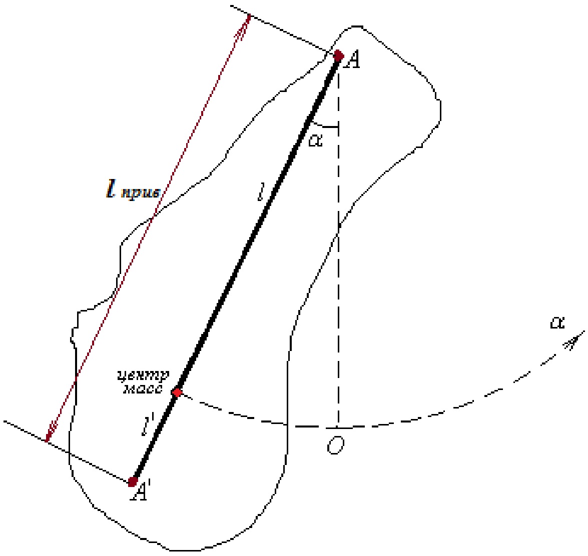
Введя обозначение $\omega^2 = \dfrac{mgl}{I}$, получаем уже известное дифференциальное уравнение гармонических колебаний $\alpha'' = -\omega^2 \cdot \alpha$.

Итак, при малых углах отклонения от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания с периодом .

Приведенная длина физического маятника

Сравним $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$ периоды колебаний физического и математического маятников.

$$T_{физ} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \qquad T_{мат} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$



Величина $\frac{I}{ml}$ имеет размерность длины. Введем обозначение $\frac{I}{ml} = l_{прив}$, где $l_{прив}$ - приведенная длина физического маятника. Понятно, что приведенная длина $l_{прив}$ - это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом физического маятника. Приведенная длина не совпадает с расстоянием от точки подвеса до центра масс l ($l_{прив} > l$)! При изменении положения оси вращения маятника будет меняться и приведенная длина.

Приведенная длина интересна тем, что при переносе точки подвеса маятника в точку A' период колебаний маятника не изменяется. Покажем это.

Приведенная длина исходного маятника

$$l_{прив} = l + l' = \frac{I}{ml} = \frac{I_0 + ml^2}{ml}. \tag{*}$$

Расстояние от новой точки подвеса A' до центра масс равно $l' = \frac{I_0 + ml^2}{ml} - l = \frac{I_0}{ml}$. После переворота приведенная длина получившегося маятника будет равна $l'_{прив} = \frac{I'}{ml'} = \frac{I_0 + ml'^2}{ml'} = \frac{I_0 + m\frac{I_0^2}{m^2l^2}}{m\frac{I_0}{ml}} = \frac{I_0 + ml^2}{ml} = l_{прив}$. Видим, что приведенная длина перевернутого маятника совпала с приведенной длиной исходного маятника, следовательно периоды колебаний маятников одинаковы.

§ 4 Гармонический осциллятор

Пора сделать некоторые обобщения. Мы рассмотрели только три примера колебательных систем из области механики, но их можно привести десятки, причем из разных областей физики.

Очевидно, что в любой физической системе, поведение которой подчиняется дифференциальному уравнению $S'' + \omega^2 \cdot S = 0$ будут наблюдаться гармонические колебания величины S. В этом случае систему называют гармоническим осциллятором.

Физические различия между гармоническими осцилляторами в конечном счете будут проявляться в том, что параметр ω, названный нами циклической частотой, определяется различными физическими величинами. В случае пружинного маятника циклическая частота определяется жесткостью пружины k и массой груза m: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. В случае математического маятника циклическая частота зависит от длины подвеса и ускорения свободного падения $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, для физического маятника $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$.

Однако, есть одно важное обстоятельство, которое объединяет поведение всех этих физически различных колебательных систем! Каждый раз система, будучи выведенной из положения равновесия, отвечает на это возникновением силы (или вращающего момента), стремящейся вернуть систему в положение равновесия. Причем величина этой силы или вращающего момента пропорциональна величине смещения тела от положения равновесия. Это общее свойство всех гармонических осцилляторов. Силу вида $F_x = -kx$, независимо от её природы, называют **квазиупругой**.

С математической точки зрения уравнения, описывающие любой гармонический осциллятор, абсолютно тождественны! Это дает нам право утверждать, что физические закономерности любого гармонического колебания, независимо от его природы, тоже тождественны. Эти закономерности мы и рассмотрели на примере пружинного маятника.

§ 5 Примеры решения задач

Задача1 Читаем уравнение гармонических колебаний

Зависимость координаты тела от времени имеет вид $x = 0{,}08\cos(\pi t/2 + \pi/3)\left(\text{м}\right)$. Определите характер движения тела.

Решение:

- Функция $x(t)$ меняется по закону косинуса, следовательно, тело совершает гармонические колебания.
- Сопоставим уравнение движения тела с уравнением колебатель- $x(t) = A\cdot\cos(\omega \text{t} + \varphi_0)$ ного движения.
- Видим, что амплитуда колебаний равна А = 0,08 м.
- Множитель, стоящий в уравнении движения перед временем, - циклическая частота. В нашем случае она равна $\omega = \pi/2$ с$^{-1}$.
- Тогда частота колебаний $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\pi/2}{2\pi} = \dfrac{1}{4}\left(\text{Гц}\right)$.

Период колебаний $T = \dfrac{1}{\nu} = 4\left(\text{с}\right)$.

- Начальная фаза колебаний $\varphi_0 = \pi / 3$ рад. Зная начальную фазу, $x(0) = 0{,}08\cos(\pi / 3) = 0{,}08 \cdot 0{,}5 = 0{,}04(\text{м})$ можно определить, каким образом маятник привели в колебательное движение.

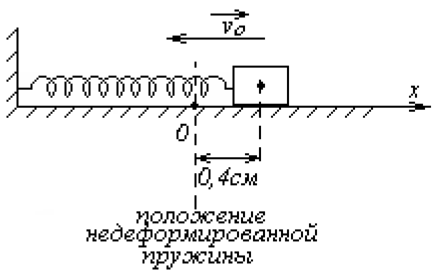
Проекция скорости – производная от координаты по времени.

$$v_x = x' = -0{,}08 \cdot \pi / 2 \cdot \sin(\pi t / 2 + \pi / 3).$$

Проекция начальной скорости

$v_x(0) = -0{,}08 \cdot \pi / 2 \cdot \sin(\pi / 3) \approx -0{,}11(\text{м/с})$.

Для возбуждения колебаний маятник отклонили от положения равновесия на 4 см и толкнули, сообщив скорость 0,11 м/с.



- Проекция ускорения – производная от проекции скорости

$$a_x = v_x{}' = -0{,}08 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \cos(\pi t / 2 + \pi / 3)$$

$$a_x(0) = -0{,}08 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \cos(\pi / 3) \approx 0{,}1\left(\text{м/с}^2\right)$$

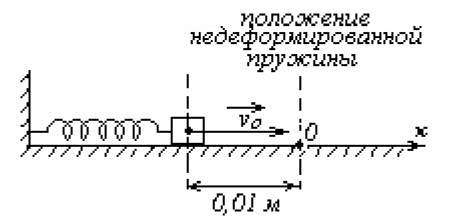
- Максимальные значения скорости и ускорения

$$v_{\max} = A\omega = 0{,}08\pi / 2 \approx 0{,}126\,(\text{м/с})$$

$$a_{\max} = A\omega^2 = 0{,}08\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \approx 0{,}2\,\left(\text{м/с}^2\right)$$

Задача 2 Составляем уравнение движения

Груз массой 400 г прикреплен к пружине жесткостью 40 Н/м. Пружину сжали на 1 см и толкнули груз к положению равновесия, сообщив грузу скорость 0,1 м/с. Составьте уравнение движения пружинного маятника.



Решение:

Введем систему координат, расположив ось OX вдоль траектории маятника. Ноль на оси OX поместим в положение недеформированной пружины, при таком выборе нуля координата груза и деформация пружины совпадают. Направим ось координат в сторону растяжения пружины.

Уравнение движения колеблющегося тела выглядит следующим образом

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \mathrm{t} + \varphi_0).$$

- Циклическая частота определяется параметрами колебательной системы

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0,4}} = 10 \left(\text{с}^{-1}\right).$$

- Амплитуда колебаний зависит от энергии, сообщенной системе при выведении ее из положения равновесия. Полная механическая энергия в начальный момент времени равна $E_{полная} = E_{к0} + E_{p0} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}$. Тогда амплитуда колебаний

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}}{k}} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k} + x_0^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,1^2}{40} + 0,01^2} \approx 0,014 \ (\text{м})$$

$$A \approx 1,4 \text{ см}.$$

- Начальная фаза может быть найдена из начальных условий.

$$x(0) = A \cdot \cos(\varphi_0)$$
$$v_x(0) = -A\omega \sin(\varphi_0)$$

$$\frac{v_x(0)}{x(0)} = -\omega \cdot tg(\varphi_0) \qquad \Rightarrow \qquad tg(\varphi_0) = -\frac{v_x(0)}{\omega \cdot x(0)} = -\frac{0{,}1}{10 \cdot (-0{,}01)} = 1$$

$$\varphi_0 = arctg1 = \frac{\pi}{4}$$

Окончательный результат $x(t) = 1{,}4 \cdot \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$ (см)

Задача 3 Уравнение, связывающее координату и скорость колеблющегося тела

При смещении точки от положения равновесия 5 см скорость точки 6 см/с, а при смещении 3 см скорость точки 10 см/с. Найдите амплитуду и частоту колебаний.

Решение:

1 Запишем уравнения зависимости координаты тела и его скорости в процессе гармонических колебаний

$$\begin{cases} x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v_x = x' = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

2 Исключим из полученной системы время

$$\begin{cases} x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v_x = -A \cdot \omega \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \dfrac{v_x}{\omega} = -A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0) \\ \dfrac{v^2}{\omega^2} = A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Складываем уравнения: $x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2$ или $\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} = 1$

3 Составляем систему

$$\begin{cases} x_1^2 + \dfrac{v_1^2}{\omega^2} = A^2 \\ x_2^2 + \dfrac{v_2^2}{\omega^2} = A^2 \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$\omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}} \qquad \omega = 2\ \text{с}^{-1} \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx 0{,}32\ \text{Гц}$$

$$A = \sqrt{\frac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} \qquad A \approx 5{,}57\ \text{см}$$

Задача 4 Уравнение, связывающее скорость и ускорение колеблющегося тела

Тело совершает гармонические колебания. Когда скорость тела была 13 см/с, его ускорение составляло 6 см/с^2. Когда скорость тела уменьшилась до 12 см/с, ускорение возросло до 10 см/с^2. Определите циклическую частоту колебания тела.

Решение:

1 Пусть координата тела меняется по закону $x = A \cdot \cos\omega t$. Запишем уравнения для скорости и ускорения колеблющегося тела

$$\begin{cases} v_x = -A\omega \cdot \sin\omega t \\ a_x = -A\omega^2 \cdot \cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{v_x}{A\omega} = -\sin\omega t \\ \dfrac{a_x}{A\omega^2} = -\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2} + \frac{a^2}{\omega^4} = A^2$$

2 Исключая из системы А, получим

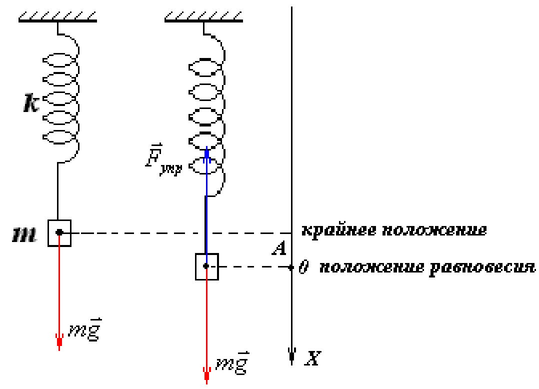
$$\omega = \sqrt{\frac{a_2^2 - a_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 1{,}6 \text{ с}^{-1}$$

Задача 5 Динамика колебательного движения

Груз массой 0,1 кг прикрепили к пружине школьного динамометра жесткостью 40 Н/м. В начальный момент времени пружина не деформирована. После того, как груз отпускают, возникают колебания. Чему равна амплитуда колебаний, максимальная скорость груза, максимальная деформация пружины? Запишите уравнение колебательного движения груза.

Решение

1 Груз пришел в колебательное движение из состояния покоя. **Нулевая скорость (остановка) – это отличительный признак крайнего положения** колебательной системы. Значит, груз пришел в колебательное движение из крайнего верхнего положения.



Рассмотрим положение равновесия

Отличительный признак положения равновесия – равенство равнодействующей нулю. На груз действуют сила тяжести и сила упругости пружины. В положении равновесия

$$m\vec{g} + \vec{F}_{упр} = 0$$

$$k\Delta l_0 = mg$$

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k},$$

где Δl_0 - деформация пружины в положении равновесия.

От крайнего положения до положения равновесия любая колебательная система проходит расстояние, равное амплитуде колебаний. Следовательно, $A = \Delta l_0 = \dfrac{mg}{k}$.

A = 0,025 м =2,5 см

2 Между двумя крайними положениями колебательной системы – расстояние $2A$. Следовательно, максимальная деформация пружины $\Delta l_{\max} = 2A = 2\dfrac{mg}{k}$.

$\Delta l_{\max} =$ 5 см.

3 Максимальная скорость будет у тела в положении равновесия

Ее можно найти разными способами. Самый простой: в любой колебательной системе $v_{\max} = \omega A$.

Циклическая частота пружинного маятника $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Значит, максимальная скорость груза $v_{\max} = \omega A = \dfrac{mg}{k} \cdot \sqrt{\dfrac{k}{m}} = g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

$v_{\max}$ = 0, 5 м/с.

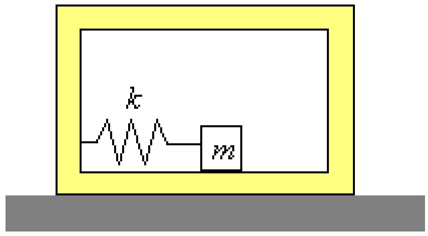
Можно найти максимальную скорость груза, используя закон сохранения энергии:

$$E_{k\max} = E_{p\max}, \qquad \frac{mv\max^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \qquad v_{\max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

4 Уравнение колебаний груза при нашем выборе направления координатной оси и положения нуля $x = -A\cos(\omega t) = -0{,}025\cos(20t)$ (м).

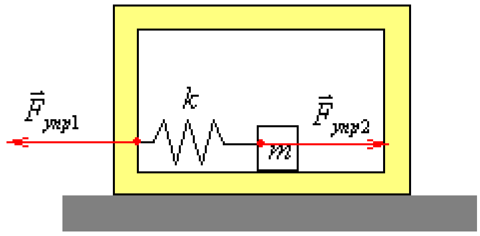
Задача 6 Динамика колебательного движения

Коробка массой М стоит на горизонтальном столе. Коэффициент трения между столом и коробкой равен μ. Внутри коробки лежит груз массой m, который может без трения двигаться по дну коробки. Он прикреплен к стенке коробки пружиной жесткостью k. При какой амплитуде колебаний коробка начнет двигаться по столу?



Решение:

1 Пружина прикреплена к грузу и коробке, значит, сила упругости, возникающая при деформации пружины, действует как на груз, так и на коробку. Если пружина сжата, силы упругости, действующие на груз и коробку, направлены на распрямление.



2 Сила упругости, действующая на коробку, пытается привести ее в движение. Коробка будет оставаться в покое, если сила упругости меньше максимальной силы трения покоя $F_{упр} \leq F_{тр.пок.\max}$ (*).

3 **Сила упругости максимальна в крайнем положении груза**, когда деформация пружины равна амплитуде колебаний $F_{упр\max} = kA$.

4 Максимальная сила трения покоя $F_{тр.пок.\max} = \mu N = \mu(M+m)g$

5 Подставляем значения максимальной силы трения покоя и максимальной силы упругости в неравенство (*) и находим возможные амплитуды колебаний:

$$kA \leq \mu(M+m)g$$

$$A \leq \frac{\mu(M+m)g}{k}$$

Задача 7 Динамика колебательного движения

Брусок массы ***M***, прикрепленный к пружине жесткости ***k***, совершает колебания с амплитудой ***A*** на гладкой горизонтальной поверхности. При прохождении положения равновесия в брусок попадает пуля массы ***m*** и застревает в нем. Какой должна быть скорость пули, чтобы после попадания ее в брусок колебания прекратились?

Решение:

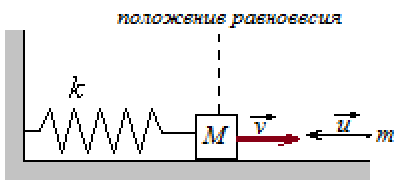
1 Очевидно, что груз может остановиться после попадания в него пули, если он двигался навстречу пуле. Тогда, согласно ЗСИ, полный импульс системы пуля – брусок должен быть равным нулю:

$$M\vec{v} + m\vec{u} = 0$$

$$Mv - mu = 0$$

$$u = \frac{Mv}{m} \quad (*)$$

2 Если в момент остановки груза пружина была деформирована, то на груз будет действовать сила упругости и колебания груза продолжатся. Следовательно, для прекращения колебаний необходимо выполнение еще одного условия: в момент остановки на груз **не должна действовать сила упругости**. Это возможно в том случае, если пуля попадает в брусок **при прохождении им положения равновесия**.



3 В **положении равновесия скорость груза максимальна** и связана с амплитудой колебаний $v_{\max} = \omega A = A \cdot \sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

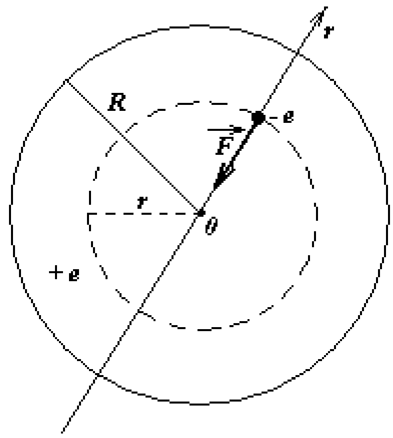
4 Скорость пули находим из выражения (*):

$$u = \frac{Mv_{\max}}{m} = \frac{MA}{m} \cdot \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{A\sqrt{Mk}}{m}.$$

Задача 8 Составляем дифференциальное уравнение гармонических колебаний и находим период колебаний

Модель атома, предложенная в конце XIX века Томпсоном, представляет собой положительно заряженное шарообразное «облако», в котором под действием кулоновской силы двигается отрицательно заряженный «точечный» электрон. Принимая положительный заряд атома равным элементарному заряду (атом водорода), определите период колебаний электрона вдоль линии, проходящей через центр положительно заряженного «облака».

Решение:



1 Введем ось координат 0r, она проходит через центр положительного «облака», здесь же поместим ноль координатной оси.

2 Движение электрона происходит под действием кулоновской силы $F = eE$. Напряженность поля E на расстоянии r от центра атома найдем, используя теорему Гаусса:

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{(r/R)^3 e}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Тогда проекция кулоновской силы на ось координат будет равна $F_r = -\dfrac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$.

3 Запишем второй закон Ньютона для электрона:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$ma_r = F_r$$

$$ma_r = -\frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

4 Учтем, что проекция ускорения – это вторая производная от координаты $a_r = r''$. Тогда

$$mr'' = -\frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$r'' = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3} \cdot r$$

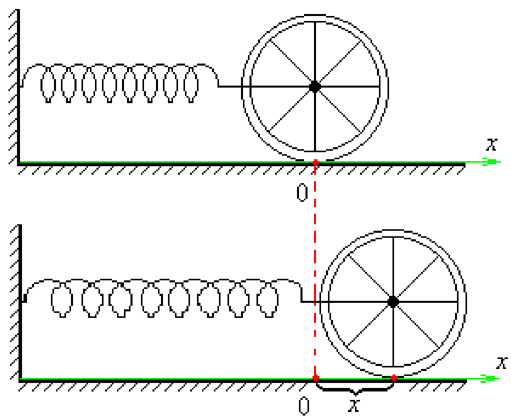
5 Введем обозначение $\omega^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}$.

Дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$r'' = -\omega^2 \cdot r$$

Понятно, что электрон в атоме Томпсона совершает гармонические колебания вдоль линии, проходящей через центр атома. Период этих колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\dfrac{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}{e}$.

Задача 9 Составляем дифференциальное уравнение гармонических колебаний и находим период колебаний



Пружина жесткостью ***k*** одним концом присоединена к оси колеса массы ***m***, которое способно катиться без проскальзывания, а другим концом присоединена к стенке. Каков период колебаний системы? Масса колеса однородно распределена по ободу.

Решение

1 Введем систему отсчета, расположив координатную ось горизонтально. Ноль на оси координат выберем в таком положении центра колеса, когда пружина не деформирована. При таком выборе нуля деформация пружины Δl и координата центра колеса x совпадают $\Delta l = x$.

2 Полная механическая энергия системы складывается из потенциальной энергии упруго деформированной пружины $E_p = \dfrac{k\Delta l^2}{2} = \dfrac{kx^2}{2}$, кинетической энергии поступательного движения колеса $E_{k.пост} = \dfrac{mv^2}{2}$ и кинетической энергии вращательного движения колеса $E_{k.вращ} = \dfrac{I\omega^2}{2}$.

Момент инерции колеса равен $I = mR^2$.

Тогда $E_{k.вращ} = \dfrac{mR^2\omega^2}{2} = \dfrac{m(R\omega)^2}{2} = \dfrac{mv_{вращ}^2}{2}$.

Колесо катится без проскальзывания, следовательно, скорость вращательного движения точек на ободе равна скорости поступательного движения колеса, то есть скорости центра колеса $v_{вращ} = v$. Тогда $E_{k.вращ} = \dfrac{mv^2}{2}$.

При движение колеса без проскальзывания полная механическая энергия системы остается неизменной:

$$E_p + E_{k.пост} + E_{k.вращ} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + mv^2 = const. \qquad (*)$$

3 Дифференцируем выражение $(*)$ по времени:

$$\left(\frac{kx^2}{2}+mv^2\right)' = const'$$

$$kx\cdot x' + 2mv\cdot v' = 0.$$

4 Учтем, что скорость поступательного движения центра колеса – это производная от координаты $v = x'$. Тогда производная от скорости будет второй производной от координаты $v' = x''$:

$$kx\cdot x' + 2mx'\cdot x'' = 0$$
$$kx + 2m\cdot x'' = 0$$
$$x'' = -\frac{k}{2m}\cdot x.$$

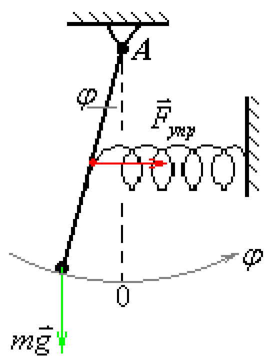
Введем обозначение $\omega^2 = \frac{k}{2m}$ и получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний $x'' = -\omega^2\cdot x$. Колесо, прикрепленное к пружине, совершает гармонические колебания.

5 Циклическая частота колебаний системы $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$.

6 Период колебаний системы $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

Задача 10 Составляем дифференциальное уравнение гармонических колебаний и находим период колебаний

Маятник представляет собой груз на легком стержне длины $\boldsymbol{L}$, к середине которого прикреплена горизонтальная пружина жесткости $\boldsymbol{k}$. Докажите, что при малых отклонениях от вертикали колебания маятника будут гармоническими. Чему равен период этих колебаний?



Решение

1 Выведем маятник из положения равновесия, отклонив его на малый угол φ. На маятник будут действовать сила тяжести груза $m\vec{g}$, сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$, приложенная в точке прикрепления пружины к стержню, и сила реакции опоры в точке А. Силы тяжести и упругости будут создавать вращающий момент относительно точки А. Вращающий момент силы реакции опоры относительно точки А равен нулю, ибо эта сила приложена в точке А.

2 Записываем основной закон динамики вращательного движения, учитывая, что сила тяжести и сила упругости создают вращающие моменты одного направления

$$I \cdot \varepsilon = M_{тяж} + M_{упр}. \qquad (*)$$

3 Момент силы тяжести с учетом малости угла отклонения φ равен $M_{тяж} = -mg \cdot L\sin\varphi = -mg \cdot L\varphi$. Знак «-» поставлен потому, что угол отклонения φ, как это видно из рисунка, отрицательный, а вращение под действием силы тяжести должно происходить в положительном направлении отсчета углов.

4 Момент силы упругости с учетом малости угла отклонения φ равен

$$M_{упр} = -F_{упр} \cdot \frac{L}{2}\cos\varphi = -k\Delta l \cdot \frac{L}{2}\varphi.$$

Деформация пружины $\Delta l = \frac{L}{2} \cdot \sin\varphi = \frac{L}{2} \cdot \varphi$, с учетом этого

$$M_{упр} = -k\frac{L}{2} \cdot \varphi \cdot \frac{L}{2} = -\frac{kL^2}{2}\varphi.$$

5 Момент инерции материальной точки $I = mL^2$.

6 Учтем, что угловое ускорение есть вторая производная от угла поворота $\varepsilon = \varphi''$. Тогда уравнение (*) примет вид $mL^2 \cdot \varphi'' = -mg \cdot L\varphi - \frac{kL^2}{2}\varphi.$

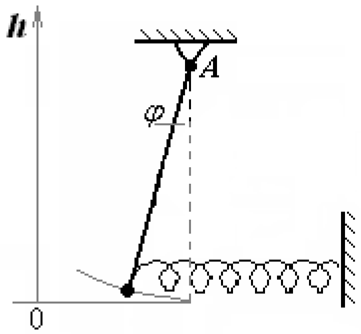
7 После преобразований и введения обозначения $\omega^2 = \dfrac{g}{L} + \dfrac{k}{2m}$ получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний $\varphi'' = -\omega^2 \cdot \varphi$. Следовательно, при малых углах отклонения маятник совершает гармонические колебания.

8 Циклическая частота колебаний $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L} + \dfrac{k}{2m}}$.

9 Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{L} + \dfrac{k}{2m}}}$.

Задача 11 Превращение энергии в колебательной системе, совершающей гармонические колебания

Комбинированный маятник состоит из невесомого стержня длиной 1 м, маленького шарика массой 200 г и пружины жесткость 20 Н/м. Маятник отклонили от положения равновесия на угол φ = 10^0 и отпустили. Найдите максимальную скорость шарика в процессе колебаний.



Решение

1 Полная механическая энергия системы, как обычно, состоит из двух частей: кинетической энергии и потенциальной $E_{полная} = E_k + E_p$.

Маятник колеблется в поле силы тяжести и в поле силы упругости, следовательно, потенциальная энергия системы складывается их энергии груза в поле тяготения и энергии упруго деформированной пружины $E_p = mgh + \dfrac{k\Delta l^2}{2}$.

Полная сохраняющаяся механическая энергия имеет вид

$$E_{полная} = mgh + \frac{k\Delta l^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

2 Выберем нулевой уровень для отсчета высоты h в положении равновесия груза. При отклонении маятника на угол φ он поднимается над нулевым уровнем на высоту $h = L(1 - \cos\varphi)$.

Угол отклонения маятника от положения равновесия мал, поэтому можно считать, что пружина остается в горизонтальном положении. Величина деформации пружины $\Delta l = L \cdot tg\varphi$. Ее потенциальная энергия

$$E_p = \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{k(L \cdot tg\varphi)^2}{2} = \frac{kL^2 tg^2\varphi}{2}.$$

Полная энергия системы принимает вид

$$E_{полная} = mgL(1 - \cos\varphi) + \frac{kL^2 tg^2\varphi}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

3 В крайнем положении кинетическая энергия отсутствует, полная энергия системы состоит только из потенциальной энергии. В положении равновесия отсутствует потенциальная энергия, ибо пружина не деформирована и маятник находится на нулевом уровне. В этом положении полная энергия системы состоит только из кинетической энергии груза. Записываем закон сохранения механической энергии

в крайнем положении *в положении равновесия*

$$mgL(1 - \cos\varphi) + \frac{kL^2 tg^2\varphi}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

4 Находим скорость груза при прохождении им положения равновесия - это и есть максимальная скорость груза в процессе колебаний:

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\varphi) + \frac{kL^2 tg^2\varphi}{m}}.$$

Подстановка численных значений дает результат $v \approx 1{,}85$ м/с.

§ 6 Задания для самостоятельного решения

1 Упражнения на «чтение» уравнения гармонических колебаний

1 Зависимость координаты колеблющейся точки от времени имеет вид $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \sin(\pi t/12)$. Известно, что в момент времени $t = 10$ с смещение равно 6 мм. Определите амплитуду колебаний (в мм).

2 Пружинный маятник совершает колебания, уравнение которых $\boldsymbol{x} = 4 \cos(\pi t + \pi/3)$ (см). Определите скорость и ускорение маятника через 20 с после начала движения. Масса маятника 200 г.

3 Через сколько секунд от начала движения точка, совершающая колебания по закону $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \sin \omega t$, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний равен 36 с.

4 Математическому маятнику в положении равновесия сообщили некоторую скорость, и за 1/4 с она уменьшилась в 2 раза. Найдите длину маятника, считая возникшие колебания гармоническими.

5 Груза, подвешенного на пружине, в зависимости от времени задается законом $\boldsymbol{x} = 8 \cos(10t + \pi/4)$. При этом максимальная кинетическая энергия груза равна 0,8 Дж. Найдите жесткость пружины.

2 Упражнения на составление уравнения движения тела, совершающего гармонические колебания

1 Напишите уравнение гармонических колебаний груза массой $\mathbf{m} = 100$ г, подвешенного на пружине жесткостью $k = 10$ Н/м, если амплитуда колебаний $A = 30$ мм, а начальная фаза $\varphi_0 = \pi/4$.

2 В начальный момент времени смещение частицы $\boldsymbol{x_0} = 1{,}7$ см, а скорость $v_{0X} = -1$ м/с. Масса частицы $m = 0{,}4$ кг, ее полная энергия

W = 800 мДж. Напишите закон колебаний частицы и определите путь, пройденный частицей за время $t = 0{,}1\pi$ с.

3 Грузик массой m = 200 г , прикрепленный к горизонтальной пружине жесткостью k = 20 Н/м, покоится на гладкой горизонтальной плоскости. Второй конец пружины закреплен. Грузику толчком сообщили горизонтальную скорость v_0 = 0,98 м/с, направленную вдоль оси пружины. Определите закон движения грузика *x(t)*, считая, что направление начальной скорости совпадает с положительным направлением оси OX.

4 Грузик массой m = 200 г подвешен на вертикальной пружине жесткости k = 20 Н/м. Его удерживают таким образом, что пружина остается недеформированной. В начальный момент времени груз освобождают, не сообщая ему начальной скорости. Определите закон движения грузика ***x(t),*** считая, что ось OX направлена вертикально вниз, а значение координаты ***x =0*** соответствует положению нижнего конца недеформированной пружины.

3 Упражнения на использование связи между максимальными значениями смещения, скорости и ускорения

1 Гирька массой 0,3 кг, подвешенная на пружине жесткостью 15 Н/м, колеблется так, что ее максимальная скорость равна 2,8 см/с. Найдите амплитуду колебаний. Силами сопротивления пренебречь.

2 Максимальная скорость математического маятника при малых колебаниях v_{max}=5 см/с, период колебаний T = 1 с. Определите максимальный угол отклонения маятника от вертикали в процессе колебаний.

3 Шарик массой 50 г, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с амплитудой 10 см. Чему равна максимальная величина возвращающей силы (в мН), действующей на шарик, если циклическая частота колебаний 4 $с^{-1}$.

4 Точка совершает гармонические колебания вдоль прямой линии. При движении между крайними положениями средняя скорость оказалась равной v = 4 м/с. Найдите максимальную скорость.

5 Небольшое тело совершает гармонические колебания. Зная, что его максимальная скорость v_{max} = 9,42 м/с, найдите величину средней скорости тела за время, в течение которого оно перемещается из одного крайнего положения в другое.

Тест № 1 «Характеристики колебательного движения»

1 Составьте правильное утверждение

Свободные колебания – это колебания, происходящие под действием…

А) силы тяжести;

Б) силы упругости;

В) внутренней силы, возникающей в системе при выведении ее из положения равновесия;

Г) внешней периодически меняющейся силы.

2 Какое из перечисленных колебаний является свободным?

1) Колебание груза, подвешенного на нити, один раз отведенного от положения равновесия и отпущенного.

2) Колебание качелей, раскачиваемых человеком, стоящим на поверхности земли.

А) Только 1; Б) Только 2; В) и 1, и 2; Г) ни 1, ни 2.

3 Укажите тела, совершающие гармонические колебания

А) $x_1 = t \cdot \sin 4t$;

Б) $x_2 = 0,03 \cdot \cos\left(2\pi t + 0,5\right)$;

В) $v_{3x} = 6 \cdot \sin 8t$;

Г) $x_4 = 0,05 \cdot e^{-0,01t} \cdot \cos\left(2t + 0,5\pi\right)$;

Д) $x_5 = 0,1 \cdot \cos\left(20t^2 + \pi\right)$;

Е) $a_{6x} = 12 \sin 3t + 1$;

Ж) $v_{7x} = 5 \cdot \cos^2\left(10\pi t\right)$.

4 Продолжите утверждение

Гармонические колебания возникают в системе, если при выведении ее из положения равновесия появляется…

А) сила упругости, направленная к положению равновесия;

Б) сила тяжести и сила упругости, равнодействующая которых направлена к положению равновесия;

В) сила, направленная к положению равновесия, модуль которой прямо пропорционален координате тела. Такая сила называется квазиупругой.

5 Составьте правильные утверждения

Период колебаний – это…	
Частота колебаний – это..	

А) Время, в течение которого тело совершает колебательное движение;

Б) Число колебаний за определенное время;

В) Число колебаний за один период;

Г) Время, за которое тело совершает одно полное колебание;

Д) Число колебаний в единицу времени.

6 Какая часть периода требуется для того, чтобы тело, совершающее гармонические колебания, из положения равновесия первый раз пришло в крайнее положение?

А) Т/2; Б) Т/3; В) Т/4; Г) Т/6; Д) Т/12.

7 Выберите правильное утверждение.

Амплитуда колебаний – это…

А) путь, который проходит тело за период;

Б) расстояние между двумя крайними положениями колеблющегося тела;

В) максимальное растяжение пружины;

Г) максимальное отклонение тела от положения равновесия.

8 Составьте правильное утверждение

Циклическая частота – это …

А) время полного колебания;

Б) число колебаний за определенное время;

В) число колебаний за 2π секунды;

Г) число колебаний в единицу времени.

Циклическая частота связана с обычной частотой соотношением …

А) $\omega = \pi\nu$; Б) $\omega = 2\pi\nu$; В) $\omega = \dfrac{2\pi}{\nu}$; Г) $\omega = \dfrac{\pi}{\nu}$.

Циклическая частота зависит от …

А) размаха колебаний;

Б) энергии, сообщенной системе при выведении ее из положения равновесии;

В) параметров самой колебательной системы;

Г) способа выведения колебательной системы из положения равновесия.

9 Тело совершает гармонические колебания по закону $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$. Что называют фазой колебания?

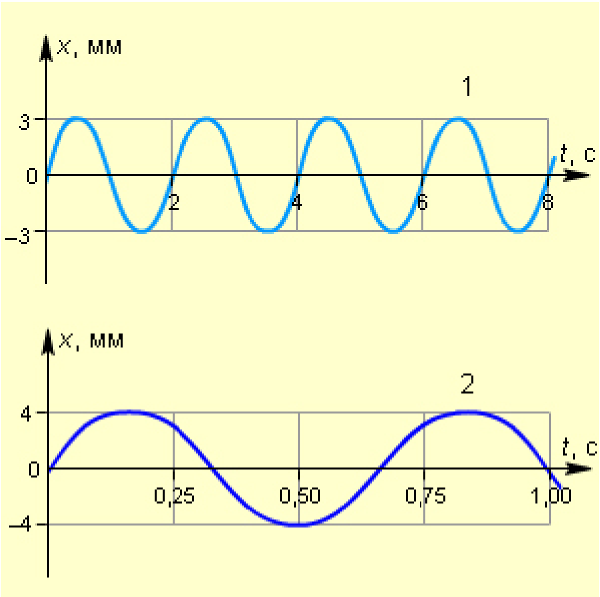
А) А; Б) ω; В) ωt; Г) $(\omega t + \varphi_0)$; Д) φ_0; Е) $\cos(\omega t + \phi_0)$.

10 За 5 секунд материальная точка совершает 10 гармонических колебаний. Чему равны частота и период колебаний?

А) Т = 0,5 с, ν = 2 Гц ; Б) Т = 2 с, ν = 0,5 Гц;

В) Т = 50 с, ν = 0,02 Гц ; Г) Т = 0,02 с, ν = 50 Гц.

11 На рисунке представлены графики двух колебательных процессов: ось X – время в секундах, ось Y – координата в миллиметрах. Выберите колебание с: максимальной амплитудой и максимальной частотой.



А) Максимальная амплитуда и частота у тела 1;

Б) Максимальная амплитуда и частота у тела 2;

В) Максимальная амплитуда – тело 1;

Максимальная частота – тело 2;

Г) Максимальная амплитуда – тело 2;

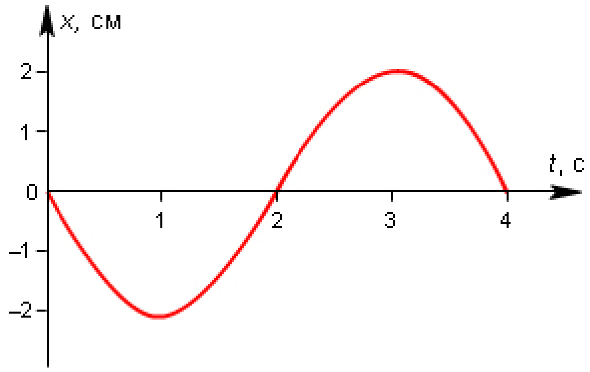
Максимальная частота – тело 1.

12 Координата колеблющегося тела изменяется по закону $x = 5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$.

Чему равна частота колебаний? Все величины выражены в единицах СИ.

А) ¼ Гц; Б) π/2 Гц; В) 2 Гц; Г) 4 Гц.

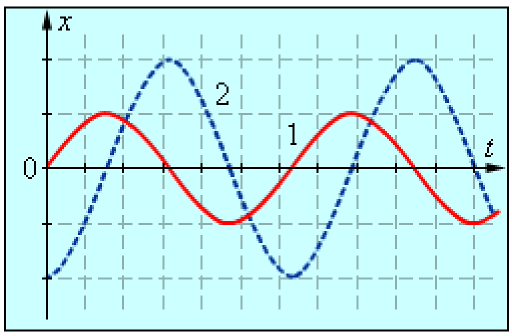
13 На рисунке показана зависимость координаты колеблющейся точки от времени. Чему равна частота колебаний скорости данной материальной точки?



А) 4 Гц; Б) 2 Гц;

В) 0,5 Гц ; Г) 0,25 Гц.

14 Два тела привели в колебательное движение. Зависимости координат тел от времени показаны на рисунке. Каким образом тела привели в колебательное движение?



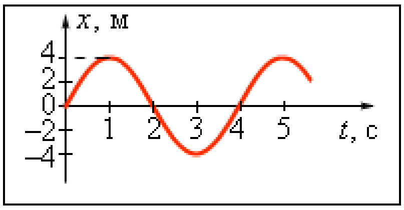
А) Оба тела отклонили от положения равновесия и отпустили без начальной скорости;

Б) Оба тела отклонили от положения равновесия и толчком сообщили скорость;

В) Первое тело толкнули в положении равновесия, второе тело отклонили от положения равновесия и отпустили;

Г) Второе тело толкнули в положении равновесия, первое тело отклонили от положения равновесия и отпустили.

15 Какое из уравнений описывает гармонические колебания, изображенные на рисунке?



А) $x(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$; Б) $x(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$;

В) $x(t) = 8\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$; Г) $x(t) = 4\sin\left(\frac{1}{4}t\right)$.

16 Три тела совершают гармонические колебания. Сравните фазы колебаний тел в производный момент времени.

$x_1(t) = 10 \cdot \cos(10t)$ см

$x_2(t) = 6 \cdot \cos(10t - \pi/3)$ см

$x_3(t) = 3{,}5 \cdot \cos(10t + \pi/3)$ см

А) $\varphi_1 = 10 > \varphi_2 = 6 > \varphi_3 = 3{,}5$;

Б) $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 10$;

Г) $\varphi_3 = \pi/3 > \varphi_1 = 0 > \varphi_2 = -\pi/3$;

Д) Третье тело опережает первое по фазе на $\pi/3$, второе тело отстает от первого по фазе на $\pi/3$.

Тест № 2 «Период колебаний маятника»

1 Груз, прикрепленный к пружине, совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости. Как изменится период колебаний груза, если его массу увеличить в 3 раза, а жесткость пружины уменьшить в 3 раза?

А) Увеличится в 3 раза; Б) Уменьшится в 3 раза;

В) Увеличится в 9 раз; Г) Уменьшится в 9 раз;

Д) Не изменится.

2 Две пружины жесткостью k каждая соединили параллельно и подвесили к ним груз массой m. Чему равна циклическая частота колебаний груза?

А) $\omega = \sqrt{\frac{2m}{k}}$; Б) $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$; В) $\omega = \sqrt{\frac{m}{2k}}$; Г) $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$.

3 Две пружины жесткостью k каждая соединили последовательно и подвесили к ним груз массой m. Чему равна циклическая частота колебаний груза?

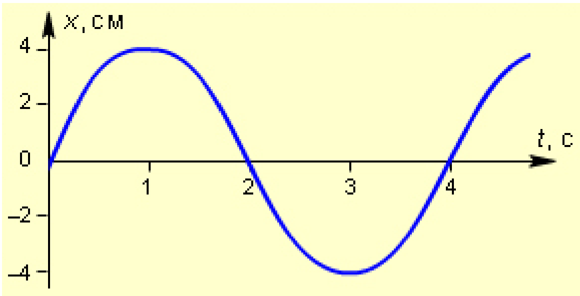
А) $\omega = \sqrt{\frac{2m}{k}}$; Б) $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$; В) $\omega = \sqrt{\frac{m}{2k}}$; Г) $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$.

4 Груз массой m_0 = 100 г, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с периодом T_0 = 4 с. К этому грузу подвесили еще

один груз массой m = 300 г. Определите период колебаний T' после подвешивания груза.

А) 16 с; Б) 12 с; В) 8 с; Г) 4 с.

5 На рисунке изображена зависимость координаты пружинного маятника от времени. Определите жесткость пружины маятника, если масса груза 4 кг.



А) 0,1 Н/м; Б) 0,41 Н/м; В) 9,8 Н/м; Г) 19,6 Н/м.

6 Всегда ли математический маятник совершает гармонические колебания, будучи отклоненным от положения равновесия?

А) всегда, если только выполнены условия, позволяющие считать маятник математическим (масса груза много больше массы подвеса, длина подвеса много больше размеров груза);

Б) не всегда, только при малых углах отклонения от положения равновесия $\alpha < 10^0$;

В) только при условии нахождения маятника в инерциальной системе отсчета;

Г) груз на подвесе в любом случае совершает гармонические колебания.

7 Как изменится период колебаний математического маятника, если его длина увеличится в 9 раз?

А) Увеличится в 3 раза; Б) Уменьшится в 3 раза;

В) Увеличится в 9 раз; Г) Уменьшится в 9 раз.

8 Чему будет равен период малых колебаний математического маятника, если его удалить от поверхности Земли на расстояние, равное трем земным радиусам? Период колебаний маятника на поверхности Земли равен 1 с.

А) 1,7 с; Б) 3 с; В) 4 с; Г) 16 с.

9 Шар массой m, подвешенный на тонкой нити длиной l, совершает колебания с периодом 1 с. Каким будет период колебаний шара с массой 4m на нити длиной 4l?

А) 1 с; Б) 2 с; В) 4 с; Г) 16 с.

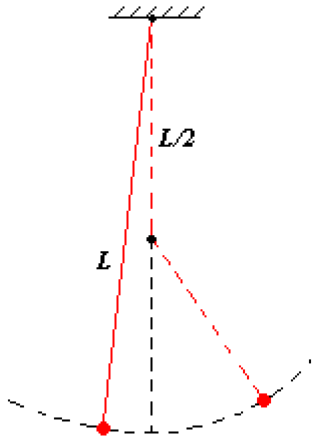
10 Пружинный маятник совершает гармонические колебания с амплитудой 20 см. Как изменится период колебаний этого маятника при уменьшении амплитуды колебаний до 10 см?

А) Увеличится в 2 раза; Б) Уменьшится в 2 раза;
В) Уменьшится в 1,41 раза; Г) Не изменится.

11 Как изменится период колебаний математического маятника, если амплитуду его колебаний уменьшить в 2 раза? Сопротивление воздуха отсутствует.

А) Уменьшится в 2 раза ; Б) Уменьшится в 1,41 раза;
В) Не изменится; Г) Ответ зависит от длины подвеса маятника.

12 Математический маятник длины L совершает колебания. На пути маятника вбили гвоздь так, как показано на рисунке. Каким стал период колебания маятника?



А) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$; Б) $T = \pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\left(1+\sqrt{2}\right)$;

В) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; Г) $T = \pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

13 Тяжелый однородный стержень колеблется, будучи закрепленным шарнирно за один из концов. Как изменится период колебаний стержня, если ость вращения будет проходить через его середину?

А) Увеличится в 2 раза; Б) Увеличится в 1, 41 раза;

В) Не изменится; Г) Маятник перестанет колебаться.

14 Тяжелый однородный стержень колеблется, будучи закрепленным шарнирно за один из концов. Как изменится период колебаний, если плотность материала, из которого изготовлен стержень, увеличить в 2 раза?

А) Уменьшится в 2 раза; Б) Уменьшится в 1,41 раза;

В) Не изменится; Г) Увеличится в 1,41 раза.

15 Тяжелый однородный стержень длиной L колеблется, будучи закрепленным шарнирно за один из концов. Какую длину должен иметь мате-

матический маятник, чтобы период его колебаний был равен периоду колебаний стержня?

А) L; Б) L/2; В) 2L/3; Г) 3L/2.

16 Как изменится частота колебаний физического маятника, если точку подвеса перенести в центр качания (точку, находящуюся ниже точки подвеса на расстоянии, равном приведенной длине маятника)?

А) Маятник перестанет колебаться; Б) Частота колебаний увеличится;

В) Частота колебаний уменьшится; Г) Частота колебаний не изменится.

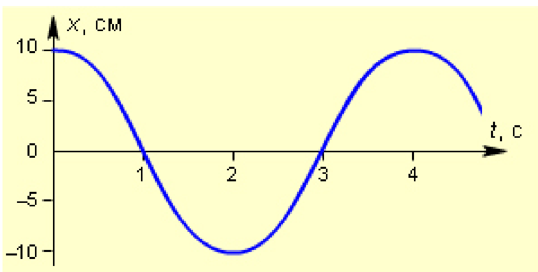
Тест № 3 «Динамика гармонических колебаний»

1 При гармонических колебаниях пружинного маятника с периодом 1 с и амплитудой 12 см тело достигло максимальной скорости. Чему равно в этот момент смещение тела относительно положения равновесия?

А) 0 см; Б) 12 см; В) – 12 см.

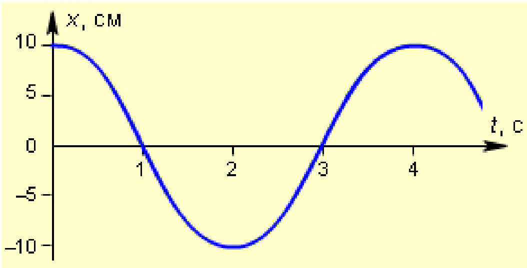
Г) Ответ дать не возможно, так как неизвестно, каким образом тело привели в колебательное движение.

2 На рисунке показана зависимость координаты колеблющегося тела от времени. Чему равна скорость тела через 1 с после начала колебаний?



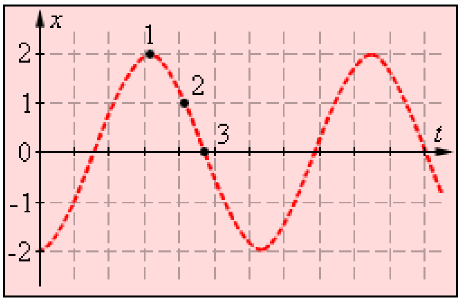
А) 0, 25 см/с; Б) 1,57 см/с; В) 6,4 см/с; Г) 15,7 см/с.

3 На рисунке показана зависимость координаты колеблющегося тела от времени. Чему равен модуль ускорение тела через 2 с после начала колебаний?



А) 0,41 см/с^2; Б) 2,46 см/с^2; В) 4,06 см/с^2; Г) 24,65 см/с^2.

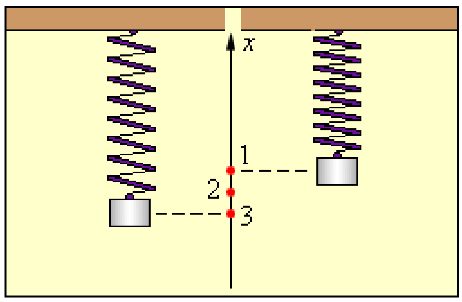
4 Материальная точка совершает гармонические колебания. В какой из моментов – 1, 2 или 3 достигаются максимальные значения: А) кинетической энергии; В) потенциальной энергии; С) ускорения (по модулю).



А А) 3, В) 1, С) 2; Б А) 2, В) 1, С) 3;

В А) 1, В) 3, С) 2; Г А) 3, В) 1, С) 1.

5 Груз, подвешенный на пружине, совершает свободные колебания между точками 1 и 3. В каких точках равнодействующая всех сил, приложенных к грузу, максимальна по модулю?



А) Только в точке 1; Б) Только в точке 2;

В) Только в точке 3; Г) В точках 1 и 3.

6 Груз массой 0,1 кг прикрепили к пружине школьного динамометра жесткостью 40 Н/м. В начальный момент времени пружина не деформирована. После того, как груз отпускают, возникают колебания. Чему равна максимальная скорость груза?

А) 0,25 м/с; Б) 0,5 м/с; В) 1 м/с; Г) 2 м/с.

7 Максимальное значение потенциальной энергии свободно колеблющегося маятника 8 Дж, а максимальное значение его кинетической энергии 8 Дж. В каких пределах изменяется его полная механическая энергия? Трением в системе пренебречь.

А) Не изменяется и равна 8 Дж;

Б) Не изменяется и равна 16 Дж;

В) Изменяется в пределах от 0 до 8 Дж;

Г) Изменяется в пределах от 0 до 16 Дж.

8 Тело, подвешенное на пружине, совершает гармонические колебания с частотой ν. С какой частотой происходит изменение полной механической энергии тела? Трением в системе пренебречь.

А) ν; Б) $\nu/2$; В) $2\,\nu$;

Г) Полная механическая энергия не изменяется.

Тест № 4 «Дифференциальное уравнение гармонических колебаний»

1 Для доказательства того, что в системе происходят гармонические колебания, необходимо получить дифференциальное уравнение вида:

А) $x' = -\omega^2 \cdot x$; Б) $x'' = \omega^2 \cdot x$;

В) $x = -\omega^2 \cdot x''$; Г) $x'' = -\omega^2 \cdot x$.

где x - координата тела, являющаяся функцией от времени $x = x(t)$

2 Составьте правильное утверждение

Для нахождения циклической частоты гармонических колебаний, совершаемых какой-либо системой, необходимо…

А) воспользоваться справочником или учебником;

Б) построить аналогию с пружинным маятником и заменить жесткость пружины и массу груза в выражении $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ на соответствующие величины, характеризующие рассматриваемую колебательную систему;

В) получить для рассматриваемой колебательной системы дифференциальное уравнение вида $x'' = -Cx$, где С – положительная константа. Циклическая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{C}$;

Г) получить для рассматриваемой колебательной системы дифференциальное уравнение вида $x = -Cx''$, где С – положительная константа. Циклическая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{C}$.

3 Составьте правильное утверждение

Для нахождения периода гармонических колебаний, совершаемых какой-либо системой, необходимо…

А) воспользоваться справочником или учебником;

Б) построить аналогию с пружинным маятником и заменить жесткость пружины и массу груза в выражении $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ на соответствующие величины, характеризующие рассматриваемую колебательную систему;

В) получить для рассматриваемой колебательной системы дифференциальное уравнение вида $x'' = -Cx$, где С – положительная константа. Из уравнения находим циклическую частоту колебаний $\omega = \sqrt{C}$ и период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

Г) получить для рассматриваемой колебательной системы дифференциальное уравнение вида $x = -Cx''$, где С – положительная константа. Из уравнения находим циклическую частоту колебаний $\omega = \sqrt{C}$ и период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

4 Составьте правильное утверждение

Период свободных (или собственных) гармонических колебаний, совершаемых колебательной системой, зависит от…

А) способа выведения системы из положения равновесия;

Б) энергии, сообщенной системе при выведении ее из положения равновесия;

В) параметров самой колебательной системы;

Г) энергии, сообщенной системе при выведении ее из положения равновесия, и параметров самой колебательной системы.

5 При решении задачи отличник Женя Петров получил уравнение $y'' = -\frac{4\pi G\rho}{3} \cdot y$, где у – это координата тела. Какова циклическая частота гармонических колебаний, совершаемых телом?

А) полученное уравнение не является дифференциальным уравнением гармонических колебаний;

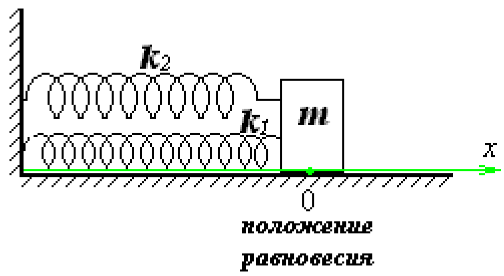
Б) $\omega = \frac{4\pi G\rho}{3}$; В) $\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3} \cdot y}$; Г) $\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}$.

6 При решении задачи получено дифференциальное уравнение $mx'' = -\frac{\mu mg}{L} x$, где x – координата тела. Как выглядит уравнение движения этого тела?

А) $x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$; Б) $x(t) = \frac{\mu g}{L} \cdot t$;

В) $x(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{\mu mg}{L}} \cdot t + \varphi_0\right)$; Г) $x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\mu g}{L}} \cdot t + \varphi_0\right)$.

7 Колебательная система состоит из груза массы m и двух пружин жесткостями k_1 и k_2. В положении равновесия первая пружина растянута, вторая сжата. Какое дифференциальное уравнение описывает колебания системы? Поверхность стола гладкая.

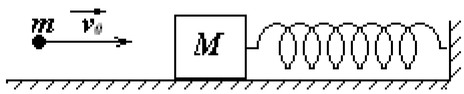


А) $mx'' = -(k_1 - k_2)x$; Б) $mx'' = -(k_2 - k_1)x$;

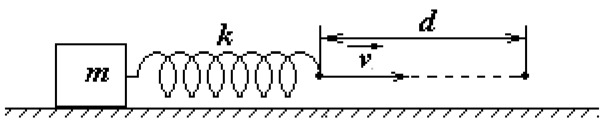
В) $mx'' = (k_1 + k_2)x$; Г) $mx'' = -(k_1 + k_2)x$.

Динамика колебательного движения

1 На горизонтальной пружине укреплено тело массы M = 10 кг, лежащее на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нем пуля массы m = 10 г, летящая со скоростью v = 500 м/с, направленной вдоль оси пружины. Амплитуда возникших при этом колебаний A = 0,1 м. Определите период возникших колебаний T.



2 К одному концу первоначально недеформированной и неподвижной пружины жесткости k прикреплен груз массы m. Свободный конец пружины стали тянуть с постоянной скоростью, как показано на рисунке, пока он не переместился на расстояние d. Затем его резко остановили. При какой скорости этого конца пружины груз после остановки не будет колебаться?



3 Чашка пружинных весов массы m совершает гармонические колебания с амплитудой A. В некоторый момент времени на нее положили (без начальной скорости) груз массой M. В результате колебания прекратились. Определите первоначальный период колебаний T.

4 Точку подвеса математического маятника длины L мгновенно приводят в движение в горизонтальном направлении с постоянной скоростью v, затем, после того, как она переместилась на расстояние S, мгновенно останавливают. При каком значении скорости v колебания маятника, возникшие с началом движения, прекратятся сразу же после остановки? Перед началом движения маятник покоился. Колебания маятника считать малыми.

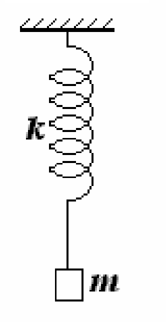
5 Горизонтальная подставка совершает в вертикальном направлении гармонические колебания с амплитудой A. Какой должна быть циклическая частота ω этих колебаний, чтобы лежащий на подставке предмет не отделялся от нее?

6 Одна из обкладок незаряженного плоского конденсатора площади S подвешена на пружине, вторая обкладка закреплена неподвижно. Расстояние между пластинами в начальный момент равно L_0. Конденсатор на короткое время подключили к батарее, и он зарядился до напряжения U. Какой должна быть жесткость пружины k, чтобы не произошло качания пластин в результате их взаимного притяжения после зарядки?

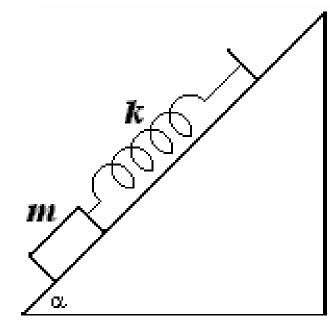
Составление дифференциального уравнения гармонических колебаний и нахождение периода малых колебаний

1 Используем второй закон динамики Ньютона (для поступательного движения).

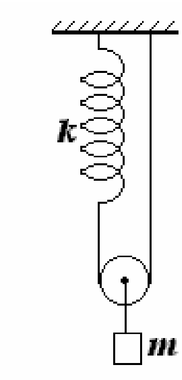
Помним, что при решении координата груза (отсчитываемая, кстати, от положения равновесия) не всегда равна удлинению пружины!!



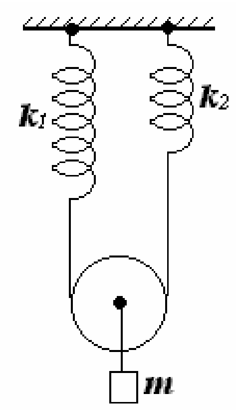
Задача 1



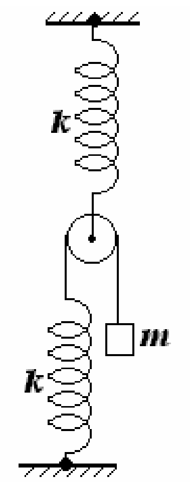
Задача 2



Задача 3*



Задача 4**



Задача 5**

Указания к решению задач

Задача 1 - очень просто! Не забудьте, что в процессе движения на груз действует не только пружина. В положении равновесия пружина деформирована, значит, координата груза и величина деформации пружины численно не совпадают.

Задача 2 - после первой задачи разобраться в этой ситуации не сложно. Действуем так же.

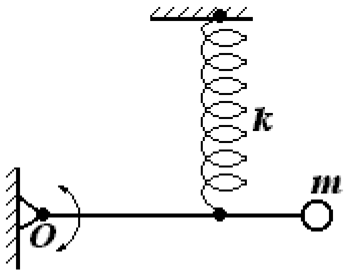
Задача 3 – (МФТИ) -казалось бы, что изменилось в сравнении с первой ситуацией! Пружина и нерастяжимый трос по-прежнему невесомы. Просто добавился невесомый блок. Физика существенно изменилась!

Вспомните не только кинематические, но и динамические связи!

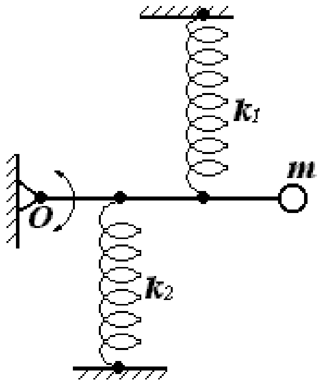
Задача 4 – (МГУ) – пружин стало две, а нить по-прежнему невесома. Подумайте, как соединены между собой пружины, каковы силы упругости, возникшие в них. Ну и, конечно, не забудьте кинематические и динамические связи.

Задача 5 - эта задача предлагалась на окружной олимпиаде. Конечно, не просто не забыть обо всем…

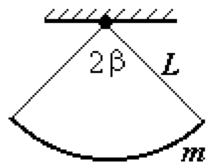
2 Используем второй закон динамики вращательного движения



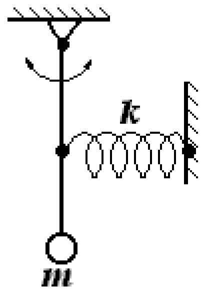
Задача 1



Задача 2



Задача 3



Задача 4

Задача 1 - Жестко соединенная конструкция из легкого стержня и небольшого по размерам шарика массой $\boldsymbol{m}$ может совершать колебания в вертикальной плоскости под действием пружины $\boldsymbol{k}$, двигаясь при вращении без трения вокруг горизонтальной оси О. Пружина легкая, точка прикрепления ее к стержню делит его длину в отношении 1:2, считая от шарика. В положении равновесия шарик горизонтален, а ось пружины вертикальна. Найдите удлинение пружины в положении равновесия системы. Найдите период малых колебаний конструкции.

Задача 2 - Жестко соединенная конструкция из легкого стержня и небольшого по размерам шарика массой $\boldsymbol{m}$ может совершать колебания под действием двух пружин жесткостью $\boldsymbol{k_1}$ и $\boldsymbol{k_2}$, двигаясь при вращении без трения вокруг вертикальной оси О по гладкой поверхности стола. Пружины легкие, их оси горизонтальны, а точки прикрепления их к стержню делят его на три равные части. В положении равновесия оси пружин перпендикулярны стержню, и пружина жесткостью $\boldsymbol{k_1}$ растянута на величину $\boldsymbol{L_1}$. Найдите деформацию второй пружины в положении равновесия. Найдите период малых колебаний конструкции.

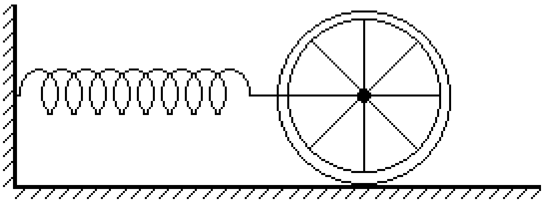
Задача 3 - Металлический прут в форме дуги окружности радиусом $\boldsymbol{L}$ висит на двух легких нитях длиной $\boldsymbol{L}$ каждая. Масса прута равна $\boldsymbol{m}$, его поперечное сечение постоянно. Угол между нитями 2β. Найдите силу натяжения нитей в положении равновесия. Найдите период малых колебаний такой «дуги» в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью «дуги».

Задача 4 - Как изменится частота колебаний математического маятника, представляющего собой груз на легкой пружине, если к середине стрежня прикрепить горизонтальную пружину жесткости $\boldsymbol{k}$?

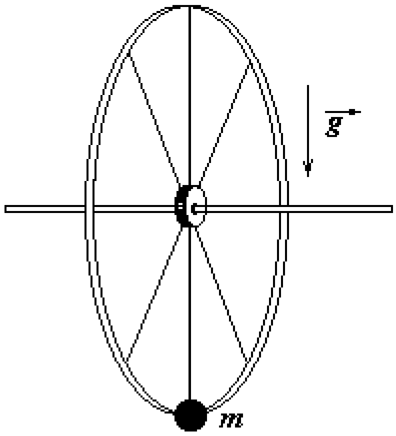
3 Дифференцируем закон сохранения механической энергии

Задача 1 - Получите дифференциальное уравнение гармонических колебаний для уже исследованных и знакомых Вам колебательных систем: горизонтального и вертикального пружинного маятников, математического маятника. Убедитесь в том, что в рассматриваемых ситуациях это равноценный математический прием.

Задача 2 - Пружина жесткостью $\boldsymbol{k}$ одним концом присоединена к оси колеса массы $\boldsymbol{m}$, которое способно катиться без проскальзывания, а другим концом присоединена к стенке. Какова частота колебаний системы? Масса колеса однородно распределена по ободу.



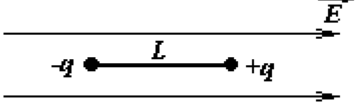
Задача 3 - К ободу колеса с горизонтально расположенной осью прикрепили грузик массы m. Найдите массу колеса, предполагая ее однородно распределенной по ободу, если частота малых колебаний колеса с грузиком вокруг оси равна Ω, а его радиус равен R. (МГУ)

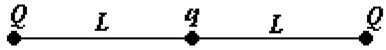


Задача 4 - Найдите частоту колебаний тонкого обруча радиуса R, подвешенного на гвозде. Проскальзывания нет; колебания происходят в плоскости обруча.

Колебательные системы

1 Жесткий диполь, длина которого $\boldsymbol{L}$ и концевые заряды $\boldsymbol{q}$, помещен в однородное электрическое поле напряженностью $\boldsymbol{E}$. Определите период малых колебаний диполя в электрическом поле. Масса каждого из концевых зарядов $\boldsymbol{m}$.

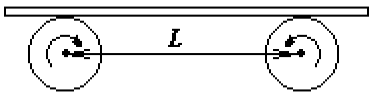




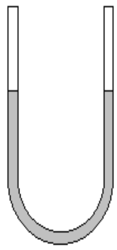
2 Бусинка массой $\boldsymbol{m}$ с зарядом $\boldsymbol{q}$ может двигаться без трения по натянутой нити длины $\boldsymbol{2L}$, на концах которой закреплены заряды $\boldsymbol{Q}$. Найдите период малых колебаний бусинки относительно положения равновесия.

3 В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд $\boldsymbol{q}$, равный по модулю заряду электрона, равномерно распределен внутри шара радиусом $\boldsymbol{R}$. Чему равен период колебаний (внутри шара, вдоль его диаметра) электрона, помещенного в такой шар? Масса электрона $\boldsymbol{m}$.

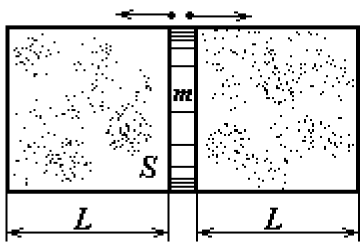
4 Доска массы $\boldsymbol{m}$ лежит на двух катках, вращающихся с большой угловой скоростью навстречу друг другу. Расстояние между осями катков $\boldsymbol{L}$, коэффициент трения скольжения доски по катку μ. Найдите частоту продольных колебаний доски.



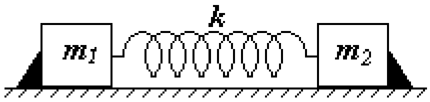
5 Определите период малых колебаний ртути массы $\boldsymbol{m}$ = 200 г, налитой в U-образную трубку сечения $\boldsymbol{S}$ = 0,50 см^2. Плотность ртути ρ = 13,6·10 кг/м^3.



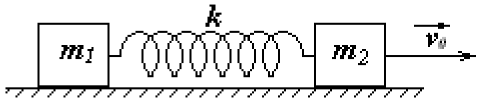
6 Найдите период малых колебаний поршня массы $\boldsymbol{m}$, разделяющего гладкий горизонтальный цилиндрический сосуд сечения $\boldsymbol{S}$ на две части длины $\boldsymbol{L}$ каждая. По обе стороны поршня находится га при давлении $\boldsymbol{p_0}$ и температуре $\boldsymbol{T_0}$. При колебании поршня температура газа не меняется.



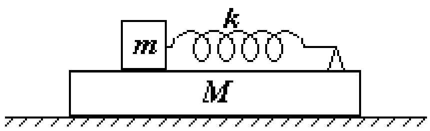
7 Два грузика, скрепленные пружиной жесткости k, находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Пружину сжимают и удерживают в деформированном состоянии двумя упорами. Упоры убирают.. Найдите период колебаний, которые возникнут в системе.



8 Два грузика, скрепленные пружиной жесткости k, находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Пружина не деформирована. Толчком одному из грузов сообщают скорость v_0. Опишите дальнейшее поведение системы. Найдите максимальную деформацию пружины.

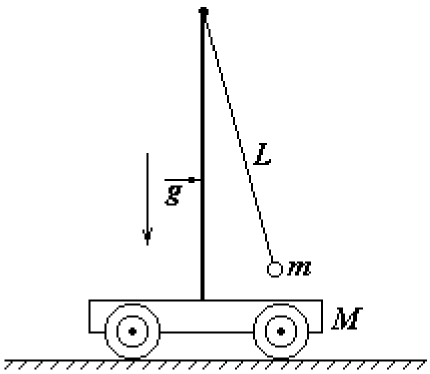


9 Тело массы m скреплено пружиной жесткости k с бруском массы M. Пружину сжимают, удерживая тела в неподвижном состоянии, а затем освобождают. Определите периоды колебаний T_1 и T_2 тела и бруска.

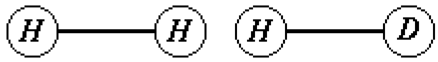


10 На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массы M с установленным на ней математическим маятником длины L и массы m. Найдите период колебаний системы.

11 Найдите отношение частот колебаний молекулы H_2 и молекулы HD (D – атом дейтерия).

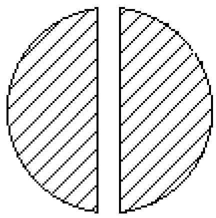


12 В системе из задачи 1 убирают один из упоров (допустим, правый). Как будет зависеть от времени величина деформации пружины? Начальная деформация пружины ΔL.

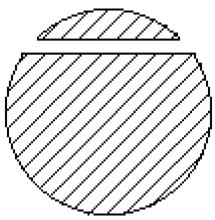


Задачи, сводимые к колебаниям

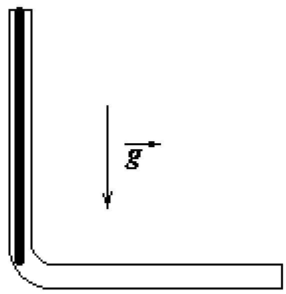
1 Определите время полета камня от одного полюса Земли до другого по прямому тоннелю, прорытому через ее центр. Плотность Земли считать постоянной, ее радиус – равным 6400 кг/м^3.



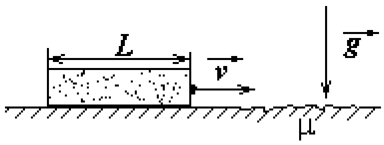
2 В Земле прорыт сплошной тоннель, не проходящий через ее центр. Определите время движения поезда с выключенными двигателями по такому тоннелю, если влиянием вращения Земли на движение поезда и трением пренебречь.



3 Гладкую однородную веревку длины L удерживают в вертикальном колене изогнутой трубы так, что ее нижний конец касается горизонтальной части трубы. Веревку отпускают. Через какое время она полностью окажется в горизонтальном колене? Трением пренебречь. Как изменится это время, если вначале часть веревки уже находилась в горизонтальном колене?



4 По гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v скользит тонкий однородный брусок длины L. Брусок наезжает на обширный шероховатый участок плоскости. Через какое время брусок остановится, если коэффициент трения равен μ ?



Глава 2 Маятники в постоянных силовых полях

§1 Пружинный маятник в постоянном силовом поле

Пружинный маятник (груз, прикрепленный к пружине) совершенно не обязательно должен совершать колебания вдоль горизонтальной поверхности. Можно закрепить пружину вертикально и подвесить к ней груз. При выведении груза из положения равновесия, мы будем наблюдать колебательное движение.

Что изменилось в колебательной системе в этом случае? В нее добавилась Земля! Теперь на груз в любой точке траектории кроме силы упругости действует еще и сила тяжести. Кстати, она в любой точке траектории неизменна, тогда как модуль и направление силы упругости пружины изменяются в зависимости от деформации пружины. Можно сказать, что теперь маятник совершает колебания в постоянном силовом поле – поле силы тяжести.

Совершенно не обязательно, чтобы роль постоянного силового поля играло поле силы тяжести. Можно придумать множество других ситуаций, когда маятник оказывается в постоянных силовых полях.

Пример1 - Пружинный маятник колеблется вдоль поверхности наклонной плоскости. Роль постоянной силы, действующей на груз, играет касательная проекция силы тяжести.

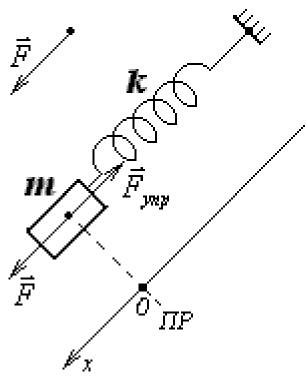
Пример 2 - Груз имеет электрический заряд и находится в однородном электрическом поле. Постоянная сила – это электрическая сила.

Пример 3 - Груз на пружине опущен в жидкость (пусть ее вязкостью можно пренебречь). Если только груз полностью погружен в жидкость, то на маятник действует постоянная выталкивающая сила.

Пример 4 - Пружинный маятник находится в НИСО, движущейся с постоянным ускорением. Рассматривая поведение маятника в этой НИСО, замечаем, что на груз действует постоянная сила инерции.

Примеры можно продолжить. Для нас важно ответить на вопрос: что изменится в поведении пружинного маятника при внесении его в постоянное силовое поле? Существуют ли какие-либо общие закономерности для колебания пружинного маятника в постоянных силовых полях или каждая конкретная ситуация исключительна?

Попробуем рассмотреть поведение маятника в некотором постоянном поле силы $\vec{F}$ (ее природа может быть любой).



Очевидно, что в положении равновесия равнодействующая сил, приложенных к грузу, должна быть равной нулю:

$$\vec{F} + \vec{F}_{упр} = 0$$
$$\vec{F}_{упр} = -\vec{F}.$$

В положении равновесия сила упругости должна уравновешивать внешнюю постоянную силу. А поскольку сила упругости всегда направлена вдоль пружины, то она (пружина) должна расположиться вдоль линии действия постоянной силы. Кроме того, в положении равновесия пружина оказывается деформированной, ее удлинение

$$\Delta l_0 = \frac{F_{упр}}{k} = \frac{F}{k}.$$

Очевидно, колебания будут происходить вдоль линии действия постоянной силы $\vec{F}$. Запишем второй закон Ньютона для нашей колебательной системы:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{упр}$$
$$ma_x = F - k\Delta l$$
$$mx'' = F - k(\Delta l_0 + x)$$
$$mx'' = F - k\Delta l_0 - kx$$
$$x'' = -\frac{k}{m}x.$$

Получили уже знакомое нам уравнение гармонических колебаний. Видно, что циклическая частота колебаний осталась неизменной. Следовательно, ***при помещении пружинного маятника в постоянное силовое поле любой природы период его колебаний остается неизменным, изменяется лишь положение равновесия и направление, в котором будут происходить колебания.***

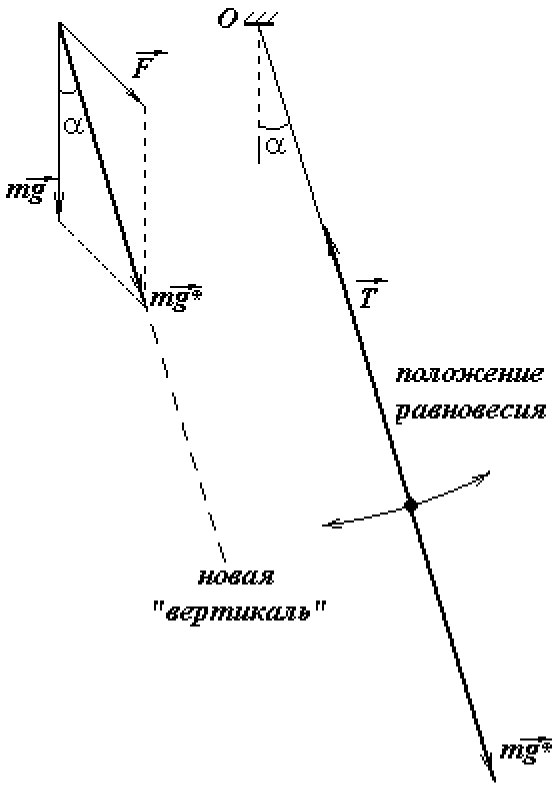
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

§2 Математический маятник в постоянном силовом поле

Мы исследовали поведение пружинного маятника в постоянном силовом поле. Зададим тот же вопрос для математического маятника: как изменяется его поведение в постоянном силовом поле?

Попробуем отыскать закономерности в поведении маятника, не вникая в природу постоянного силового поля. Просто в каждой точке траектории на груз кроме силы тяжести действует некая постоянная сила $\vec{F}$. Будем считать, что нить маятника может свободно вращаться вокруг точки закрепления и, следовательно, занимать любое положение в пространстве.

Очевидно, что найдется такое положение, для которого равнодействующая всех приложенных к грузу сил будет равна нулю – это будет положение равновесия.



$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = 0$$

$$m\left(\vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}\right) + \vec{T} = 0.$$

В скобках стоит постоянная величина, имеющая размерность ускорения.

$$\vec{g}^* = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}.$$

Назовем эту величину напряженностью эффективного силового поля.

Тогда,

$$m\vec{g}\,^* + \vec{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = -m\vec{g}\,^*.$$

Поскольку сила натяжения нити всегда направлена вдоль нити, в положении равновесия она расположится параллельно вектору напряженности эффективного силового поля $\vec{g}\,^*$. Этот вектор по существу задает положение новой «вертикали», вдоль которой располагается нить маятника в положении равновесия. При выведении из положения равновесия маятник будет колебаться, но теперь уже относительно новой вертикали.

Для нахождения периода колебаний необходимо найти циклическую частоту. Сделать это возможно, получив уравнение гармонических колебаний. Очевидно, что с математической точки зрения мы получили известную задачу, решение которой нами уже найдено ранее. Разница лишь в том, что вместо вектора ускорения свободного падения в выражениях для циклической частоты и периода будет присутствовать вектор напряженности эффективного силового поля.

$$\omega = \sqrt{\frac{g^*}{l}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}}.$$

Итак, при попадании математического маятника в постоянное силовое поле у него

- *изменяется положение равновесия (нить располагается вдоль вектора напряженности эффективного силового поля;*
- *изменяется период колебаний.*

Важно помнить, что роль постоянной силы может играть сила инерции, действующая на маятник в НИСО. В этом случае

$$\vec{F}_{инерции} = -m\vec{a}$$

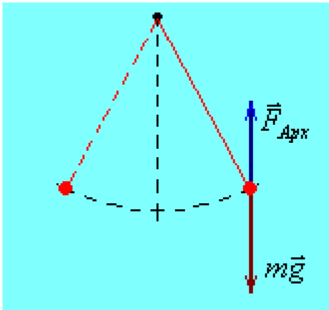
$$\vec{g}^* = \vec{g} + \frac{\vec{F}_{инерции}}{m} = \vec{g} + \frac{-m\vec{a}}{m} = \vec{g} - \vec{a}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\vec{g} - \vec{a}|}}.$$

§ 3 Примеры решения задач

Задача 1 Математический маятник в невязкой жидкости

Определите период малых колебаний математического маятника длины $\boldsymbol{L}$ = 20 см, если он находится в жидкости с плотностью в $\boldsymbol{n}$ = 3 раза меньшей плотности материала шарика. Сопротивление жидкости пренебрежимо мало.



Решение:

1 Маятник находится в постоянном силовом поле – в каждой точке траектории на него кроме силы тяжести действует выталкивающая сила $\vec{F}_{Арх}$, модуль которой $F_{Арх} = \rho_{жидк} gV = \frac{\rho_{шарика}}{3} gV = \frac{mg}{3}$.

2 Напряженность эффективного силового поля $\vec{g}^* = \vec{g} + \frac{\vec{F}_{Арх}}{m}$ направлена вниз и численно равна $g^* = g - \frac{F_{Арх}}{m} = \frac{2g}{3}$.

3 Период колебаний маятника в постоянном силовом поле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{3l}{2g}}$.

$T = 1{,}1$ с.

Задача 2 Отставание маятниковых часов

Одно из самых высоких мест на Земле, где живут люди, - монастырь в Гималаях – находится на высоте 5200 м над уровнем моря. На сколько будут отставать за сутки маятниковые часы в этом монастыре, если их выверили на уровне моря? Радиус Земли 6400 км.

Решение:

1 «Правильный» период маятниковых часов на уровне моря $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$.

2 Период часов на высоте 5200 м $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

3 За сутки «неправильные» часы делают $N = \frac{t_0}{T}$ колебаний, где $t_0 = 24$ часа. Показания часов после N колебаний будут равны $t = N \cdot T_0 = \frac{t_0}{T} \cdot T_0$, ибо часы проградуированы в «правильных» периодах.

4 Отставание часов

$$t_0 - t = t_0 - \frac{t_0}{T} \cdot T_0 = t_0 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) = t_0 \left(1 - \sqrt{\frac{g}{g_0}}\right) = t_0 \left(1 - \sqrt{\frac{R^2}{(R+h)^2}}\right) = t_0 \frac{h}{R+h},$$

$t_0 - t = 70$ с.

Задача 3 Полная энергия вертикального пружинного маятника

Небольшой шарик, подвешенный на легкой пружине, совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой 2 см. Полная энергия колебаний 0,3 мДж. При каком смещении от положения равновесия на шарик действует возвращающая сила 22,5 мН?

Решение:

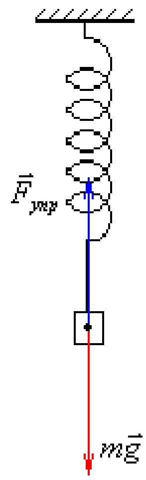
1 В процессе колебаний на шарик действуют две силы – тяжести и упругости. Поэтому потенциальная энергия системы будет складываться из потенциальной энергии груза в поле тяготения $\frac{mv^2}{2}$ и потенциальной энергии упруго деформированной пружины $\frac{k\Delta l^2}{2}$, где Δl - величина деформации пружины.

Полная механическая энергия системы, сохраняющаяся в процессе движения маятника, имеет вид:

$$mgh + \frac{k\Delta l^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = const.$$

2 Абсолютное значение потенциальной энергии в поле тяготения mgh может быть различным – оно зависит от выбора нулевого уровня для отсчета высоты h. Соответственно полная механическая энергия системы может принимать любые значения, зависящие от выбора нулевого уровня для отсчета высоты h. О какой энергии в 0,3 мДж идет речь в задаче?

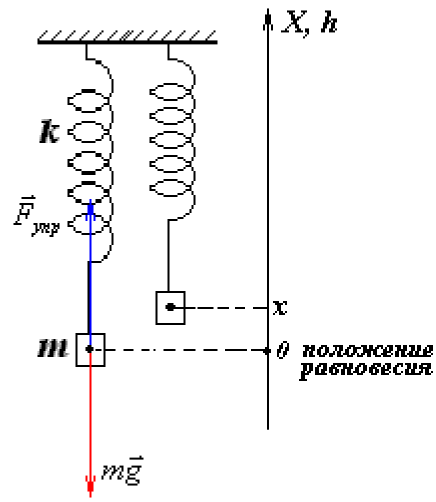
3 В положении равновесия сила упругости уравновешивает силу тяжести



$$m\vec{g} + \vec{F}_{упр} = 0$$
$$mg = k\Delta l_0,$$

где Δl_0 - величина растяжения пружины в положении равновесия.

4 Введем систему отсчета, направив координатную ось вертикально вверх. Ноль на оси OX поставим в положении равновесия груза. Нулевой уровень для отсчета высоты h тоже выберем в положении равновесия. При таком выборе нулевого уровня координата груза x и высота h будут совпадать x = h.



5 Выведем маятник из положения равновесия, сместив его в положительном направлении оси OX.

Полная механическая энергия системы в этом случае равна:

$$mgh + \frac{k\Delta l^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = const$$

$$mgx + \frac{k(\Delta l_0 - x)^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = const,$$

где $\Delta l = (\Delta l_0 - x)$ - растяжение пружины в рассматриваемом положении.

После преобразований получаем:

$$mgx + \frac{k(\Delta l_0 - x)^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = const,$$

$$mgx + \frac{k\Delta l_0^2}{2} - k\Delta l_0 x + \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = const,$$

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + x(mg - k\Delta l_0) + \frac{k\Delta l_0^2}{2} = const,$$

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta l_0^2}{2} = const.$$

Поскольку величина $\frac{k\Delta l_0^2}{2}$ постоянна, то сумма $\left(\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right)$ тоже постоянна с течением времени, хотя отдельные ее слагаемые постоянно изменяются.

Сумму $\left(\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right)$ называют энергией колебаний вертикального пружинного маятника. По своему виду эта величина совпадает с полной энергией горизонтального пружинного маятника $\frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta l^2}{2} = const$. Однако, если для горизонтального маятника величина $\frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$ является потенциальной энергией упруго деформированной пружины, то для вертикального маятника величина $\frac{kx^2}{2}$ потенциальной энергией пружины уже не является, ибо деформация пружины Δl и координата груза x теперь не совпадают $\Delta l \neq x$.

6 В крайнем положении груз останавливается, следовательно, $E = \frac{kA^2}{2}$. Находим жесткость пружины $k = \frac{2E}{A^2}$.

7 Возвращающая квазиупругая сила имеет вид

$$F = -kx,$$

где x – координата груза. Тогда координата груза равна $x = \pm\frac{FA^2}{2E}$. Два ответа означают, что в двух симметричных относительно положения равновесия точках возвращающая сила по модулю равна 22,5 мН. Их направления, естественно, противоположны.

x = 1,5 см.

§ 4 Задания для самостоятельного решения

Тест «Маятники в постоянных силовых полях и НИСО»

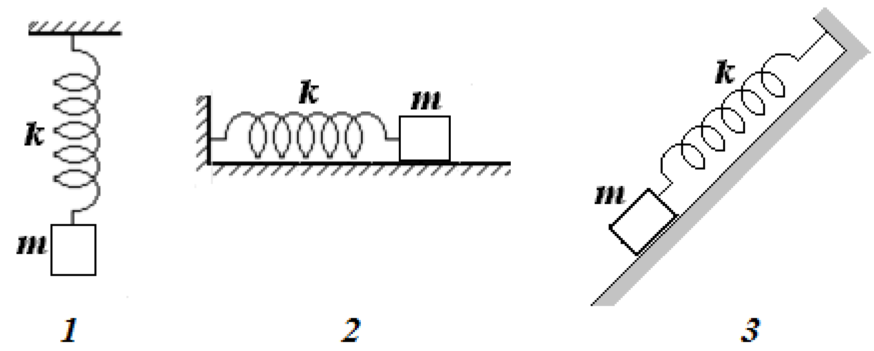
1 Вертикальный пружинный маятник состоит из груза массы m и пружины жесткостью k. Чему равна деформация пружины в положении равновесия маятника?

А) $\frac{mg}{k}$; Б) $\frac{2mg}{k}$; В) $\frac{mg}{2k}$; Г) 0.

2 Груз массы m прикрепили к пружине жесткостью k и удерживают так, чтобы пружина оставалась в недеформированном состоянии. Груз без толчка отпускают. Чему равна амплитуда возникших колебаний?

А) $\frac{mg}{k}$; Б) $\frac{2mg}{k}$; В) $\frac{mg}{2k}$; Г) Колебания не возникнут.

3 Какой из маятников колеблется с наибольшей частотой?



А) 1; Б) 2; В) 3; Г) Частота колебаний всех маятников одинакова.

4 Вертикальный пружинный маятник находится в неподвижном лифте. Как изменится период колебаний маятника, если лифт начнет разгоняться вверх?

А) Увеличится;

Б) Уменьшится;

В) Останется неизменным;

Г) Ответ зависит от величины ускорения, с которым движется лифт.

5 Идеальный пружинный маятник колеблется на горизонтальной гладкой поверхности. Как изменится период колебаний маятника, если поверхность будет шероховатой?

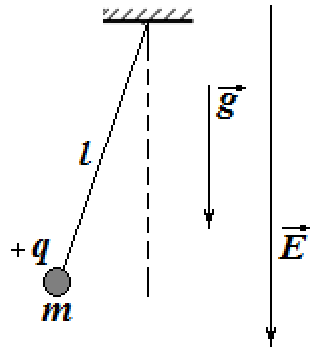
А) Увеличится;

Б) Уменьшится;

В) Останется неизменным;

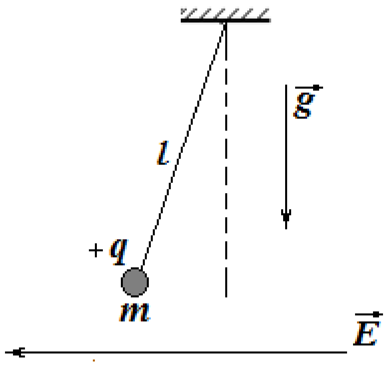
Г) Ответ зависит от массы груза, жесткости пружины и коэффициента трения

6 Чему равен период колебаний математического маятника, расположенного в вертикальном однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E}$? Груз маятника заряжен положительно.



А) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; Б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+\dfrac{qE}{m}}}$; В) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-\dfrac{qE}{m}}}$; Г) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{lm}{qE}}$.

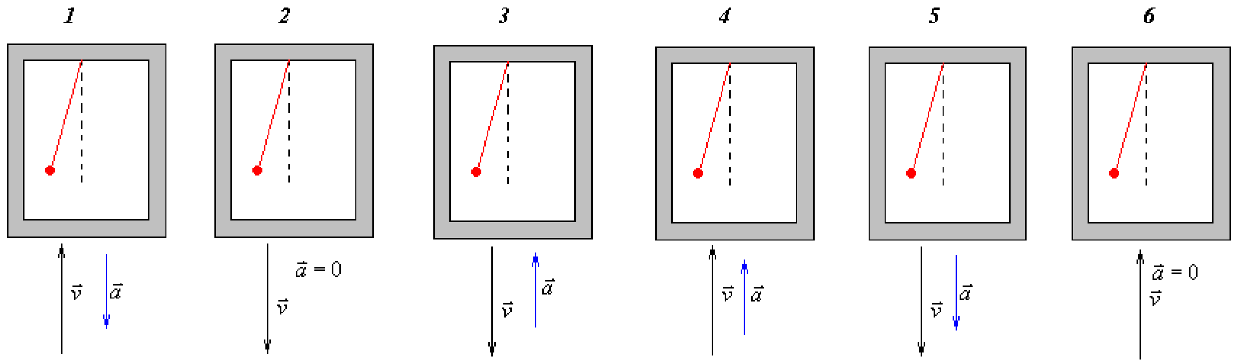
7 Чему равен период колебаний математического маятника, расположенного в однородном горизонтальном электрическом поле напряженностью $\vec{E}$?



А) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; Б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+\dfrac{qE}{m}}}$; В) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+\left(\dfrac{qE}{m}\right)^2}}}$;

Г) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{lm}{qE}}$.

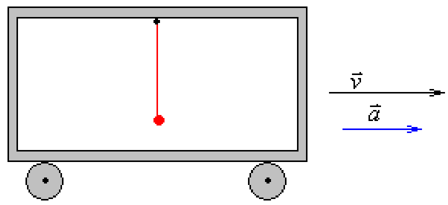
8 Математический маятник находится в лифте. Как рассчитать период колебаний маятника в следующих ситуациях?

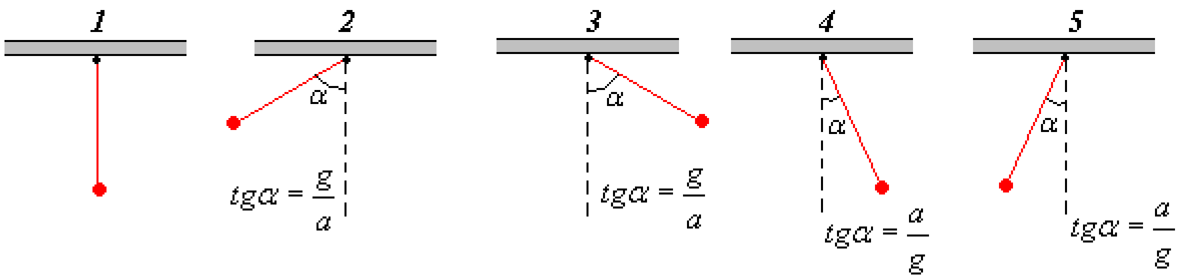


А) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; Б) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}}$; В) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$.

1	2	3	4	5	6

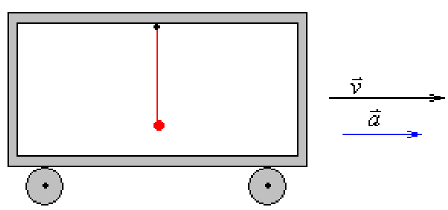
9 Математический маятник длиной l находится в вагоне поезда, разгоняющегося с ускорением $\vec{a}$. Как располагается нить маятника в положении равновесия?





А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4; Д) 5.

10 Математический маятник длиной l находится в вагоне поезда, разгоняющегося с ускорением $\vec{a}$. Чему равен период колебаний маятника?

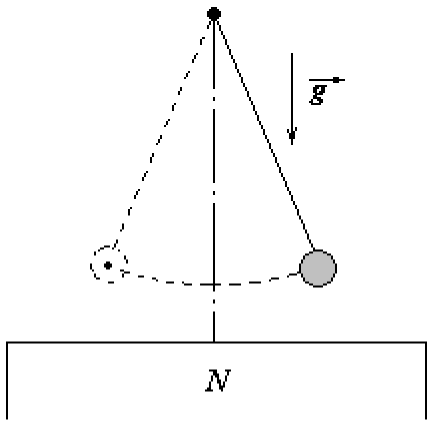


А) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}}$; Б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$; В) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g^2+a^2}}$; Г) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g^2-a^2}}$.

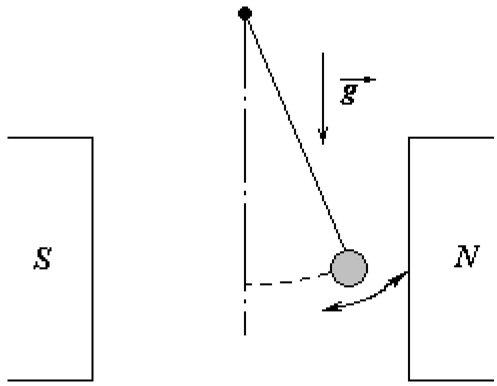
Задачи

1 Определите период малых колебаний математического маятника длины $\boldsymbol{L}$ = 20 см, если он находится в жидкости с плотностью в $\boldsymbol{n}$ = 3 раза меньшей плотности материала шарика. Сопротивление жидкости пренебрежимо мало.

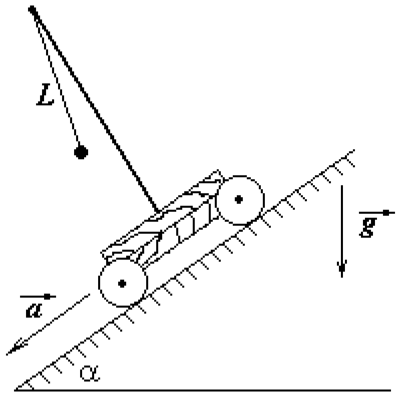
2 Математический маятник – железный шарик массы m, висящий на длинной нити, - имеет период $\boldsymbol{T_0}$. В присутствии магнита, расположенного чуть ниже шарика, период колебаний стал $\boldsymbol{T}$. Определите действующую на шарик магнитную силу.



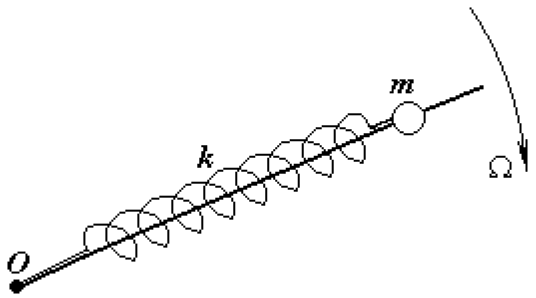
3 Железный шарик маятника поместили между полюсами магнита так, что на него действует горизонтальная магнитная сила. Найдите эту силу и новое положение равновесия шарика, если период его малых колебаний после включения магнитного поля стал равным $\boldsymbol{T}$.



4 Тяжелая тележка скатывается с ускорением a с наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найдите период колебаний маятника длины L, установленного на тележке.



5 Космический корабль вращается вокруг своей оси с угловой скоростью Ω. Как зависит период колебаний маятника длины L от расстояния R точки подвеса до оси вращения? Плоскость колебаний проходит через ось вращения.



6 Шарик массы m, насаженный на стержень, вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси O, с которой он соединен легкой пружиной жесткости k. Определите частоту колебаний шарика вдоль пружины? Всегда ли возможно колебательное движение?

Глава 3 Сложение колебаний

Одна и та же точка может одновременно участвовать в двух или более движениях. Вспомните, хотя бы, движение тела брошенного под углом к горизонту: тело двигается равномерно и прямолинейно по горизонтали и равноускоренно и прямолинейно по вертикали. Результирующая траектория – парабола.

Аналогичная ситуация складывается и с колебательными системами. Тело может одновременно участвовать в нескольких колебаниях. Например, подвешенный на нити шарик можно поочередно заставить колебаться то в одной вертикальной плоскости, то в другой, перпендикулярной первой. Но можно заставить его одновременно колебаться в этих плоскостях. Для этого шарик, колеблющийся в одной плоскости, надо ударить в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Два колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях «сложатся», и перед наблюдателем предстанет результирующее движение (в данном случае по эллипсу).

Задача заключается в определении результата наложения нескольких колебаний.

Во многих случаях при наложении колебаний выполняется ***принцип суперпозиции***, суть которого заключается в том, что при наложении колебания не искажают друг друга. Это означает, что суммарное смещение колеблющегося тела вдоль какой-либо координатной оси равно алгебраической сумме смещений во всех колебаниях:

$$x = \sum x_i .$$

Допустим, что тело участвует одновременно в двух колебаниях вдоль одной прямой:

$$x_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_{01}\right); \qquad x_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_{02}\right).$$

Видно, что колебания происходят вдоль одной прямой OX, их частота ω одинакова, отличаются только амплитуды A и B и начальные фазы колебаний. Нетрудно понять, что в результате наложения тело будет двигаться вдоль прямой OX, а его координата в любой момент времени

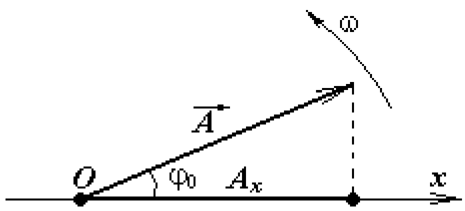
$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01}) + A_2\cos(\omega t + \varphi_{02}).$$

Найти сумму двух гармонических функций одной частоты можно алгебраически, но удобнее и, главное, нагляднее это сделать геометрически.

§1 Метод векторных диаграмм

Вращение вектора

Пусть вектор $\vec{A}$ расположен так, что его начало совпадает с началом отсчета на оси OX и сам вектор составляет угол φ_0 с положительным направлением оси OX.

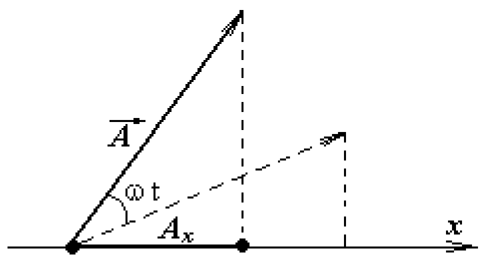


Очевидно, что проекция вектора $\vec{A}$ на ось OX, являющаяся катетом в треугольнике, равна

$$A_x = A\cdot\cos\varphi_0.$$

Будем вращать вектор $\vec{A}$ вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. При этом проекция вектора на ось OX будет изменяться. При повороте вектора $\vec{A}$ на угол ωt он будет составлять с положительным направлением оси OX угол $(\omega t + \varphi_0)$. Тогда проекция будет равна

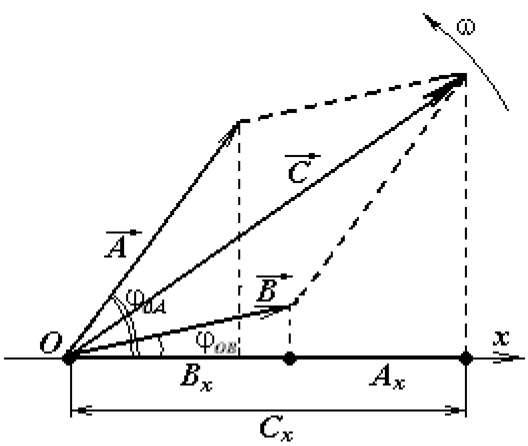
$$A_x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$



Интересно, что проекция вектора меняется по гармоническому закону, то есть колеблется с циклической частотой ω. Этот факт можно использовать для графического представления колебания. Гармоническое колебание величины $S(t) = S_{\max} cos(\omega t + \varphi_0)$ изображают вектором $\vec{S}$, длина которого равна амплитуде колебания $S_{\max}$, а угол между вектором и горизонтальной осью ОХ – начальной фазе колебаний φ_0.

Вращение двух векторов

Рассмотри два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ с общим началом в точке О. В начальный момент эти вектора составляют с положительным направлением оси ОХ углы φ_{OA} и φ_{OB} соответственно.



Будем вращать вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ с одинаковой угловой скоростью ω. Очевидно, что взаимная ориентация векторов относительно друг друга меняться не будет, между ними всегда будет угол $(\varphi_{OA} - \varphi_{OB})$.

Построим по правилу параллелограмма сумму векторов $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Нетрудно видеть, что при вращении векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ их сумма – вектор $\vec{C}$ – тоже будет вращаться с той же угловой скоростью, не меняя своей ориентации относительно $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Параллелограмм векторов вращается как единое целое.

Посмотрим, как ведут себя проекции векторов. Как было показано ранее, проекции вращающихся векторов колеблются с циклической частотой ω:

$$A_x = A \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_{OA}\right)$$
$$B_x = B \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_{OB}\right)$$
$$C_x = C \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_{OC}\right).$$

С другой стороны, как видно из рисунка, проекция вектора $\vec{C}$ равна сумме проекций векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$C_x = A_x + B_x$$
$$C \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0C}) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0A}) + B \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0B}), \tag{1}$$

где φ_{OC} - угол, который вектор $\vec{C}$ составляет с положительным направлением OX в начальный момент.

Нетрудно видеть, что сумма двух гармонических функций одной частоты $A \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0A}) + B \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0B})$ есть гармоническая функция той же частоты $C \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0C})$.

Рассмотрим обратную задачу

Пусть требуется найти сумму двух гармонических функций

$$A \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0A}) + B \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0B}).$$

Если A ≠ B, то решить задачу алгебраически непросто (вынести числовой коэффициент за скобки и воспользоваться формулой суммы косинусов нельзя). Это не значит, что алгебраически решить задачу нельзя! Но есть прием, который существенно упрощает работу. Достаточно вспомнить два предыдущих примера.

Сумма двух гармонических функций одной частоты есть тоже гармоническая функция той же частоты - смотри выражение (1). Ответ можно записать сразу!! Задача сводится к нахождению амплитуды результирующей функции C и ее начальной фазы φ_{OC}.

Заменим алгебраическую задачу на геометрическую: будем складывать не гармонические функции, а вектора. Для это сделаем следующее:

- Построим ось OX, отметим на ней точку O.
- Построим вектор $\vec{A}$ с началом в точке O длины A, повернутый относительно оси на угол φ_{OA}.
- Построим вектор $\vec{B}$ с началом в точке O длины B, повернутый относительно оси на угол φ_{OB}.
- Построим вектор $\vec{C}$ по правилу параллелограмма.
- Найдем длину вектора $\vec{C}$ по теореме косинусов – это будет амплитуда результирующей функции.

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cdot \cos(\varphi_{0A} - \varphi_{0B})}. \qquad (2)$$

$$tg\varphi_{OC} = \frac{A\sin\varphi_{OA} + B\sin\varphi_{OB}}{A\cos\varphi_{OA} + B\cos\varphi_{OB}}. \qquad (3)$$

- Найдем угол, который вектор $\vec{C}$ составляет в начальный момент с положительным направлением оси OX.

Итак, задача решена

$$A \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0A}) + B \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0B}) = C \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0C}).$$

Где значения C и φ_{OC} могут быть найдены по формулам (2) и (3).

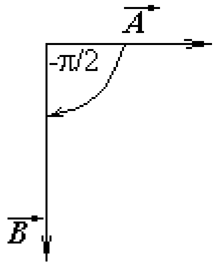
Рассмотрим самый простой пример. Найдите сумму

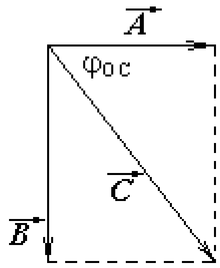
$$3\cos\omega t + 4\sin\omega t.$$

Заметим, что $\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$. Тогда

$$3\cos\omega t + 4\sin\omega t = 3\cos\omega t + 4\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

- Строим вектор $\vec{A}$ длиной 3 единицы (его направление может быть произвольным), для простоты расположим этот вектор горизонтально.
- Строим вектор $\vec{B}$: его начало совпадает с началом A, длина вектора равна 4 единицам, он повернут относительно вектора A на угол $-\pi/2$. Помним, что положительные углы мы отсчитываем против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой стрелке.
- Сумму векторов $\vec{A} + \vec{B}$ находим по правилу параллелограмма.





- Модуль вектора $\vec{C}$ легко найти по теореме Пифагора

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

- Для угла φ_{OC} проще всего найти тангенс

$$tg\varphi_{OC} = \frac{B}{A} = \frac{4}{3},$$
$$\varphi_{OC} = arctg\left(\frac{4}{3}\right).$$

Окончательный результат

$$3\cos\omega t + 4\sin\omega t = 5\cos\left(\omega t - arctg\left(\frac{4}{3}\right)\right).$$

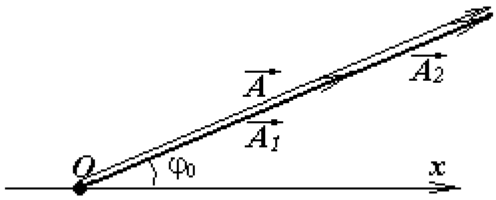
Возвращаемся к физике

При наложении двух колебаний одной частоты, происходящих вдоль одной прямой мы будем видеть не два движения, а одно. Тело будет совершать колебания вдоль оси ОХ с той же частотой ω, изменятся лишь амплитуда и начальная фаза результирующего колебания.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Амплитуда результирующего колебания, как мы показали ранее, зависит не только от амплитуд накладываемых колебаний, но и от разности начальных фаз складываемых колебаний.

1 Пусть $\varphi_{01} - \varphi_{02} = 2\pi k$, где k = 0, 1, 2,… Такие колебания называются синфазными. На векторной диаграмме это выглядит так:



Амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд слагаемых колебаний

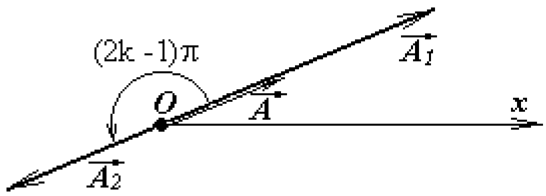
$$A = A_1 + A_2.$$

Синфазные колебания усиливают друг друга!

Интересно, что энергия суммарного колебательного движения, пропорциональная квадрату амплитуды, не равна сумме энергий каждого колебания по отдельности, ибо

$$A^2 = \left(A_1 + A_2\right)^2 \neq A_1^2 + A_2^2.$$

2 Пусть $\varphi_{01} - \varphi_{02} = (2k-1)\pi$, где k = 0, 1, 2,… В этом случае говорят, что колебания происходят в противофазе. Векторная диаграмма выглядит следующим образом



Если $A_1 > A_2$, то результирующее колебание происходит синфазно с первым колебанием. Но амплитуда результирующего колебания уменьшилась:

$$A = A_1 - A_2.$$

В этом случае говорят, что колебания ослабляют друг друга. Очевидно, что при $A_1 = A_2$ результирующая амплитуда вообще будет равной нулю.

Это означает, что тело не будет двигаться вообще. Колебания погасили друг друга.

3 Во всех остальных случаях, когда колебания не будут синфазными или противофазными, мы будем видеть колебания с амплитудой, большей $|A_1 - A_2|$, но меньшей, чем $A_1 + A_2$.

Полученные результаты имеют бесчисленное множество применений. Забегая вперед, скажем, что если, например, в определенном месте пространства происходят звуковые колебания под действием двух источников, то результирующая громкость звука может оказаться меньше, чем громкость, создаваемая каждым источником в отдельности. Если звуки, создаваемые каждым источником в отдельности, имеют одинаковую интенсивность, то при подходящих условиях эти звуки гасят друг друга, и можно сказать, что «звук + звук = молчание». Возможны также условия, когда два пучка света, падающие на экран, дают не большую, а меньшую освещенность, чем каждый пучок в отдельности; возможен даже случай, когда «свет + свет = темнота». Но об этом позже…

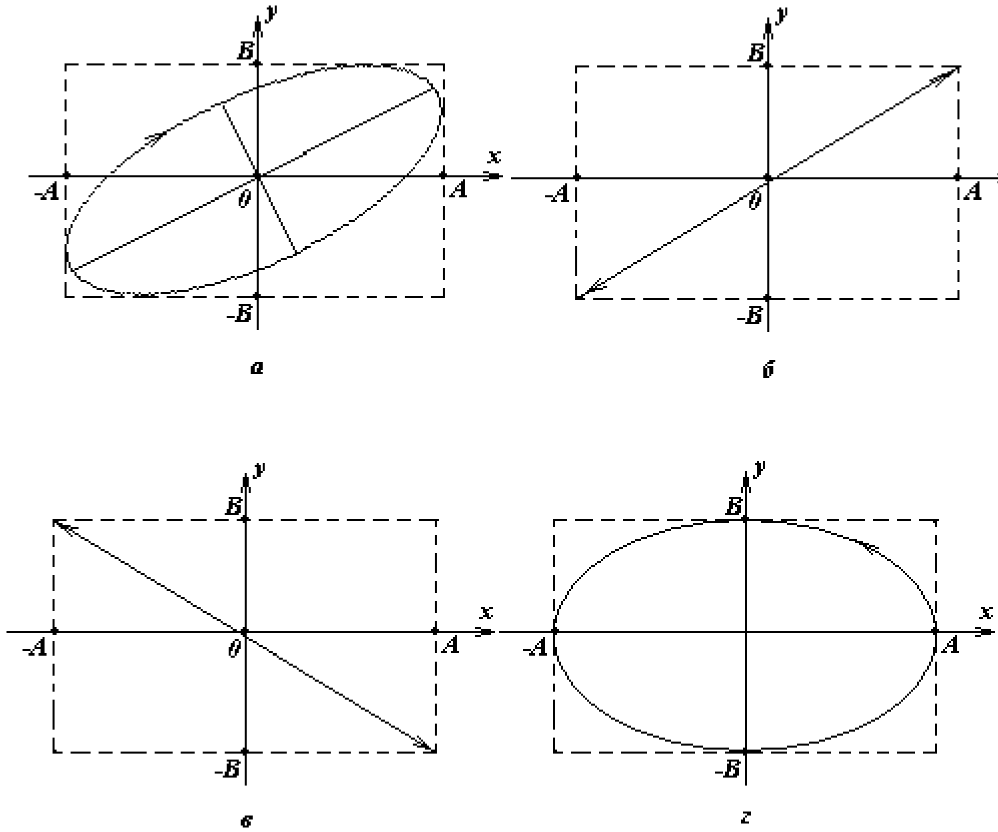
§ 2 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим сначала случай, когда материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, имеющих одну частоту. Проблема заключается в определении траектории точки, которую мы будем в этом случае наблюдать.

Пусть одно колебание происходит по оси OX, другое – по OY .

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$y = B \cdot \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Понятно, что точка описывает плоскую траекторию и уравнения $x(t)$ и $y(t)$ можно рассматривать как уравнение этой траектории в параметрической форме. Нетрудно видеть, что это - уравнение эллипса, вписанного в прямоугольник со сторонами $(2A, 2B)$. Ориентация главных осей эллипса зависит от сдвига фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$. На рисунке показаны частные случаи таких эллипсов:



Нетрудно показать, то при сдвиге фаз $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, ...$ эллипс вырождается в прямую на рисунке *б*:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t);$$
$$y(t) = B \cdot \cos(\omega t);$$
$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B};$$
$$y = \frac{B}{A} \cdot x.$$

Мы будем видеть колебательное движение точки вдоль прямой, проходящей через начало координат, с амплитудой $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

При $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi, ...$ получаем траекторию на рисунке *в*:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t);$$
$$y(t) = -B \cdot \cos(\omega t);$$
$$\frac{x}{y} = -\frac{A}{B};$$
$$y = -\frac{B}{A} \cdot x.$$

Траекторией будет эллипс, у которого главные оси совпадают с осями координат так, как показано на рисунке *г* , если

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \pi / 2 + 2\pi n \qquad (n = 1,2,3...)$$
$$(\varphi_1 - \varphi_2) = 3\pi / 2 + 2\pi n \qquad (n = 1,2,3...).$$

Покажем это

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t);$$
$$y(t) = B \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -B \cdot \sin(\omega t).$$

Разделив обе части каждого уравнения на A и B соответственно, получаем

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t), \qquad \frac{y}{B} = -\sin(\omega t).$$

Возведем каждое уравнение в квадрат и сложим почленно:

Сдвиг по фазе $(\varphi_1 - \varphi_2)$ $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$ определит в этом случае направление движения точки. Оно будет происходить по часовой стрелке, если $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pi / 2$, и против часовой стрелки, если $(\varphi_1 - \varphi_2) = 3\pi / 2$.

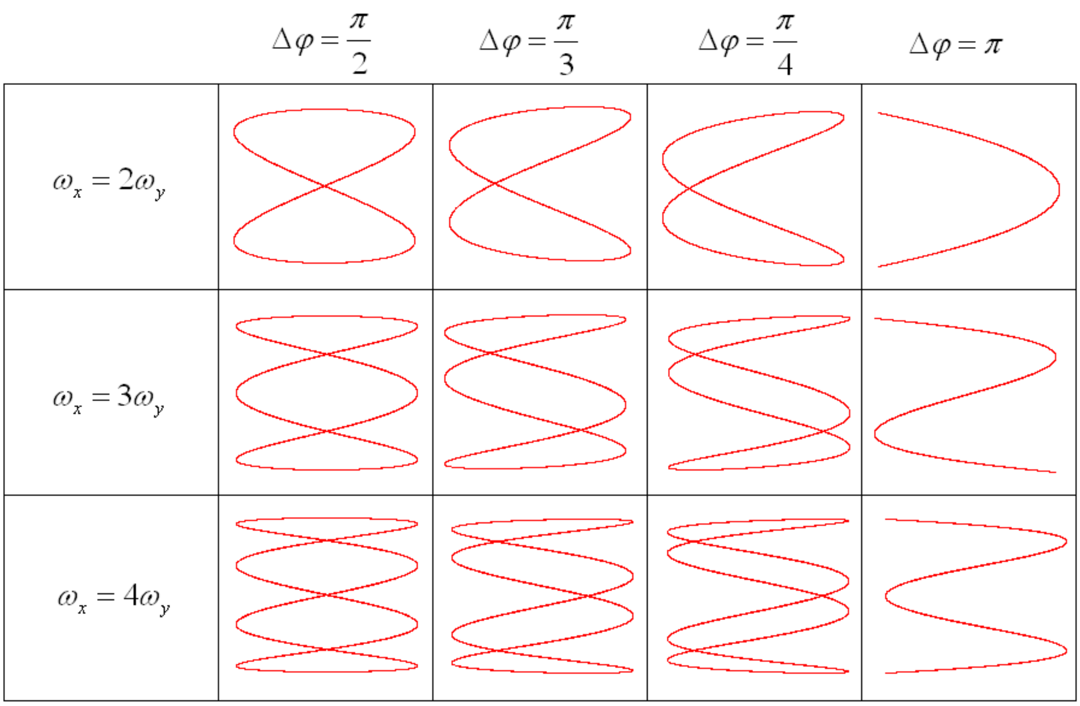
Если амплитуды колебаний по осям OX и OY будут равны A = B, то эллипс преобразуется в окружность радиуса A = B:

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Важно заметить, что любое равномерное движение по окружности радиуса A с угловой скоростью ω может быть разложено на два взаимно перпендикулярных гармонических колебания с частотой ω.

Движение по эллипсу тоже может быть разложено на два взаимно перпендикулярных колебания.

Более сложной получается траектория точки, совершающей колебания во взаимно перпендикулярных направлениях, если частоты колебаний не равны. В частности, если частоты относятся как целые числа, траектория оказывается замкнутой линией. Такая траектория называются ***фигурой Лиссажу***. Ниже приведены примеры фигур Лиссажу для некоторых значений ω_1 / ω_2 и $(\varphi_1 - \varphi_2)$.



§3 Сложение колебаний с близкими частотами, происходящими вдоль одной прямой

Рассмотрим случай сложения двух колебаний одного направления и одинаковой амплитуды, частоты которых ω_1 и ω_2 очень мало отличаются друг от друга ($\frac{\Delta\omega}{\omega}$ << ω):

$$x_1 = A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad x_2 = A \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Согласно принципу суперпозиции результирующее смещение x равно:

$$x = x_1 + x_2 = A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

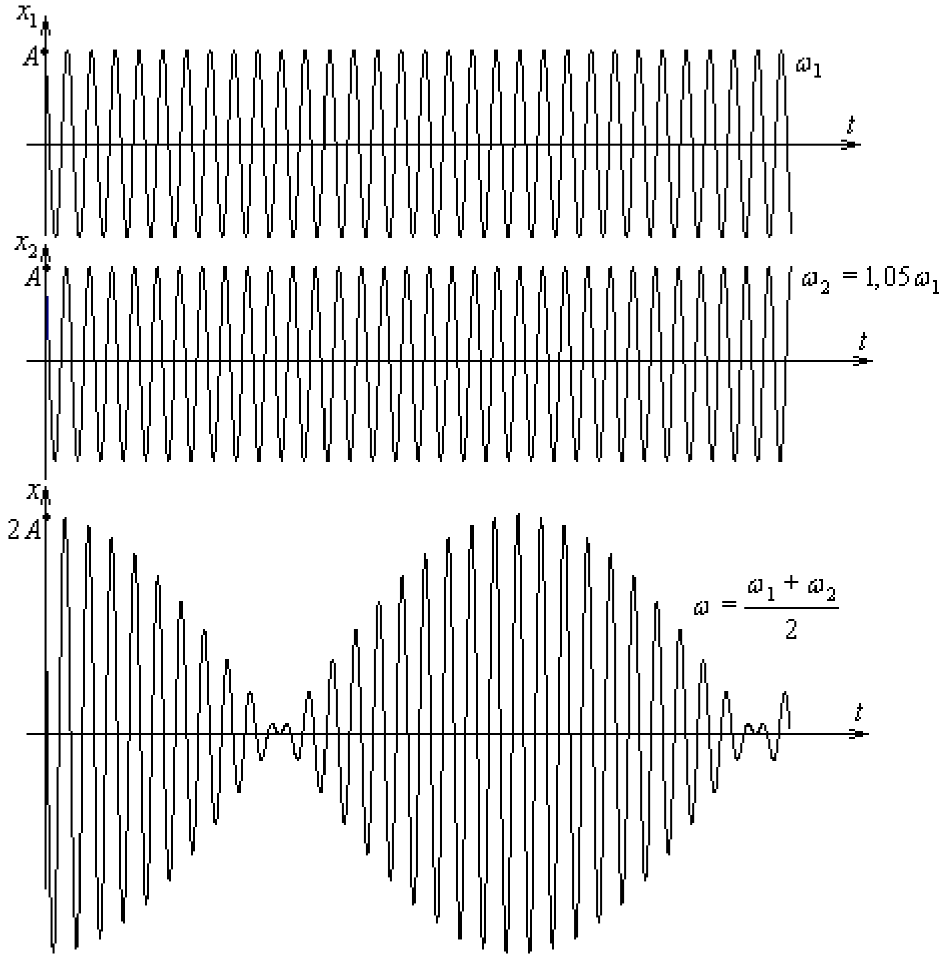
Не нарушая общности результата примем начальные фазы колебаний, равными нулю. Тогда

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right).$$

Введя обозначение $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega$, окончательно получаем:

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)\cos(\omega \cdot t).$$

Так как по условию ω_1 близка к ω_2, то величина $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ мала по сравнению с ω. Поэтому можно считать, что результирующее движение – колебание с частотой $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ с медленно меняющейся амплитудой. Такие колебания называются ***биениями***.



Суть процесса биений заключается в том, что амплитуда результирующего колебания периодически изменяется

$$A_{рез} = A \cdot \left| \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \right|.$$

Абсолютное значение косинуса взято потому, что амплитуда – величина существенно положительная, тогда как косинус может быть как положительным, так и отрицательным. Поскольку косинус принимает максимальное по модулю значение дважды за период, частота изменения амплитуды вдвое больше частоты косинуса:

$$\omega_{биений} = 2 \cdot \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_1 - \omega_2.$$

Эффект можно пронаблюдать, возбудив колебания двух камертонов с близкими частотами, например, с частотами 440 Гц и 441 Гц. В результате наложения звуковых колебаний мы будем воспринимать звуковые колебания одной частоты, но с периодически меняющейся громкостью. Частота изменения громкости 1 Гц.

§4 Спектральное разложение

Не вдаваясь в математические детали, отметим одно важное обстоятельство: любой физически реализуемый периодический процесс может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний (быть может в виде бесконечной суммы – интеграла):

$$S(t) = \sum_n a_n \cdot cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Сумма, которой можно заменить периодический процесс $S(t)$, называется радом Фурье. Специальный раздел математики – Фурье-анализ - занимается математической стороной проблем, связанных с возможность представления функции $S(t)$ в виде ряда. Отметим одно важное свойство такого представления – ***его единственность***. Существует единственный набор необходимых частот ω_n единственный набор отвечающих этим частотам амплитуд a_n и начальных фаз φ_n, обеспечивающих представление функции $S(t)$ в виде суперпозиции гармонических функций.

Указанное свойство периодической функции (периодического процесса) делает целесообразным во многих физических задачах использовать гармонические колебания.

Рассмотрим пример амплитудно-модулированного колебания $S(t) = a(t) \cdot cos(\omega_0 t)$, где амплитуда меняется по закону $a(t) = a_0(1 + m \cdot cos(\Omega t))$. Константа $m \leq 1$ называется глубиной модуляции.

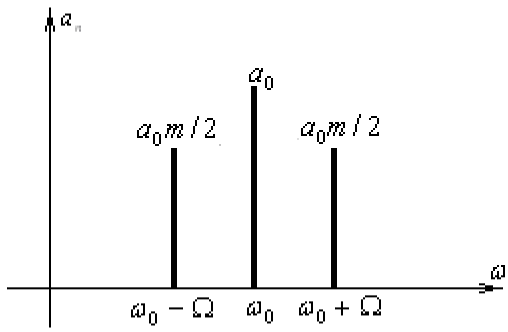
Для разложения этой функции в ряд Фурье не обязательно пользоваться формулами разложения в ряд, можно использовать простейшие тригонометрические преобразования:

$$
\begin{aligned}
S(t) &= a_0(1 + m \cdot cos(\Omega t)) \cdot cos(\omega_0 t) = \\
&= a_0 \cdot cos(\omega_0 t) + a_0 m \cdot cos(\Omega t) \cdot cos(\omega_0 t) = \\
&= a_0 \cdot cos(\omega_0 t) + (a_0 m / 2) \cdot cos(\omega_0 + \Omega)t + (a_0 m / 2) \cdot cos(\omega_0 - \Omega)t.
\end{aligned}
$$

Итак, амплитудно-модулированное колебание представляется в виде суммы трех гармонических функций (трех гармоник):

$$
\begin{aligned}
S_1(t) &= a_0 \cdot cos(\omega_0 t) \\
S_2(t) &= (a_0 m / 2) \cdot cos(\omega_0 + \Omega)t \\
S_3(t) &= (a_0 m / 2) \cdot cos(\omega_0 - \Omega)t
\end{aligned}
$$

с частотами ω_0, $\omega_0 + \Omega$, $\omega_0 - \Omega$ и амплитудами a_0, $a_0 m/2$ и $a_0 m/2$. Колебание $S_1(t)$ называется несущим колебанием, а $S_2(t)$ и $S_3(t)$ - боковыми гармониками. Полученный результат удобно изобразить графически, откладывая по оси абсцисс частоты слагаемых гармонических колебаний, по оси ординат – соответствующие этим частотам амплитуды колебаний.



§5 Примеры решения задач

Задача 1 Изображение гармонического колебания на векторной диаграмме.

Три тела совершают гармонические колебания с одной частотой вдоль оси OX. Уравнения движения тел

$$x_1(t) = 5\cos(4\pi t)\,(см)$$
$$x_2(t) = 2\cos(4\pi t + \pi/2)\,(\text{см})$$
$$x_3(t) = 3\cos(4\pi t - \pi/3)\,(\text{см}).$$

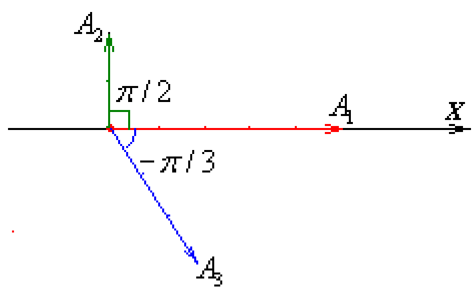
Изобразите колебания на векторной диаграмме.

Решение:

1 Колебание $x_1(t) = 5\cos(4\pi t)\,(\text{см})$ изобразится вектором, длина которого равна 5 см, сонаправленным с осью OX.

2 Колебание $x_2(t) = 2\cos(4\pi t + \pi/2)\,(\text{см})$ изобразится вектором, длина которого 2 см, повернутого относительно оси OX на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

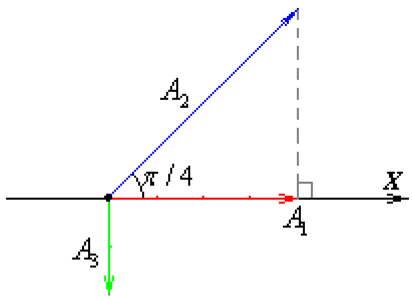
3 Колебание $x_3(t) = 3\cos(4\pi t - \pi/3)\,(\text{см})$ изобразится вектором, длина которого 3 см, повернутого относительно оси Ox на угол $\pi/3$ по часовой стрелке.



При таком способе изображения колебаний очень хорошо видны амплитуды колебаний и фазовые сдвиги между колебаниями. Следует помнить, что на одной векторной диаграмме можно изображать колебания только одной частоты! (Подумайте почему).

Задача 2 Запишите уравнения колебания по векторной диаграмме.

Векторная диаграмма изображает колебания трех тел. Известна зависимость координаты от времени для первого тела $x_1(t) = 2\cos(4\pi t)\,(\text{см})$. Запишите зависимости координаты от времени для двух других тел.



Решение:

1 Вектора, изображающие колебания, нарисованы на одной диаграмме, значит, частоты колебаний всех трех тел одинаковые $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 4\pi$ с$^{-1}$.

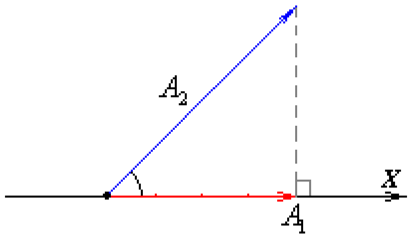
2 Амплитуда колебаний третьего тела $A_3 = 1$ см, т.к. вектор, изображающий третье колебание вдвое короче вектора $\vec{A}_1$. Вектор $\vec{A}_3$ повернут относительно вектора $\vec{A}_1$ на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. Это значит, что колебания третьего тела отстают по фазе от первого на $\pi/2$.

Уравнение движения третьего тела $x_3(t) = 1\cos(4\pi t - \pi/2)\,(\text{см})$.

3 Амплитуда колебаний второго тела – это длина вектора $\vec{A}_2$. Из рисунка видно, что $A_2 = A_1\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ см. Вектор $\vec{A}_2$ повернут относительно $\vec{A}_1$ на угол $\pi/4$ против часовой стрелки. Это значит, что колебания второго тела опережают первое по фазе на $\pi/4$. Уравнение движения второго тела $x_2(t) = 2\sqrt{2}\cos(4\pi t + \pi/4)\,(\text{см})$.

Задача 3 Определение сдвига по фазе между колебаниями по векторной диаграмме.

Два тела совершают гармонические колебания с амплитудами 3см и 5 см. Векторная диаграмма этих колебаний показана на рисунке. Определите, как отличаются фазы колебаний.



Решение:

1 Вектор $\vec{A}_2$ повернут относительно $\vec{A}_1$ против часовой стрелки. Это значит, что колебания второго тела опережают первое по фазе .

2 Из прямоугольного треугольника ищем величину косинуса сдвига по фазе

$$\cos\varphi = \frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{5}$$

$$\varphi = \arccos\frac{3}{5} \approx 0{,}92 \text{ рад.}$$

Задача 4 Сложение колебаний одной частоты, происходящих вдоль одной прямой

Материальная точка участвует одновременно в двух колебаниях, уравнения которых

$$x_1(t) = 3\cos(4\pi t + \pi/3)\,(\text{см})$$
$$x_2(t) = 4\cos(4\pi t - \pi/6)\,(\text{см}).$$

Каково результирующее движение точки?

Решение:

1 При наложении колебаний выполняется принцип суперпозиции – колебания накладываются, не искажая друг друга. То есть результирующее

смещение точки в любой момент времени равно $x = x_1 + x_2 = 3\cos(4\pi t + \pi/3) + 4\cos(4\pi t - \pi/6)$.

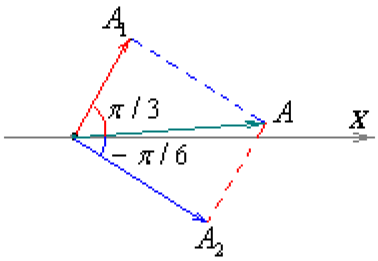
2 Суммой двух гармонических функций одной частоты является гармоническая функция той же частоты

$$3\cos(4\pi t + \pi / 3) + 4\cos(4\pi t - \pi / 6) = A\cos(4\pi t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда результирующего колебания, φ_0 - начальная фаза результирующего колебания.

3 Амплитуду и начальную фазу результирующего колебания найдем, используя метод векторных диаграмм.

Строим вектор $\vec{A}_1$, длина которого равна $A_1 = 3$ см, под углом $\varphi_{01} = \pi / 3$ рад к оси OX, откладывая его против часовой стрелки.



Строим вектор $\vec{A}_2$, длина которого равна $A_2 = 4$ см, под углом $\varphi_{02} = -\pi / 6$ рад, откладывая его по часовой стрелке.

4 Строим сумму векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Длина результирующего вектора A численно равна амплитуде результирующего колебания. Нетрудно видеть, что вектор $\vec{A}$ является гипотенузой в прямоугольном треугольнике с катетами A_1 и A_2. Находим амплитуду результирующего

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 \cdot \sin\frac{\pi}{3} - A_2 \cdot \sin\frac{\pi}{6}}{A_1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + A_2 \cdot \cos\frac{\pi}{6}},$$

колебания по теореме Пифагора $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 5$ см. 5 Начальная фаза результирующего колебания численно равна углу между вектором $\vec{A}$ и положительным направлением оси OX:

$$tg\varphi_0 = 0{,}11 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_0 = arctg 0{,}11 = 0{,}11 \text{ рад.}$$

6 Результат наложения двух колебаний $x(t) = 5\cos(4\pi t + 0{,}11)\,(\text{см})$.

§6 Задания для самостоятельного решения

Тест «Сложение колебаний»

1 Тело участвует в двух колебаниях одной частоты, происходящих вдоль одной прямой. От чего зависит амплитуда результирующего колебания?

А) от частоты накладываемых колебаний;

Б) от амплитуд накладываемых колебаний;

В) от сдвига по фазе между накладываемыми колебаниями;

Г) от амплитуд и сдвига по фазе между накладываемыми колебаниями.

2 Тело участвует в двух колебаниях одной частоты, происходящих вдоль одной прямой с амплитудами $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Какова амплитуда результирующего колебания А?

А) А = 1 см; Б) А = 5 см; В) А = 7 см; Г) 1 см ≤ А ≤ 7 см.

3 Тело участвует в двух колебаниях одной частоты, происходящих вдоль одной прямой. Каким должен быть сдвиг по фазе между колебаниями $\Delta\varphi$, чтобы колебания максимально усиливали друг друга?

А) $\Delta\varphi = 2\pi n$; Б) $\Delta\varphi = (2n-1)\pi$; В) $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$;

Г) Амплитуда результирующего колебания не зависит от $\Delta\varphi$.

4 Тело участвует в двух колебаниях одной частоты, происходящих вдоль одной прямой. Каким должен быть сдвиг по фазе между колебаниями $\Delta\varphi$, чтобы колебания максимально ослабляли друг друга?

А) $\Delta\varphi = 2\pi n$; Б) $\Delta\varphi = (2n\text{-}1)\pi$; В) $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$;

Г) Амплитуда результирующего колебания не зависит от $\Delta\varphi$.

5 Тело участвует в двух колебаниях одной частоты и фазы, происходящих вдоль одной прямой. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 12$ см и $A_2 = 5$ см. Какова амплитуда результирующего колебания?

А) A = 7 см; Б) A = 13 см; В) A = 17 см; Г) 7 см ≤ A ≤ 17 см.

6 Тело участвует в двух колебаниях одной частоты, происходящих вдоль одной прямой в противофазе. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 12$ см и $A_2 = 5$ см. Какова амплитуда результирующего колебания?

А) A = 7 см; Б) A = 13 см; В) A = 17 см; Г) 7 см ≤ A ≤ 17 см.

7 Тело участвует в двух колебаниях одной частоты, происходящих вдоль одной прямой. Сдвиг по фазе между колебаниями равен π/2, их амплитуды равны $A_1 = 12$ см и $A_2 = 5$ см. Какова амплитуда результирующего колебания?

А) A = 7 см; Б) A = 13 см; В) A = 17 см; Г) 7 см ≤ A ≤ 17 см.

8 Тело участвует одновременно в трех колебаниях

$$x_1(t) = 6\cos(2\pi t)\,(\text{см});$$
$$x_2(t) = 3\cos(2\pi t + \pi)\,(\text{см});$$
$$x_3(t) = 4\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})\,(\text{см}).$$

Какова амплитуда результирующего колебания?

А) 13 см; Б) 9,8 см; В) 7,1 см; Г) 5 см.

9 Тело участвует одновременно в двух колебаниях

$$x(t) = 2\cos(2\pi t - \frac{\pi}{3})\,(\text{см});$$

$$y(t) = 3\cos(2\pi t + \frac{\pi}{6})\,(\text{см}).$$

Какова амплитуда результирующего колебания?

А) 1 см; Б) 3,6 см; В) 5 см;

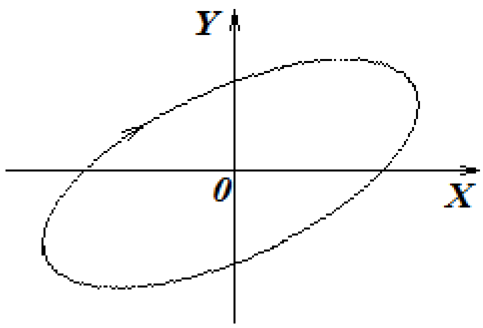
Г) Колебания, совершаемые телом, не могут усиливать или ослаблять друг друга.

10 Тело участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковыми частотами. Какой может быть траектория тела?

А) Прямая и окружность; Б) Прямая и эллипс;

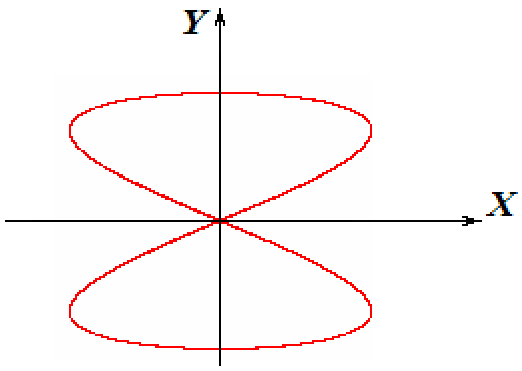
В) Окружность и эллипс; Г) Прямая, окружность и эллипс.

11 На рисунке показана траектория движения тела. Чему равно отношение частот колебаний тела $\frac{\omega_x}{\omega_y}$?



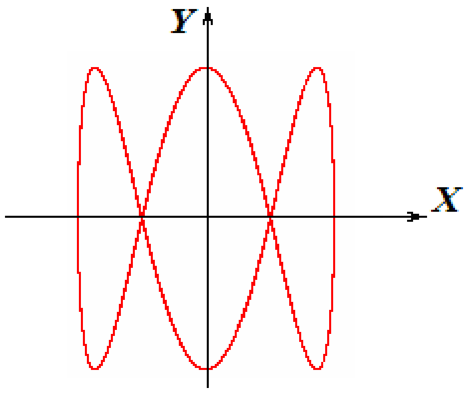
А) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\pi}{2}$; Б) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$; В) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = 2$; Г) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = 1$.

12 На рисунке показана траектория движения тела. Чему равно отношение частот колебаний тела $\frac{\omega_x}{\omega_y}$?



А) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\pi}{2}$; Б) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$; В) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = 2$; Г) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = 1$.

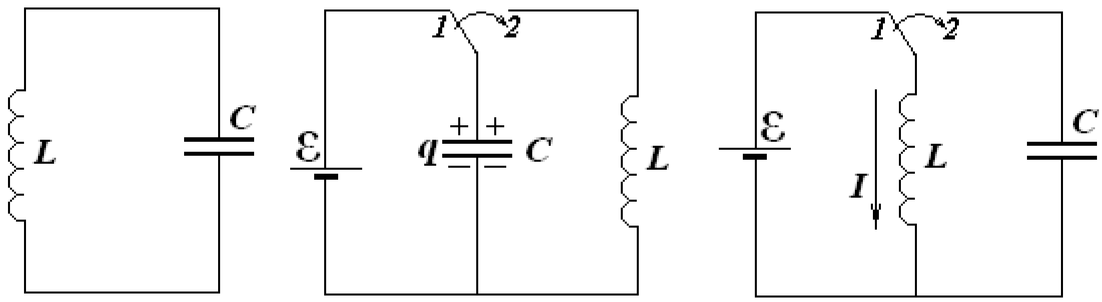
13 На рисунке показана траектория движения тела. Чему равно отношение частот колебаний тела $\frac{\omega_x}{\omega_y}$?



А) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{3}{2}$; Б) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{3}$; В) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = 3$; Г) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{2}{3}$.

Глава 4 Свободные электрические колебания

Под электрическими колебаниями понимают периодические изменения заряда, силы тока и напряжения. Простейшая система, в которой возможны свободные электрические колебания, - это так называемый колебательный контур. Это устройство, состоящее из соединенных между собой конденсатора и катушки. Будем полагать, что активное сопротивление катушки отсутствует, в этом случае контур называют идеальным. При сообщении этой системе энергии в ней будут происходить незатухающие гармонические колебания заряда на конденсаторе, напряжения и тока.



Сообщить колебательному контуру энергию можно разными способами. Например, зарядив конденсатор от источника постоянного тока или возбудив ток в катушке индуктивности. В первом случае энергией обладает электрическое поле между обкладками конденсатора. Во втором, энергия заключена в магнитном поле тока, текущего по цепи.

§1 Уравнение колебаний в контуре

Докажем, что при сообщении контуру энергии в нем будут происходить незатухающие гармонические колебания. Для этого необходимо получить дифференциальное уравнение гармонических колебаний вида $q'' = -\omega^2 \cdot q$.

Допустим, конденсатор зарядили и замкнули на катушку. Конденсатор начнет разряжаться, по катушке потечет ток. Согласно второму закону Кирхгофа сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура равна сумме ЭДС в этом контуре $\sum IR = \sum \mathcal{E}$.

В нашем случае падение напряжения $\sum IR = 0$ поскольку контур идеальный. Конденсатор в цепи ведет себя как источник тока, в качестве ЭДС выступает разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = \frac{q}{C}$, где q - заряд на конденсаторе, C - электроемкость конденсатора. Кроме того, при протекании через катушку изменяющегося тока в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}$, где L - индуктивность катушки, $\frac{dI}{dt}$ - скорость изменения тока в катушке. Поскольку ЭДС самоиндукции препятствует процессу разрядки конденсатора второй закон Кирхгофа принимает вид

$$0 = U - \mathcal{E}_{si}$$
$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Но ток в контуре – это ток разрядки или зарядки конденсатора, следовательно $I = \frac{dq}{dt}$. Тогда $\frac{dI}{dt} = q''$.

Дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$q'' = -\frac{1}{LC} \cdot q.$$

Введя обозначение $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, получим известное нам дифференциальное уравнение гармонических колебаний $q'' = -\omega^2 \cdot q$.

Это означает, что заряд на конденсаторе в колебательном контуре будет изменяться по гармоническому закону

$$q = q_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $q_{\max}$ - максимальное значение заряда на конденсаторе, ω - циклическая частота, φ_0 - начальная фаза колебаний.

Период колебаний заряда $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$. Это выражение носит название формулы Томпсона.

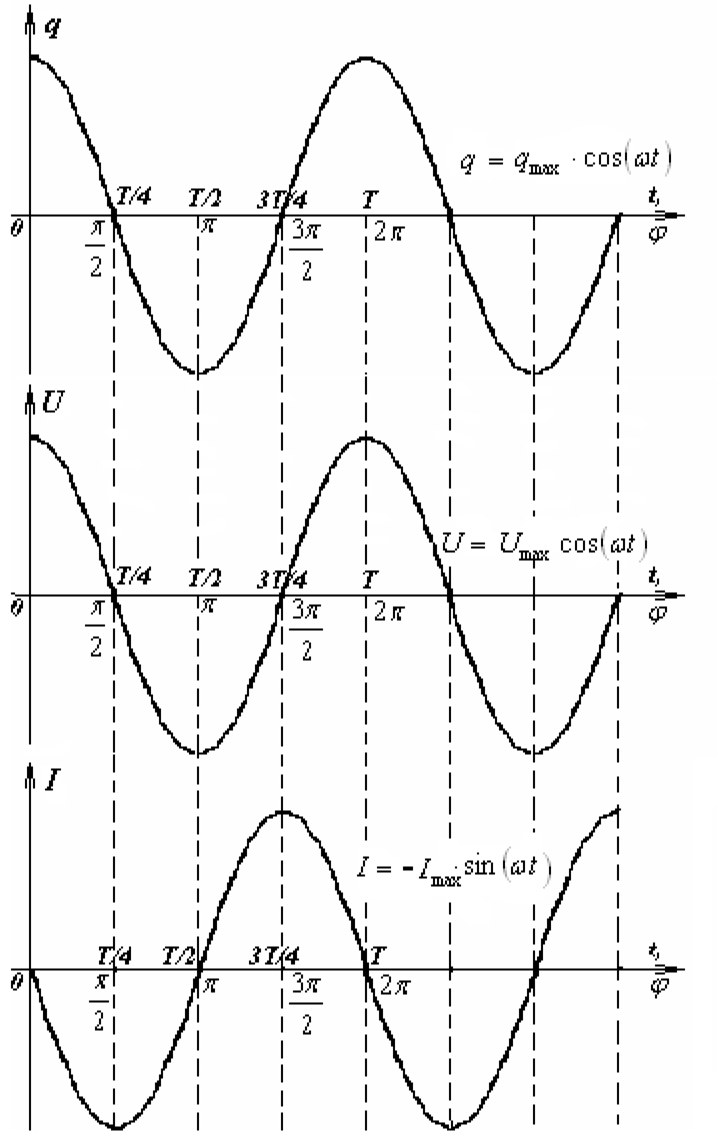
Напряжение на конденсаторе

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}{C} = \frac{q_{\max}}{C}\cos(\omega t + \varphi_0) = U_{\max}\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Ток в цепи

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_{\max}\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = I_{\max}\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Видим, что кроме заряда на конденсаторе по гармоническому закону будут изменять еще ток в контуре и напряжение на конденсаторе. Напряжение колеблется в одной фазе с зарядом, а сила тока опережает заряд по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$.



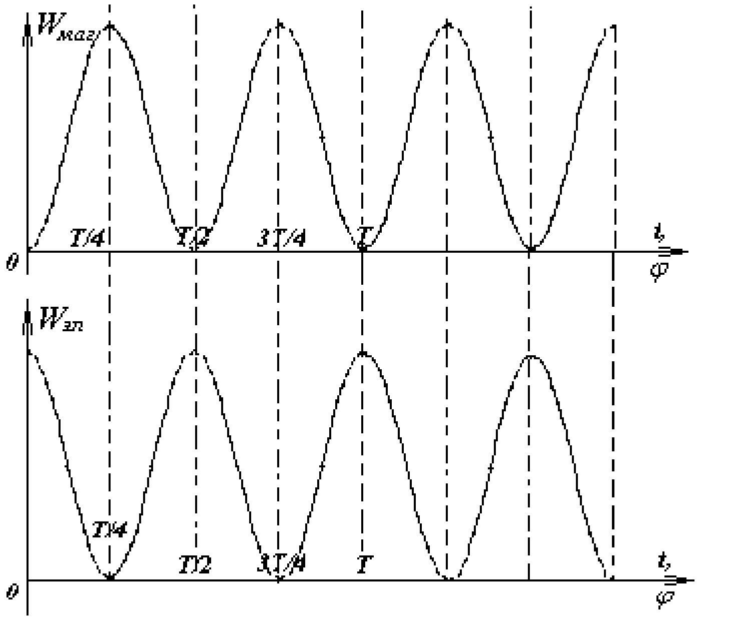
Энергия электрического поля конденсатора

$$W_{эл} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_{\max}^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2C} = \frac{q_{\max}^2}{4C}(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)).$$

Энергия магнитного поля тока

$$W_{м} = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{4}(1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)).$$

Таким образом, энергии электрического и магнитного полей тоже изменяются по гармоническому закону, но с удвоенной частотой.



Подведем итог

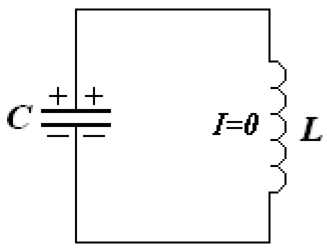
Под электрическими колебаниями следует понимать периодические изменения заряда, напряжения, силы тока, энергии электрического поля, энергии магнитного поля. Эти колебания, как и механические, могут быть как свободными, так и вынужденными, гармоническим и негармоническим. Свободные гармонические электрические колебания возможны в идеальном колебательном контуре.

§2 Процессы, происходящие в колебательном контуре

Мы математически доказали факт существования свободных гармонических колебаний в колебательном контуре. Однако, остается неясным, почему такой процесс возможен. Что является причиной возникновения колебаний в контуре?

В случае свободных механических колебаний такая причина была найдена – это внутренняя сила, возникающая при выведении системы из положения равновесия. Эта сила в любой момент направлена к положению равновесия и пропорциональна координате тела (со знаком «минус»). Попробуем найти аналогичную причину возникновения колебаний в колебательном контуре.

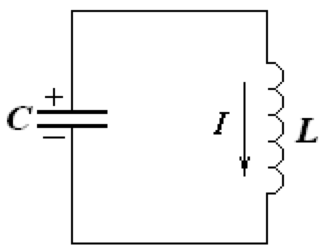
Пусть колебания в контуре возбуждают, зарядив конденсатор и замкнув его на катушку.



В начальный момент времени заряд на конденсаторе максимален. Следовательно, напряжение и энергия электрического поля конденсатора тоже максимальны.

Ток в контуре отсутствует, энергия магнитного поля тока равна нулю.

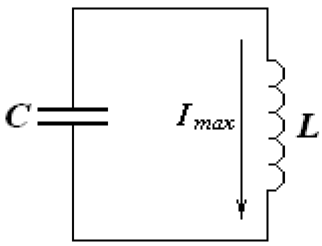
Первая четверть периода – разрядка конденсатора.



Обкладки конденсатора, имеющие разные потенциалы, соединили проводником, поэтому конденсатор начинает разряжаться через катушку. Заряд, напряжение на конденсаторе и энергия электрического поля убывают.

Ток, появившийся в цепи, нарастает, однако, его нарастанию препятствует ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке. Энергия магнитного поля тока увеличивается.

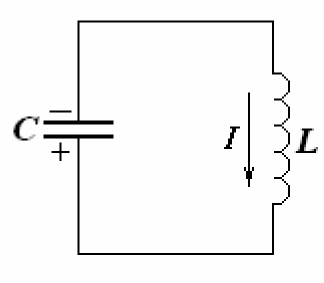
Прошла четверть периода - конденсатор разрядился.



Конденсатор разрядился, напряжение на нем стало равным нулю. Энергия электрического поля в этот момент тоже равна нулю. По закону сохранения энергии исчезнуть она не могла. Энергия поля конденсатора полностью перешла в энергию магнитного поля катушки, которая в этот момент достигает своего максимального значения. Максимален ток в цепи.

Казалось бы, в этот момент ток в цепи должен прекратиться, ибо исчезла причина возникновения тока – электрическое поле. Однако, исчезновению тока опять таки препятствует ЭДС самоиндукции в катушке. Теперь она будет поддерживать убывающий ток, и он будет продолжать течь в прежнем направлении, заряжая конденсатор. Начинается вторая четверть периода.

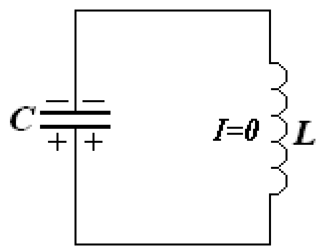
Вторая четверть периода – перезарядка конденсатора.



Ток, поддерживаемый ЭДС самоиндукции, продолжает течь в прежнем направлении, постепенно уменьшаясь. Этот ток заряжает конденсатор в противоположной полярности. Заряд и напряжение на конденсаторе увеличиваются.

Энергия магнитного поля тока, убывая, переходит в энергию электрического поля конденсатора.

Прошла вторая четверть периода – конденсатор перезарядился.



Конденсатор перезаряжается до тех пор, пока существует ток. Поэтому в тот момент, когда ток прекращается, заряд и напряжение на конденсаторе принимают максимальное значение.

Энергия магнитного поля в этот момент полностью перешла в энергию электрического поля конденсатора.

Ситуация в контуре в этот момент, эквивалентна исходной. Процессы в контуре повторятся, но в обратном направлении. Одно полное колебание в контуре, длящееся в течение периода, закончится, когда система вернется в исходное состояние, то есть когда конденсатор перезарядится в первоначальной полярности.

Нетрудно видеть, что причиной возникновения колебаний в контуре служит явление самоиндукции. ЭДС самоиндукции препятствует изменению тока: она не дает ему мгновенно нарастать и мгновенно исчезать.

Кстати, будет не лишним сопоставить выражения для расчета квазиупругой силы в механической колебательной системе и ЭДС самоиндукции в контуре:

$$F_{упрx} = ma_x = mx'' \qquad \mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt} = -Lq''.$$

Ранее были получены дифференциальные уравнения для механической и электрической колебательной систем:

$$x'' = -\omega^2 x \qquad q'' = -\omega^2 q.$$

Несмотря на принципиальные отличия физических процессов к механических и электрических колебательных системах, явно просматривается математическая тождественность уравнений, описывающих процессы в этих системах. Об этом следует поговорить подробнее.

§3 Аналогия между электрическими и механическими колебаниями

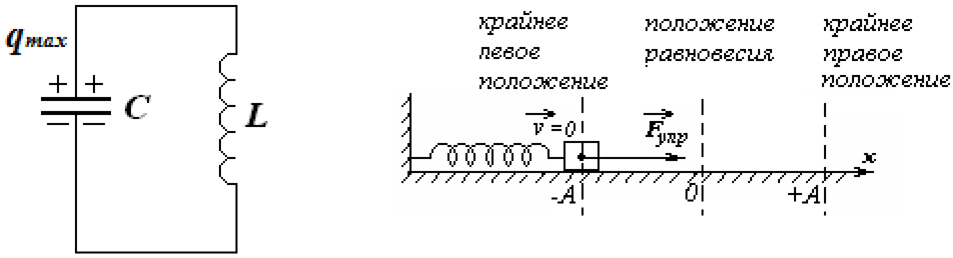
Внимательный анализ дифференциальных уравнений для пружинного маятника и колебательного контура, а так же формул, связывающих величины, характеризующих процессы в этих системах, позволяет выявить, какие величины ведут себя одинаково (таблица 2).

Таблица 2

Пружинный маятник	Колебательный контур
Координата тела x ($x'' = -\omega^2 x$)	Заряд на конденсаторе q ($q'' = -\omega^2 q$)
Скорость тела $v_x = x'$	Сила тока в контуре $I = q'$
Потенциальная энергия упругого деформированной пружины $E_p = \frac{kx^2}{2}$	Энергия электрического поля конденсатора $W_{эл} = \frac{q^2}{2C}$
Кинетическая энергия груза $E_к = \frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля катушки с током $W_м = \frac{LI^2}{2}$
Величина, обратная жесткости пружины $\frac{1}{k}$	Емкость конденсатора C
Масса груза m	Индуктивность катушки L
Сила упругости $F_x = mx'' = -kx$	ЭДС самоиндукции, равная напряжению на конденсаторе $U = \frac{q}{C}$ $\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt} = -Lq''$

Важно не просто формальное сходство между величинами, описывающими процессы колебания маятника и процессы в контуре. ***Тождественны сами процессы!***

Крайние положения маятника эквивалентны состоянию контура, когда заряд на конденсаторе максимален.



$I = 0$

$W_{эл}$ - max

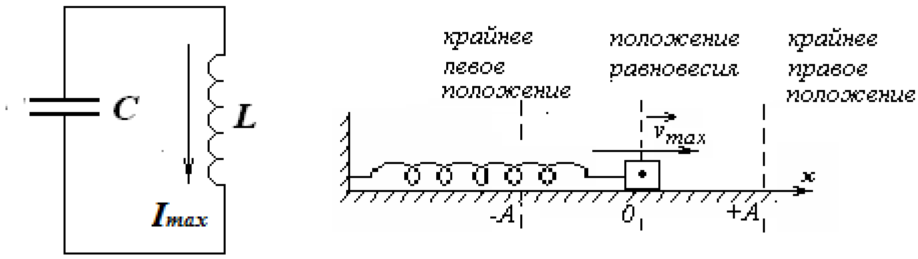
$W_{магн} = 0$

$v = 0$

E_p - max

$E_k = 0$

Положение равновесия маятника эквивалентно состоянию контура, когда конденсатор разряжен. В этот момент сила упругости обращается в ноль, а в контуре отсутствует напряжение на конденсаторе. Скорость маятника и сила тока в контуре максимальны. Потенциальная энергия упругой деформации пружины и энергия электрического поля конденсатора равны нулю. Энергия системы состоит из кинетической энергии груза или из энергии магнитного поля тока.



$q = 0$

$W_{эл} = 0$

$W_{магн}$ - max

$x = 0$

$E_p = 0$

E_k - max

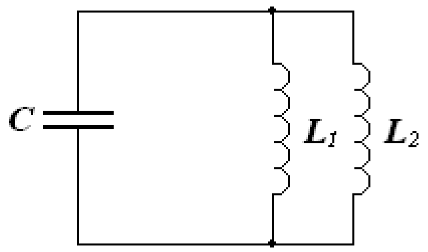
Разрядка конденсатора протекает аналогично движению маятника из крайнего положения в положение равновесия. Процесс перезарядки конденсатора тождественен процессу удаления груза из положения равновесия в крайнее положение.

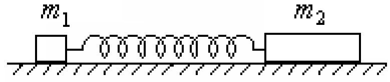
Полная энергия колебательной системы $E = E_p + E_к = \dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{mv^2}{2}$ или $W = W_{эл} + W_м = \dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{LI^2}{2}$ остается неизменной с течением времени.

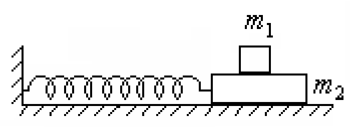
Подобная аналогия может быть прослежена не только между пружинным маятником и колебательным контуром. Всеобщи закономерности свободных колебаний любой природы! Эти закономерности, проиллюстрированные на примере двух колебательных систем (пружинном маятнике и колебательном контуре) не просто можно, а ***нужно видеть*** в колебаниях любой системы.

В принципе, можно решить задачу о любом колебательном процессе, заменив его колебаниями мятника. Для этого достаточно грамотно построить эквивалентную механическую систему, решить механическую задачу и провести замену величин в окончательном результате. Например, нужно найти период колебаний в контуре, содержащем конденсатор и две катушки, соединенные параллельно.

Колебательный контур содержит один конденсатор и две катушки. Поскольку катушка ведет себя как груз пружинного маятника, а конденсатор как пружина, то эквивалентная механическая система должна содержать одну пружину и два груза. Вся проблема в том, как грузы прикреплены к пружине. Возможны два случая: один конец пружины закреплен, а к свободному концу прикреплен один груз, второй находится на первом или грузы прикреплены к разным концам пружины.





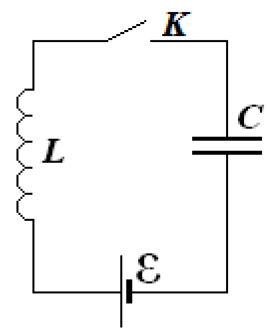


При параллельном соединении катушек разной индуктивности токи по ним текут разные. Следовательно, скорости грузов в тождественной механической системе тоже должны быть разными. Очевидно, это возможно лишь во втором случае.

Период этой колебательной системы нами уже найден. Он равен $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m_1 \cdot m_2}{k(m_1 + m_2)}}$. Заменяя массы грузов на индуктивности катушек, а величину, обратную жесткости пружины, на емкость конденсатора, получаем $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{CL_1L_2}{(L_1 + L_2)}}$.

§4 Колебательный контур с источником постоянного тока

Рассмотрим колебательный контур, содержащий источник постоянного тока. Пусть конденсатор первоначально не заряжен. Что будет происходить в системе после замыкания ключа К? Будут ли в этом случае наблюдаться колебания и какова их частота и амплитуда?



Очевидно, после замыкания ключа конденсатор начнет заряжаться. Записываем второй закон Кирхгофа:

$$0 = U - \mathcal{E}_{si} - \mathcal{E}$$

$$0 = \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} - \mathcal{E}.$$

Ток в контуре – это ток зарядки конденсатора, следовательно $I = \dfrac{dq}{dt}$.

Тогда $\dfrac{dI}{dt} = q''$. Дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$q'' = -\frac{1}{LC} \cdot (q - C\mathcal{E}).$$

*Решаем уравнение заменой переменных.

Обозначим $y = q - C\mathcal{E}$. Дифференцируем дважды и с учетом того, что $C\mathcal{E} = const$, получаем $y'' = q''$. Дифференциальное уравнение приобретает вид

$$y'' = -\frac{1}{LC} \cdot y.$$

Это дифференциальное уравнение гармонических колебаний, его решением является функция

$$y = y_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - циклическая частота, константы интегрирования y_0 и φ_0 находятся из начальных условий.

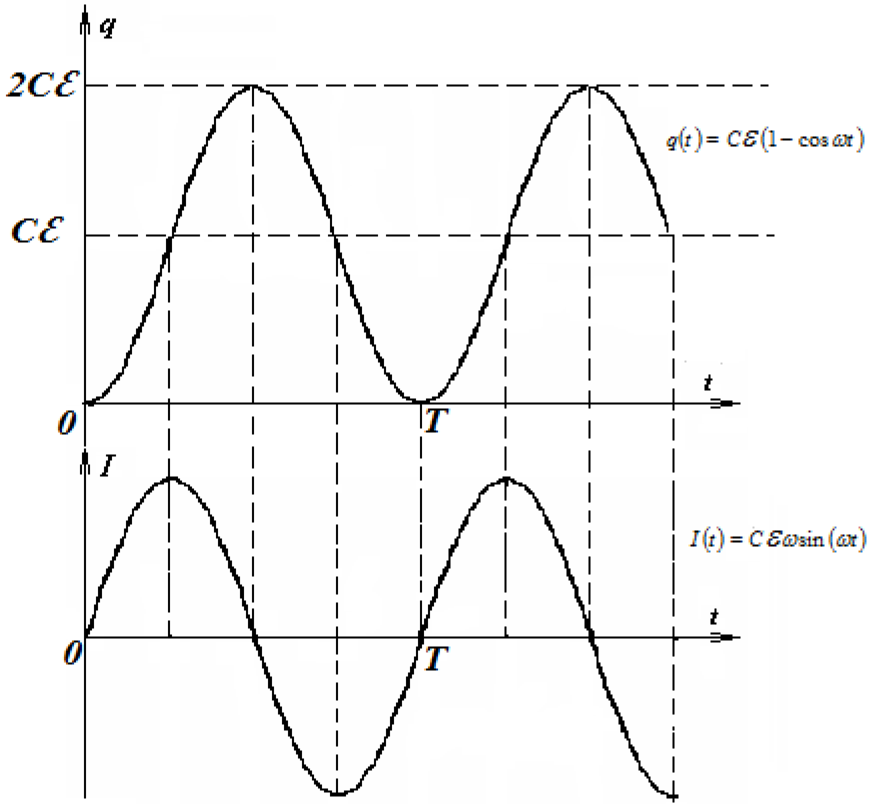
Заряд на конденсаторе меняется по закону

$$q(t) = y + C\mathcal{E} = y_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + C\mathcal{E}.$$

Сразу после замыкания ключа заряд на конденсаторе равен нулю $q(0) = 0$ и ток в контуре отсутствует $I(0) = q'(0) = 0$. С учетом начальных условий получаем систему уравнений:

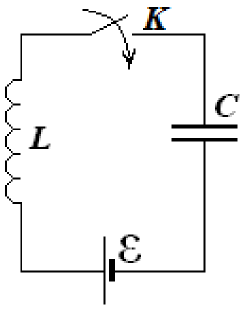
$$\begin{cases} q(0) = y_0 \cos(\varphi_0) + C\mathcal{E} = 0 \\ I(0) = -y_0 \omega \sin(\varphi_0) = 0 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем $y_0 = -C\mathcal{E}$ и $\varphi_0 = 0$. После замыкания ключа заряд на конденсаторе изменяется по закону $q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - \cos \omega t\right)$.



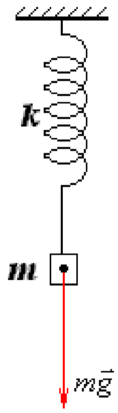
Нетрудно видеть, что в контуре происходят гармонические колебания. Наличие в контуре источника постоянного тока не повлияло на частоту колебаний, она осталась равной $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Изменилось «положение равновесия» - в тот момент, когда ток в цепи максимален, конденсатор заряжен. Амплитуда колебаний заряда на конденсаторе равна Cℇ.

Этот же результат можно получить проще, используя аналогию между колебаниями в контуре и колебаниями пружинного маятника. Источник постоянного тока эквивалентен постоянному силовому полю, в которое помещен пружинный маятник, например, полю тяготения. Отсутствие заряда на конденсаторе в момент замыкания цепи тождественно отсутствию деформации пружины в момент приведения маятника в колебательное движение.



Ключ замыкают, и в контуре возникают колебания

аналогично



Груз прикрепили к пружине и удерживают его так, что пружина остается в недеформированном состоянии.
Груз отпускают, и в системе возникают колебания.

В постоянном силовом поле период колебаний пружинного маятника не изменяется. Период колебаний в контуре ведет себя так же – он остается неизменным при введении в контур источника постоянного тока $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

В положении равновесия, когда скорость груза максимальна, пружина деформирована:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{упр} = 0$$
$$k\Delta l_0 = mg$$
$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k} \quad (*).$$

Когда ток в колебательном контуре максимален $\mathcal{E}_{si} = -L\dfrac{dI}{dt} = 0$. Второй закон Кирхгофа запишется следующим образом

$$0 = U - \mathcal{E}$$
$$U = \mathcal{E}.$$

В этот момент заряд на конденсаторе равен $q = C\mathcal{E}$. Этот же результат можно было получить на основании выражения (*), выполнив замену

$$mg \;\to\; \mathcal{E}$$
$$\frac{1}{k} \;\to\; C.$$

§5 Примеры решения задач

Задача 1 Закон сохранения энергии

В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью L = 0,5 мкГн и конденсатора емкостью C = 20 пФ происходят электрические колебания. Чему равно максимальное напряжение на конденсаторе, если амплитуда тока в контуре 1 мА? Активное сопротивление катушки пренебрежимо мало.

Решение:

1 Поскольку активным сопротивлением катушки можно пренебречь, полная энергия системы, состоящая из энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки, остается неизменной с течением времени:

$$W = W_{эл} + W_{м} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = const. \quad (1)$$

2 В тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально (максимален заряд на конденсаторе), ток в цепи отсутствует. Полная энергия системы состоит только из энергии электрического поля конденсатора

$$W = W_{эл} = \frac{CU_{\max}^2}{2}. \quad (2)$$

3 В момент, когда ток в цепи максимален, конденсатор полностью разряжен. Полная энергия системы состоит только из энергии магнитного поля катушки

$$W = W_{м} = \frac{LI_{\max}^2}{2}. \quad (3)$$

4 На основании выражений (1), (2), (3) получаем равенство $\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$. Максимальное напряжение на конденсаторе равно

$$U_{\max} = I_{\max}\sqrt{\frac{L}{C}} = 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-9}}} = 5 \cdot 10^{-3} \quad (\text{В}).$$

Задача 2 Закон сохранения энергии

В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C, происходят электрические колебания с периодом Т = 1 мкс. Максимальное значение заряда $q_{\max} = 2,5$ нКл. Чему равен ток в контуре в тот момент, когда заряд на конденсаторе равен $q = 1,5$ нКл? Активное сопротивление катушки пренебрежимо мало.

Решение:

1 Поскольку активным сопротивлением катушки можно пренебречь, полная энергия системы, состоящая из энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки, остается неизменной с течением времени:

$$W = W_{эл} + W_{м} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const. \tag{1}$$

2 В тот момент, когда заряд на конденсаторе максимален, ток в цепи отсутствует. Полная энергия системы состоит только из энергии электрического поля конденсатора

$$W = W_{эл} = \frac{q_{\max}^2}{2C}. \tag{2}$$

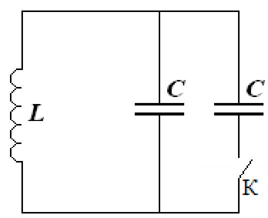
3 На основании (1) и (2) получаем равенство $\frac{q_{max}^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$. Ток в контуре равен $I = \sqrt{\frac{q_{max}^2 - q^2}{LC}}$.

4 Период колебаний в контуре определяется формулой Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Отсюда $\sqrt{LC} = \frac{T}{2\pi}$. Тогда для тока в контуре получаем

$$I = \frac{2\pi}{T}\sqrt{q_{max}^2 - q^2} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{10^{-6}} \cdot 10^{-9}\sqrt{2{,}5^2 - 1{,}5^2} = 12{,}56 \cdot 10^{-3}\ (\text{А}).$$

Задача 3 Колебательный контур с двумя параллельно соединенными конденсаторами

В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью *L* и конденсатора емкостью *C,* происходят электрические колебания с амплитудой заряда q_0. В тот момент, когда заряд на конденсаторе максимален, замыкают ключ К. Каким станет период колебаний в контуре после замыкания ключа? Чему равна амплитуда тока в контуре после замыкания ключ? Омическим сопротивлением контура пренебречь.

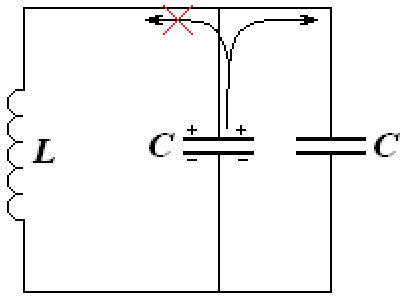


Решение:

1 Замыкание ключа приводит к появлению в контуре еще одного конденсатора, подключенного параллельно первому. Общая емкость двух параллельно соединенных конденсаторов равна $C_{об} = C_1 + C_2 = C + C = 2C$.

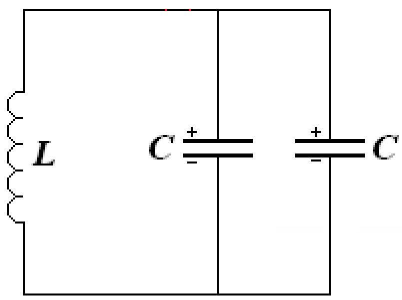
Период колебаний в контуре зависит только от его параметров и не зависит от того, как в системе возбудили колебания и какую энергию сообщили системе для этого. Согласно формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC_{об}} = 2\pi\sqrt{L \cdot 2C}$.

2 Для нахождения амплитуды тока выясним, какие процессы происходят в контуре после замыкания ключа.



Второй конденсатор подключили в тот момент, когда заряд на первом конденсаторе был максимален, следовательно, ток в контуре отсутствовал.

Контурный конденсатор должен начать разряжаться. Ток разрядки, дойдя до узла, должен бы разделиться на две части. Однако, в ветви с катушкой, возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая нарастанию тока разрядки. По этой причине весь ток разрядки потечет в ветвь с конденсатором, омическое сопротивление которой равно нулю. Ток прекратится, как только сравняются напряжения на конденсаторах, при этом первоначальный заряд конденсатора q_0 перераспределится между двумя конденсаторами. Время перераспределения заряда между двумя конденсаторами ничтожно мало вследствие отсутствия омического сопротивления в ветвях с конденсаторами. За это время ток в ветви с катушкой возникнуть не успеет. Колебания в новой системе продолжатся уже после перераспределения заряда между конденсаторами.



Важно понять, что в процессе перераспределения заряда между двумя конденсаторами энергия системы не сохраняется! До замыкания ключа энергией обладал один конденсатор, контурный:

$$W_0 = W_{эл0} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

После перераспределения заряда энергией обладает батарея конденсаторов:

$$W = \frac{q_0^2}{2C_{об}} = \frac{q_0^2}{2 \cdot 2C} = \frac{q_0^2}{4C}.$$

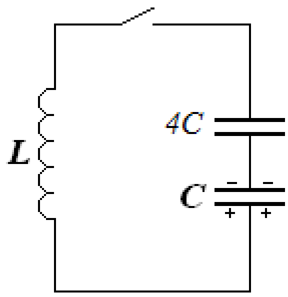
Нетрудно видеть, что энергия системы уменьшилась!

3 Новую амплитуду тока найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии. В процессе колебаний энергия батареи конденсаторов переходит в энергию магнитного поля тока:

$$\frac{q_0^2}{4C} = \frac{LI_{\max}^2}{2}, \qquad I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

Обратите внимание, закон сохранения энергии начинает «работать» только после завершения перераспределения заряда между конденсаторами.

Задача 4 Колебательный контур с двумя последовательно соединенными конденсаторами



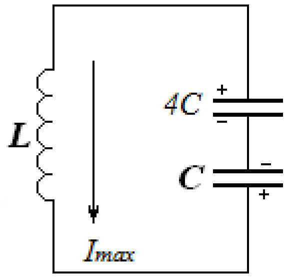
Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и двух последовательно соединенных конденсаторов C и 4C. Конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0, конденсатор емкостью 4C не заряжен. После замыкания ключа в контуре начинаются колебания. Чему равен период этих колебаний? Определите амплитуду тока, максимальное и минимальное значения напряжения на каждом конденсаторе.

Решение:

1 В момент, когда ток в цепи максимален, ЭДС самоиндукции в катушке отсутствует $\mathcal{E}_{si} = -L\dfrac{dI}{dt} = 0$. Записываем для этого момента второй закон Кирхгофа

$$IR = U_1 + U_2 + \mathcal{E}_{si}$$
$$0 = U_1 + U_2$$
$$U_1 = -U_2.$$

Видим, что в тот момент, когда ток в контуре максимален, конденсаторы заряжены до одинакового напряжения, но в противоположной полярности:



2 До замыкания ключа полная энергия системы состояла только из энергии электрического поля конденсатора С:

$$W_0 = W_{эл0} = \frac{CU_0^2}{2}.$$

В момент, когда ток в цепи максимален, энергия системы складывается из энергии магнитного поля тока и энергии двух заряженных до одинакового напряжения конденсаторов:

$$W = W_{эл} + W_{м} = \frac{CU^2}{2} + \frac{4CU^2}{2} + \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + \frac{4CU^2}{2} + \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Для нахождения напряжения на конденсаторах воспользуемся законом сохранения заряда – заряд нижней обкладки конденсатора С частично перешел на верхнюю обкладку конденсатора 4С:

$$q_0 = q_1 + q_2$$
$$CU_0 = CU + 4CU$$
$$U = \frac{U_0}{5}.$$

Подставляем найденное значение напряжения в закон сохранения энергии и находим амплитуду тока в контуре:

$$CU_0^2 = CU^2 + 4CU^2 + LI_{\max}^2$$
$$CU_0^2 = C\left(\frac{U_0}{5}\right)^2 + 4C\left(\frac{U_0}{5}\right)^2 + LI_{\max}^2$$
$$25CU_0^2 = 5CU_0^2 + 25LI_{\max}^2$$
$$I_{\max} = \frac{2U_0}{5}\sqrt{\frac{5C}{L}}.$$

3 Найдем, в каких пределах изменяется напряжение на конденсаторах в процессе колебаний.

Понятно, что в момент замыкания цепи на конденсаторе С было максимальное напряжение $U_{\max 1} = U_0$. Конденсатор 4С был не заряжен, следовательно, $U_{\min 2} = 0$.

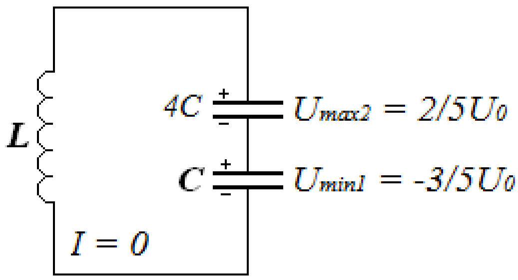
После замыкания ключа конденсатор С начинает разряжаться, а конденсатор емкостью 4С – заряжаться. Процесс разрядки первого и зарядки второго конденсаторов заканчивается, как только прекращается ток в цепи. Это произойдет через половину периода. Согласно законам сохранения энергии и электрического заряда:

$$\begin{cases} \dfrac{CU_0^2}{2} = \dfrac{CU_{\min 1}^2}{2} + \dfrac{4CU_{\max 2}^2}{2} \\ CU_0 = CU_{\min 1} + 4CU_{\max 2} \end{cases}.$$

Решая систему, находим:

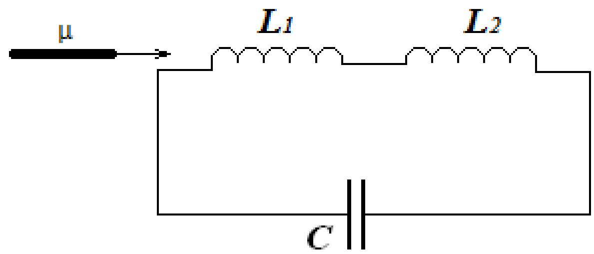
$$U_{\min 1} = -\frac{3}{5}U_0, \quad U_{\max 2} = \frac{2}{5}U_0.$$

Знак «минус» означает, что через полпериода конденсатор емкости С заряжен в полярности, обратной первоначальной.



Задача 5 Колебательный контур с двумя последовательно соединенным катушками

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью С и двух катушек индуктивностью L_1 и L_2. В тот момент, когда ток в контуре принял максимальное значение I_0, в первую катушку быстро (по сравнению с периодом колебаний) вносят железный сердечник, что приводи к увеличению ее индуктивности в μ раз. Чему равна амплитуда напряжения в процессе дальнейших колебаний в контуре?



Решение:

1 При быстром внесении сердечника в катушку должен сохраниться магнитный поток (явление электромагнитной индукции). Поэтому быстрое

изменение индуктивности одной из катушек приведет к быстрому изменению тока в контуре.

$$I_0\left(L_1+L_2\right)=I\left(\mu L_1+L_2\right)$$
$$I=\frac{I_0\left(L_1+L_2\right)}{\mu L_1+L_2}.$$

2 За время внесения сердечника в катушку заряд на конденсаторе измениться не успел, он остался незаряженным (сердечник вносили в тот момент, когда ток в цепи был максимален). Через четверть периода энергия магнитного поля тока перейдет в энергию заряженного конденсатора:

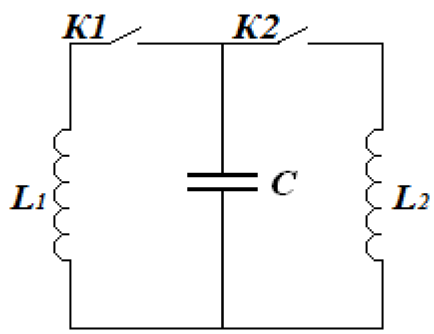
$$\frac{\left(\mu L_1+L_2\right)I^2}{2}=\frac{CU_{\max}^2}{2}.$$

Подставляем в полученное выражение значение тока *I* и находим амплитуду напряжения на конденсаторе:

$$\frac{\left(L_1+L_2\right)^2 I_0^2}{2\left(\mu L_1+L_2\right)}=\frac{CU_{\max}^2}{2}$$
$$U_{\max}=\frac{\left(L_1+L_2\right)I_0}{\sqrt{C\left(\mu L_1+L_2\right)}}.$$

Задача 6 Колебательный контур с двумя параллельно соединенным катушками

Катушки индуктивности L_1 и L_2 подключены через ключи К1 и К2 к конденсатору емкостью С. В начальный момент оба ключа разомкнуты, а конденсатор заряжен до разности потенциалов U_0. Сначала замыкают



ключ К1 и, когда напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают К2. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания К2. Сопротивлениями катушек пренебречь.

Решение:

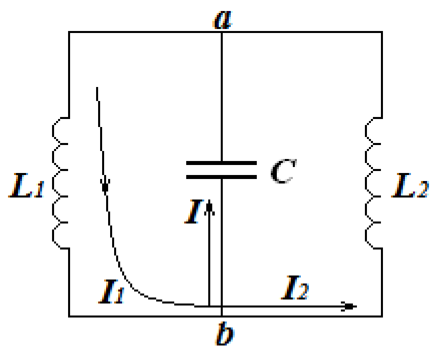
1 При разомкнутом ключе К2 в контуре, состоящем из конденсатора и первой катушки, происходят колебания. К моменту замыкания К2 энергия конденсатора перешла в энергию магнитного поля тока в первой катушке I_{01}:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_{01}^2}{2}$$

$$I_{01} = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}.$$

2 После замыкания К2 в колебательном контуре оказываются две катушки, соединенные параллельно.

Ток в первой катушке не может прекратиться вследствие явления самоиндукции. В узле он делится: одна часть тока идет во вторую катушку, а другая заряжает конденсатор $I_1 = I + I_2$.



3 Напряжение на конденсаторе станет максимальным, когда прекратится ток I, заряжающий конденсатор. Очевидно, что в этот момент токи в катушках сравняются $I_1 = I_2$.

4 На основании закона сохранения энергии

$$\frac{L_1 I_0^2}{2} = \frac{CU_{\max}^2}{2} + \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}.$$

С учетом того, что $\dfrac{CU_0^2}{2} = \dfrac{L_1 I_{01}^2}{2}$ и $I_1 = I_2$, получаем

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{CU_{\max}^2}{2} + \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_1^2}{2}$$
$$CU_0^2 = CU_{\max}^2 + I_1^2 (L_1 + L_2).$$

5 Для нахождения тока $I_1 = I_2$ запишем для ветвей, содержащих катушки, закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = (\varphi_a - \varphi_b) + \mathcal{E}_{si1} \\ I_2 R_2 = (\varphi_b - \varphi_a) + \mathcal{E}_{si2} \end{cases}.$$

Складываем уравнения с учетом того, что омическим сопротивлением катушек можно пренебречь:

$$\mathcal{E}_{si1} + \mathcal{E}_{si2} = 0$$
$$\mathcal{E}_{si1} = -\mathcal{E}_{si2}$$
$$-L_1 \frac{dI_1}{dt} = -\left(-L_2 \frac{dI_2}{dt}\right)$$
$$L_1 dI_1 = -L_2 dI_2.$$

Интегрируем с учетом то, что ток в первой катушке меняется от I_{01} до I_1 , ток во второй катушке изменяется от нуля до $I_2 = I_1$:

$$\int_{I_{01}}^{I_1} L_1 dI_1 = -\int_0^{I_2} L_2 dI_2$$

$$L_1 I_1 - L_1 I_{01} = -\left(L_2 I_2 - 0\right)$$

$$L_1 I_1 + L_2 I_2 = L_1 I_{01}$$

$$L_1 I_1 + L_2 I_1 = L_1 I_{01}$$

$$I_1 = \frac{L_1 I_{01}}{L_1 + L_2}.$$

6 Подставляя значение тока I_1 в закон сохранения энергии, находим максимальное напряжение на конденсаторе:

$$CU_0^2 = CU_{\max}^2 + I_1^2\left(L_1 + L_2\right)$$

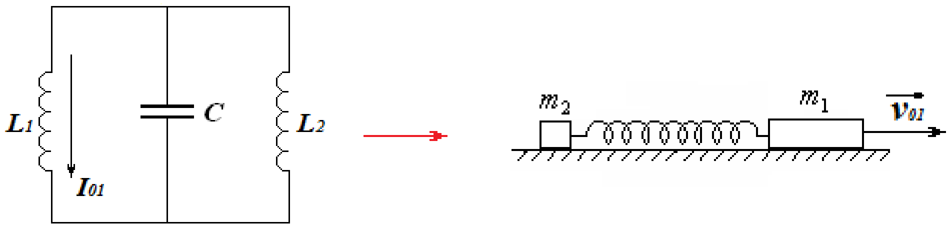
$$CU_0^2 = CU_{\max}^2 + \left(\frac{L_1 I_{01}}{L_1 + L_2}\right)^2 \left(L_1 + L_2\right)$$

$$U_{\max} = \sqrt{U_0^2 - \frac{\left(L_1 I_{01}\right)^2}{C\left(L_1 + L_2\right)}}.$$

После подстановки значения $I_{01} = U_0 \sqrt{\dfrac{C}{L_1}}$ получаем:

$$U_{\max} = \sqrt{U_0^2 - \frac{\left(L_1 I_{01}\right)^2}{C\left(L_1 + L_2\right)}} = \sqrt{U_0^2 - \frac{L_1^2}{C\left(L_1 + L_2\right)} \cdot U_0^2 \frac{C}{L_1}} = U_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}.$$

7 Можно было решить задачу, используя механическую аналогию. Колебательный контур состоит из двух катушек и конденсатора, следовательно, эквивалентная механическая система должна состоять из одной пружины и двух грузов.



Колебательный контур	Механическая аналогия
Катушки соединены параллельно, следовательно, на них **одинаковое напряжение**	На грузы действуют одинаковые по модулю силы – оба груза прикреплены к пружине
Сразу после замыкания К2 в первой катушке существовал ток I_{01}	В начальный момент первый груз имел скорость $\vec{v}_{01}$
Сразу после замыкания К2 ток во второй катушке отсутствовал	В начальный момент второй груз покоился
Каково максимальное значения напряжения на конденсаторе?	Чему равна максимальная сила упругости, возникающая в пружине в процессе колебаний?

Маятник двигается поступательно со скоростью центра масс $\vec{v}_{цм} = \dfrac{m_1 \vec{v}_{01}}{m_1 + m_2}$ и совершает колебания относительно центра масс.

Сила упругости максимальна в момент максимальной деформации пружины. Очевидно, в этот момент относительная скорость грузов становится равной нулю, а относительно стола грузы двигаются со скоростью центра масс. Записываем закон сохранения энергии:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 v_{01}^2}{2} = \dfrac{k\Delta l_{\max}^2}{2} + \dfrac{m_1 v_{цм}^2}{2} + \dfrac{m_2 v_{цм}^2}{2} \\ v_{цм} = \dfrac{m_1 v_{01}^2}{m_1 + m_2} \end{cases}.$$

Решая систему, находим

$$\Delta l_{\max} = v_{01}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} = \Delta l_0 \sqrt{\frac{k}{m_1}} \cdot \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} = \Delta l_0 \sqrt{\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}}$$

$$F_{\max} = k\Delta l_{\max} = k\Delta l_0 \sqrt{\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}}.$$

Производим замену

$$\begin{array}{ccc} m_1 & \rightarrow & L_1 \\ m_2 & \rightarrow & L_2 \\ k\Delta l_0 & \rightarrow & U_0 \end{array}$$

и получаем для максимального напряжения найденное ранее значение $U_{\max} = U_0 \sqrt{\dfrac{L_2}{L_1 + L_2}}$.

§6 Задания для самостоятельного решения

Упражнение1 Расчет периода и частоты собственных колебаний

1 В колебательный контур входят катушка переменной индуктивности, изменяющаяся в пределах L_1 = 0,5 мкГн до L_2 = 10 мкГн, и конденсатор, емкость которого может изменяться в пределах от C_1 = 10 пФ до C_2 =500 пФ. Какой диапазон частот можно охватить настройкой этого контура?

2 Во сколько раз изменится частота собственных колебаний в контуре, если его индуктивность увеличить в 10 раз, а емкость уменьшить в 2,5 раза?

3 Колебательный контур с конденсатором емкость 1 мкФ настроен на частоту 400 Гц. Если подключить к нему параллельно второй конденсатор, то частота колебаний в контуре становится равной 200 Гц. Определите емкость второго конденсатора.

4 Колебательный контур состоит из катушки и конденсатора. Во сколько раз изменится частота собственных колебаний в контуре, если в контур последовательно включить второй конденсатор, емкость которого в 3 раза меньше емкости первого?

5 Определите период колебаний контура, в состав которого входит катушка (без сердечника) длины $в$ = 50 см м площади поперечного сечения S = 3 см^2, имеющая N = 1000 витков, и конденсатора емкости C = 0,5 мкФ.

6 В состав колебательного контура входит катушка индуктивности L = 1,0 мкГн и воздушный конденсатор, площади пластин которого S = 100 см^2. Контур настроен на частоту 30 МГц. Определите расстояние между пластинами. Активное сопротивление контура пренебрежимо мало.

7 Как изменится период колебаний в контуре, если в контур включить последовательно еще одну катушку, индуктивность которой в 3 раза больше индуктивности контурной катушки?

8 Контур настроен на частоту 400 Гц. Какой будет собственная частота колебательного контура, если параллельно контурной катушке включить еще одну, с индуктивностью в 3 раза меньшей?

Упражнение 2 Читаем уравнение гармонических колебаний

1 Заряд на конденсаторе в колебательном контуре изменяется по закону $q(t) = 2\cdot\cos\left(5\cdot 10^4 t\right)\ (\text{нКл})$. Определите амплитудные значения заряда, силы тока и напряжения на конденсаторе, частоту и период колебаний. Емкость конденсатора в контуре C = 0,4 мкФ. Запишите закон, по которому изменяются сила тока в контуре и напряжение на конденсаторе.

2 Ток в колебательном контуре зависит от времени по закону $I(t) = 9 \cdot \sin\left(4{,}5 \cdot 10^4 t\right)$ (мА). Определите амплитудные значения заряда, силы тока и напряжения на конденсаторе, частоту и период колебаний. Емкость конденсатора в контуре C = 0,5 мкФ. Запишите закон, по которому изменяются заряд и напряжение на конденсаторе.

3 В колебательном контуре индуктивность катушки L = 2,5 мГн, а емкость конденсатора 1 мкФ. Конденсатор зарядили до напряжения 20 В и замкнули на катушку. Определите период и частоту возникших в контуре колебаний. Запишите закон, по которому изменяются напряжение и заряд на конденсаторе, сила тока в контуре.

4 Заряженный конденсатор емкостью 4 мкФ подключили к катушке с индуктивностью 90 мГн. Через какое минимальное время от момента подключения заряд конденсатора уменьшится в 2 раза?

Упражнение 3 Закон сохранения энергии в колебательном контуре

1 Максимальная разность потенциалов на конденсаторе в колебательном контуре 100 В. Какой будет максимальная сила тока, если конденсатор имеет емкость 36 мкФ, а катушка обладает индуктивностью 0,01 Гн?

2 Колебательный контур состоит из катушки индуктивности 1,6 мГн и конденсатора емкости 0,04 мкФ. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора равно 200 В. Определите максимальную силу тока в контуре, если его активное сопротивление пренебрежимо мало.

3 Колебательный контур состоит из дросселя индуктивности L=0,2 Гн и конденсатора емкости C=10 мкФ. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе U=1 В, ток в катушке равен I=10 мА. Определите максимальное значение силы тока в катушке, максимальные заряд и напряжение на конденсаторе.

4 По условию предыдущей задачи определите заряд на конденсаторе в тот момент, когда сила ток в катушке будет равна I_1 = 10 мА.

5 По условию предыдущей задачи определите значение силы тока I_2 в катушке в тот момент, энергия контура окажется поровну распределенной между электрическим и магнитным полями.

6 Заряженный конденсатор емкости C замкнули на катушку индуктивности L. Через какое время после подключения энергия электрического поля конденсатора впервые станет равной энергии магнитного поля катушки?

Тест № 1 «Период и частота свободных электрических колебаний»

1 Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 0,1 мГн и конденсатора емкостью 4 мкФ. Чему равна собственная частота этого колебательного контура?

А) $2 \cdot 10^{-5}$ Гц; Б) 12, $56 \cdot 10^{-5}$ Гц; В) 7962 Гц; Г) 50 кГц.

2 В колебательном контуре происходят свободные электрические колебания. Как следует изменить емкость конденсатора, чтобы циклическая частота колебаний в контуре увеличилась в два раза?

А) Увеличить в 2 раза; Б) Увеличить в 4 раза;

В) Уменьшить в 2 раза; Г) Уменьшить в 4 раза.

3 В колебательном контуре происходят свободные электрические колебания. Как следует изменить индуктивность катушки, чтобы период колебаний уменьшился в 3 раза?

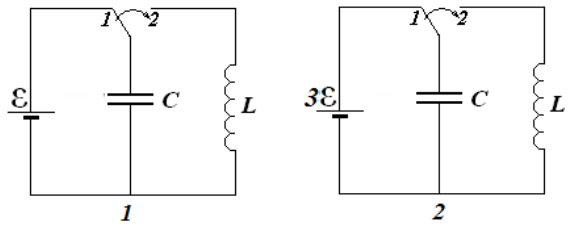
А) Уменьшить в $\sqrt{3}$ раз; Б) Уменьшить в 3 раза;

В) Уменьшить в 9 раз; Г) Увеличить в 9 раз.

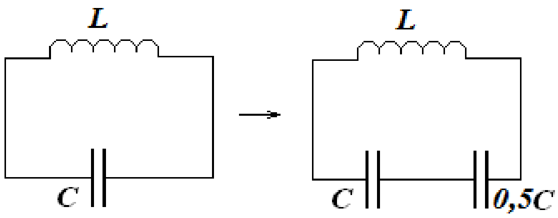
4 В двух колебательных контурах возбуждают свободные электрические колебания, перебрасывая ключ из положения 1 в положение 2. Во сколько раз отличаются частоты колебаний в контурах?

А) $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = 1$;　　　Б) $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

В) $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{1}{3}$;　　　Г) $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = 3$.



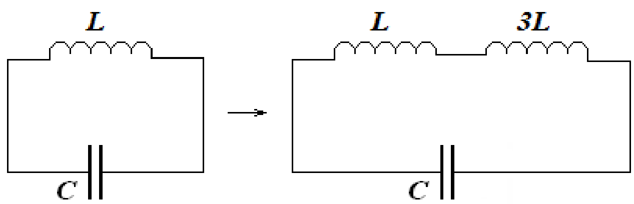
5 Как изменится период колебаний в контуре, если последовательно с контурным конденсатором включить второй конденсатор, вдвое меньшей емкости?



А) Увеличится в 1,5 раза;　　　Б) Увеличится в 3 раза;

В) Уменьшится в 3 раза;　　　Г) Уменьшится в $\sqrt{3}$ раз.

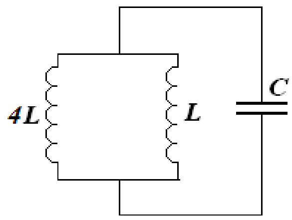
6 Как изменится частота колебаний в контуре, если последовательно с контурной катушкой подключить катушку втрое большей индуктивности?



А) Увеличится в 2 раза;　　　Б) Увеличится в 4 раза;

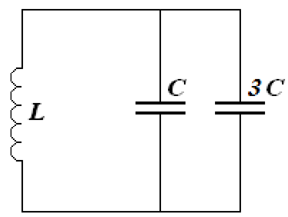
В) Уменьшится в 2 раза;　　　Г) Уменьшится в 4 раза.

7 Чему равен период колебаний в контуре, изображенном на рисунке?



А) $T=\pi\sqrt{5LC}$;   Б) $T=2\pi\sqrt{5LC}$;   Б) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{4LC}{5}}$;   Г) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{3LC}{5}}$.

8 Чему равна циклическая частота колебаний в контуре, изображенном на рисунке?



А) $\omega=2\sqrt{LC}$;   Б) $\omega=\dfrac{1}{4\pi\sqrt{LC}}$;   В) $\omega=\dfrac{1}{2\sqrt{LC}}$;   Г) $\omega=\dfrac{2}{\sqrt{3LC}}$.

Тест № 2 «Процессы, происходящие в колебательном контуре»

1 В контуре происходят свободные электрические колебания с частотой 1 кГц. Максимальный заряд на конденсаторе равен $q_{\max}=0{,}5$ мкКл. Какова амплитуда тока в контуре?

А) $0{,}08\cdot10^{-3}$ мкА;   Б) $0{,}5\cdot10^{-3}$ мкА;   В) 0,5 мА;   Г) 3,14 мА.

2 Заряд на конденсаторе в колебательном контуре изменяется по закону $q(t)=2\cdot\cos(1000\pi t)$ (мкКл). По какому закону изменяется сила тока в контуре?

А) $I(t)=2\cdot\sin(1000\pi t)$ (мА);   Б) $I(t)=2\pi\cdot\sin(1000\pi t)$ (мА);

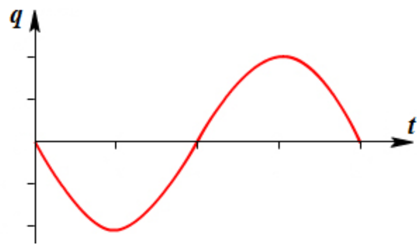
В) $I(t) = -2 \cdot \sin(1000\pi t)$ (мА); Г) $I(t) = -2\pi \cdot \sin(1000\pi t)$ (мА).

3 Сила тока в колебательном контуре изменяется по закону $I(t) = 1{,}26 \cdot \sin(1000\pi t)$ (мА). По какому закону изменяется заряд на конденсаторе?

А) $q(t) = 1{,}26 \cdot \cos(1000\pi t)$ (мкКл); Б) $q(t) = -0{,}4 \cdot \cos(1000\pi t)$ (мкКл);

В) $q(t) = -1{,}26 \cdot \cos(1000\pi t)$ (мкКл); Г) $q(t) = 4 \cdot \cos(1000\pi t)$ (Кл).

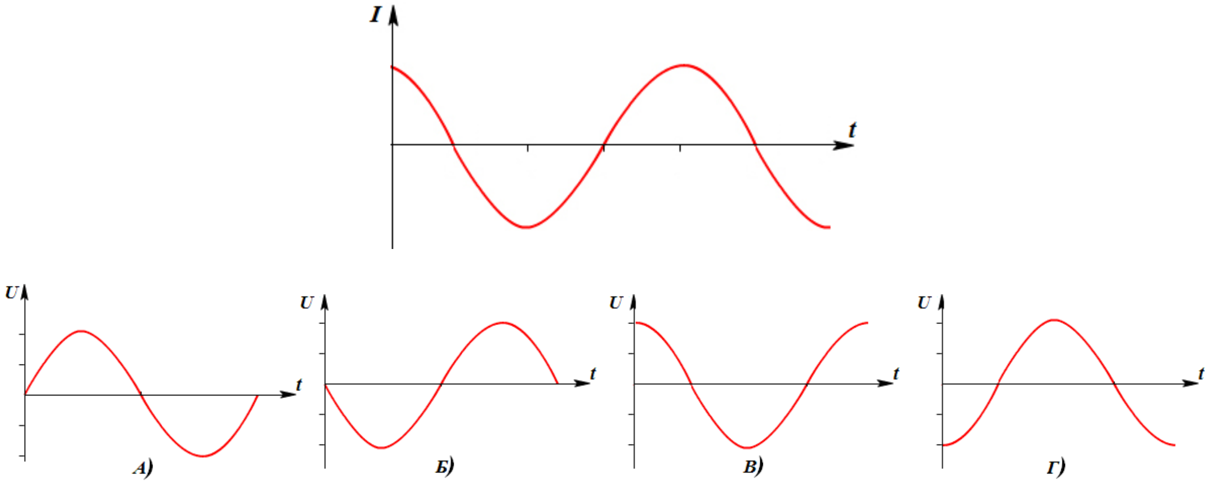
4 В колебательном контуре происходят свободные электрические колебания. Зависимость заряда конденсатора от времени показана на рисунке. По какому закону изменяется сила тока в контуре?



А) $I(t) = I_{\max} \cdot \sin(\omega t)$; Б) $I(t) = -I_{\max} \cdot \sin(\omega t)$;

В) $I(t) = I_{\max} \cdot \cos(\omega t)$; Г) $I(t) = -I_{\max} \cdot \cos(\omega t)$.

5 Зависимость силы тока в колебательном контуре от времени показана на рисунке. Какой график правильно отражает зависимость напряжения на конденсаторе от времени?



6 Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки. Что можно сказать о заряде на конденсаторе в тот момент, когда энергия магнитного поля тока равна нулю?

А) Заряд на конденсаторе максимален;

Б) Конденсатор не заряжен;

В) Конденсатор заряжается, заряд на нем увеличивается;

Г) Конденсатор разряжается, заряд на нем уменьшается.

7 Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки. Что можно сказать о токе в контуре, когда напряжение на конденсаторе максимально?

А) Ток в контуре увеличивается;

Б) Ток в контуре уменьшается;

В) Ток в контуре отсутствует;

Г) Ток в контуре максимален.

8 Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки. Максимальное значение энергии электрического поля конденсатора равно $W_{эл.\max} = 0,5$ Дж, максимальное значение энергии магнитного поля тока тоже

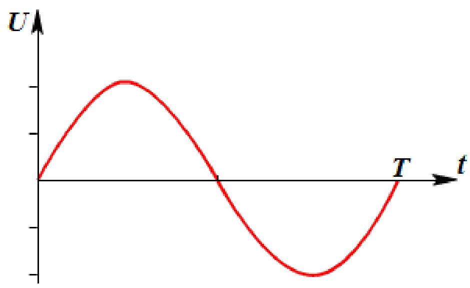
равно $W_{маг.\max} = 0{,}5$ Дж. Какой энергией обладает конденсатор в тот момент, когда энергия тока равна 0,3 Дж?

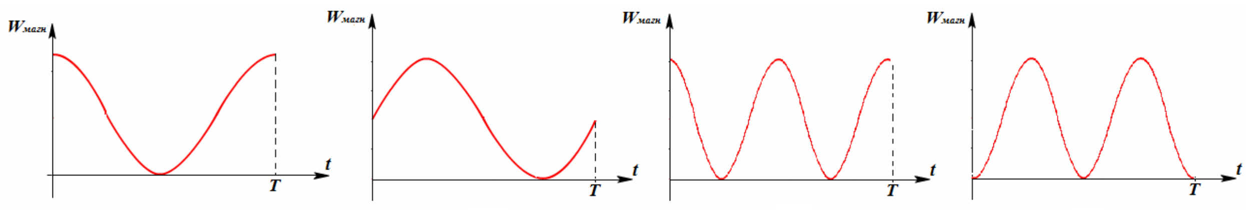
А) 0,8 Дж; Б) 0,7 Дж; В) 0,3 Дж; Г) 0,2 Дж.

9 Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки. Максимальное значение энергии электрического поля конденсатора равно $W_{эл.\max} = 1$ Дж. Какую часть от амплитудного значения составляет заряд на конденсаторе в тот момент, когда энергия магнитного поля тока равна 0,75 Дж?

А) $\dfrac{q}{q_{\max}} = \dfrac{1}{4}$; Б) $\dfrac{q}{q_{\max}} = \dfrac{1}{2}$; В) $\dfrac{q}{q_{\max}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $\dfrac{q}{q_{\max}} = \dfrac{3}{4}$.

10 В колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки, напряжение на конденсаторе изменяется с течение времени так, как показано на рисунке. Какой из графиков правильно отражает зависимость энергии магнитного поля тока от времени?





А) *Б)* *В)* *Г)*

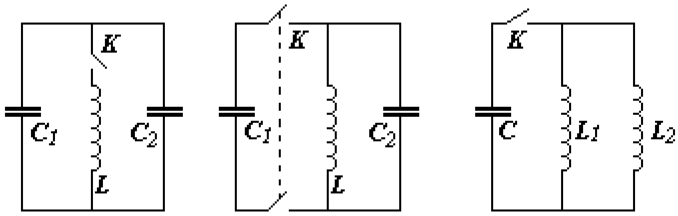
Задачи

1 Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 1{,}6$ мГн и конденсатора емкостью $C = 0{,}04$ мкФ. Максимальное значение напряжения на конденсаторе $U_0 = 200$ В. Определите максимальную силу тока в катушке. Активное сопротивление контура пренебрежимо мало. Каков период колебаний в контуре?

2 В колебательном контуре индуктивность катушки $L = 2{,}5$ мГн, а емкости конденсаторов $C_1 = 2$мкФ и $C_2 = 3$ мкФ. Конденсаторы зарядили до напряжения $U_0 = 180$ В и замкнули ключ К. Определите период возникших в контуре колебаний и амплитудное значение силы тока. Активное сопротивление контура пренебрежимо мало.

3 Конденсатор емкости C_1 зарядили до напряжения U_0, а затем подключили, замкнув ключ К, к колебательному контуру, состоящему из катушки индуктивности L и конденсатора емкости C_2. Определите максимальные заряды на конденсаторах в процессе возникших колебаний и максимальную силу тока в контуре.

4 Конденсатор емкости С, заряженный до разности потенциалов U_0, замыканием ключа К подключают к двум параллельно соединенным катушкам с индуктивностями L_1 и L_2. Через некоторое время спустя конденсатор полностью перезаряжается (напряжение на нем поменяет знак). Какие заряды протекут через катушки за это время? Сопротивления катушек и подводящих проводов пренебрежимо малы.



задача 2 задача 3 задача 4

Глава 5 Затухающие колебания

В реальных механических колебательных системах при выведении их из положения равновесия кроме квазиупругой силы действует сила трения.

$$A_{тр} = -\Delta E = -(E_2 - E_1) = E_1 - E_2 \; \langle \; 0.$$

Поскольку она направлена против скорости, работа силы трения отрицательна. Эта работа приводит к уменьшению полной механической энергии колебательной системы.

Уменьшение энергии колебательной системы приводит к постепенному уменьшению амплитуды колебаний, ибо

$$E = E_{p\max} = \frac{kA^2}{2}.$$

В этом случае говорят, что ***колебания затухают***.

Аналогичная ситуация складывается в колебательном контуре. Реальная катушка, входящая в состав контура, всегда обладает активным сопротивлением R. При протекании тока на активном сопротивлении катушки будет выделяться джоулево тепло $dQ = I^2 R dt$. Энергия контура при этом будет уменьшаться, что будет приводить к уменьшению амплитуды колебаний заряда, напряжения и силы тока.

Наша задача – выяснить по какому закону происходит уменьшение амплитуды колебаний, по какому закону изменяется сама колеблющаяся величина, с какой частотой происходят затухающие колебания, как долго колебания «затухают».

§1 Затухание колебаний в системах с вязким трением

Рассмотрим колебательную систему, в которой действует сила вязкого трения. Примером такой колебательной системы может служить математический маятник, совершающий колебания в воздушной среде.

В этом случае при выведении системы из положения равновесия на маятник будут действовать две силы: квазиупругая сила и сила сопротивления (сила вязкого трения).

Второй закон Ньютона запишется следующим образом:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр}. \tag{1}$$

Мы знаем, что при малых скоростях сила вязкого трения пропорциональна скорости движения:

$$F_{трx} = -rv_x.$$

Знак «-» указывает на то, что сила вязкого трения всегда направлена против скорости движения тела.

Тогда выражение (1) в проекции на ось OX, вдоль которой происходят колебания, будет выглядеть следующим образом:

$$ma_x = -kx - r\nu_x. \tag{2}$$

Учтем, что проекция скорости есть первая производная от координаты тела, а проекция ускорения – вторая производная от координаты:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x', \qquad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = x''.$$

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$mx'' = -kx - rx'$$
$$mx'' + rx' + kx = 0.$$

Разделив все члены уравнения на m и обозначив

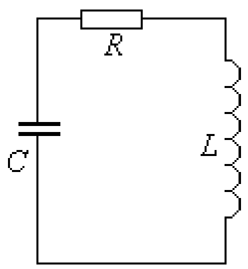
$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{r}{m} = 2\delta,$$

получим уравнение движения в следующем виде:

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = 0, \tag{3}$$

где δ - коэффициент затухания, он зависит от коэффициента трения r, ω_0 - циклическая частота идеальных колебаний (в отсутствие трения).

Прежде чем решать уравнение (3), рассмотрим колебательный контур.



Активное сопротивление катушки R включено последовательно с емкостью C и индуктивностью L. Запишем второй закон Кирхгофа

$$U_c + IR = \mathcal{E}_{si}.$$

Учтем, что $U_c = \dfrac{q}{C}$, $\qquad I = q' \;\Rightarrow\; \dfrac{dI}{dt} = q''$, $\qquad \mathcal{E}_{si} = -L\dfrac{dI}{dt}$.

Тогда второй закон Кирхгофа примет вид:

$$L \cdot q'' + R \cdot q' + \frac{1}{C} \cdot q = 0.$$

Разделим обе части уравнения на L:

$$q'' + \frac{R}{L} \cdot q' + \frac{1}{LC} \cdot q = 0.$$

Введем обозначения

$$\frac{R}{L} = 2\delta \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

Окончательно получаем

$$q'' + 2\delta \cdot q' + \omega_0^2 \cdot q = 0. \tag{3'}$$

Обратите внимание на математическую тождественность дифференциальных уравнений (3) и (3'). В этом нет ничего удивительного. Мы уже показывали абсолютную математическую тождественность процесса колебания маятника и электромагнитных колебаний в контуре. Очевидно, процессы затухания колебаний в контуре и в системах с вязким трением тоже происходят одинаково.

Решив уравнение (3), мы получим ответы на все поставленные выше вопросы.

Уравнение (3) можно привести к уравнению гармонических колебаний, применив подстановку

$$x = y \cdot e^{-\delta t},$$

$$x' = y' \cdot e^{-\delta t} + y \cdot \left(-\delta e^{-\delta t}\right),\ x'' = y'' \cdot e^{-\delta t} + y' \cdot \left(-\delta e^{-\delta t}\right) + y' \cdot \left(-\delta e^{-\delta t}\right) + y \cdot \left(-\delta e^{2-\delta t}\right),$$

$$y'' \cdot e^{-\delta t} + y' \cdot \left(-\delta e^{-\delta t}\right) + y' \cdot \left(-\delta e^{-\delta t}\right) + y \cdot \left(-\delta^2 e^{-\delta t}\right) + 2\delta \cdot y' \cdot e^{-\delta t} +$$
$$+ y \cdot \left(-\delta e^{-\delta t}\right) + \omega_0^2 y \cdot e^{-\delta t} = 0.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$y'' - 2\delta y' - \delta^2 y + 2\delta y' + \omega_0^2 y = 0$$
$$y'' + \left(\omega_0^2 - \delta^2\right) y = 0.$$

Если $\delta^2 < \omega_0^2$, то величина $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$, ее можно обозначить $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$. Получаем знакомое уравнение гармонических колебаний $y'' + \omega^2 y = 0$. Решение этого уравнения нам известно

$$y = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Тогда для искомого уравнения (3) получаем окончательный результат

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Нетрудно видеть, что заряд конденсатора в реальном колебательном контуре будет изменяться по закону

$$q = q_0 \cdot e^{-\delta t} cos(\omega t + \varphi_0).$$

Анализ полученного результата:

1 В результате совместного действия квазиупругой силы и силы сопротивления система ***может*** совершать колебательное движение. Для этого должно выполняться условие $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$. Иными словами, трение в системе должно быть невелико.

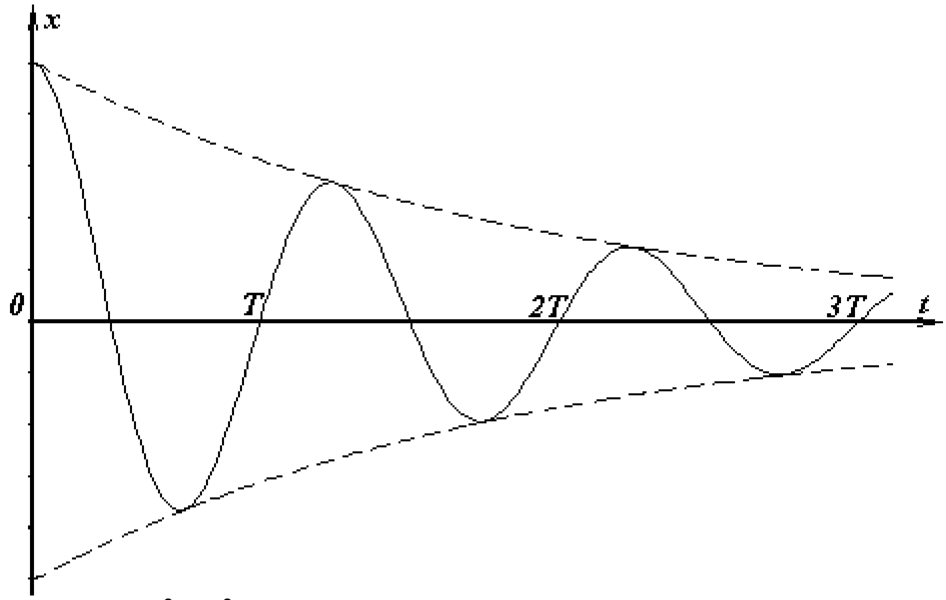
2 Частота затухающих колебаний ω не совпадает с частотой колебаний системы в отсутствие трения $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 < \omega_0^2$. ***С течение времени частота затухающих колебаний остается неизменной.***

Если коэффициент затухания δ мал, то частота затухающих колебаний близка к собственной частоте ω_0.

3 Амплитуда затухающих колебаний, как это и было предсказано ранее, уменьшается с течением времени.

$$A = A_o \cdot e^{-\delta t}.$$

Это убывание амплитуды происходит по экспоненциальному закону.

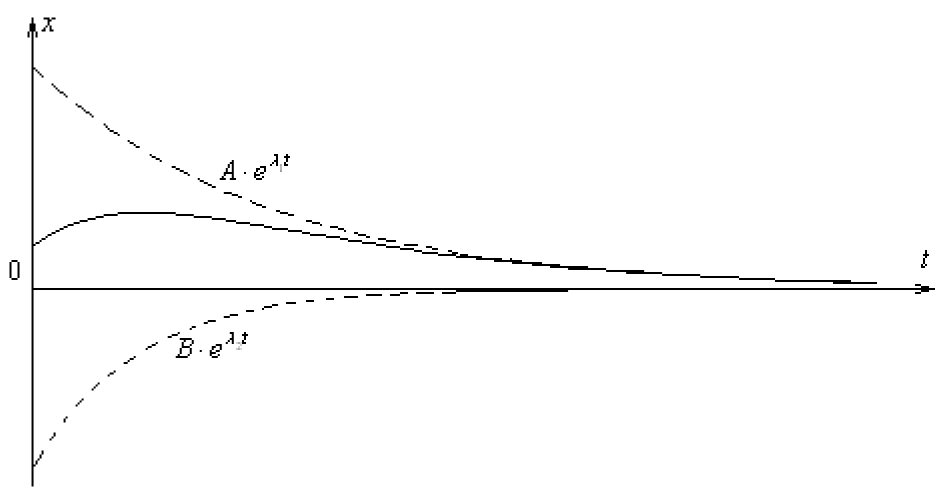


4 Если $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$, то есть трение в системе велико, то уравнение (3) имеет решение вида

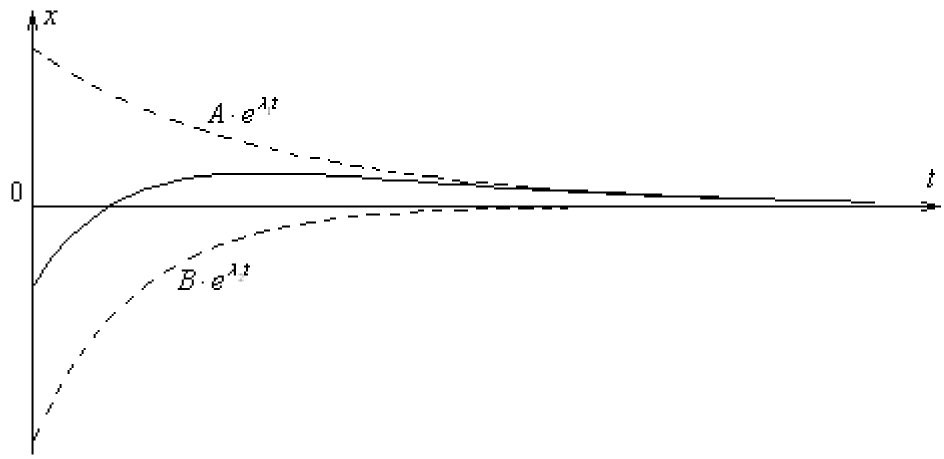
$$x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}, \tag{4}$$

где $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция (4) действительно является решением уравнения (3). Очевидно, что сумма двух экспоненциальных функций не является периодической функцией. С физической точки зрения это означает, что колебания в системе не возникнут. После выведения системы из положения равновесия она будет медленно в него возвращаться. Такой процесс называется ***апериодическим***.



или



§2 Как быстро затухают колебания в системах с вязким трением?

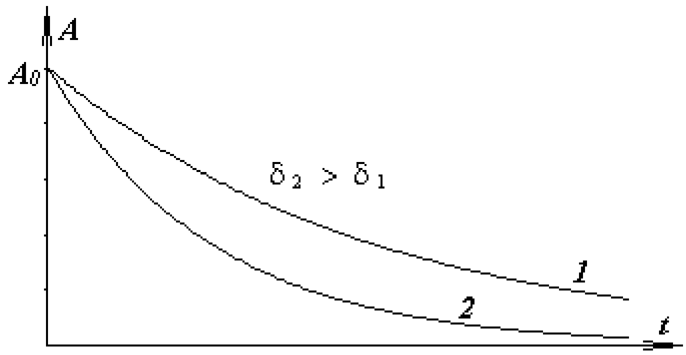
Декремент затухания

Мы показали, что при наличии вязкого трения в системе она совершает колебания, амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

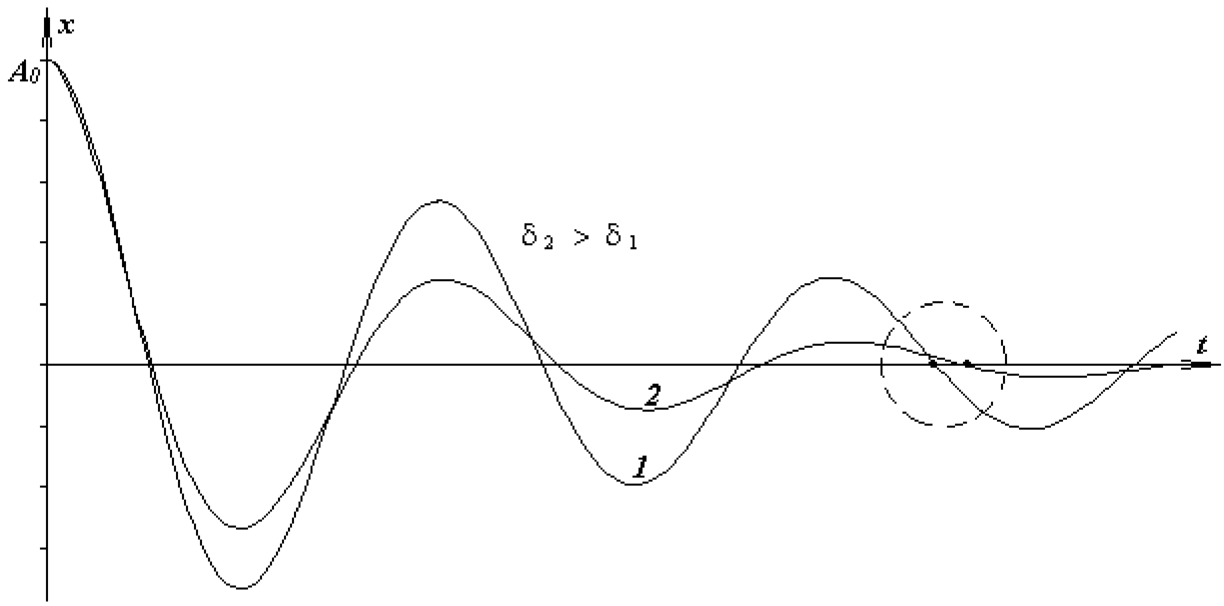
Быстрота затухания ***(убывания амплитуды)*** $A = A_0 \cdot e^{-\delta t}$ ***зависит от трения в системе: чем больше коэффициент сопротивления*** r***, тем больше***

значение величины $\delta = \dfrac{r}{2m}$. Видно, что величина δ характеризует быстроту затухания колебаний. По этой причине δ называют коэффициентом затухания.



Для электрических колебаний в контуре коэффициент затухания $\delta = \dfrac{R}{2L}$ зависит от параметров катушки: чем больше активное сопротивление катушки, тем быстрее убывают амплитуды заряда на конденсаторе, напряжения, силы тока.

Функция $x = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot cos(\omega t + \varphi_0)$ является произведением убывающей показательной функции $e^{-\delta t}$ и гармонической функции $cos(\omega t + \varphi_0)$, поэтому ***функция*** $x(t)$ ***не является гармонической.*** Но $x(t)$ обладает определенной степенью «повторяемости», заключающейся в том, что максимумы, минимумы, нули функции наступают через равные промежутки времени. График функции $x(t)$ представляет собой синусоиду, ограниченную двумя экспонентами.



Найдем отношение двух последовательных амплитуд, разделенных промежутком времени в один период. Это отношение называют ***декрементом затухания***

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 \cdot e^{-\delta t}}{A_0 \cdot e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}.$$

Обратите внимание, что результат не зависит от того, какие два последовательных периода вы рассматриваете – в начале колебательного движения или по прошествии какого-то времени. ***За каждый период амплитуда колебаний меняется*** не на одинаковую величину, а ***в одинаковое количество раз***!!

Нетрудно видеть, что ***за любые разные промежутки времени амплитуда затухающих колебаний уменьшается в одинаковое количество раз.***

Время релаксации

Временем релаксации называется ***время*** τ***, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз:***

$$\frac{A_t}{A_{t+\tau}} = \frac{A_0 \cdot e^{-\delta t}}{A_0 \cdot e^{-\delta(t+\tau)}} = e^{\delta\tau} = e.$$

Тогда $\delta\tau = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\delta}$.

Отсюда нетрудно установить физический смысл коэффициента затухания:

$$\delta = \frac{1}{\tau}.$$

Таким образом, коэффициент затухания δ есть величина, обратная времени релаксации τ. Пусть, например, в колебательном контуре коэффициент затухания равен $\delta = 10^4$ с$^{-1}$. Это значит, что через время $\tau = 10^{-4}$ с амплитуда колебаний уменьшится в *e* раз.

Логарифмический декремент затухания

Часто быстроту затухания колебаний характеризуют логарифмическим декрементом затухания. Для этого берут натуральный логарифм от отношения амплитуд, разделенных промежутком времени в период.

$$\theta = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \delta T.$$

Выясним физический смысл логарифмического декремента затухания.

Пусть N – число колебаний, совершаемых системой за время релаксации, то есть число колебаний, за которое амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз. Очевидно, $T = \frac{\tau}{N}$.

Тогда

$$\theta = \delta T = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau}{N} = \frac{1}{N}.$$

Видно, что логарифмический декремент затухания θ - есть величина, обратная числу колебаний, по прошествии которых амплитуда уменьшается в *e* раз.

Допустим, $\theta = 0{,}01$, это значит, что по прошествии 100 колебаний амплитуда уменьшится в *e* раз.

Добротность колебательной системы

Кроме логарифмического декремента затухания и времени релаксации, быстроту затухания колебаний можно характеризовать такой величиной, как ***добротность колебательной системы***. Под добротностью понимают увеличенное в 2π раз отношение полной энергии системы E к энергии W , рассеянной за период:

$$Q = 2\pi \frac{E}{W}.$$

Очевидно, что чем меньше энергии рассеивается за период за счет работы силы сопротивления, тем больше добротность колебательной системы. В идеальном случае (при отсутствии потерь) добротность колебательной системы стремится к бесконечности.

Можно показать, что ***для слабо затухающих колебаний***

$$Q = \frac{\pi}{\theta}.$$

***

Энергия колебательной системы в произвольный момент времени t равна $\frac{kA_t^2}{2}$. Потери энергии за период можно найти как разность энергии в момент времени t и энергии через время, равное периоду:

$$W = E_t - E_{t+T} = \frac{kA_t^2}{2} - \frac{k\left(A_t \cdot e^{-\delta T}\right)^2}{2} = \frac{kA_t^2}{2}\left(1 - e^{-2\delta T}\right).$$

Тогда

$$Q = 2\pi \frac{E_t}{\left|A_{conp}\right|} = \frac{\frac{kA_t^2}{2}}{\frac{kA_t^2}{2}\left(1 - e^{-2\delta T}\right)} = 2\pi\left(1 - e^{-2\delta T}\right)^{-1}.$$

Показательную функцию можно разложить в ряд $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \approx 1 + x$ при $x << 1$. после подстановки получаем $Q = 2\pi \cdot \left(1 - \left(1 - 2\delta T\right)\right)^{-1} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\theta}$.

При выводе нами было наложено ограничение $2\delta T << 1$, что верно только для слабо затухающих колебаний. Следовательно, область применения выражения для добротности $Q = \frac{\pi}{\theta}$ ограничена только слабо затухающими колебаниями. Тогда как выражение $Q = 2\pi \frac{E}{W}$ применимо к любой колебательной системе.

Формулы, полученные нами для добротности системы, пока ни о чем не говорят. Допустим, расчеты дают значение добротности Q = 10. Что это означает? Как быстро затухают колебания? Это хорошо или плохо?

Обычно условно считают, что колебания практически прекратились, если их энергия уменьшилась в 100 раз (амплитуда – в 10). Выясним, какое количество колебаний совершила система к этому моменту:

$$\frac{E_0}{E} = 100 = \frac{kA_0^2 / 2}{kA^2 / 2} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 = \left(\frac{A_0}{A_0 \cdot e^{-\delta t}}\right)^2 = \left(\frac{A_0}{A_0 \cdot e^{-\delta TN}}\right)^2 = e^{2\delta TN}$$

$$\ln 100 = \ln\left(e^{2\delta TN}\right)$$

$$\ln 100 = 2\delta TN$$

$$N = \frac{\ln 100}{2\theta} = \frac{\ln 100}{2 \cdot \frac{\pi}{Q}} \approx \frac{4{,}6Q}{2\pi} \approx 0{,}74Q.$$

Можем ответить на поставленный ранее вопрос: N = 8.

Какая колебательная система лучше – с большой или малой добротностью? Ответ на этот вопрос зависит от того, что вы хотите получить от колебательной системы.

Если вы желаете, чтобы система совершила как можно больше колебаний до остановки, добротность системы нужно увеличивать. Как? Поскольку добротность определяется параметрами самой колебательной системы, то необходимо правильно эти параметры подобрать.

Например, маятник Фуко, установленный в Исаакиевском соборе, должен был совершать слабо затухающие колебания. Тогда

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\frac{r}{2m} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{m}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

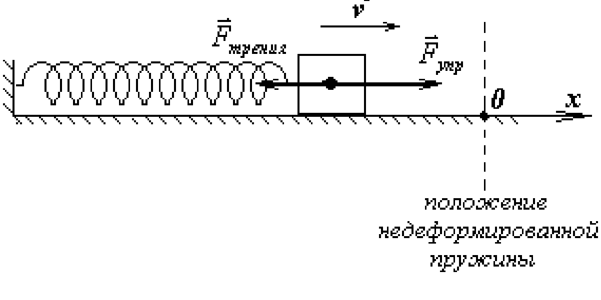
Самый простой способ увеличить добротность маятника – сделать его тяжелее.

В практике нередко возникают и обратные задачи: необходимо по возможности быстрее погасить возникшие колебания (например, колебание стрелки измерительного прибора, колебания кузова автомобиля, колебания судна и т.д.) приспособления, позволяющие увеличить затухание в системе, называются демпферами (или амортизаторами). Например, амортизатор автомобиля в первом приближении представляет собой цилиндр, заполненный маслом (вязкой жидкостью), в котором может двигаться поршень, имеющий ряд мелких отверстий. Шток поршня соединен с кузовом, а цилиндр – с осью колеса. Возникшие колебания кузова быстро затухают, так как движущийся поршень встречает на своем пути большое сопротивление со стороны вязкой жидкости, заполняющей цилиндр.

§3 Затухание колебаний в системах с сухим трением

Принципиально иначе происходит затухание колебаний, если в системе действует сила трения скольжения. Именно она является причиной остановки пружинного маятника, совершающего колебания вдоль какой-либо поверхности.

Допустим, пружинный маятник, расположенный на горизонтальной поверхности, привели в колебательное движение, сжав пружину и отпустив груз, то есть из крайнего положения. В процессе движения груза из одного крайнего положения в другое на него действуют сила тяжести и сила реакции опоры (по вертикали), сила упругости и сила трения скольжения (вдоль поверхности).



Заметим, что в процессе движения слева направо сила трения неизменна по направлению и модулю.

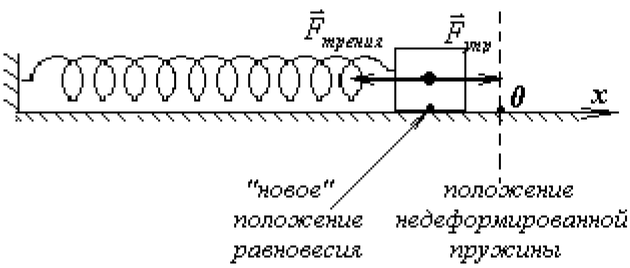
Этот позволяет утверждать, что в течение первой половины периода пружинный маятник находится в постоянном силовом поле.

$$F_{трения} = \mu \cdot N = \mu mg.$$

В постоянном силовом поле у пружинного маятника изменяется лишь положение равновесия, оно смещается влево, период же остается неизменным

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Смещение положения равновесия можно рассчитать из условия равенства равнодействующей нулю в положении равновесия:



$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{трения} = 0$$

$$k\Delta l_0 = \mu mg$$

$$\Delta l_0 = \frac{\mu mg}{k}$$

Важно, что в течение первой половины периода колебания маятника ***гармонические***!

При движении в обратном направлении – справа налево- сила трения изменит направление, но в течение всего перехода будет оставаться постоянной по модулю и направлению. Эта ситуация опять таки соответствует колебаниям маятника в постоянном силовом поле. Только теперь это поле другое! Оно изменило направление. Следовательно, положение равновесия при движении справа налево тоже изменилось. Теперь оно сместилось вправо на величину Δl_0.

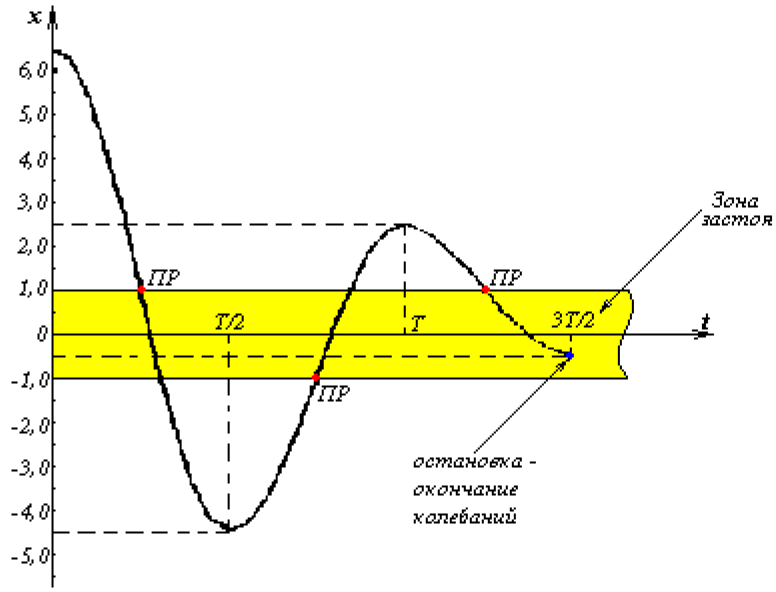
Изобразим зависимость координаты тела от времени. Поскольку за каждую половину периода движение представляет собой гармоническое колебание, то график будет представлять собой половинки синусоид, каждая из которых построена относительно своего положения равновесия. Мы будем производить операцию «сшивания решений».

Покажем, как это делается на конкретном примере.

Пусть масса груза, прикрепленного к пружине, равна 200 г, жесткость пружины 20 Н/м, коэффициент трения между грузом и поверхностью стола 0,1. Маятник привели в колебательное движение, растянув пружину на 6,5 см.

$$\Delta l_0 = \frac{\mu m g}{k} = \frac{0,1 \cdot 0,2 \cdot 10}{20} = 0,01(\text{м})$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{0,2}{20}} = 0,628\ (\text{с}).$$



В отличие от колебательных систем с вязким трением в системах с сухим трением амплитуда колебаний убывает с течением времени по линейному закону – за каждый период она уменьшается на две ширины зоны застоя.

Другая отличительная особенность - колебания в системах с сухим трением даже теоретически не могут происходить бесконечно долго. Они прекращаются, как только тело останавливается в «зоне застоя».

§4 Примеры решения задач

Задача 1 Характер изменения амплитуды затухающих колебаний в системах с вязким трением

Амплитуда затухающих колебаний маятника за время t_1 = 5 мин уменьшилась в 2 раза. За какое время t_2 амплитуда колебаний уменьшится в 8 раз? Через какое время t_3 можно считать, что колебания маятника прекратились?

Решение:

Амплитуда колебаний в системах с вязким трением с течением времени уменьшается по экспоненте $A = A_0 \cdot e^{-\delta t}$, где A_0- амплитуда колебаний в начальный момент времени, δ - коэффициент затухания.

1 Запишем закон изменения амплитуда два раза

$$\begin{cases} \dfrac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\delta t_1} \\ \dfrac{A_0}{8} = A_0 \cdot e^{-\delta t_2} \end{cases}.$$

2 Решаем уравнения совместно. Логарифмируем каждое уравнение и получаем

$$\begin{cases} \ln 2 = \delta \cdot t_1 \qquad (*) \\ \ln 8 = \delta \cdot t_2 \end{cases}.$$

Делим второе уравнение не первое и находим время t_2

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{\ln 2^3}{\ln 2} = \frac{3\ln 2}{\ln 2} = 3 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 3t_1 = 15 \text{ мин.}$$

3 Колебания можно считать прекратившимися, когда энергия системы уменьшится в 100 раз:

$$E = \frac{E_0}{100}.$$

4 Энергия системы равна максимальной потенциальной энергии маятника

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{kA_0^2}{2}.$$

После преобразований получаем

$$\left(A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t_3}\right)^2 = 10^{-2} \cdot A_0^2$$

$$e^{\delta \cdot t_3} = 10$$

$$\delta \cdot t_3 = \ln 10 .$$

Делим последнее уравнение на уравнение (*)

$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3,32 \quad \Rightarrow \quad t_3 \approx 3,32 t_1 = 16,6 \text{ мин.}$$

Задача 2 Период затухающих колебаний в системах с вязким трением

Определите период затухающих колебаний системы T, если период собственных колебаний T_0 = 1 с, а логарифмический декремент затухания $\theta = 0,628$. Сколько колебаний совершит эта система до полной остановки?

Решение:

1 Период затухающих колебаний в системе с вязким трением больше периода собственных колебаний (при отсутствии трения в системе). Частота

затухающих колебаний, наоборот, меньше частоты собственных и равна $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, где δ - коэффициент затухания.

2 Выразим циклическую частоту через период $.\omega = \frac{2\pi}{T}$ и учтем, что логарифмический декремент затухания равен $\theta = \delta \cdot T$:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{\theta}{T}\right)^2.$$

3 После преобразований получаем $T = T_0\sqrt{1 + \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2} = 1{,}005$ с .

4 Колебания можно считать прекратившимися, когда энергия системы уменьшится в 100 раз:

$$E = \frac{E_0}{100}.$$

Энергия системы равна максимальной потенциальной энергии маятника

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{kA_0^2}{2}.$$

После преобразований получаем

$$\left(A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}\right)^2 = 10^{-2} \cdot A_0^2$$

$$e^{\delta \cdot t} = 10$$

$$\delta \cdot t = \ln 10 .$$

5 Выражаем коэффициент затухания через логарифмический декремент $\delta = \frac{\theta}{T}$, получаем $\frac{\theta}{T} \cdot t = \ln 10.$

Число колебаний, которое совершит система до остановки, равно $N = \frac{t}{T} = \frac{\ln 10}{\theta} = 16.$

Задача 3 Число колебаний, совершаемых маятником до уменьшения амплитуды в два раза

Логарифмический декремент затухания маятника равен θ = $3 \cdot 10^{-3}$. Определите число полных колебаний, которое должен совершить маятник, чтобы амплитуда его колебаний уменьшилась в 2 раза.

Решение:

1 Амплитуда колебаний в системах с вязким трением с течением времени уменьшается по экспоненте $A = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$, где A_0 - амплитуда колебаний в начальный момент времени, δ - коэффициент затухания.

Поскольку амплитуда колебаний уменьшается в 2 раза, получаем

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\delta \cdot t} \quad \Rightarrow \quad 2^{-1} = e^{-\delta \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \delta \cdot t = \ln 2 \, (*).$$

2 Время колебаний t можно представить как произведение периода колебаний T на их количество N:

$$t = T \cdot N.$$

Подставляем полученное значение времени в выражение (*)

$$\delta \cdot T \cdot N = \ln 2.$$

3 Нетрудно видеть, что $\theta = \delta \cdot T$ - логарифмический декремент затухания. Получаем $\theta \cdot N = \ln 2.$

Находим число колебаний $N = \frac{\ln 2}{\theta} = 210.$

Задача 4 Добротность колебательной системы

Определите добротность маятника, если за время, в течение которого было совершено 10 колебаний, амплитуда уменьшилась в 2 раза. Через какое время маятник остановится?

Решение:

1 Амплитуда колебаний в системах с вязким трением с течением времени уменьшается по экспоненте $A = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$, где A_0 - амплитуда колебаний в начальный момент времени, δ - коэффициент затухания.

Поскольку амплитуда колебаний уменьшается в 2 раза, получаем

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\delta \cdot t} \quad \Rightarrow \quad 2^{-1} = e^{-\delta \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \delta \cdot t = \ln 2 \left(* \right).$$

2 Время колебаний t можно представить как произведение периода колебаний T на их количество N:

$$t = T \cdot N.$$

Подставляем полученное значение времени в выражение (*)

$$\delta \cdot T \cdot N = \ln 2.$$

3 Нетрудно видеть, что $\theta = \delta \cdot T$ - логарифмический декремент затухания. Получаем $\theta \cdot N = \ln 2$. Логарифмический декремент затухания равен

$$\theta = \frac{\ln 2}{N} = 0{,}0693.$$

4 Добротность колебательной системы $Q = \dfrac{\pi}{\theta} = 45.$

5 Колебания можно считать прекратившимися, когда энергия системы уменьшится в 100 раз:

$$E = \frac{E_0}{100}.$$

Энергия системы равна максимальной потенциальной энергии маятника

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{kA_0^2}{2}.$$

После преобразований получаем

$$\left(A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \right)^2 = 10^{-2} \cdot A_0^2$$

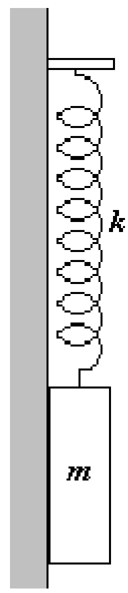
$$e^{\delta \cdot t} = 10$$

$$\delta \cdot t = \ln 10 .$$

Находим время, через которое колебания прекратятся $t = \dfrac{\ln 10}{\delta} \approx 33$ с.

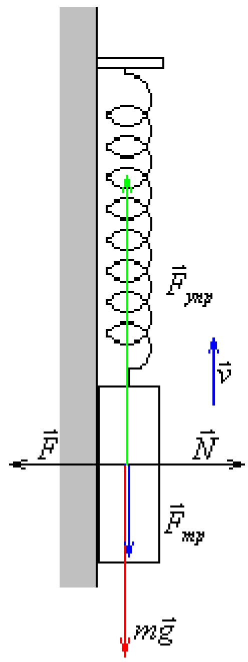
Задача 5 Колебания магнита

Вася Лисичкин, известный на всю школу экспериментатор, решил заставить колебаться магнитную фигурку любимого литературного героя Колобка по стенке холодильника. Он прикрепил фигурку к пружине жесткостью k = 10 Н/м, растянул ее на 10 см и отпустил. Сколько колебаний совершит Колобок, если масса фигурки m = 10 г, коэффициент трения между фигуркой и стенкой равен μ = 0,4 , а оторвать ее от стенки можно силой F = 0,5 Н.



Решение:

1 При движении из крайнего нижнего в крайнее верхнее положение, когда скорость груза направлена вверх, сила трения скольжения направлена вниз и численно равна $F_{тр} = \mu N = \mu F$. Таким образом, пружинный маятник находится в постоянном силовом поле, созданном силами тяжести и трения. В постоянном силовом поле у маятника смещается положения равновесия:



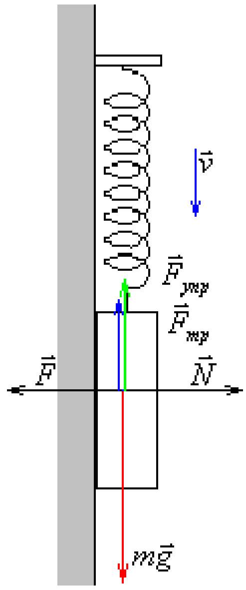
$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} + \vec{F}_{ynp} + \vec{F} = 0$$

$$k\Delta l_{01} = mg + \mu F$$

$$\Delta l_{01} = \frac{mg + \mu F}{k} = 3\text{ см},$$

где Δl_{01} - растяжение пружины в новом «положении равновесия».

2 При движении из крайнего верхнего в крайнее нижнее положение, когда скорость груза направлена вниз, сила трения скольжения направлена вверх и численно равна $F_{mp} = \mu N = \mu F$. Таким образом, пружинный маятник опять-таки находится в постоянном силовом поле, созданном силами тяжести и трения. В постоянном силовом поле у маятника смещается положения равновесия:



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} + \vec{F}_{ynp} + \vec{F} = 0$$

$$k\Delta l_{02} = mg - \mu F$$

$$\Delta l_{02} = \frac{mg - \mu F}{k} = -1\text{ см},$$

где Δl_2 - деформация пружины в новом «положении равновесия», знак «-» говорит, что в этом положении пружина сжата.

3 Зона застоя ограничена деформациями пружины от - 1 см до 3 см и составляет 4 см. Середина зоны застоя, в которой деформация пружины равна 1 см, соответствует положению груза, в котором сила трения отсутствует. В зоне застоя сила упругости пружины по модулю меньше равнодействующей **максимальной силы трения покоя** и силы тяжести. Если маятник останавливается в зоне застоя, колебания прекращаются.

4 За каждый период деформация пружины уменьшается на две ширины зоны застоя, т.е. на 8 см. После одного колебания деформация пружины

станет равной 10 см – 8 см = 2 см. Это означает, что после одного колебания фигурка Колобка попадает в зону застоя и ее колебания прекращаются.

§5 Задания для самостоятельного решения

Тест «Затухающие колебания»

1 Под затуханием колебаний понимают…

А) уменьшение частоты колебаний; Б) уменьшение периода колебаний;
В) уменьшение амплитуды колебаний; Г) уменьшение фазы колебаний.

2 Причина затухания свободных колебаний –

А) действие на систему случайных факторов, тормозящих колебания;

Б) действие периодически изменяющейся внешней силы;

В) наличие в системе силы трения;

Г) постепенное уменьшение квазиупругой силы, стремящейся вернуть маятник в положение равновесия.

3 Из приведенных ниже уравнений движения выберите то, которое соответствует затухающим колебаниям в системе с вязким трением.

А) $x(t)=A\cos(\omega t-kx)$; Б) $x(t)=(A_0-bt)\cos\omega t$;
В) $x(t)=A\cos(\omega\cdot e^{-\delta t}\cdot t)$; Г) $x(t)=A_0\cdot e^{-\delta t}\cos(\omega t)$.

4 Два одинаковых математических маятника колеблются, один в вакууме, другой в сжатом воздухе . Сравните период колебания T маятника в воздухе с периодом колебания маятника в вакууме $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

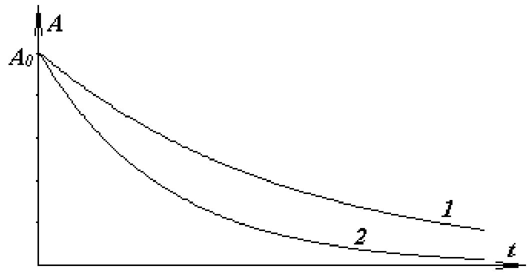
А) $T\ >\ T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; Б) $T\ <\ T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; В) $T\ =\ T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

5 Математический маятник начал колебаться с амплитудой 9 см. Через некоторое время τ амплитуда колебаний стала равной 6 см. Какой будет амплитуда колебаний через следующий промежуток времени τ?

А) 5 см ; Б) 4 см ; В) 3 см;

Г) Ответ дать не возможно, поскольку неизвестно время τ.

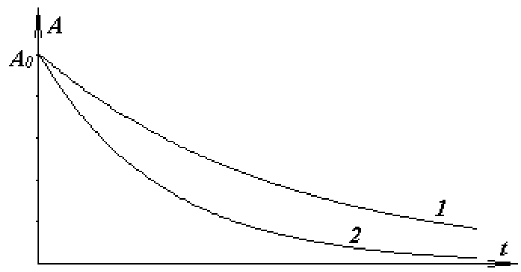
6 Два одинаковых маятника, находясь в разных вязких средах, совершают колебания. Амплитуда этих колебаний меняется с течением времени так, как показано на рисунке. В какой среде трение больше?



А) 1; Б) 2;

В) Ответ дать невозможно, поскольку по осям координат не проставлен масштаб и выполнить расчеты нельзя.

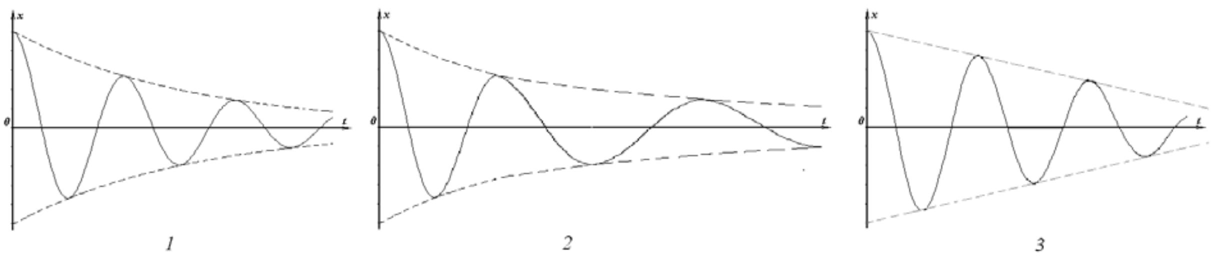
7 Два маятника, находясь в одинаковых средах, совершают колебания. Амплитуда этих колебаний меняется с течением времени так, как показано на рисунке. Какой маятник имеет большую массу?



А) 1; Б) 2;

В) Ответ дать невозможно, поскольку по осям координат не проставлен масштаб и выполнить расчеты нельзя.

8 На каком рисунке правильно показана зависимость координаты затухающих колебаний в системе с вязким трением от времени?



А) 1;   Б) 2;   В) 3;   Г) Все графики верные.

9 Установите соответствие между физическими величинами, характеризующими затухание колебаний в системах с вязким трением, и их определением и физическим смыслом. Заполните таблицу

Физическая величина	Определение, физический смысл	расчетная формула
Время релаксации		
Декремент затухания		
Логарифмический декремент затухания		

А) Это отношение амплитуд колебаний через время, равное периоду;

Б) Это натуральный логарифм отношения амплитуд колебаний через время, равное периоду;

В) Это время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в ***e*** раз;

$$\text{Г)}\ \theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)}; \quad \text{Д)}\ \frac{A_0}{e} = A_0 \cdot e^{-\delta\tau} \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\delta}; \quad \text{Е)}\ \lambda = \frac{A(t)}{A(t+T)};$$

Ж) Эта величина обратна числу колебаний, за которое амплитуда колебаний уменьшается в ***e*** раз;

З) Эта величина показывает во сколько раз уменьшается амплитуда колебаний за время, равное периоду колебаний.

10 Составьте правильное утверждение.

Под добротностью понимают…

А) увеличенное в 2π раз отношение полной энергии системы E к энергии W , рассеянной за период;

Б) отношение амплитуд через промежуток времени, равный периоду;

В) количество колебаний, которое совершает система к тому моменту, когда амплитуда уменьшится в е раз.

Добротность рассчитывают по формуле…

А) $\lambda = \dfrac{A(t)}{A(t+T)}$; Б) $Q = 2\pi \dfrac{E}{W}$; В) $N_e = \dfrac{1}{\theta}$.

Добротность колебательной системы зависит от…

А) энергии системы;

Б) потерь энергии за период;

В) параметров колебательной системы и трения в ней.

Чем больше добротность колебательной системы, тем …

А) медленнее затухают колебания;

Б) быстрее затухают колебания.

11 Математический маятник приводят в колебательное движение, отклонив подвес от положения равновесия в первом случае на 15°, во втором – на 10°. В каком случае маятник совершит больше колебаний до остановки?

А) Когда подвес отклонили на 15°;

Б) Когда подвес отклонили на 10°;

В) В обоих случаях маятник совершит одинаковое число колебаний.

12 К двум нитям одинаковой длины прикрепили шарики одинакового радиуса – алюминиевый и медный. Маятники приводят в колебательное движение, отклонив их на одинаковые углы. Какой из маятников совершит большее количество колебаний до остановки?

А) Алюминиевый; Б) Медный;

В) Оба маятника совершат одинаковое количество колебаний.

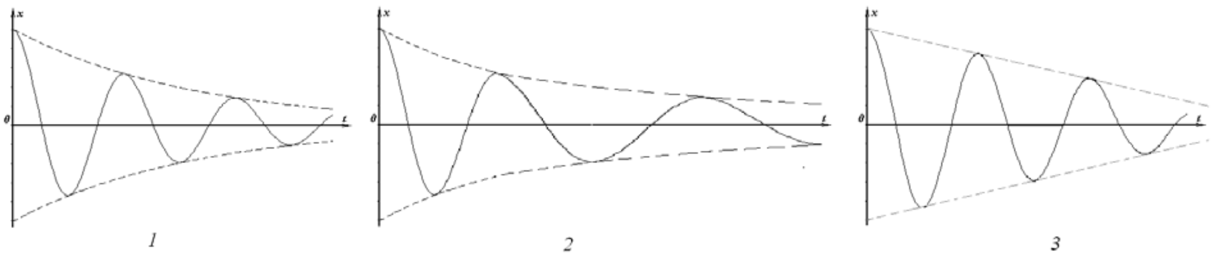
13 Пружинный маятник, расположенный на горизонтальной поверхности, привели в колебания, растянув пружину на 9 см. После совершения трех полных колебаний маятник оказался на расстоянии 6 см от положения недеформированной пружины. На каком расстоянии от положения недеформированной пружины окажется маятник после следующих трех колебаний?

А) 5 см; Б) 4 см; В) 3 см.

14 Пружинный маятник, состоящий их груза массой m и пружины жесткостью k, совершает колебания на горизонтальном столе. Коэффициент трения между грузом и поверхностью стола равен μ. Сравните период колебания T маятника с трением с периодом колебания идеального маятника $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

А) $T > T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; Б) $T < T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; В) $T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

15 Пружинный маятник совершает колебания на горизонтальной шероховатой поверхности стола. Какой из графиков правильно отражает зависимость координаты маятника от времени?



А) 1; Б) 2; В) 3.

Г) Любой из графиков может оказаться верным в зависимости от параметров колебательной системы и величины коэффициента трения.

16 Пружинный маятник, состоящий их груза массой m = 200 г и пружины жесткостью k = 20 Н/м, совершает колебания на горизонтальном столе. Коэффициент трения между грузом и поверхностью стола равен $\mu = 0{,}1$. На какую величину изменяется амплитуда колебаний маятника за каждый период?

А) 1 см; Б) 2 см; В) 3 см; Г) 4 см.

Задачи

1 Амплитуда затухающих колебаний маятника за время t_1 = 5 мин уменьшилась в n_1 = 2 раза. За какое время t_2 амплитуда уменьшится в n_2 = 8 раз?

2 За время $\tau = 8$ мин амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в 3 раза. Определите коэффициент затухания δ. Какова добротность этой колебательной системы, если период колебаний $T = 10$ с. Сколько полных колебаний совершит система до полной остановки?

3 Логарифмический декремент затухания маятника равен $\theta = 3 \cdot 10^{-3}$. Определите число полных колебаний, которое должен совершить маятник, чтобы амплитуда его колебаний уменьшилась в 2 раза.

4 Определите период T затухающих колебаний системы, если период собственных колебаний $T = 1$ с, а логарифмический декремент затухания равен $\theta = 0,628$.

5 Определите добротность маятника, если за время, в течение которого было совершено 10 колебаний, амплитуда уменьшилась в 2 раза. Сколько колебаний совершит маятник до остановки? За какое время это произойдет?

6 Энергия затухающих колебаний маятника за время $t = 100$ с уменьшилась в 100 раз. Определите коэффициент сопротивления среды r, если масса маятника 100 г.

Глава 6 Вынужденные механические колебания

Вынужденными колебаниями называют такие колебания, которые возникают в системе при действии на нее внешней вынуждающей периодически изменяющейся силы, называемой вынуждающей.

Характер (зависимость от времени) вынуждающей силы может быть различным. Это может сила, меняющаяся по гармоническому закону. Например, звуковая волна, источником которой является камертон, попадает на барабанную перепонку или мембрану микрофона. На перепонку начинает действовать гармонически меняющаяся сила давления воздуха.

Вынуждающая сила может носить характер толчков или коротких импульсов. Например, взрослый раскачивает ребенка на качелях, периодически толкая их в тот момент, когда качели приходят в одно из крайних положений.

Наша задача – выяснить, как реагирует колебательная система на воздействие периодически изменяющейся вынуждающей силы.

§ 1 Вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону

$$F_{вын} = F_0 \sin \omega t.$$

При выведении колебательной системы из положения равновесия в ней будут действовать: квазиупругая сила $F_x = - kx$, сила сопротивления $F_{сопрx} = - rv_x$ и вынуждающая сила $F_{вын} = F_0 sin\ \omega t$.

$$m\vec{a} = \vec{F}_{квазиупр} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_{вын}$$

$$ma_x = -kx - rv_x + F_0 \sin \omega t$$

$$mx'' + rx' + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega.$$

Второй закон Ньютона запишется в виде:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{r}{m} = 2\delta \qquad \frac{F_0}{m} = f_0,$$

Введя обычные обозначения
получим дифференциальное уравнение

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t. \qquad (1)$$

Решение уравнения (1) ищут в виде $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, где $x_1(t)$ - это решение уравнения (1), если бы в нем не было правой части. Видно, что без правой части уравнение превращается в известное нам уравнение затухающих колебаний, решение которого мы уже знаем. За достаточно большое время свободные колебания, которые возникнут в системе при выведении ее из положения равновесия, практически затухнут, и в решении уравнения останется только второе слагаемое. Будем искать это решение в виде

$$x(t) = x_2(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Вычисли первую и вторую производную от *x(t)* и подставим их в уравнение (1):

$$x' = -A\omega\cos(\omega t + \varphi) = -A\omega\cos\omega t \cdot \cos\varphi + A\omega\sin\omega t \cdot \sin\varphi$$

$$x'' = A\omega^2 \sin\omega t \cdot \cos\varphi + A\omega^2 \cos\omega t \cdot \sin\varphi$$

$$A\omega^2 \sin\omega t \cdot \cos\varphi + A\omega^2 \cos\omega t \cdot \sin\varphi + 2\delta \cdot \left(-A\omega\cos\omega t \cdot \cos\varphi + A\omega\sin\omega t \cdot \sin\varphi\right) +$$
$$+\omega_0^2 A\sin(\omega t + \varphi) = f_0 \sin\omega.$$

Сгруппируем слагаемые иначе:

$$\sin\omega t \cdot (A\cos\varphi(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\delta\omega A\sin\varphi - f_0) +$$
$$+\cos\omega t \cdot (2\delta\omega A\cos\varphi + A\sin\varphi(\omega_0^2 - \omega^2)) = 0.$$

Это равенство должно выполняться в любой момент времени t, что возможно только, если коэффициенты при синусе и косинусе равны нулю.

$$A\cos\varphi\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2\delta\omega A\sin\varphi-f_0=0$$
$$2\delta\omega A\cos\varphi+A\sin\varphi\left(\omega_0^2-\omega^2\right)=0.$$

Из второго уравнения получаем $tg\varphi=-\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$. Этому значению должно удовлетворять φ, чтобы $x_2(t)$ было решением уравнения (1).

Для определения неизвестного А возведем оба полученных нами уравнения в квадрат и сложим. Решая полученное равенство относительно А, найдем:

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}. \qquad (2)$$

Анализ полученного результата:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi).$$

Итак, ***тело, на которое действует вынуждающая сила, меняющаяся по гармоническому закону, совершает колебательное движение с частотой вынуждающей силы.***

Разберем подробнее вопрос об амплитуде вынужденных колебаний:

1 Амплитуда установившихся вынужденных колебаний не меняется с течением времени. (Сравните с амплитудой свободных затухающих колебаний).

2 Амплитуда вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы.

3 Амплитуда зависит от трения в системе (А зависит от δ, а коэффициент затухания δ, в свою очередь, зависит от коэффициента сопротивления r).

Чем больше трение в системе, тем амплитуда вынужденных колебаний меньше.

4 Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы ω. Как? Исследуем функцию A(ω).

- При ω = 0 (постоянная сила действует на колебательную систему) смещение тела неизменно с течением времени (надо иметь в виду то, что это относится к установившемуся состоянию, когда собственные колебания уже практически затухли).

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}.$$

- При ω $\to$ ∞, то, как нетрудно видеть, амплитуда A стремится к нулю.

- Очевидно, что при какой-то частоте вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний примет наибольшее значение (для данного δ). ***Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенном значении частоты вынуждающей силы носит название механического резонанса.***

Найдем резонансную частоту $\omega_{рез}$. Для этого найдем минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе дроби (2). Продифференцировав это выражение по ω и приравняв к нулю, получим:

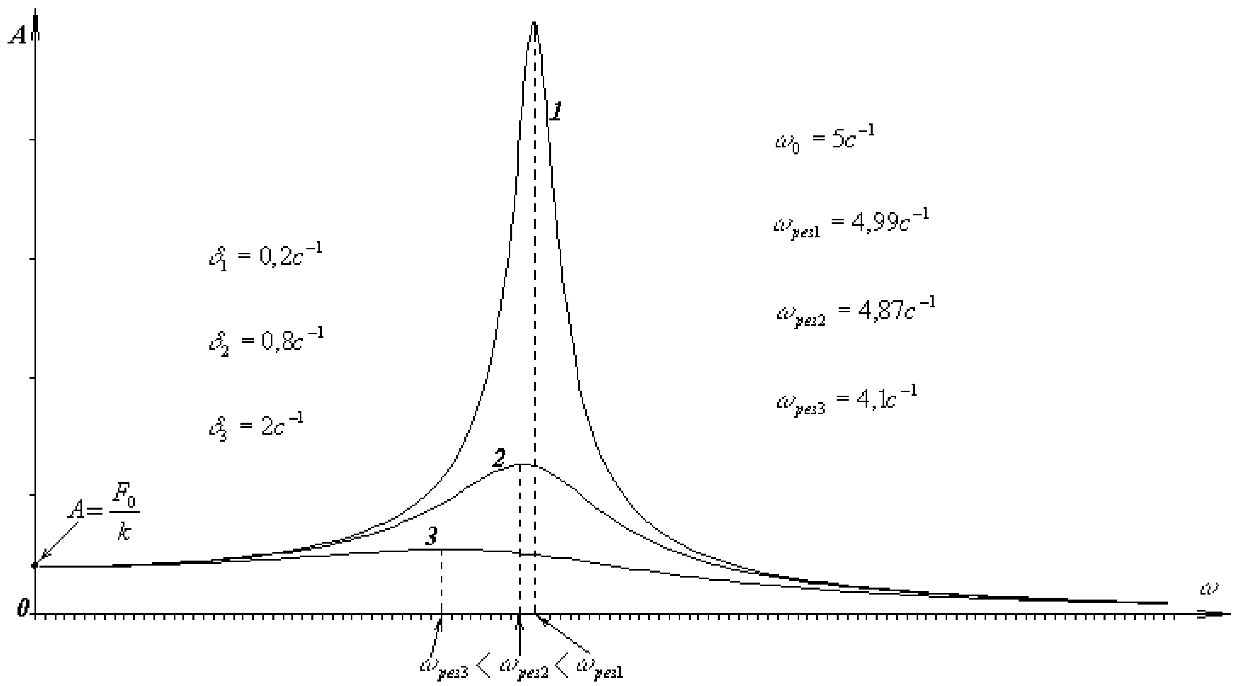
$$-4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 8\delta^2 = 0$$

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \approx \frac{F_0}{2m\delta\omega_0} = \frac{F_0}{2\delta \cdot \dfrac{k}{\omega_0}} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{\pi}{\delta T} = \frac{F_0}{k} \cdot Q.$$

Интересно, что добротность колебательной системы в этом случае показывает во сколько раз резонансная амплитуда превышает смещение тела от положения равновесия под действием постоянной силы F_0.



Мы видим, что и резонансная частота, и резонансная амплитуда зависят от коэффициента затухания δ. С уменьшением δ к нулю резонансная частота возрастает и стремится к частоте собственных колебаний системы ω_0. При этом резонансная амплитуда возрастает и при $\delta = 0$ обращается в бесконечность. Разумеется, на практике амплитуда колебаний бесконечной быть не может, так как в реальных колебательных системах всегда действуют силы сопротивления. Если система имеет малое затухание, то приближенно можно считать, что резонанс наступает при частоте собственных колебаний.:

$$\omega_{рез} \approx \omega_0.$$

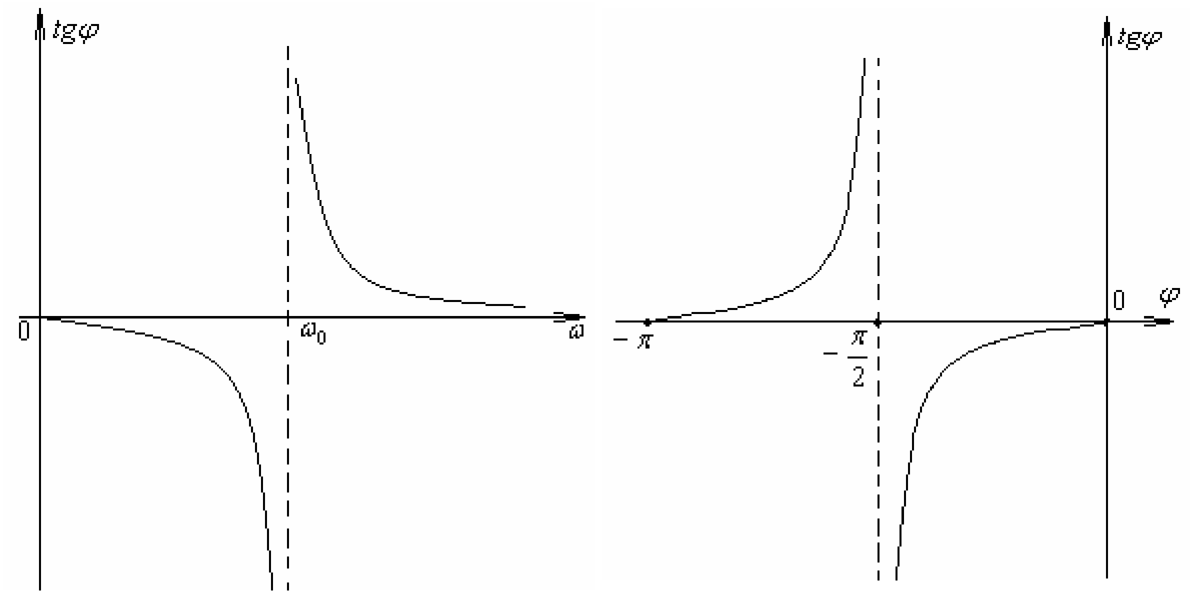
При больших значениях коэффициента затухания резонансные явления исчезают. Амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает.

Вернемся к вопросу о фазе вынужденных колебаний.

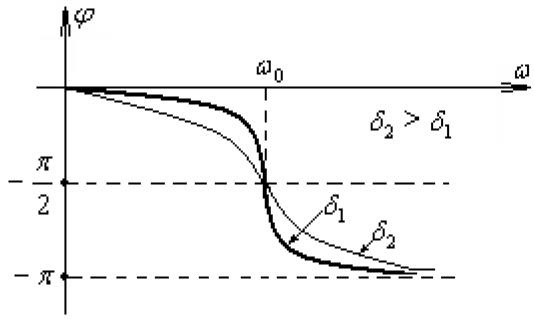
$$tg\varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где φ в рассматриваемом случае - это сдвиг по фазе между вынуждающей силой и смещением тела от положения равновесия.

Нетрудно видеть, что сдвиг по фазе между силой и смещением зависит от трения в системе $\left(\delta = \frac{r}{2m}\right)$ и частоты внешней вынуждающей силы ω. Эта зависимость показана на рисунке. Видно, что при $\omega < \omega_0$ тангенс принимает отрицательные значения, а при $\omega > \omega_0$ - положительные.



Зная зависимость $tg\varphi$ от угла φ, можно получить зависимость φ от частоты вынуждающей силы ω.



При частотах внешней силы, существенно меньших собственной, смещение отстает по фазе от вынуждающей силы незначительно. При увеличении частоты внешней силы это запаздывание по фазе растет. При резонансе $\omega = \omega_0$ (если δ невелико) сдвиг по фазе становится равным $-\frac{\pi}{2}$. При $\omega >> \omega_0$ колебания смещения и силы происходят в противофазе. Такая зависимость может показаться на первый взгляд странной. Чтобы понять этот факт, обратимся к энергетическим преобразованиям в процессе вынужденных колебаний.

§ 2 Энергетические превращения

Как мы уже знаем, амплитуда колебаний определяется полной энергией колебательной системы. Ранее было показано, что амплитуда вынужденных колебаний остается неизменной с течением времени. Это значит, что полная механическая энергия колебательной системы с течением времени не меняется. Почему? Ведь система не замкнута! Две силы - внешняя периодически меняющаяся и сила сопротивления – совершают работу, которая должна менять полную энергию системы.

Попробуем разобраться, в чем дело. Мощность внешней вынуждающей силы может быть найдена следующим образом:

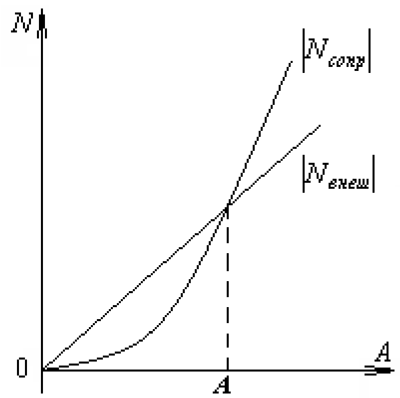
$$N_{внеш} = F_x\left(t\right) \cdot v_x = F_x\left(t\right) \cdot \left(A\cos\left(\omega t + \varphi\right)\right)' = -F_x\left(t\right) \cdot A \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right).$$

Видим, что мощность внешней силы $N_{внеш}$, подпитывающей колебательную систему энергией, пропорциональна амплитуде колебаний A.

Счет работы силы сопротивления энергия колебательной системы должна уменьшаться, переходя во внутреннюю. Мощность силы сопротивления:

$$N_{сопр} = F_{сопрx}\left(t\right) \cdot v_x = -rv_x \cdot v_x = -rv_x^2 = -rA^2 \cdot \sin^2\left(\omega t + \varphi\right).$$

Очевидно, что мощность силы сопротивления $N_{сопр}$ пропорциональна квадрату амплитуды A^2. Изобразим обе зависимости на графике.



Чтобы колебания были установившимися (амплитуда не менялась с течением времени), работа внешней силы за период должна компенсировать потери энергии системой за счет работы силы сопротивления. Точка пересечения графиков мощностей как раз соответствует этому режиму. Представим, что в силу каких-то причин амплитуда вынужденных колебаний уменьшилась. Это приведет к тому, что мгновенная мощность внешней силы окажется больше мощности потерь. Это приведет к росту энергии колебательной системы, и амплитуда колебаний восстановит прежнее значение.

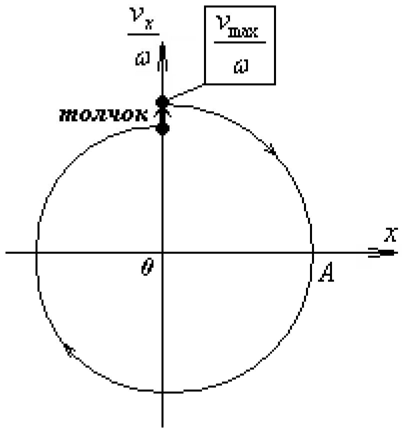
Аналогичным образом можно убедиться, что при случайном увеличении амплитуды колебаний мощность потерь превысит мощность внешней силы, что приведет к уменьшению энергии системы, и, следовательно, к уменьшению амплитуды.

Вернемся к вопросу о сдвиге по фазе между смещением и вынуждающей силой при резонансе. Мы уже показали, что смещение отстает, а, значит, сила опережает смещение, на $\frac{\pi}{2}$. С другой стороны, проекция скорости в процессе гармонических колебаний всегда опережает координату на $\frac{\pi}{2}$. Это означает, что при резонансе внешняя вынуждающая сила и скорость колеблются в одной фазе. А значит они сонаправлены в любой момент времени! Работа внешней силы в этом случае всегда положительна, она ***вся*** идет на пополнение колебательной системы энергией.

§ 3 Несинусоидальное периодическое воздействие

Вынужденные колебания осциллятора возможны при любом периодическом внешнем воздействии, а не только синусоидальном. При этом установившиеся колебания, вообще говоря, не будут синусоидальными, но они будут представлять собой периодическое движение с периодом, равным периоду внешнего воздействия.

Внешнее воздействие $F(t)$ может представлять собой, например, последовательные толчки (вспомните, как взрослый человек «раскачивает» ребенка, сидящего на качелях). Если период внешних толчков совпадает с периодом собственных колебаний, то в системе может наступать резонанс. Колебания при этом будут почти синусоидальными. Сообщаемая системе при каждом толчке энергия идет пополнение полной энергии системы, теряемой за счет трения. Понятно, что при этом возможны варианты: если сообщаемая при толчке энергия равна или превышает потери на трение за период, то колебания будут либо установившимися, либо их размах будет возрастать. Это хорошо видно на фазовой диаграмме.



Очевидно, что резонанс возможен и в том случае, когда период следования толчков будет кратен периоду собственных колебаний. Такое невозможно при синусоидальном характере внешнего воздействия.

С другой стороны, даже при совпадении частоты толчков с собственной частотой резонанс может не наблюдаться. Если только потери на трение за период превышают энергию, полученную системой во время толчка, то полная энергия системы будет уменьшаться, а колебания будут затухать.

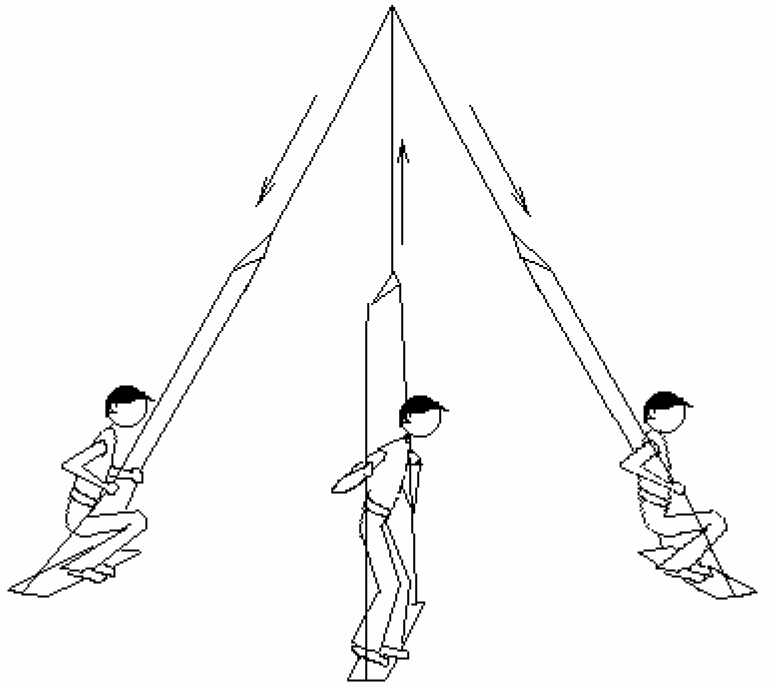
§ 4 Параметрический резонанс

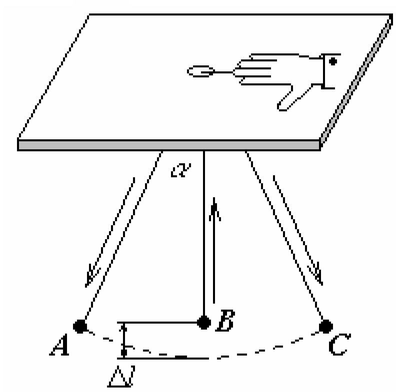
Внешнее воздействие на колебательную систему может сводиться к периодическому изменению параметров самой колебательной системы. Возбуждаемые таким образом колебания называются параметрическими, а сам механизм – ***параметрическим резонансом***.

Прежде всего, попытаемся ответить на вопрос: можно ли раскачать уже имеющиеся в системе малые колебания, периодически изменяя определенным образом какой-либо ее параметр.

В качестве примера рассмотрим раскачивание человека на качелях. Сгибая и выпрямляя ноги в «нужные» моменты, он фактически изменяет длину маятника. В крайних положениях человек приседает, тем самым чуть-

чуть опускает центр тяжести колебательной системы, в среднем положении человек выпрямляется, поднимая центр тяжести системы.





Чтобы понять, почему при этом человек раскачивается, рассмотрим предельно упрощенную модель человека на качелях – обычный небольшой маятник, то есть небольшой грузик на легкой и длинной нити. Чтобы имитировать поднимание и опускание центра тяжести, пропустим верхний конец нити через маленькое отверстие и будем вытягивать нить в те моменты, когда маятник проходит положение равновесия, и настолько же опускать нить, когда маятник проходит крайнее положение.

Подтягивая маятник в нижней точке траектории, мы совершаем положительную работу

$$F_{нижн} = mg + \frac{mv_{\max}^2}{l}$$

$$A_{нижн} = F_{нижн} \cdot \Delta l = \left(mg + \frac{mv_{\max}^2}{l} \right) \cdot \Delta l.$$

В крайнем положении

$$F_{крайн} = mg \cdot \cos\alpha$$

$$A_{крайн} = -F_{крайн} \cdot \Delta l = -mg \cdot \cos\alpha \cdot \Delta l.$$

Работа силы натяжения нити за период (с учетом того, что подъем груза и его опускание производится два раза за период и что $\Delta l << l$):

$$A = 2\left(A_{нижн} + A_{крайн}\right) = 2\left(mg + \frac{mv_{\max}^2}{l} - mg \cdot \cos\alpha\right)\Delta l =$$

$$= \frac{2\Delta l}{l}\left(mgl\left(1-\cos\alpha\right) + 2\frac{mv_{\max}^2}{2}\right).$$

Обратите внимание, что в скобках стоит не что иное, как утроенная энергия колебательной системы. Кстати, это величина положительная, следовательно, работа силы натяжения (наша работа) положительная, она приводит к увеличению полной энергии системы, а значит, к раскачке маятника.

$$\Delta E = A = \frac{2\Delta l}{l}\left(mgl\left(1-\cos\alpha\right) + 2\frac{mv_{\max}^2}{2}\right) = \frac{2\Delta l}{l} \cdot 3E = \frac{6\Delta l}{l} \cdot E$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{6\Delta l}{l}.$$

Интересно, что относительное изменение энергии за период не зависит от того, слабо раскачивается маятник или сильно. Это очень важно, и вот почему. Если маятник «не подкачивать» энергией, то за каждый период он будет терять за счет силы трения определенную часть своей энергии, и колебания будут затухать. А чтобы размах колебаний увеличивался, необходимо, чтобы приобретаемая энергия превышала потерянную на преодоление трения. И это условие, оказывается, одно и то же – как при маленькой амплитуде, так и при большой.

Например, если за один период энергия свободных колебаний уменьшается на 6%, то для того, чтобы колебания маятника длиной 1 м не затухали, достаточно в среднем положении уменьшать его длину на 1 см, а в крайнем – на столько же увеличивать.

Возвращаясь к качелям: если вы начали раскачиваться, то нет необходимости приседать все глубже и глубже – приседайте все время одинаково, и будете взлетать все выше и выше!

*** ***Опять добротность!***

Как мы уже сказали, для параметрической раскачки колебаний необходимо выполнение условия $\Delta E > A_{\text{трения за период}}$.

Найдем работу силы трения за период

$$dA = F_{сопрx}dx = F_{сопрx} \cdot v_x dt = -rv_x \cdot v_x dx = -rv_x^2 dt = -r\left(v_{\max}\cos\omega t\right)^2 dt =$$
$$= -rv_{\max}^2 \cos^2\omega t dt$$

$$A = \int_0^T \left(-rv_{\max}^2\cos^2\omega t dt\right) = -rv_{\max}^2 \int_0^T \cos^2\omega t dt = \ldots = -\frac{rv_{\max}^2}{2}T$$

$$\Delta E \rangle \left|A\right|$$

$$\frac{6\Delta l}{l} \cdot E \rangle \frac{rv_{\max}^2}{2}T$$

$$\frac{6\Delta l}{l} \cdot E \rangle \frac{r}{m} \cdot \frac{mv_{\max}^2}{2}T = 2\delta \cdot E \cdot T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta l}{l} \rangle \frac{1}{3} \cdot \theta = \frac{\pi}{3Q}$$

Видно, что относительная величина подъема маятника для его раскачки определяется добротностью системы.

§ 5 Значение резонанса

Вынужденные колебания и резонанс широко используются в технике, особенно в акустике, электротехнике, радиотехнике. Резонанс, в первую очередь, используется тогда, когда из большого набора колебаний разной частоты хотят выделить колебания определенной частоты. Резонанс используется и при изучении очень слабых периодически повторяющихся величин.

Однако, в ряде случаев резонанс – нежелательное явление, так как может привести к большим деформациям и разрушениям конструкций.

§ 6 Примеры решения задач

Задача 1 Вынужденные колебания пружинного маятника под действием внешней синусоидальной силы.

К пружине жесткостью k = 10 Н/м подвесили груз массой m = 10 г и поместили систему в вязкую среду с коэффициентом сопротивления r = 0,1 кг/с. Сравните собственную и резонансную частоту системы. Определите амплитуду колебаний маятника при резонансе под действием синусоидальной силы с амплитудой F_0 = 20 мН.

Решение:

1 Собственная частота колебательной системы – это частота свободных колебаний в отсутствии трения. Собственная циклическая частота равна $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, частота колебаний $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 5,04\ \text{Гц}$.

2 Резонансная частота – это частота внешней вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает. Резонансная циклическая частота равна $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, где δ - коэффициент затухания, равный $\delta = \frac{r}{2m}$.

Таким образом, резонансная частота равна $\nu_{рез} = \frac{\omega_{рез}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} = 4{,}91\,\text{Гц}$. Нетрудно видеть, что резонансная частота меньше собственной! Также видно, что чем меньше трение в системе (r) , тем ближе резонансная частота к собственной.

3 Резонансная амплитуда равна

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}} = 0{,}64\,\text{см}.$$

Задача 2 Резонансная амплитуда и добротность колебательной системы

К пружине жесткостью k = 10 Н/м подвесили груз массой m = 100 г и поместили систему в вязкую среду с коэффициентом сопротивления r = 0,02 кг/с. Определите добротность колебательной системы и амплитуду колебаний маятника при резонансе под действием синусоидальной силы с амплитудой F_0 = 10 мН. Найдите отношение резонансной амплитуды к статическому смещению под действием постоянной силы F_0 = 20 мН и сравните это отношение с добротностью.

Решение:

1 Добротность колебательной системы равна $Q = \frac{\pi}{\theta}$, где θ - логарифмический декремент затухания.

Логарифмический декремент затухания равен $\theta = \delta \cdot T = \frac{r}{2m} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi \cdot r}{\sqrt{mk}}$.

Находим добротность колебательной системы $Q = \frac{\sqrt{mk}}{r} = 50$.

2 Резонансная амплитуда равна

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} = 5\text{ см}.$$

3 Статическое смещение под действием постоянной силы F_0 = 10 мН равно $\Delta l = \frac{F_0}{k} = 0{,}1\text{ см}$.

4 Отношение резонансной амплитуды к статическому смещению под действием постоянной силы F_0 равно

$$\frac{A_{рез}}{\Delta l} = \frac{5\text{ см}}{0{,}1\text{ см}} = 50.$$

Нетрудно видеть, что это отношение совпадает с добротностью колебательной системы $\frac{A_{рез}}{\Delta l} = Q.$

Задача 3 Резонансные колебания балки

Под действием веса электромотора консольная бака, на которой он установлен, прогнулась на $\Delta h = 1\text{ мм}$. При каком числе оборотов якоря мотора может возникнуть опасность резонанса?

Решение:

1 Корпус двигателя и балка, на которой он установлен, испытывают периодические толчки со стороны вращающегося якоря мотора и, следовательно, совершают вынужденные колебания с частотой следования толчков.

Резонанс будет наблюдаться при совпадении частоты следования толчков с собственной частотой колебания балки с мотором $n_{толчков} = \nu_{балки}$. Необходимо найти собственную частоту колебаний системы балка – мотор.

2 Аналогом колебательной системы балка – мотор может служить вертикальный пружинный маятник, масса которого равна массе мотора. Собственная частота ν_0 колебаний пружинного маятника равна $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.. Но жесткость пружины и масса мотора не известны! Как быть?

3 В положении равновесия пружинного маятника сила тяжести груза уравновешивается силой упругости пружины $mg = k \cdot \Delta h \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta h}$.

4 Находим вращения якоря двигателя, т.е. частоту следования толчков

$$n_{толчков} = \nu_{балки} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta h}} = 15,73 \text{ об/с} = 944 \text{ об/мин}.$$

Задача 4 Вынужденные колебания пружинного маятника под действием периодических толчков.

Гиря массой m = 0,5 кг подвешена к спиральной пружине жесткостью k = 20 Н/м. Логарифмический декремент затухания колебательной системы равен $\theta = 0{,}004$. Гирю хотят раскачать короткими толчками, действуя на гирю силой F = 100 мН в течение времени τ = 0,01 с. Какой должна быть частота следования ударов, чтобы амплитуда гири была наибольшей? В какие моменты и в каком направлении следует толкать гирю? До какой амплитуды удастся раскачать гирю таким способом?

Решение:

1 Вынужденные колебания могут происходить при любом периодическом воздействии. При этом установившееся колебание будет происходить с частотой следования внешнего воздействия. Если период внешних толчков совпадает с частотой собственных колебаний, то в системе наступает резо-

нанс – амплитуда колебаний становится наибольшей. В нашем случае для наступления резонанса период следования толчков должен совпасть с периодом колебаний пружинного маятника.

Логарифмический декремент затухания мал, следовательно, мало трение в системе, и период колебаний маятника в вязкой среде практически совпадает с периодом колебаний маятника в вакууме:

$$T_{толчков} = T_{маятника} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad \nu_{толчков} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1\,\text{Гц}\,.$$

2 Очевидно, направление толчков должно совпадать со скоростью гири. В этом случае работа внешней силы, пополняющей систему энергией, будет положительной. И колебания будут раскачиваться. Энергия, получаемая системой в процессе удара

$$\Delta E = A = F \cdot S = F \cdot v \cdot \tau,$$

будет наибольшей при прохождении грузом положения равновесия, ибо в этом положении скорость маятника максимальна.

Итак, наиболее быстро система раскачается при действии толчков в направлении движения груза при прохождении им положения равновесия.

3 Амплитуда колебаний прекращает расти, когда энергия, сообщаемая системе в процессе удара, будет равна потерям энергии на трение за период: $\Delta E = E_{потерь}$.

Энергию потерь за период найдем через добротность колебательной системы

$$Q = 2\pi\frac{E}{E_{потерь}} \quad \Rightarrow \quad E_{потерь} = \frac{2\pi \cdot E}{Q} = \frac{2\pi \cdot E}{\pi/\theta} = 2E \cdot \theta = 0{,}008E\,,$$

где E – полная энергия колебательной системы, которая может быть рассчитана как $E = \frac{mv_{\max}^2}{2}$.

Подставляем вместо энергии потерь энергию, получаемую системой в процессе удара:

$$F \cdot v_{\max} \cdot \tau = 0{,}008 \cdot \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Максимальная скорость в процессе колебаний равна $v_{\max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}$.

С учетом этого получаем $F \cdot \tau = 0{,}004 \cdot A \cdot \sqrt{km} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F \cdot \tau}{0{,}004 \cdot \sqrt{km}} = 7{,}9$ см.

§7 Задания для самостоятельного решения

Тест «Вынужденные колебания»

1 Какие колебания называются вынужденными?

А) Колебания, происходящие под действием внешних периодически изменяющихся сил;

Б) Колебания, возникающие в системе после внешнего толчка;

2 Какие из перечисленных колебаний является вынужденным?

А) Колебание груза, подвешенного к пружине, после однократного его отклонения от положения равновесия;

Б) Колебание диффузора громкоговорителя во время работы приемника;

В) Колебание груза, подвешенного к пружине, после однократного удара по грузу в положении равновесия;

Г) Вибрация корпуса электрического двигателя в процессе его работы;

Д) Колебания барабанной перепонки человека, слушающего музыку.

3 На колебательную систему с собственной частотой ω_0 действует внешняя вынуждающая сила, меняющаяся по закону $F = F_0 \cdot \sin\Omega t$. Коэффициент затухания в колебательной системе равен δ. По какому закону изменяется координата тела с течением времени?

А) $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$; Б) $x(t) = A_0 e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$;

В) $x(t) = A \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$; Г) $x(t) = A_0 e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) + A \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$.

4 На колебательную систему действует внешняя вынуждающая сила, меняющаяся по закону $F = F_0 \cdot \sin\Omega t$. Амплитуда внешней силы F_0 неизменна с течением времени. Как меняется амплитуда вынужденных колебаний, когда собственные колебания, возникшие в системе в момент начала действия внешней силы, прекратились?

А) Амплитуда вынужденных колебаний будет уменьшаться, так как система будет непрерывно терять энергию за счет работы силы трения;

Б) Амплитуда вынужденных колебаний будет увеличиваться, поскольку энергия системы будет непрерывно возрастать за счет работы внешней вынуждающей силы;

В) Амплитуда вынужденных колебаний будет оставаться неизменной, так как потери энергии системой на трение будут восполняться прибылью энергии за счет работы внешней вынуждающей силы.

5 Система совершает вынужденные колебания под действием синусоидальной силы. Укажите **все** факторы, от которых зависит амплитуда этих колебаний.

А) От амплитуды внешней вынуждающей силы;

Б) Наличия у колебательной системы энергии в момент начала действия внешней силы;

В) Параметров самой колебательной системы;

Г) Трения в колебательной системе;

Д) Существования в системе собственных колебаний в момент начала действия внешней силы;

Е) Времени установления колебаний;

Ж) Частоты внешней вынуждающей силы.

6 Брусок массой m совершает вынужденные гармонические колебания по горизонтальной плоскости с периодом Т и амплитудой А. Коэффициент трения μ. Какую работу совершает внешняя вынуждающая сила за время, равное периоду Т?

А) $4\mu mgA$; Б) $2\mu mgA$; В) μmgA; Г) 0;

Д) Ответ дать не возможно, так как не известна величина внешней вынуждающей силы.

7 Составьте правильное утверждение

Резонансом называется явление…

А) Совпадения частоты внешней силы с собственной частотой колебательной системы;

Б) Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний.

Резонанс наблюдается при условии

А) Уменьшении трения в колебательной системе;

Б) Увеличении амплитуды внешней вынуждающей силы;

В) Совпадении частоты внешней силы с собственной частотой колебательной системы;

Г) При совпадении частоты внешней силы с резонансной частотой.

8 Явление резонанса может наблюдаться в…

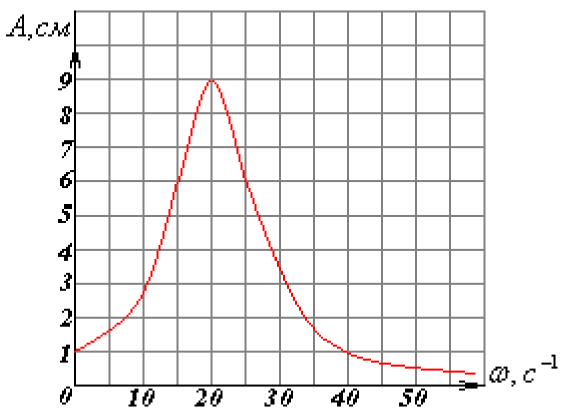
А) В любой колебательной системе;

Б) В системе, совершающей свободные колебания;

В) В автоколебательной системе;

Г) В системе, совершающей вынужденные колебания.

9 На рисунке представлен график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы. Резонанс наступает на частоте…



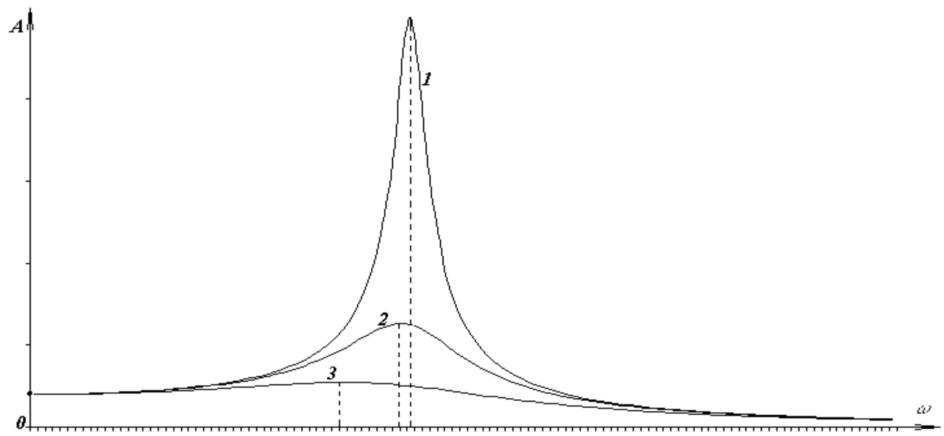
А) 0 Гц;

Б) 20 Гц;

В) 125,6 Гц;

Г) 3,2 Гц.

10 Три одинаковых маятника, находящиеся в различных вязких средах, совершают вынужденные колебания. На рисунке показаны резонансные кривые для этих маятников. Какой из маятников испытывает наибольшее сопротивление со стороны вязкой среды в процессе колебаний?



А) 1; Б) 2; В) 3;

Г) Ответ дать не возможно, поскольку амплитуда вынужденных колебаний кроме частоты внешней силы зависит еще и от ее амплитуды. Об амплитуде внешней вынуждающей силы в условии ничего не говорится.

11 Период собственных колебаний колебательной системы равен T_0. Каким может быть период следования толчков, чтобы амплитуда колебаний резко увеличилась, то есть в системе возник резонанс?

А) T_0; Б) T_0, 2 T_0, 3 T_0,…;

В) Раскачать качели можно толчками любой частоты.

12 Ваш младший брат сидит на качелях, вы раскачиваете его кратковременными толчками. Каким должен быть период следования толчков, чтобы процесс происходил наиболее эффективно? Период собственных колебаний качелей T_0.

А) $T = \frac{T_0}{2}$; Б) $T = T_0, 2T_0, 3T_0...$; В) $T = T_0$;

Г) Раскачать качели можно толчками любой частоты.

13 Ваш младший брат сидит на качелях, вы раскачиваете его кратковременными толчками. В каком положении качелей следует производить

толчок и в каком направлении толкать, чтобы процесс происходил наиболее эффективно?

А) Толкать в крайнем верхнем положении качелей в направлении положения равновесия;

Б) Толкать в крайнем верхнем положении качелей в направлении от положения равновесия;

В) Толкать в положении равновесия в направлении движения качелей;

Г) Толкать можно в любом положении, но обязательно в направлении движения качелей.

14 Казалось бы, стреляя из рогатки в мост в такт его собственным колебаниям и сделав очень много выстрелов, его можно сильно раскачать, однако это вряд ли удастся. Почему?

А) Масса моста (его инертность) велика по сравнению с массой «пули» из рогатки, мост не сможет прийти в движение под действием таких ударов;

Б) Сила удара «пули» из рогатки настолько мала что, мост не сможет прийти в движение под действием таких ударов;

В) Энергия, сообщаемая мосту за один удар много меньше потерь энергии на трение за период.

15 Вы несете ведро с водой. Вода в ведре раскачивается и выплескивается. Что можно сделать, чтобы этого не происходило?

А) Размахивать рукой, в которой находится ведро, в такт с ходьбой;

Б) Изменить скорость движения, оставив неизменной длину шагов;

В) Периодически останавливаться и ждать, когда колебания воды успокоятся;

Г) Следить за тем, чтобы в процессе движения рука с ведром располагалась строго вертикально.

Задачи

1 Система совершает затухающие колебания с частотой 1000 Гц. Определите частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота 998 Гц.

2 Определите, на какую величину $\Delta\nu$ резонансная частота отличается от собственной частоты ν_0 = 1000 Гц колебательной системы, характеризующейся коэффициентом затухания $\delta = 400 c^{-1}$.

3 Груз массы 100 г, подвешенный на пружине жесткости 10 Н/м, совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r = 0,02 кг/с. Определите коэффициент затухания, резонансную частоту и амплитуду. Амплитудное значение вынуждающей силы 10 мН.

4 Амплитуды вынужденных гармонических колебаний при частотах $\omega_1 = 400$ с$^{-1}$ и $\omega_2 = 600$ с$^{-1}$ равны между собой. Определите резонансную частоту.

5 Грузовики въезжают по грунтовой дороге на зерновой склад с одной стороны, разгружаются и выезжают со склада с той же скоростью, но с другой стороны. С какой стороны склада выбоины на дороге идут чаще, чем с другой? Как по состоянию дороги определить, с какой стороны склада въезд, а какой выезд? Ответ обосновать

Глава 7 Вынужденные электрические колебания

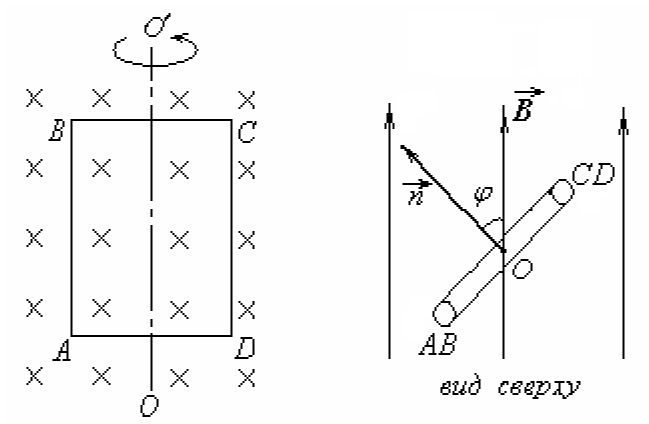
§1 Переменный ток

Вынужденные электрические колебания в физике называют переменным током. Подобно вынужденным механическим колебаниям для получения вынужденных электрических колебаний необходимо, чтобы на колебательную систему действовала внешняя периодически меняющаяся сила. Роль внешней периодической силы теперь будет играть переменная ЭДС. Сила тока в цепи переменного тока зависит от характера переменной ЭДС. Мы рассмотрим вынужденные колебания под действием ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону. Причина обращения именно к синусоидальной ЭДС заключается в том, что любую периодическую функцию можно разложить в ряд синусоидальных функций различных частот (ряд Фурье) и, следовательно, рассмотрение синусоидальных токов позволит в дальнейшем перейти к изучению более сложных периодических ЭДС, токов и напряжений.

Получение синусоидальной ЭДС

Принцип получения синусоидальной ЭДС промышленной частоты основан на вращении рамки в постоянном магнитном поле.

Поместим металлическую рамку в магнитное поле так, чтобы ее ось вращения была перпендикулярна магнитным линиям. Будем вращать рамку с постоянной угловой скоростью ω.



Нетрудно видеть, что угол между вектором магнитной индукции и нормалью к рамке будет изменяться

$$\varphi = \vec{B}\,^\wedge\,\vec{n} = \omega t.$$

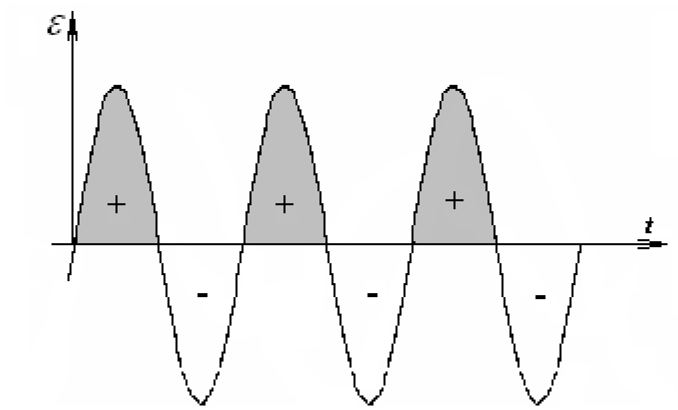
Магнитный поток, пронизывающий рамку, тоже будет изменяться

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\varphi = B \cdot S \cdot \cos(\omega t).$$

Изменение магнитного потока, как известно, приводит к возникновению в контуре ЭДС индукции. По Закону Фарадея ее можно рассчитать

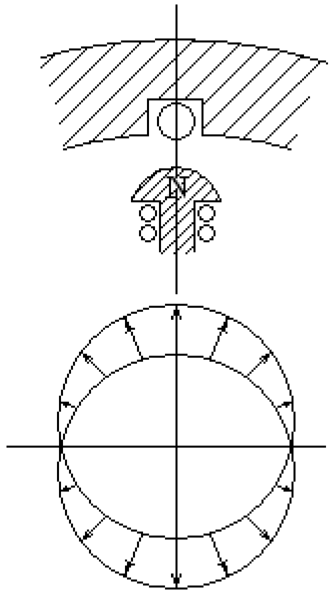
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \sin(\omega t) = \mathcal{E}_{max} \sin(\omega t). \qquad (1)$$

Изменение ЭДС со временем представлено на рисунке:



ЭДС дважды за период изменяет знак – это означает изменение полярности ЭДС, возникающей в рамке. Природа ЭДС индукции, возникающей в этом случае, - действие силы Лоренца на заряды в движущихся сторонах рамки AB и CD.

Максимальное значение ЭДС определяется величиной индукции магнитного поля, площадью рамки и угловой скоростью ее вращения $\mathcal{E}_{\max} = B \cdot S \cdot \omega$.



На практике чаще всего вращают не рамку, а магнитное поле, индукция которого распределена внутри машины по закону косинуса $B = B_{\max} \cdot \cos\varphi$.

Близкое к такому распределению индукции можно получить специальной формой полюсных наконечников магнита.

На вращающейся части машины – роторе – наложена обмотка возбуждения, питаемая от источника постоянного тока. Этот ток создает магнитное поле нужной конфигурации.

Обмотка, в которой генерируется переменная ЭДС, расположена в пазах неподвижной части машины – статора.

Как видно из выражения (1), циклическая частота ω синусоидальной ЭДС, возникающей в рамке, численно равна угловой скорости вращения рамки. Выразим угловую скорость вращения рамки через частоту $\omega = 2\pi n$ и циклическую частоту переменной ЭДС через обычную частоту $\omega = 2\pi\nu$. Очевидно, что частота переменной ЭДС ν совпадает с частотой вращения рамки n:

$$\nu = n.$$

Промышленная частота в России составляет ν = 50 Гц. Для получения синусоидальной ЭДС такой частоты рамку необходимо вращать с частотой $n = 50$ об/с $= 3000$ об/мин. С такой частотой ротор генератора может вращать только паровая турбина. Частоту вращения ротора можно уменьшить, увеличив число пар полюсов электромагнита: $\nu = \frac{pn}{60}$, где p – число пар полюсов,

n – частота вращения ротора (число оборотов в минуту). Например, частота вращения генераторов на Днепровской ГЭС $n = 83\,{}^1\!/_3$ об/мин. Для получения промышленной частоты 50 Гц генераторы ГЭС имеют p = 36 пар полюсов.

Квазистационарные токи

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися со временем. Законы постоянного тока оказываются справедливыми и для изменяющихся (переменных) токов, если только изменение силы тока происходит не слишком быстро. Если изменения тока настолько медленны, что за время установления электрического равновесия в цепи относительные изменения токов и ЭДС малы, то ***мгновенные значения токов и ЭДС будут подчиняться всем законам постоянного тока***. Такие токи называют медленно меняющимися или квазистационарными. Для квазистационарного тока мгновенные значения тока оказывается практически одинаковыми на всех участках цепи.

Мощность в цепи переменного тока

Мы знаем, что под действием периодически изменяющейся внешней силы механическая колебательная система будет совершать колебания с частотой этой вынуждающей силы. Электрическая система откликается на наличие переменной ЭДС в цепи аналогично – в ней возникает переменный ток, изменяющийся с частотой переменной ЭДС, генерируемой источником. В общем случае, между током в каком-либо участке цепи и напряжением на его концах будет наблюдаться сдвиг по фазе. Этот сдвиг по фазе зависит от параметров цепи и частоты переменной ЭДС.

$$u(t) = U_{\max} \cdot \cos(\omega t); \qquad i(t) = I_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

В цепи переменного тока происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии: тепловую (лампа накаливания, электроплитка, утюг и т.д.) и механическую (электрический двигатель). Для характеристики быстроты преобразования электрической энергии в другие виды энергии вводят мощность.

Мгновенной мощностью называют произведение мгновенных значений тока и напряжения (как для цепи постоянного тока):

$$p = ui = U_{\max} \cos(\omega t) \cdot I_{\max} \cos(\omega t + \varphi).$$

Легко видеть, что численное значение мгновенной мощности в цепи переменного тока непрерывно меняется, более того, может меняться и знак этой величины. Этот факт не позволяет использовать мгновенную мощность для расчета энергии, потребляемой цепью за большой интервал времени. Тем не менее, понятие мгновенной мощности чрезвычайно важно хотя бы потому, что знак этой величины позволяет ответить на вопрос: потребляет цепь энергию от источника в данный момент времени или отдает. Если мгновенная мощность положительна, цепь потребляет энергию от источника; мгновенная мощность отрицательная – цепь отдает энергию источнику.

С другой стороны, понятно, что энергетический баланс между источником тока и потребителем за каждый период одинаков. Этот факт позволяет ввести понятие ***средней за период мощности.***

За малый интервал времени dt изменением тока и напряжения можно пренебречь, и работу тока за этот малый интервал времени (именно она является мерой преобразования электрической энергии в другие виды энергии) рассчитать как для цепи постоянного тока

$$dA = pdt = u \cdot i \cdot dt = U_{\max} \cos(\omega t) \cdot I_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot dt.$$

Работа тока за период может быть найдена суммированием малых работ за время, равное периоду

$$A_{за\ период} = \int_0^T dA = \int_0^T uidt = \int_0^T U_{\max}\cos(\omega t)\cdot I_{\max}\cdot\cos(\omega t+\varphi)\cdot dt =$$
$$= \frac{1}{2}U_{\max}I_{\max}\int_0^T \left(\cos(2\omega t+\varphi)+\cos\varphi\right)dt =$$
$$= \frac{1}{2}U_{\max}I_{\max}\int_0^T \cos(2\omega t+\varphi)dt + \frac{1}{2}U_{\max}I_{\max}\int_0^T \cos\varphi\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}U_{\max}I_{\max}\cos\varphi\cdot T.$$

Тогда средняя за период мощность может быть найдена как

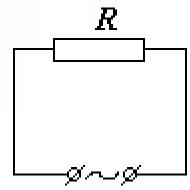
$$P_{средняя} = \frac{A_{за\ период}}{T} = \frac{\frac{1}{2}U_{\max}I_{\max}\cos\varphi\cdot T}{T} = \frac{1}{2}U_{\max}I_{\max}\cos\varphi.$$

Видим, что средняя за период мощность в цепи переменного тока зависит не только от максимальных значений тока и напряжения, но и от сдвига по фазе φ между током и напряжение. Множитель $\cos\varphi$ называют коэффициентом мощности. Чем больше коэффициент мощности, тем более полно энергия источника преобразуется в необходимые нам виды энергии. Величина сдвига по фазе между током и напряжением определяется характером нагрузки в цепи.

В цепях переменного тока различают три вида нагрузок: активная, индуктивная, емкостная. Рассмотрим каждый вид нагрузки по отдельности. Главный вопрос, который предстоит решить – разрешено ли применение закона Ома для расчета цепи, содержащей данный вид нагрузки.

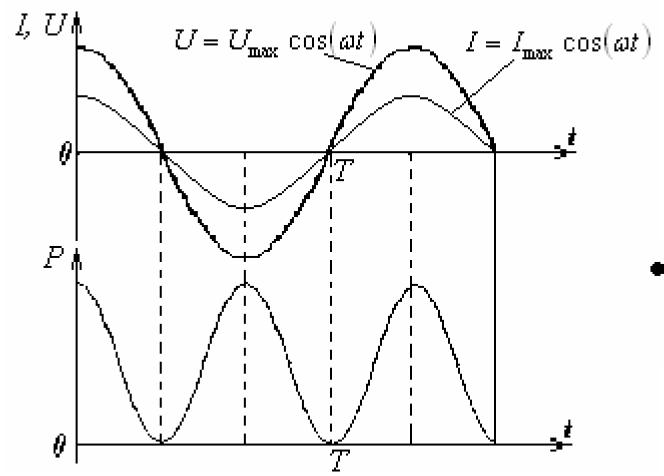
Активная нагрузка в цепи переменного тока

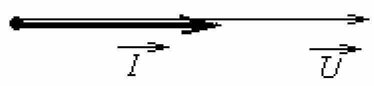
Активной нагрузкой в цепи переменного тока называется такой участок, на котором ***вся*** электрическая энергия ***необратимо*** преобразуется в тепловую. В роли активной нагрузки может быть обычный резистор (лампа накаливания, электронагревательный элемент и т.д.)



Пусть напряжение на концах участка цепи, являющегося активной нагрузкой, меняется по гармоническому закону $u(t) = U_{\max}\cos(\omega t)$.

Чтобы ***вся*** электрическая энергия ***необратимо*** преобразовывалась в тепловую энергию, необходимо, чтобы мгновенная мощность в любой момент времени была положительной, а это возможно только при $\cos\varphi = 1$. Следовательно, для активной нагрузки напряжение и сила тока колеблются в одной фазе.





Нетрудно видеть, что мгновенные значения силы тока $i = I_{\max}\cos(\omega t)$ и напряжения $u = U_{\max}\cos(\omega t)$ пропорциональны друг другу. Это утверждение – не что иное, как закон Ома для участка цепи:

$$\frac{u}{i} = \frac{U_{\max}\cos(\omega t)}{I_{\max}\cos(\omega t)} = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = const = R.$$

Таким образом, на активной нагрузке закон Ома выполняется как для мгновенных, так и для амплитудных значений.

$$i = \frac{u}{R}, \qquad I_{\max} = \frac{U_{\max}}{R}.$$

При расчетах цепей переменного тока, а также при электрических измерениях неудобно пользоваться амплитудными или мгновенными значениями токов и напряжений, а их средние значения за период равны нулю.

Наиболее удобным оказалось введение так называемых действующих значений тока и напряжения. В основу этих понятий положено тепловое действие тока.

Действующее значение переменного тока – это значение постоянного тока, при протекании которого по цепи в проводнике выделяется за период столько же теплоты, сколько и при протекании переменного тока.

Тепло, выделяемое в резисторе при протекании по нему постоянного тока, может быть найдено из закона Джоуля –Ленца:

$$Q = I^2 RT. \tag{*}$$

Тепло dQ, выделяемое переменным током в том же сопротивлении R за малое время dt, может быть выражено через мгновенное значение тока i:

$$dQ = i^2 R \cdot dt = I_{\max}^2 \cos^2\left(\omega t\right) \cdot R \cdot dt.$$

Тепло, выделяемое за период, находим суммированием малых dQ:

$$\begin{gathered} Q = \int_0^T I_{\max}^2 \cos^2(\omega t) \cdot R \cdot dt = \frac{I_{\max}^2 R}{2} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{I_{\max}^2 R}{2} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt = \\ = \frac{I_{\max}^2 R}{2} \int_0^T dt + \frac{I_{\max}^2 R}{2} \int_0^T \cos 2\omega t dt = \frac{I_{\max}^2 R}{2} T. \end{gathered} \tag{**}$$

Приравняв (*) и (**), найдем действующее значение переменного тока:

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot I_{\max}.$$

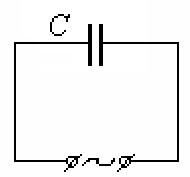
Выражения для действующих значений ЭДС и напряжения выглядят аналогично:

$$U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot U_{\max}, \qquad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot \mathcal{E}_{\max}.$$

В соответствии с ГОСТом действующие значения тока, напряжения и ЭДС обозначаются соответствующими прописными буквами без индексов.

Электроизмерительные приборы переменного тока градуируют в действующих значениях измеряемых величин.

5 Емкостная нагрузка в цепи переменного тока



Конденсатор в цепи переменного тока представляет так называемую емкостную нагрузку. Наличие диэлектрика между обкладками конденсатора приводит к тому, что постоянный ток не может течь по участку цепи, содержащему конденсатор. В цепи переменного тока ситуация меняется: под действием переменной ЭДС конденсатор может заряжаться и разряжаться, в этом случае по участку цепи, содержащему конденсатор, протекает ток зарядки или разрядки.

Наша задача – выяснить, как меняется ток зарядки и разрядки конденсатора, если его подключить к источнику синусоидальной ЭДС $u = U_{\max} \cos(\omega t)$.

Очевидно, что напряжение на конденсаторе совпадает с напряжением на клеммах генератора $u_c = U_{мах} \cos(\omega t)$. Тогда заряд на конденсаторе

$$q = Cu_c = C \cdot U_{max} \cos(\omega t).$$

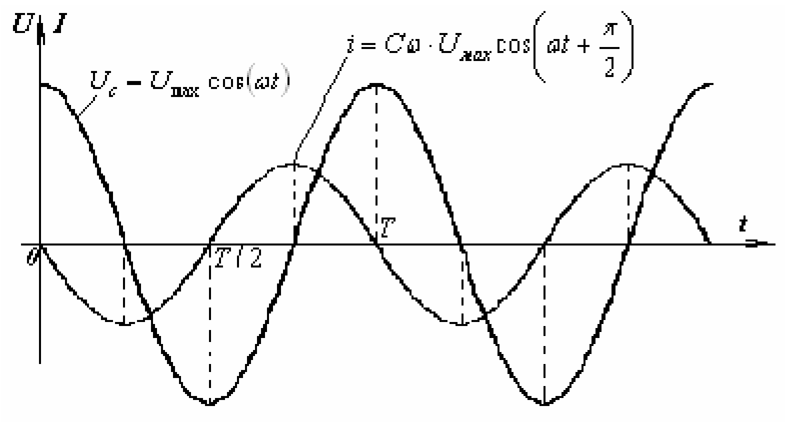
Поскольку ток зарядки конденсатора – не что иное, как производная от заряда на конденсаторе по времени, получаем:

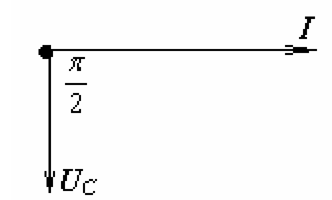
$$i = \frac{dq}{dt} = -C\omega \cdot U_{max} \sin(\omega t).$$

Воспользуемся формулами приведения:

$$i = C\omega \cdot U_{max} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Видим, что ток в цепи, содержащей конденсатор, меняется по гармоническому закону с частотой переменной ЭДС. Однако, фазы напряжения на конденсаторе и тока отличаются. Ток опережает напряжение на конденсаторе на $\frac{\pi}{2}$.





Сравнивая графики зависимостей тока и напряжения от времени, нетрудно увидеть, что пропорциональность между мгновенными значениями тока и напряжения отсутствует. Иными словами, ***закон Ома для мгновенных значений тока и напряжения не выполняется!***

Вернемся к зависимости тока от времени

$$i = C\omega \cdot U_{мах} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

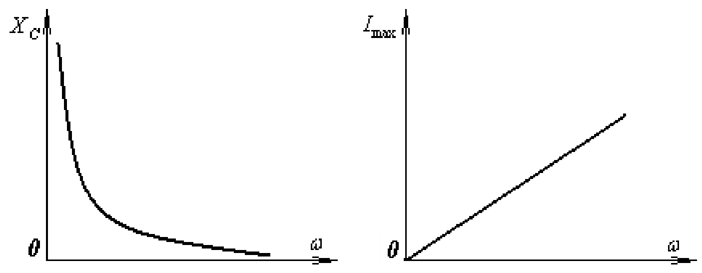
Величина, стоящая перед знаком косинуса, - амплитудное значение тока

$$I_{\max} = C\omega \cdot U_{мах}.$$

Максимальное значение тока в цепи с конденсатором прямо пропорционально максимальному значению напряжения. Это означает, что ***для амплитудных значений тока и напряжения выполняется закон Ома.***

Коэффициент пропорциональности $C\omega$ - проводимость участка цепи, содержащего конденсатор. Тогда величина $X_C = \dfrac{1}{C\omega}$ играет роль сопротивления, его называют емкостным сопротивлением.

Емкостное сопротивление зависит не только от емкости конденсатора, но и от частоты тока ω.С увеличением частоты тока сопротивление конденсатора падает, а амплитуда тока при этом, наоборот, увеличивается. Таким образом, конденсатор хорошо «пропускает» ток высокой частоты и плохо – низкой. Сопротивление конденсатора становится бесконечно большим, если частота тока $\omega = 0$, то есть постоянный ток не может течь через участок, содержащий конденсатор (как это уже было сказано ранее).

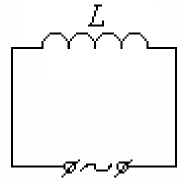


Коэффициент мощности для участка цепи, содержащего конденсатор, равен нулю $\cos\frac{\pi}{2}=0$, следовательно, участок цепи, содержащий конденсатор, не потребляет энергию от сети. Точнее, мгновенная мощность в цепи с конденсатором меняет знак через каждые четверть периода. Четверть периода конденсатор заряжается, потребляя энергию от источника, на этом этапе мгновенная мощность положительна. Следующую четверть периода конденсатор разряжается, возвращая энергию источнику, при этом мгновенная мощность отрицательна.

Роль емкостного сопротивления, таким образом, сводится к ограничению силы тока в цепи, содержащей конденсатор.

6 Индуктивная нагрузка в цепи переменного тока

Рассмотрим поведение идеальной катушки индуктивности, если ее подключить к источнику синусоидальной ЭДС $u(t)=U_{\max}\cos(\omega t)$. Выясним, как изменяется ток в цепи с течением времени.



Запишем второй закон Кирхгофа для рассматриваемого контура: сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура равна сумме ЭДС, действующих вдоль этого контура.

$$IR=\mathcal{E}_{ucm}+\mathcal{E}_{si}.$$

Учтем, что активное сопротивление R идеальной катушки равно нулю. Тогда

$$0=\mathcal{E}_{ucm}+\mathcal{E}_{si}$$

$$\mathcal{E}_{si}=-\mathcal{E}_{ucm}$$

$$-L\frac{di}{dt}=-U_{max}\cos(\omega t)$$

$$di=\frac{U_{\max}}{L}\cos(\omega t)\cdot dt.$$

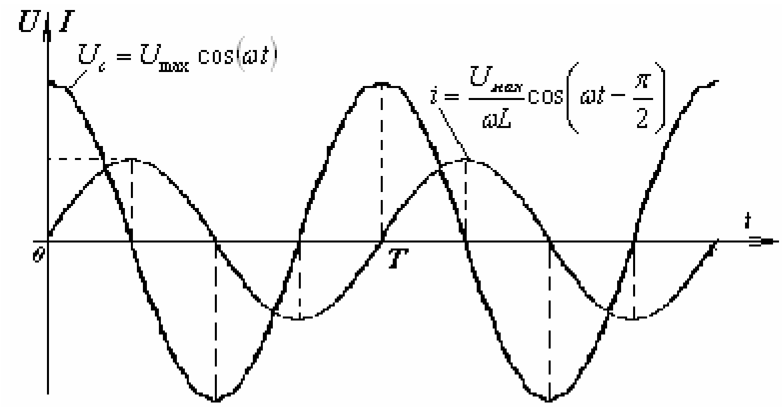
После интегрирования получаем

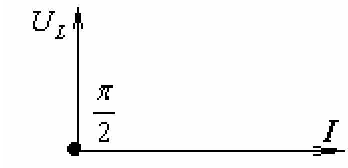
$$i=\int\frac{U_{\max}}{L}\cos\left(\omega t\right)\cdot dt=\frac{U_{\max}}{L}\int\cos\left(\omega t\right)\cdot dt=\frac{U_{\max}}{\omega L}\sin\left(\omega t\right).$$

Применим формулы приведения

$$i=\frac{U_{\max}}{\omega L}\sin\left(\omega t\right)=\frac{U_{\max}}{\omega L}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right).$$

Видим, что по катушке индуктивности течет переменный ток, частота которого совпадает с частотой генератора. Однако, колебания тока и напряжения на катушке не совпадают по фазе – ток отстает от напряжения на $\frac{\pi}{2}$.

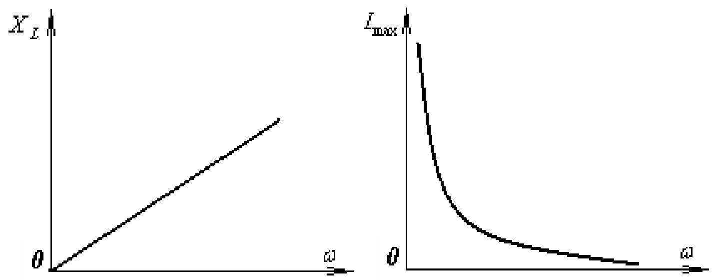




Анализ графиков зависимостей $i\left(t\right)$ и $U\left(t\right)$ показывает, что между мгновенными значениями тока и напряжения отсутствует пропорциональность. Это означает, что в цепи переменного тока, содержащей индуктивность, ***закон Ома для мгновенных значений тока и напряжения не выполняется.***

Однако, максимальное значение тока $I_{\max}=\frac{U_{\max}}{\omega L}$ прямо пропорционально амплитудному значению напряжения. Следовательно, для ***амплитудных значений тока и напряжения выполняется закон Ома.***

Величина $X_L = \omega L$ играет роль сопротивления и называется индуктивным сопротивлением. Видим, что кроме индуктивности L сопротивление катушки зависит еще и от частоты ω протекающего по ней тока.



Сопротивление катушки растет при увеличении частоты тока. Таким образом, катушка, в отличие от конденсатора, хорошо пропускает низкочастотный ток, и плохо – высокочастотный.

Цепь, содержащая индуктивность, как и цепь с емкостной нагрузкой, не потребляет энергии от сети, ибо сдвиг по фазе между током и напряжением равен $\frac{\pi}{2}$. Строго говоря, четверть периода, когда ток в катушке нарастает, она потребляет энергию от источника, потребляемая от источника энергия переходит в энергию магнитного поля тока. В течение этой четверти периода мгновенная мощность положительна. Следующую четверть периода ток в катушке убывает, его магнитное поле «исчезает», энергия отдается источнику, мгновенная мощность отрицательна. Так что в целом за период на индуктивной нагрузке не происходит необратимого преобразования электрической энергии в другие виды энергии. По этой причине индуктивную и емкостную нагрузки в цепи переменного тока называют ***реактивной нагрузкой.***

Упражнения

Емкостная нагрузка в цепи переменного тока

1 Рассчитайте сопротивление конденсатора емкостью С = 0,1 мкФ переменному току, если частота тока а) 50 Гц; б) 1000 Гц; в) 10 кГц. Постройте график зависимости емкостного сопротивления от частоты переменного тока.

2 К городской сети переменного тока с напряжением $U_{эф}$ = 127 В присоединен конденсатор емкостью С = 40 мкФ. Определите амплитудное значение тока в цепи.

3 К зажимам генератора присоединен конденсатор емкостью С = 0,1 мкФ. Определите амплитуду напряжения на зажимах генератора, если амплитуда тока I_{max} = 2,2 А, а частота тока ν = 5 кГц.

4 Найдите емкость конденсатора, если амплитуда переменного напряжения на нем U_0 =120 В, действующее значение тока I = 0,86 А, частота тока ν = 50 Гц.

Индуктивная нагрузка в цепи переменного тока

1 Индуктивность катушки L = 0,5 мГн. Рассчитайте сопротивление катушки переменному току, если его частота а) 50 Гц; б) 1000 Гц; в) 10 кГц. Постройте график зависимости индуктивного сопротивления от частоты переменного тока. Катушка идеальная.

2 Найдите индуктивность катушки, если амплитуда переменного напряжения на ее концах $U_{мах}$ = 160 В, амплитуда тока в ней $I_{мах}$ = 10 А и частота тока 50 Гц. Катушка идеальная.

3 Индуктивное сопротивление катушки X_L = 500 Ом, эффективное напряжение в сети, в которую включена катушка, $U_{эф}$ = 100 В, частота тока 1000 Гц. Определите индуктивность катушки и амплитудное значение тока в цепи. Активным сопротивлением катушки и подводящих проводов пренебречь.

Указания:

1 Помним, что для расчета емкостного или индуктивного сопротивления необходимо знать циклическую частоту ω, а не обычную частоту ν. Связь между ними $\omega = 2\pi\nu$.

2 Закон Ома для цепи с катушкой или конденсатором можно записать как для амплитудных, так и для действующих (эффективных) значений тока и напряжения.

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{X} \qquad \text{или} \qquad I_{эф} = \frac{U_{эф}}{X}.$$

Нельзя применять закон Ома, если значение одной из величин (тока или напряженяе) действующее, а значение другой величины амплитудное!!!

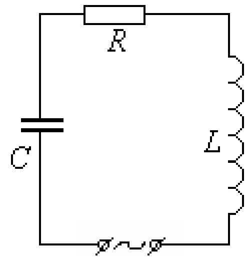
3 Действующие и амплитудные значения тока и напряжения связаны между собой следующим образом

$$U_{\max} = U_{эф} \cdot \sqrt{2}, \qquad I_{\max} = I_{эф} \cdot \sqrt{2}.$$

Действующее и эффективное значение тока или напряжения – это одно и то же! Можно обозначать так, как Вам больше нравится – возможны три варианта:

$$U_{д} = U_{эф} = U, \qquad I_{д} = I_{эф} = I.$$

§ 2 Последовательное соединение R, L, C



Рассмотрим реальный колебательный контур с источником синусоидальной ЭДС. Задача заключается в определении тока, протекающего по цепи.

Задачу можно решить двумя способами: алгебраически и геометрически. Обратимся сначала к алгебраическому решению. Запишем для контура второй закон Кирхгофа – сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура равна сумме ЭДС, действующих в контуре:

$$U_R + U_C = \mathcal{E}_{si} + \mathcal{E}_{ист}$$
$$\frac{q}{C} + iR = -L\frac{di}{dt} + U_{\max}\sin(\omega t).$$

С учетом того, что

$$i = q' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{di}{dt} = q'',$$

уравнение перепишется в виде

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = U_{\max}\sin(\omega t)$$
$$q'' + \frac{R}{L}\cdot q' + \frac{1}{LC}q = \frac{U_{\max}}{L}\sin(\omega t).$$

Введем привычные обозначения $\frac{R}{L} = 2\delta,\quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,\quad \frac{U_{\max}}{L} = f_0$. Тогда дифференциальное уравнение примет вид $q'' + 2\delta\cdot q' + \omega_0^2\cdot q = f_0\sin(\omega t)$.

С подобным дифференциальным уравнением мы уже сталкивались, рассматривая вынужденные механические колебания под действием синусоидальной внешней вынуждающей силы. Тогда же мы показывали, что решение уравнения ищется в виде $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$.

$q_1(t)$ - решение однородного дифференциального уравнения имеет вид $q_1(t) = q_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot cos(\Omega t)$, где $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. С физической точки зрения это означает, что включение переменного тока сопровождается «звоном» собственных колебаний контура, затухающих с течением времени. Время затухания собственных колебаний будет порядка времени релаксации $\tau = \dfrac{1}{\delta} = \dfrac{2L}{R}$.

Если же мы, как обычно в электротехнике, интересуемся установившимися колебаниями при $t >> \dfrac{1}{\delta}$, то, как было уже показано ранее решение дифференциального уравнения ищется в виде $q(t) = q_2(t) = q_{\max} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Физический смысл решения заключается в том, что под действием синусоидальной ЭДС в контуре будут происходить гармонические колебания с частотой внешней ЭДС. Очевидно, что мгновенные значения тока в контуре и напряжения на клеммах генератора сдвинуты по фазе, а это означает, что ***закон Ома для мгновенных значений тока и напряжения не выполняется.***

В силу математической тождественности дифференциальных уравнений вынужденных механических и вынужденных электрических колебаний

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t, \qquad q'' + 2\delta \cdot q' + \omega_0^2 \cdot q = f_0 \sin(\omega t),$$

мы можем воспользоваться уже готовым результатом, проведя замену механических величин на соответствующие электрические. Тогда

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \rightarrow$$

$$\to q_{\max} = \frac{U_{\max}}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}} = \frac{U_{\max}}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{R}{L}\right)^2\omega^2}} =$$

$$= \frac{U_{\max}}{\omega\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}.$$

$$tg\varphi_{мех} = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad \to tg\varphi_{эл} = -\frac{\frac{R}{L}\cdot\omega}{\frac{1}{LC}-\omega^2} = \frac{R}{\omega L-\frac{1}{\omega C}}.$$

Ток к цепи равен $i(t) = q' = q_{\max}\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi) = I_{\max}\cos(\omega t+\varphi)$, где

$$I_{\max} = q_{\max}\cdot\omega = \frac{U_{\max}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}.$$

Амплитуда тока в контуре прямо пропорциональна амплитуде напряжения, то есть для амплитудных значений тока и напряжения выполняется закон Ома.

Величина $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}$ играет роль сопротивления последовательной R, L, C - цепи. Такое «сопротивление» принято называть импедансом.

Выше найден сдвиг фаз между зарядом и напряжением $\varphi_{эл}$, а поскольку колебания тока опережают колебания заряда на $\frac{\pi}{2}$, то сдвиг фаз между током и напряжением будет $tg\varphi = -\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$.

Итак, поставленная задача решена. Мы показали, что под действием синусоидальной ЭДС в колебательном контуре происходят гармонические колебания тока, нашли амплитуду тока и сдвиг по фазе между током и напряжением. Для последовательной R, L, C - цепи можно пользоваться готовыми формулами. Однако, как правило, цепи переменного тока бывают не только последовательными. В этих случаях полученный нами результат не годится. В этих случаях гораздо проще рассчитать цепь графически, а не алгебраически. Покажем, как это делается.

При последовательном соединении сила тока одинакова во всех участках цепи, следовательно, $i_{\text{R}} = i_L = i_C = i_{общ}$. Если $i_{общ} = I_{\max} \cdot cos(\omega t)$, то колебания напряжения на активной нагрузке R совпадают по фазе с колебаниями силы тока $u_R = U_{\max R} \cdot cos(\omega t) = I_{\max} R \cdot cos(\omega t)$.

На емкостной нагрузке колебания напряжения отстают от тока на $\dfrac{\pi}{2}$:

$$u_C = U_{\max C} \cdot cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max} X_C \cdot cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

На индуктивной нагрузке напряжение опережает ток на $\dfrac{\pi}{2}$:

$$u_L = U_{\max L} \cdot cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max} X_L \cdot cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

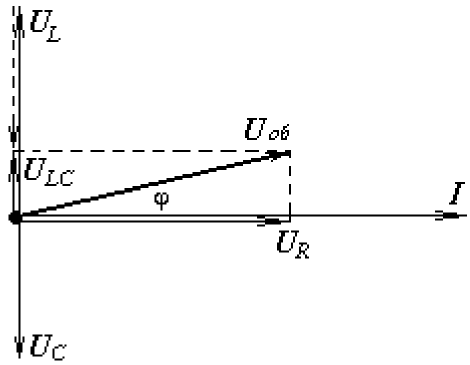
Мгновенное значение общего напряжения при последовательном соединении равно сумме напряжений на отдельных участках

$$u = u_R + u_C + u_L$$

$$u = U_{\max R} \cdot cos(\omega t) + U_{\max C} \cdot cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + U_{\max L} \cdot cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Для сложения гармонических функций одинаковой частоты удобно воспользоваться методом векторных диаграмм. Каждое колебание изображается вектором, которому в полярных координатах соответствуют модуль (амплитуда) и полярный угол (фаза).

Изобразим вектор тока горизонтально. Напряжение на активной нагрузке u_R синфазно току, соответственно откладываем вектор $U_{\max R}$ параллельно вектору тока. Напряжение u_L опережает ток на $\frac{\pi}{2}$, соответственно откладываем вектор $U_{\max L}$ перпендикулярно току с опережением по фазе. Напряжение u_C отстает от тока на $\frac{\pi}{2}$, откладываем вектор $U_{\max C}$ перпендикулярно току с отставанием по фазе.



На диаграмме, как правило, опускают индексы «max», чтобы не загромождать рисунок.

Сумма всех трех векторов напряжений даст вектор общего напряжения $U_{\max}$. Нетрудно видеть, что между током и напряжением существует сдвиг по фазе, это значит, что между мгновенными значениями тока и напряжения пропорциональность отсутствует. Для мгновенных значений тока и напряжения закон Ома не выполняется!

Сдвиг по фазе между напряжением и током

$$tg\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Амплитуда общего напряжения U_o равна

$$U_o = \sqrt{U_{LC}^2 + U_R^2} = \sqrt{\left(U_L - U_C\right)^2 + U_R^2} = I_{\max}\sqrt{\left(X_L - X_C\right)^2 + R^2}.$$

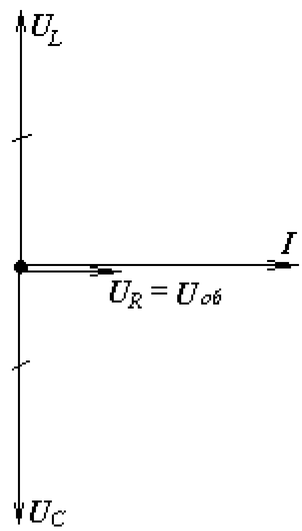
Опять-таки обнаруживаем пропорциональность между амплитудными значениями тока и напряжения, это значит, что для них выполняется закон Ома.

Резонанс напряжений (резонанс в последовательной R, L, C-цепи)

Предположим, что при заданной амплитуде напряжения U_0 на клеммах генератора мы будем варьировать частоту ω внешней ЭДС. Очевидно, что амплитуда силы тока $I_{\max}$ будет меняться, ибо индуктивное X_L и емкостное X_C сопротивления зависят от частоты ω.

$$I_{\max} = \frac{U_0}{\sqrt{\left(X_L - X_C\right)^2 + R^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}.$$

Нетрудно видеть, что амплитуда тока примет максимальное значение при условии $X_L = X_C$ или $U_L = U_C$. В этом случае наблюдается резонанс. При последовательном соединении элементов он называется резонансом напряжений. Векторная диаграмма при резонансе выглядит следующим образом.



Напряжения на индуктивном и емкостном сопротивлениях равны по модулю и колеблются в противофазе, следовательно, они компенсируют друг друга. Общее напряжение становится равным падению напряжения на активной нагрузке.

Часто параметры контура подбираются таким образом, что $X_L = X_C >> R$. Тогда $U_L = U_C >> U_R = U_{об}$. При резонансе напряжений напряжения на отдельных участках цепи (на емкости и индуктивности) могут значительно превосходить напряжение на клеммах генератора.

Сдвиг по фазе между током и общим напряжением при резонансе обращается в ноль. При резонансе колебательный контур ведет себя как цепь исключительно с активной нагрузкой.

Частота тока, при которой наблюдается резонанс, может быть найдена следующим образом:

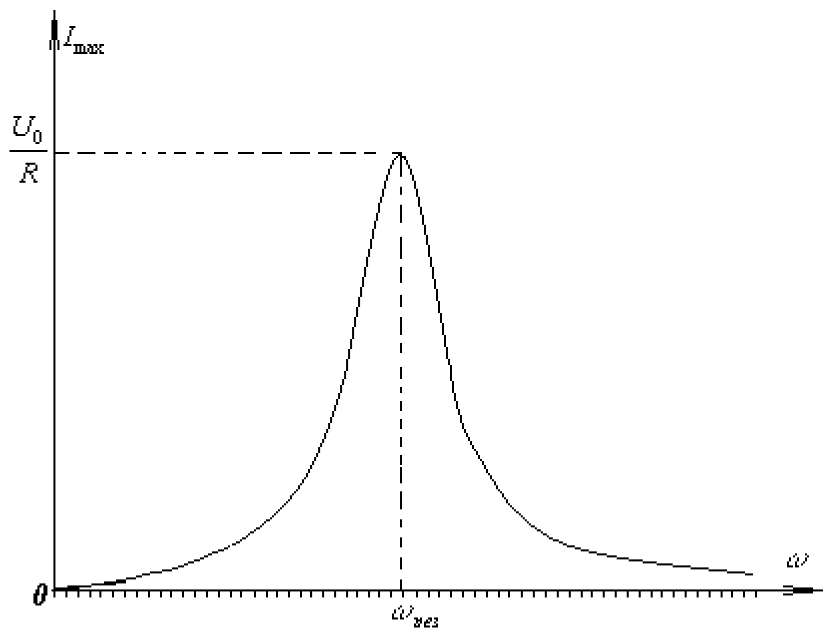
$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

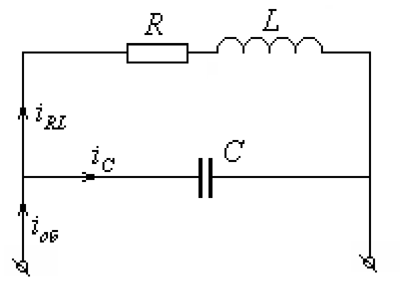
$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Как и следовало ожидать, резонанс наблюдается при совпадении частоты генератора с собственной частотой колебательного контура.

Резонансная кривая выглядит следующим образом



§ 3 Резонанс токов



Рассмотрим параллельное соединение конденсатора с катушкой. Поскольку реальная катушка обладает активным сопротивлением, эквивалентная электрическая цепь будет выглядеть следующим образом:

Задача остается прежней – зная приложенное напряжение, рассчитать ток в цепи.

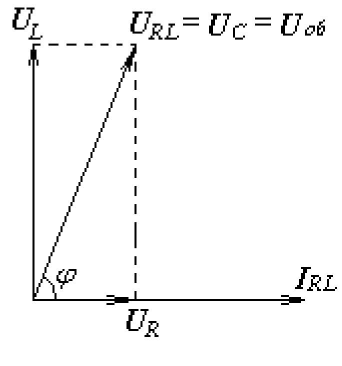
При параллельном соединении напряжения на ветвях, содержащих конденсатор и катушку, одинаковые $U_{RL} = U_C = U_{об}$. Ток в неразветвленной части $i_{об}$ (его мы и хотим определить) делится на два тока $i_{об} = i_{RL} + i_C$.

Для расчета этой цепи удобнее воспользоваться методом векторных диаграмм.

Начнем с ветви, содержащей индуктивность и активное сопротивление.

Напряжение на активной нагрузке совпадает по фазе с током – на векторной диаграмме вектор U_R сонаправлен вектору I_{RL}.

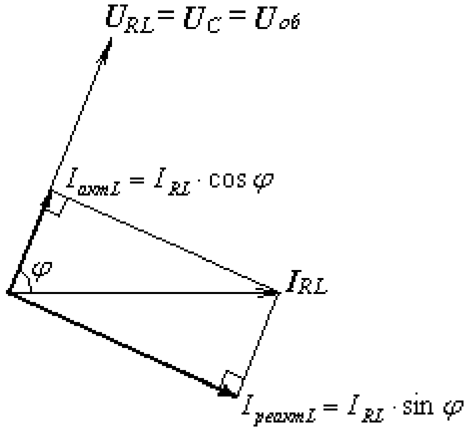
Напряжение на индуктивной нагрузке опережает ток на $\frac{\pi}{2}$ - строим вектор U_L перпендикулярно вектору тока с опережением по фазе. Общее напряжение находим по правилу параллелограмма. Оно опережает ток в R, L-ветви на φ радиан.



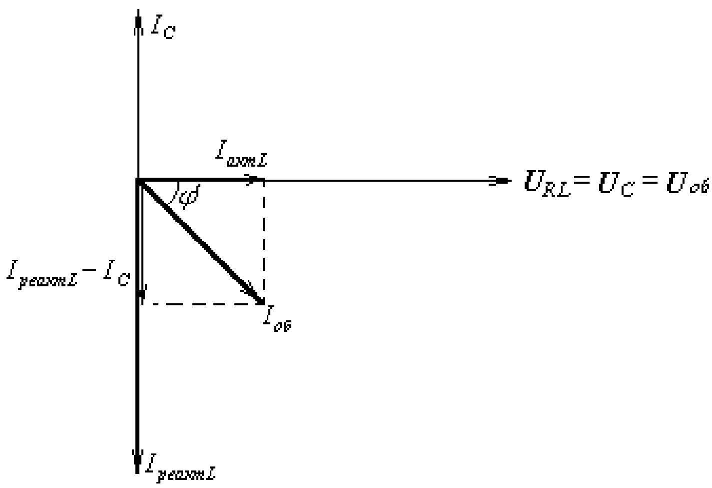
Сопротивление R, L - ветви равно $Z_{RL} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$. Амплитуда тока в этой ветви может быть найдена по закону Ома $I_{RL} = \dfrac{U_{об}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$, а сдвиг по фазе φ определим по чертежу $tg\varphi = \dfrac{X_L}{R}$.

Разложим ток в R, L - ветви на две составляющих – активную $I_{актL}$, параллельную вектору напряжения, и $I_{реактL}$, перпендикулярную вектору напряжения:

$$I_{актL} = I_{RL} \cdot \cos\varphi, \qquad I_{реактL} = I_{RL} \cdot \sin\varphi.$$



Теперь перейдем к построению векторной диаграммы для всей цепи. Поскольку напряжение на отдельных ветвях одинаково, в основу диаграммы положим вектор общего напряжения $U_{об}$, расположив его горизонтально.

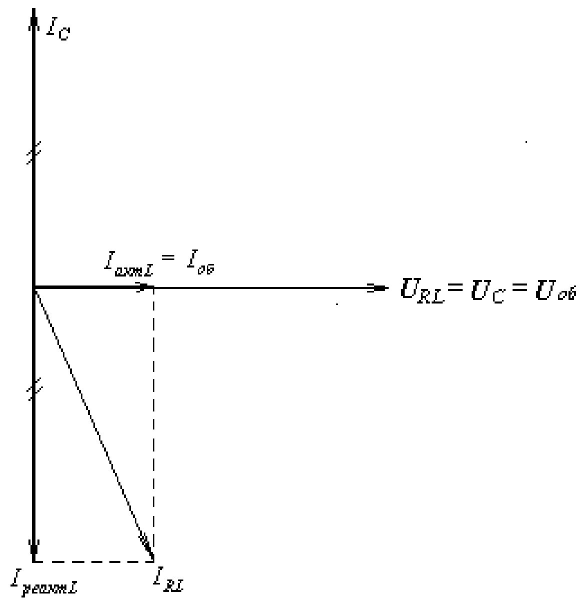


Ток в ветви, содержащей емкость, найдем по закону Ома $I_C = \dfrac{U_{об}}{X_C}$.

Этот ток опережает напряжение по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$ и колеблется в противофазе с $I_{реактL}$. Ток в неразветвленной части цепи может быть найден по теореме Пифагора:

$$I_{об} = \sqrt{\left(I_{реактL} - I_C\right)^2 + I_{актL}^2}.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия $I_{реактL} = I_C$ ток в неразветвленной части цепи принимает минимальное значение, равное $I_{об} = I_{актL}$. При этом токи в ветвях I_C и I_{RL} могут оказаться намного больше тока в неразветвленной части цепи, при этом они колеблются практически в противофазе. В этом случае мы имеем дело с так называемым резонансом токов. Векторная диаграмма для резонанса токов выглядит следующим образом:



При резонансе токов цепь ведет себя так, как будто в ней содержится только активная нагрузка. Аналогичная ситуация наблюдалась и при резонансе напряжений.

Найдем резонансную частоту

$$I_{реактL} = I_C$$

$$I_{реактL} = I_{RL} \cdot \sin\varphi = \frac{U_{об}}{X_C}$$

$$\frac{U_{об}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cdot \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U_{об}}{X_C}$$

$$\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{1}{X_L}$$

$$R^2 + X_L^2 = X_L \cdot X_L$$

$$R^2 + \omega^2 L^2 = \frac{L}{C}.$$

Тогда резонансная частота равна $\omega_{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$. Как правило, активное сопротивление катушки R много меньше ее индуктивного сопротивления. В этом случае

$$\omega_{рез} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0,$$

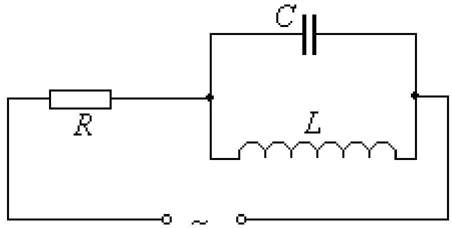
то есть резонанс токов наблюдается при совпадении частоты внешней ЭДС с собственной частотой колебательного контура.

Резонанс токов широко используется в радиотехнике, например, в приемном колебательном контуре антенны, в автогенераторе. В электротехнике резонанс токов используется для повышения коэффициента мощности $\cos\varphi$.

§4 Примеры решения задач

Задача 1 Параллельное соединение конденсатора и катушки

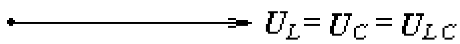
В цепи, изображенной на рисунке, $L = 0{,}1$ Гн и C = 10 мкФ. Циклическая частота напряжения на клеммах источника равна ω = 10^3 рад/с. Определите силу тока, протекающего через резистор R.



Решение:

1 Проанализируем характер соединения отдельных элементов цепи. Катушка индуктивности L и конденсатор емкости C включены параллельно. Активное сопротивление R включено последовательно с участком цепи, содержащим L и C.

2 Векторную диаграмму рассматриваемой цепи начнем строить с участка, содержащего L и C. При параллельном соединении напряжения на отдельных верях одинаковые $U_L = U_C$. За основу векторной диаграммы возьмем вектор U_{LC}, расположив его горизонтально.



Ток в ветви, содержащей индуктивность, отстает по фазе от напряжения на $\frac{\pi}{2}$. Вектор I_L нужно построить перпендикулярно вектору U_{LC} с отставанием по фазе.

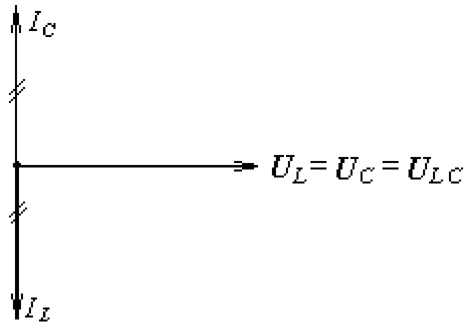
Ток в ветви, содержащей емкость, опережает напряжение по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Вектор I_C нужно построить перпендикулярно вектору U_{LC} с опережением по фазе.

Длины векторов на векторной диаграмме должны быть равны амплитудам колеблющихся величин. Амплитуды токов I_C и I_L можно определить по закону Ома: $I_L = \frac{U_{LC}}{X_L}$ и $I_C = \frac{U_{LC}}{X_C}$. Видно, что на диаграмме соотношение длин векторов I_L и I_C будет зависеть от соотношения сопротивлений X_L и X_C.

Рассчитаем X_L и X_C:

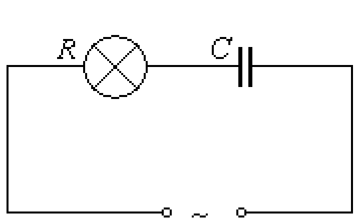
$$X_L = \omega L = 10^3 \cdot 0{,}1 = 100(\text{Ом})$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 100(\text{Ом}).$$

Поскольку сопротивление отдельных ветвей равны $X_L = X_C$, то токи в ветвях тоже будут равны $I_L = I_C$. Длины векторов I_C и I_L на диаграмме будут одинаковыми:



Ток в неразветвленной части цепи, то есть ток через резистор R, равен сумме токов в отдельных ветвях. При сложении помним о фазовых соотношениях: токи I_L и I_C равны по модулю и колеблются в противофазе, следовательно, они компенсируют друг друга. Тогда $I_{об} = I_R = I_L + I_C = 0$.

Задача 2 Последовательное соединение резистора и конденсатора

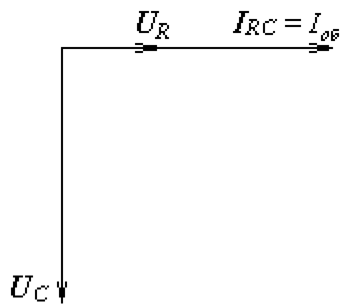


В цепь переменного тока с напряжением $\mathcal{E}$ = 440 В и частотой ν = 50 Гц включены последовательно нормально горящая лампа накаливания и конденсатор. Чему равна емкость конденсатора

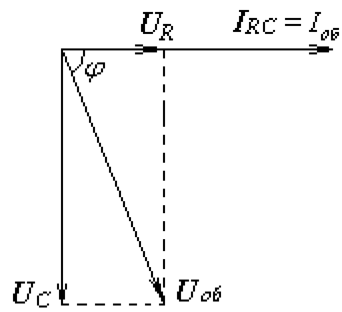
C, если лампочка, рассчитана на напряжение $U_л$ = 220 В и силу тока $I_л$ =1 А? Чему равен сдвиг по фазе φ между током и полным напряжением в цепи?

Решение:

1 Лампа накаливания представляет исключительно активную нагрузку в цепи переменного тока. Построение векторной диаграммы начнем с вектора тока $I_{об} = I_R = I_C$, ибо при последовательном соединении ток во всех участках цепи последовательной цепи одинаков. Вектор тока $I_{об}$ расположим горизонтально.



Напряжение на активной нагрузке U_R колеблется синфазно с током, строим вектор U_R параллельно вектору $I_{об}$. Напряжение на емкостной нагрузке U_C отстает по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$. Строим вектор U_C перпендикулярно вектору тока $I_{об}$ с отставанием по фазе.



Общее напряжение при последовательном соединении равно сумме напряжений на отдельных участках цепи. Складываем вектора U_C и U_R по правилу параллелограмма и находим вектор общего напряжения $U_{об}$. Между векторами $U_{об}$ и $I_{об}$ отмечаем угол φ - это сдвиг по фазе между общим током и общим напряжением.

2 По векторной диаграмме можно сразу определить сдвиг по фазе между током и напряжением. Нетрудно видеть, что $cos\varphi = \frac{U_R}{U_{об}} = \frac{220\text{В}}{440\text{В}} = 0,5$. Следовательно, ток опережает напряжение по фазе на $\pi / 3$ рад.

3 Для нахождения емкости конденсатора воспользуемся законом Ома

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad X_C = \frac{U_C}{I_{об}}$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I_{об}}$$

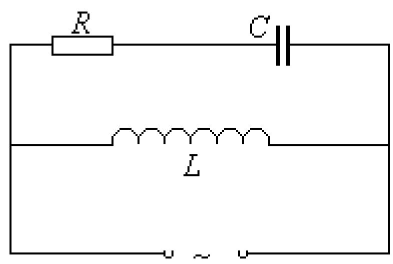
$$C = \frac{I_{об}}{\omega \cdot U_C} = \frac{I_{об}}{2\pi\nu \cdot U_C}.$$

4 Напряжение на емкостной нагрузке U_C найдем, используя векторную диаграмму. Сделаем это по теореме Пифагора $U_C = \sqrt{U_{об}^2 - U_R^2}$. Тогда для емкости конденсатора получаем

$$C = \frac{I_{об}}{2\pi\nu \cdot \sqrt{U_{об}^2 - U_R^2}}.$$

Окончательно, после подстановки численных значений $C = 8{,}4 \cdot 10^{-6}\,Ф$.

Задача 3 Разветвленная цепь переменного тока

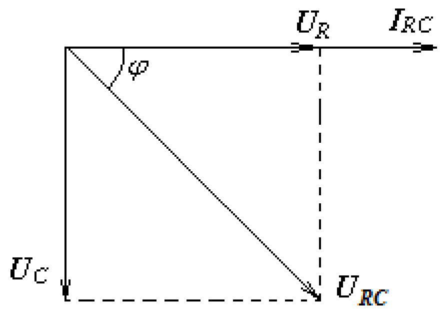


Определите силу тока в неразветвленной части цепи и напряжение на клеммах источника, если $R = X_C = 2\,Ом$, ток через катушку равен 10 А, ток в ветви, содержащей конденсатор и резистор – 14,1 А. Активное сопротивление катушки пренебрежимо мало.

Решение:

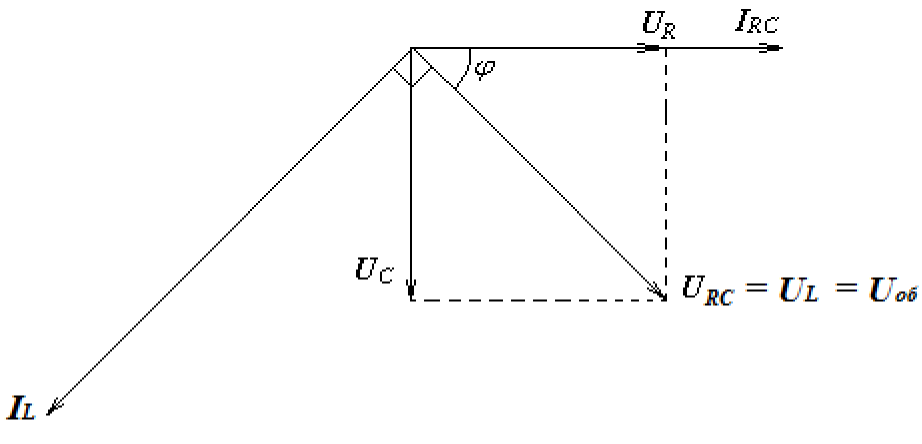
1 Резистор и конденсатор соединены последовательно, значит, токи в этих элементах цепи одинаковые $I_R = I_C = I_{RC} = 10\,А$. Катушка включена параллельно ветви *RC*, следовательно, одинаковы напряжения $U_L = U_{RC} = U_{об}$.

2 Построение векторной диаграммы начнем с тока I_{RC} - расположим его горизонтально. Напряжение на активной нагрузке U_R совпадает с током по фазе, следовательно, вектор U_R на диаграмме будет параллелен вектору тока I_{RC}. Напряжение на емкостной нагрузке U_C отстает от тока по фазе на $\frac{\pi}{2}$.



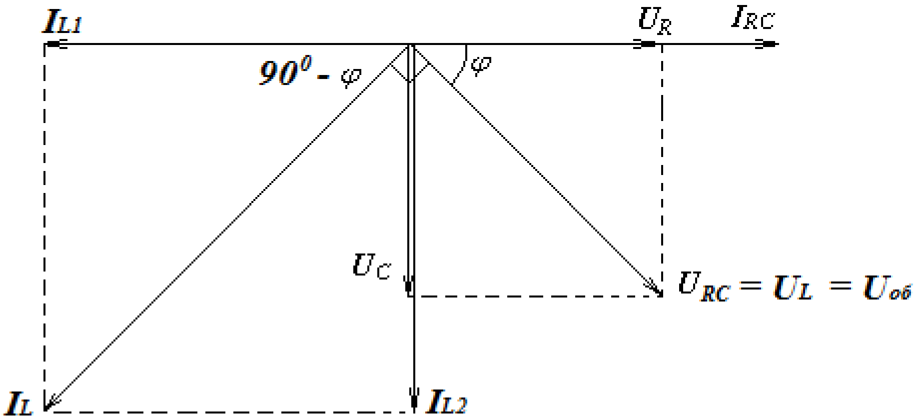
По условию $R = X_C$. При последовательном соединении напряжения на участках с одинаковым сопротивлением тоже равны $U_R = U_C$. На диаграмме вектора U_R и U_C имеют одинаковую длину. Нетрудно видеть, что сдвиг по фазе между током I_{RC} и напряжением U_{RC} равен $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3 На индуктивной нагрузке ток отстает по фазе от напряжения на $\frac{\pi}{2}$. По условию ток в катушке больше, чем в ветви с конденсатором, поэтому вектор I_L на диаграмме длиннее вектора I_{RC}.



4 Ток в неразветвленной части цепи $I_{об}$ складывается из токов в ветвях I_L и I_{RC}. Сложение нужно произвести с учетом фазовых сдвигов, для этого нужно сложить вектора I_L и I_{RC} на векторной диаграмме. Задача уп-

рощается, если вектор I_L предварительно разложить на две составляющих, как показано на рисунке:



5 Из векторной диаграммы нетрудно видеть, что $U_{об} = U_R\sqrt{2} = I_R \cdot R = 20$ В.

6 Составляющие тока I_L равны : $I_{L1} = I_L \cdot \sin\varphi = I_L \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 14{,}1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\,(\text{А})$ и $I_{L2} = I_L \cdot \cos\varphi = I_L \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 14{,}1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\,(\text{А})$.

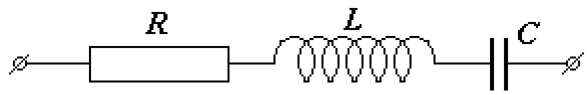
7 Очевидно, что ток в неразветвленной части цепи равен

$$I_{об} = \sqrt{\left(I_{L1} - I_{RC}\right)^2 + I_{L2}^2} \cdot = \sqrt{\left(10 - 10\right)^2 + 10^2} = 10\,(\text{А}).$$

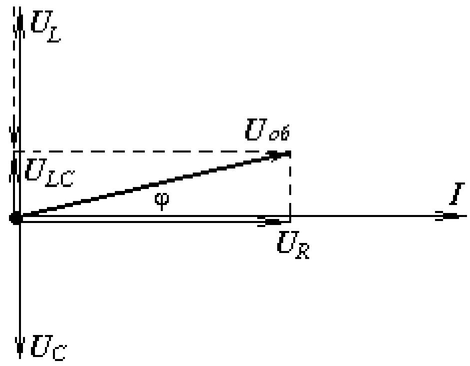
§ 4 Опять о мощности в цепи переменного тока

Как мы только что показали, конденсатор и катушка не потребляют энергию от источника за период. Остается предположить, что преобразование электрической энергии безвозвратно в тепловую энергию происходит исключительно за счет наличия в разветвленной цепи активной нагрузки.

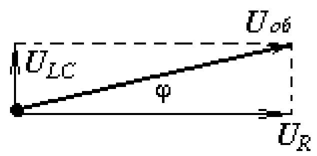
Рассмотрим знакомый пример – последовательное соединение R, L, и C.



Векторная диаграмма для такой цепи нам уже знакома:



Выделим отдельно треугольник напряжений:



Мощность, потребляемая цепью, равна:

$$P = IU_{об}\cos\varphi.$$

Из треугольника напряжений нетрудно видеть, что

$$U_{об}\cos\varphi = U_R$$

Тогда для мощности, потребляемой всей цепочкой, имеем

$$P = IU_{об}\cos\varphi = IU_R = P_R$$

Что и требовалось доказать.

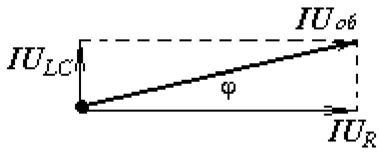
Важно, что наш вывод верен для любого вида соединения. ***Преобразование электрической энергии в цепи переменного тока в тепловую энергию происходит только на активной нагрузке!***

Кстати, тогда для расчета мощности, потребляемой всей цепью не обязательно находить общий ток, общее напряжение и сдвиг фаз между ними. Достаточно воспользоваться законом Джоуля-Ленца для каждого активного элемента, входящего в состав цепи:

$$P = IU_{об}\cos\varphi = P_R = I_R^2 R.$$

Введем еще ряд важных понятий

Вернемся опять к последовательной цепи с активной нагрузкой, индуктивностью и емкостью. Умножим все стороны треугольника напряжений на значение тока в цепи (он во всех элементах цепи одинаков). Получим подобный треугольник, каждая сторона которого имеет размерность мощности.



Вводят следующие обозначения

$S = IU$ *полная мощность*

$Q = IU_{LC}$ *реактивная мощность*

$P = IU_R$ *активная мощность*

Полную мощность S иначе называют кажущейся, то есть такой, которую мог бы дать источник, если бы не было сдвига по фазе между током и напряжением. Единицы измерения полной мощности [S] = [В·А].

Реактивная мощность Q – это та энергия, которой в течение периода цепь обменивается с источником. Ее измеряют в Вольт-Амперах реактивных (Вар).

Только активная мощность P соответствует электрической энергии, используемой для преобразования в тепло, для получения механической работы и т.д.

$$P = S\cos\varphi = IU\cos\varphi.$$

Почему нужно стремиться, чтобы коэффициент мощности был как можно больше?

Низкие значения cosφ порождают значительные дополнительные потери на нагревание подводящих проводов, обмоток генератора. Покажем это.

Пусть одинаковые мощности передаются от одинаковых генераторов двум нагрузкам с $\cos\varphi_0 = 1$ и $\cos\varphi < 1$.

$$P_0 = I_0 U\cos\varphi_0 = I_0 U \qquad P = IU\cos\varphi$$

$$P = P_0 \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{I_0}{\cos\varphi}.$$

Мощность, расходуемая на нагревание проводов, по закону Джоуля - Ленца будет равна

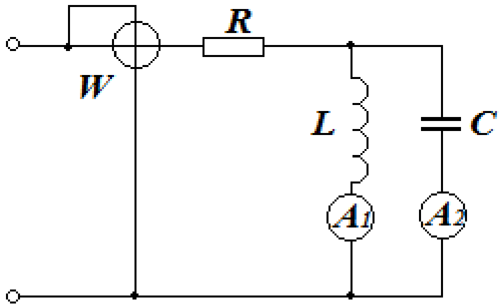
$$P_0 = I_0^2 R_{пр} \qquad P = I^2 R_{пр} = I_0^2 R_{пр}\frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

Результат очевиден.

§5 Примеры решения задач

Задача 1 Показания ваттметра

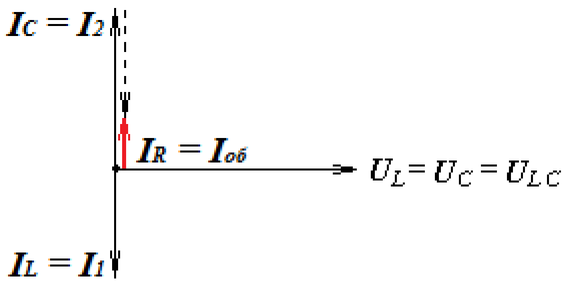
Определите показания ваттметра, если показания амперметров равны соответственно $I_1 = 8$ А и $I_2 = 12$ А. Активное сопротивление R = 10 Ом.



Решение:

1 Ваттметр измеряет активную мощность, потребляемую **всей** цепью. Эту мощность можно рассчитать двумя способами. Во-первых, $P = I_{об} \cdot U_{об} \cdot \cos\varphi$, где $I_{об}$ и $U_{об}$ - действующие значения общего тока и напряжения в цепи, φ - сдвиг по фазе между током и напряжением в цепи. Ни одна из трех входящих в формулу величин не известна.

2 С другой стороны, потребление мощности от источника происходит только на активной нагрузке: $P = I_R^2 \cdot R$. Ток I_R, текущий через резистор, нетрудно найти из векторной диаграммы.



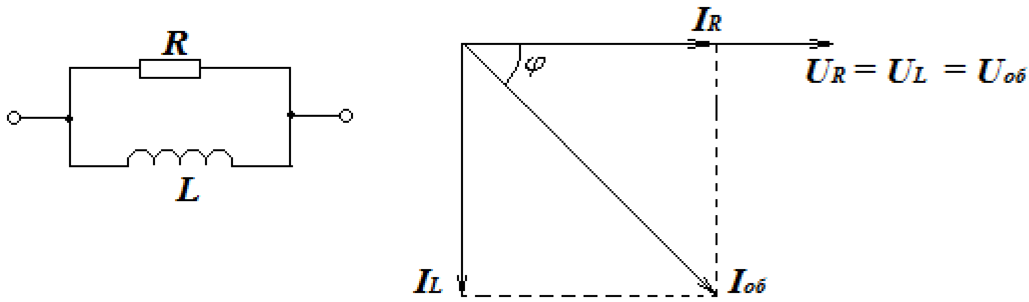
$$P = I_R^2 \cdot R = (I_2 - I_1)^2 R = (12 - 8)^2 \cdot 10 = 160 \text{ (Вт)}$$

Задача 2 Резистор и катушка соединены параллельно

Резистор и катушка индуктивности соединены параллельно и включены в цепь переменного тока с напряжением $U = 127$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Известно, что мощность, рассеиваемая в этой цепи, составляет $P = 440$ Вт, а сдвиг фаз между током и напряжением $\varphi = \frac{\pi}{3}$ рад. Определите активное сопротивление резистора *R* и индуктивность катушки *L*. Активное сопротивление самой катушки пренебрежимо мало.

Решение:

1 Строим векторную диаграмму



2 Потребляемая цепью мощность может быть рассчитана как $P = I_R^2 \cdot R$. Найдем ток из закона Ома $I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_{об}}{R}$ и преобразуем выражение для мощности $P = \frac{U_{об}^2}{R}$. Из этого выражения находим сопротивление резистора $R = \frac{U_{об}^2}{P} = \frac{127^2}{404} \approx 40\,(\text{Ом})$.

3 Из векторной диаграммы видно, что

$$tg\varphi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\dfrac{U_{об}}{X_L}}{\dfrac{U_{об}}{R}} = \frac{R}{X_L}.$$

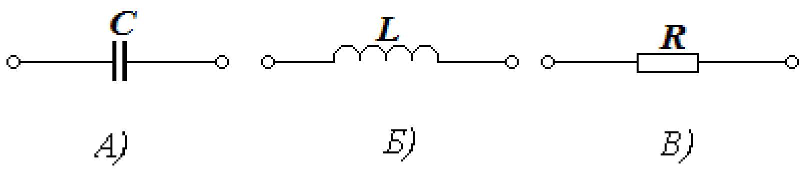
Индуктивное сопротивление равно $X_L = \dfrac{R}{tg\varphi} = \dfrac{40}{tg\dfrac{\pi}{3}} = 23{,}1\,(\text{Ом})$

4 Индуктивность катушки $L = \dfrac{X_L}{\omega} = \dfrac{X_L}{2\pi\nu} = \dfrac{23{,}1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 0{,}074\,(\text{Гн})$.

§ 6 Задания для самостоятельного решения

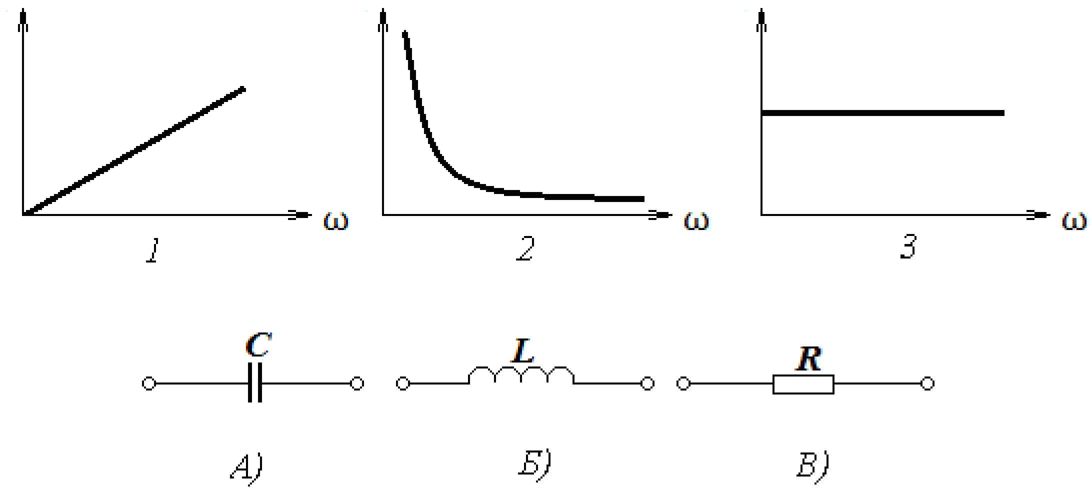
Тест «Виды нагрузок в цепи переменного тока»

1 Для какого вида нагрузки в цепи переменного тока зависимость **сопротивления** от частоты генератора выглядит так, как показано на графике?



1	2	3

2 Для какого вида нагрузки в цепи переменного тока зависимость **силы тока** от частоты генератора выглядит так, как показано на графике?



1	2	3

3 Что произойдет с емкостным сопротивлением, если параллельно конденсатору С включить конденсатор 4С?

А) Уменьшится в 1,25 раза;

Б) Увеличится в 1,25 раза;

В) Увеличится в 5 раз;

Г) Уменьшится в 5 раз.

4 Что произойдет с индуктивным сопротивлением катушки, если из нее удалить стальной сердечник?

А) Увеличится;

Б) Уменьшится;

В) Останется неизменным;

Г) Ответ зависит от величины магнитной проницаемости сердечника.

5 Участок цепи содержит индуктивную нагрузку сопротивлением

10 Ом. Амплитуда колебания напряжения на концах участка составляет 5 В. Чему равно действующее значение тока, протекающего через этот участок цепи?

А) 0,35 А; Б) 0,5 А; В) 0,7 А; Г) 50 А.

6 Участок цепи содержит емкостную нагрузку сопротивлением 40 Ом. Амплитуда колебания тока на этом участке составляет 10 А. Что показывает вольтметр, подключенный параллельно участку цепи?

А) 4 В; Б) 5,64 В; В) 284 В; Г) 564 В.

7 Участок цепи содержит индуктивную нагрузку сопротивлением 10 Ом. Амплитуда колебания тока на этом участке составляет 5 А. Чему равно напряжения на концах участка цепи в тот момент, когда ток в цепи максимален?

А) 0 В; Б) 0,5 В; В) 2 В; Г) 50 В.

8 Участок цепи содержит емкостную нагрузку сопротивлением 40 Ом. Амплитуда колебания напряжения на этом участке составляет 100 В. Чему равна сила тока в тот момент, когда напряжение на концах участка цепи максимально?

А) 0 А; Б) 0,4 А; В) 2,5 А; Г) 4000А.

9 Над розеткой в классе написано «220 В, 50 Гц». По какому закону меняется напряжение на нагрузке, включенной в эту розетку?

А) $u(t) = 220\cos(50t)$ В;

Б) $u(t) = 220\cos(314t)$ В;

В) $u(t) = 156\cos(50t)$ В;

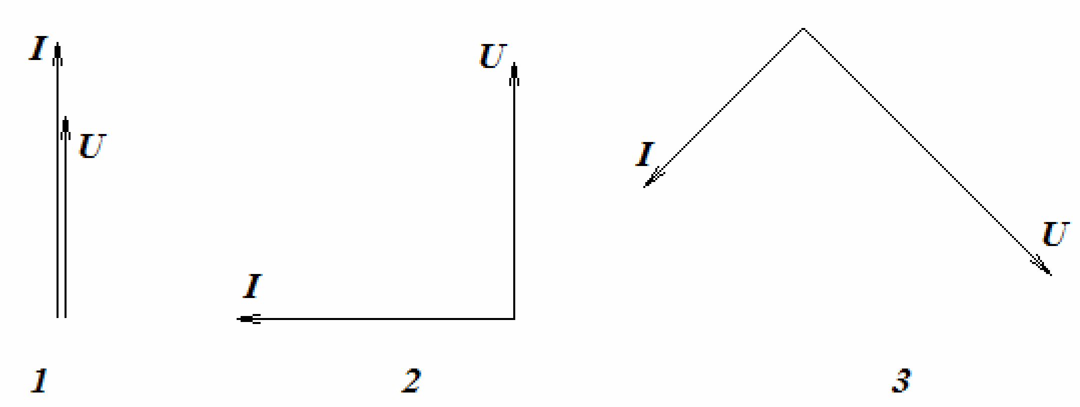
Г) $u(t) = 310\cos(314t)$ В.

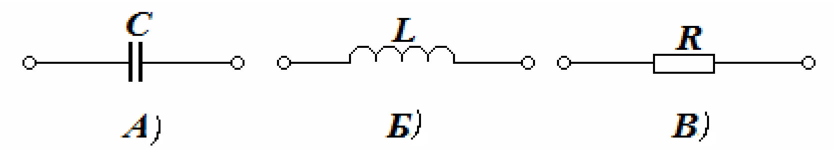
10 Ток в цепи, содержащей емкостную нагрузку сопротивлением, 50 Ом меняется по закону $i(t)=10\cos(314t)$ мА. Чему равно напряжение на конденсаторе в тот момент, когда ток в цепи равен 5 мА?

А) 0,25 В; Б) 0,125 В; В) 0,43 В; Г) 0,5 В.

Тест «Цепи переменного тока»

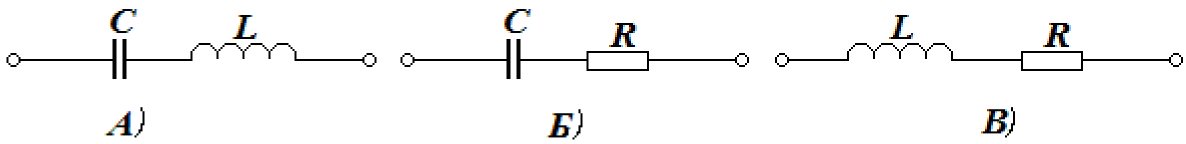
1 Установите соответствие между векторной диаграммой и участком цепи, который она характеризует.

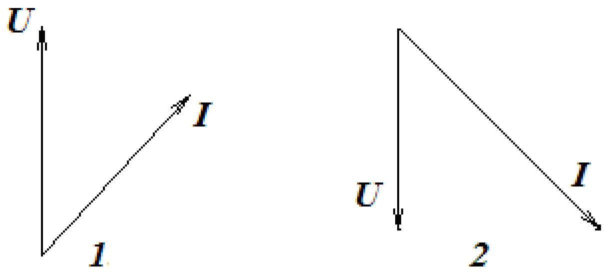




1	2	3

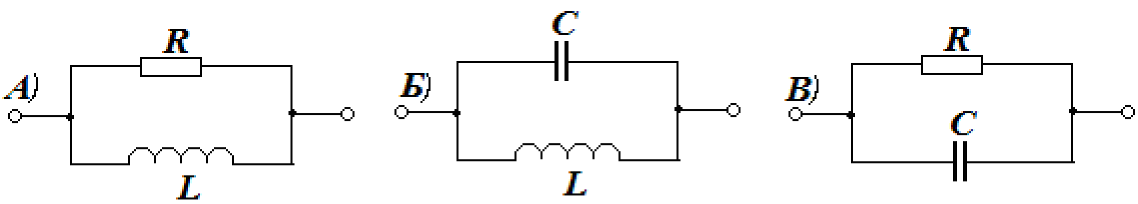
2 Установите соответствие между векторной диаграммой и участком цепи, который она характеризует.

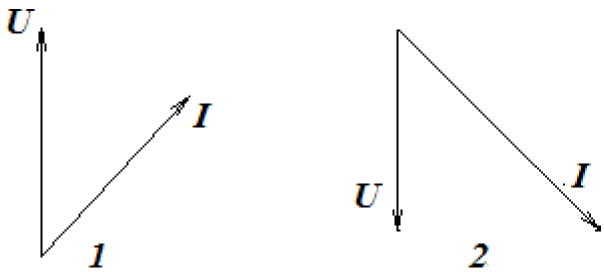




1	2

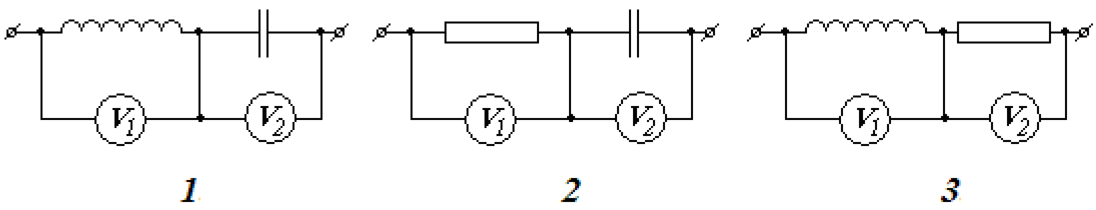
3 Установите соответствие между векторной диаграммой и участком цепи, который она характеризует.





1	2

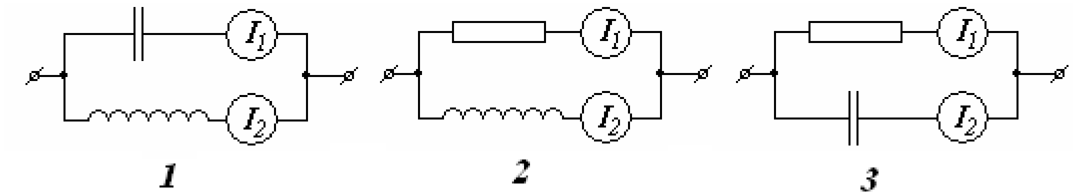
4 Определите общее напряжение на участке цепи, изображенной на рисунках, если показания вольтметров $U_1 = 12$ В, $U_2 = 5$ В:



А) 5 В; Б) 7 В; В) 12 В; Г) 13 В; Д)17 В.

1	2	3

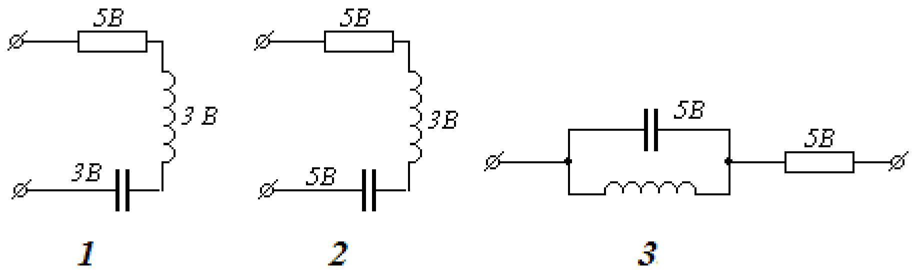
5 Определите силу тока в неразветвленной части цепи, если I_1 =4 А, I_2 =3 А. Активное сопротивление катушки пренебрежимо мало.



А) 1А; Б) 3А; В) 4А; Г) 5 А; Д) 7 А.

1	2	3

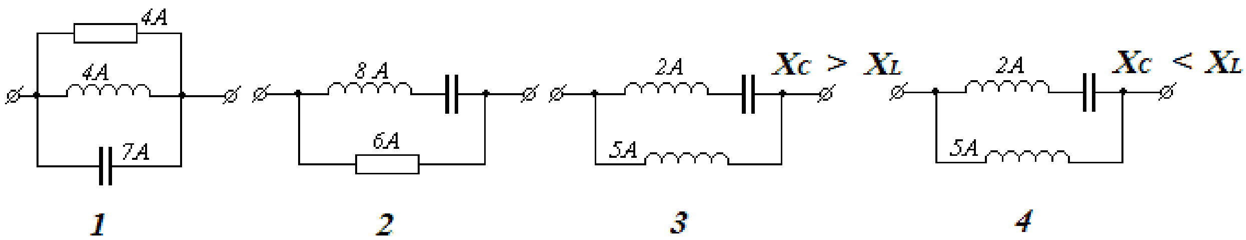
6 Определите общее (входное) напряжение для следующих цепей:



А) 5В; Б) 5,4 В; В) 7,1 В; Г) 10 В; Д) 11 В; Е) 13 В.

1	2	3

7 Определите общий (входной) ток для следующих цепей:



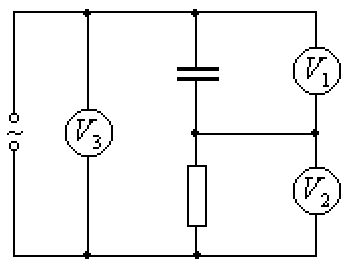
А) 3А; Б) 5 А; В) 7 А; Г) 10 А; Д) 13 А; Е) 14 А; Ж) 15 А.

1	2	3	4

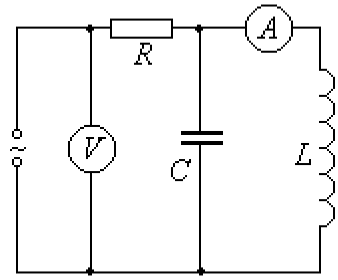
Задачи

1 Напряжение и сила тока в катушке изменяются по законам $u(t) = 60\sin(314t+0{,}25)$ и $i(t)=15\sin(314t)$ соответственно (все величины измеряются в единицах СИ). Определите разность фаз между напряжением и током, полное сопротивление катушки, коэффициент мощности, активное и индуктивное сопротивления , индуктивность катушки. Какая средняя мощность потребляется этой катушкой?

2 В цепи переменного тока показания вольтметров V_1 и V_2 составляют U_1 = 12 В и U_2 = 9 В соответственно. Определите показания вольтметра V_3. Вольтметры считайте идеальными.



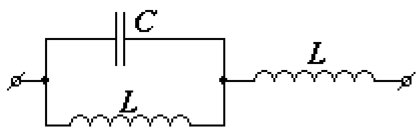
3 Определите показания вольтметра в цепи переменного тока, показанной на рисунке, если показание амперметра I = 2,4 А, L = 159 мГн, С – 106 мкФ, R = 56 Ом. Частота переменного тока в сети ν = 50 Гц. Активное сопротивление катушки пренебрежимо мало. Приборы считайте идеальными.



4 Последовательно с электроплиткой в сеть переменного тока частоты ν = 50 Гц включена катушка индуктивности. При этом мощность плитки упала в 2 раза. Определите индуктивность катушки, если активное сопротивление плитки R = 50 Ом. Активное сопротивление катушки пренебрежимо мало.

5 Определите силу тока в цепи, изображенной на рисунке, считая известными значения C, R, R. На цепь подано переменной напряжение U с циклической частотой ω.

6 Определите силу тока в цепи, изображенной на рисунке, считая известными C и L. Напряжение на клеммах источника меняется по закону:

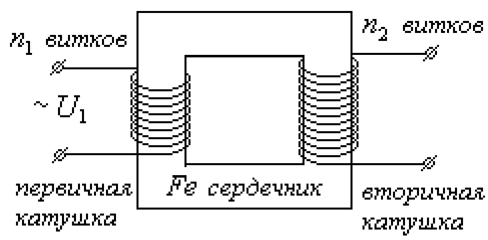


$$U(t) = U_{\max} \sin \omega t$$

§7 Принцип действия трансформатора. Передача энергии на расстояния

Трансформатор – это устройство, служащее для преобразования напряжения в цепи переменного тока.

Трансформатор состоит из двух катушек, обычно с разным количеством витков, насаженных на железный сердечник (магнитопровод). Одна из катушек подключается к источнику переменного напряжения, она называется ***первичной*** катушкой. К другой катушке подключается нагрузка, эта катушка ***называется вторичной.***



Различают два режима работы трансформатора: холостой ход и рабочий ход.

В режиме холостого хода концы вторичной катушки разомкнуты, ток во вторичной цепи отсутствует.

В цепи первичной катушки течет переменный ток $i_{01} = I_{m1} \cdot \cos\omega t$. Этот ток создает переменный магнитный поток $\Phi_{01} = Li_{01} = L_1 \cdot I_{m1} \cdot \cos\omega t$, концентрирующийся в сердечнике.

Переменный магнитный поток пронизывает витки первичной и вторичной катушек. Следовательно, в каждом витке вторичной катушки возникает ЭДС индукции e_{i2}, а в каждом витке первичной катушки – ЭДС самоиндукции e_{si1}. Если пренебречь рассеянием магнитного потока в сердечнике, то возникающие в каждом витке обеих катушек ЭДС можно считать одинаковыми и равными

$$e_{i2} = e_{si1} = -\frac{d\Phi_{01}}{dt} = -\left(L_1 \cdot I_{m01} \cdot \cos\omega t\right)' = L_1 \cdot I_{m01} \cdot \omega \cdot \sin\omega t = e_m \cdot \sin\omega t.$$

Поскольку витки катушек соединены последовательно, суммарная ЭДС самоиндукции, возникающая в первичной катушке будет равна

$$\mathcal{E}_{\text{si1}} = n_1 \cdot e_{si1} = n_1 \cdot e_m \cdot \sin\omega t. \quad (1)$$

Суммарная ЭДС индукции, возникающая во вторичной катушке будет равна

$$\mathcal{E}_{\text{i2}} = n_2 \cdot e_{i2} = n_2 \cdot e_m \cdot \sin\omega t. \quad (2)$$

Видим, что вторичная катушка стала источником синусоидальной ЭДС!

Отношение ЭДС, возникающих в катушках, рано отношению числа витков в них:

$$\frac{\varepsilon_{si1}}{\varepsilon_{i2}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Найдем напряжения на клеммах первичной и вторичной катушек.

Очевидно, напряжение или разность потенциалов между разомкнутыми концами вторичной катушки равна возникшей в ней ЭДС индукции:

$$U_2 = \varepsilon_{i2}.$$

Для мгновенных значений тока и напряжения в первичной катушке можно записать второй закон Кирхгофа:

$$i_{01} \cdot R_1 = u_1 + \varepsilon_{si1}.$$

Активное сопротивление первичной катушки R_1, как правило, очень мало – ее накручивают из толстого медного провода. Тогда

$$0 \approx u_1 + \varepsilon_{si1}$$

$$u_1 \approx -\varepsilon_{si1}.$$

Аналогичная связь будет и между действующими значениями $U_1 \approx -\varepsilon_{si1}$.

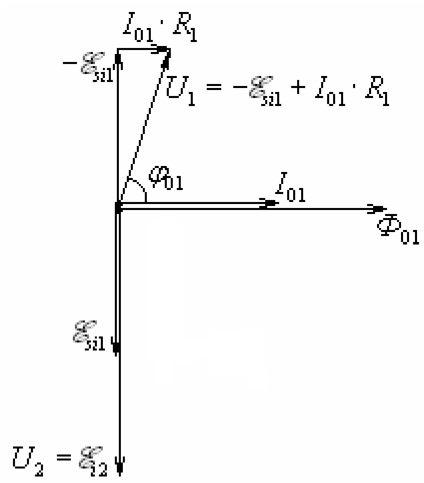
Отношение напряжений на клеммах первичной и вторичной катушек называют коэффициентом трансформации ***k***:

$$k = \frac{U_1}{U_2} \approx \frac{\varepsilon_{si1}}{\varepsilon_{i2}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Если число витков во вторичной катушке n_2 больше числа витков в первичной катушке n_1, то напряжение на клеммах вторичной катушки U_2 больше напряжения U_1, подаваемого на первичную катушку. Такой трансформатор называется повышающим, для него ***k*** < 1.

Если число витков во вторичной катушке n_2 меньше числа витков в первичной катушке n_1, то напряжение на клеммах вторичной катушки U_2 меньше напряжения U_1, подаваемого на первичную катушку. Такой трансформатор называется понижающим, для него $\boldsymbol{k} > 1$.

Векторная диаграмма трансформатора в режиме холостого хода выглядит следующим образом:



- магнитный поток Φ_{01} совпадает с током I_{01} по фазе;
- ЭДС в обеих катушках отстают от тока по фазе на $\pi / 2$ (см. формулы 1 и 2);
- падение напряжения на активном сопротивлении первичной катушки $I_{01} \cdot R_1$ совпадает по фазе с током I_{01};
- напряжение на вторичной катушке U_2 совпадает с ЭДС индукции ε_{i2};
- напряжение на первичной катушке U_1 находится из второго закона Кирхгофа $U_1 = -\varepsilon_{i2} + I_{01} \cdot R_1$.

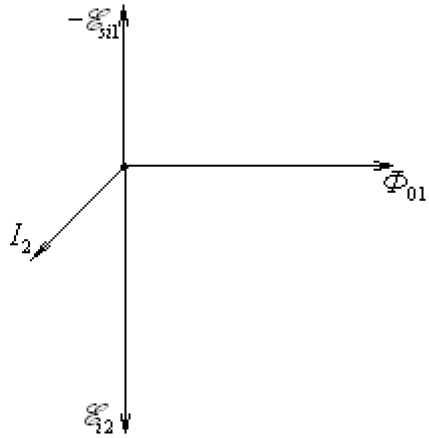
Поскольку активное сопротивление первичной катушки стремится к нулю $R_1 \to 0$, сдвиг по фазе между током и напряжением в первичной катушке в режиме холостого хода близок к $\varphi_{01} \approx \pi / 2$. Это значит, что в режиме холостого хода трансформатор практически не потребляет энергии от источника. Потребление энергии в этом режиме связано с потерями на тепло Джоуля – Ленца в первичной катушке, перемагничивание сердечника и потерями на тепло за счет токов Фуко, возникающих в сердечнике. Эти потери стараются снизить, используя наборный сердечник из магнито-мягкой стали и делая обмотку катушки из медного провода большого сечения.

Подведем итоги:

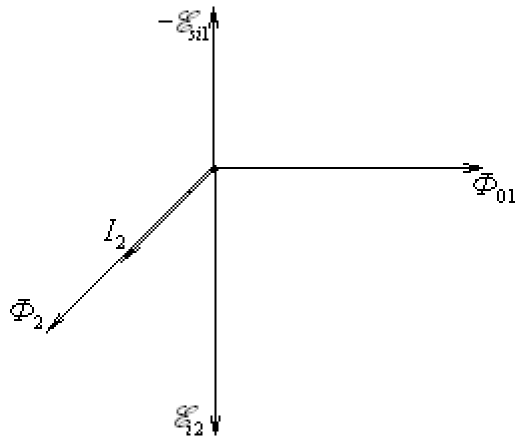
1 Когда первичная катушка подключена к источнику переменного напряжения, вторичная становится источником переменной ЭДС той же частоты.

2 Численное значение напряжения на клеммах вторичной катушки отличается от напряжения, питающего первичную катушку, во столько же раз, во сколько отличаются количества витков в катушках.

Рабочий ход трансформатора

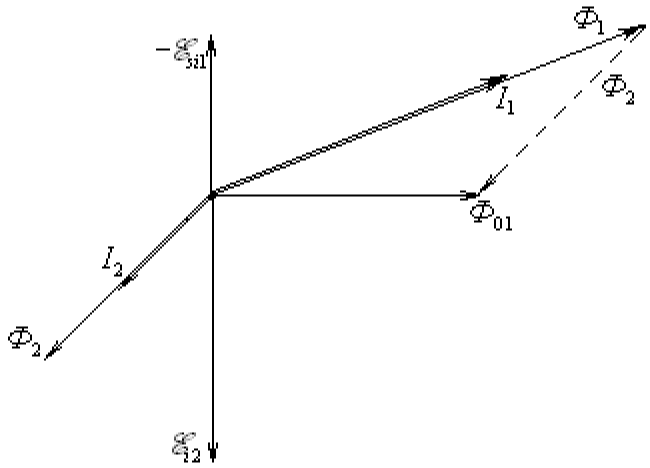


При замыкании вторичной обмотки трансформатора на нагрузку в ней потечет ток I_2. В общем случае этот ток будет сдвинут по фазе относительно ЭДС индукции во вторичной обмотке. Сдвиг по фазе будет зависеть от характера нагрузки во вторичной цепи.



Ток во вторичной цепи I_2 создает свой магнитный поток Φ_2. Магнитный поток всегда колеблется в фазе с создавшим его током.

Очевидно, что появление магнитного потока Φ_2 должно привести к изменению магнитного потока Φ_{01}, существовавшего в сердечнике в режиме холостого хода. Однако, любая катушка, согласно правилу Ленца, противится изменению пронизывающего ее магнитного потока. И как показывает опыт, магнитный поток, пронизывающий сердечник, остается практически неизменным как в режиме холостого хода, так и в режиме рабочего хода. Это свойство трансформатора называют *способностью саморегулирования.*



Из векторной диаграммы нетрудно видеть, что для сохранения магнитного потока в сердечнике *ток в первичной катушке* I_1 *должен измениться*. Магнитный поток Φ_1, колеблющийся в фазе с создающим его током I_1, в сумме с магнитным потоком Φ_2, созданным током вторичной цепи I_2, дает магнитный поток Φ_{01}.

Найдем напряжения на клеммах первичной и вторичной катушек.

Второй закон Кирхгофа для первичной цепи:

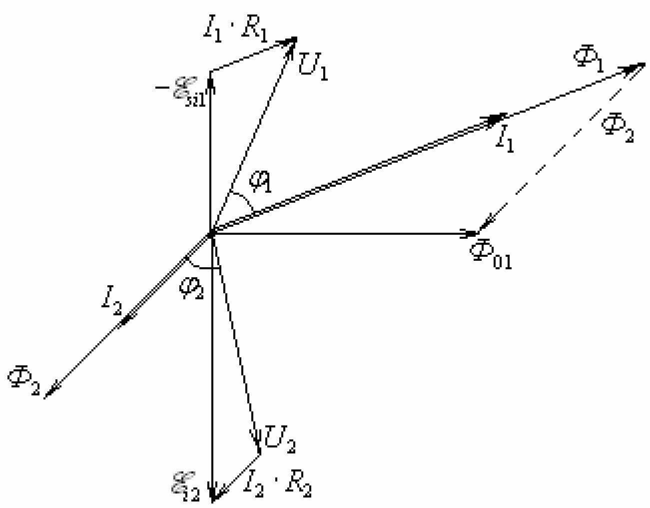
$$I_1 \cdot R_1 = U_1 + \mathcal{E}_{si1}.$$

Напряжение на клеммах первичной катушки:

$$U_1 = -\mathcal{E}_{si1} + I_2 \cdot R_2.$$

Второй закон Кирхгофа для вторичной цепи:

$$I_2 \cdot R_2 + U_2 = \mathcal{E}_{i2}.$$

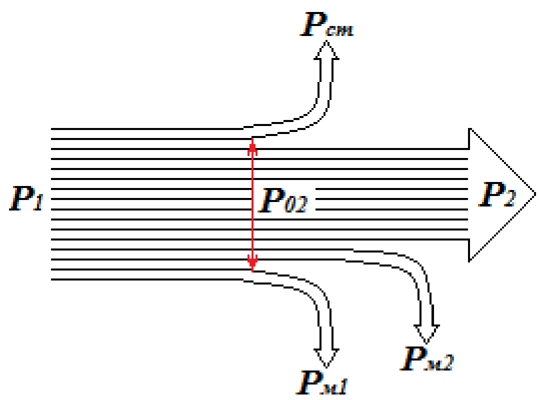


Напряжение на клеммах вторичной катушки:

$$U_2 = \mathcal{E}_{i2} - I_2 \cdot R_2.$$

Из векторной диаграммы видно, что ток в первичной цепи изменился не только численно! Сдвиг по фазе между током и напряжением в первичной цепи теперь не равен π/2. Это значит, что ***первичная цепь стала потреблять энергию от сети!!!***

Поскольку активное сопротивление первичной цепи мало, потребляемая мощность не может выделяться в первичной цепи. Она практически полностью (за вычетом потерь на тепло в первичной цепи и потери в стали) передается во вторичную цепь:



где P_1 - мощность, потребляемая в первичной цепью от сети, она равна $P_1 = I_1 U_1 \cos\varphi_1$;

$P_{м1}$ - «потери в меди» в первичной обмотке, т.е. потери на нагрев первичной обмотки;

$P_{ст}$ - «потери в стали». т.е. потери энергии на перемагничивание сердечника и вихревые токи Фуко;

P_{02} - мощность, передаваемая во вторичную цепь;

$P_{м2}$ - «потери в меди» во вторичной обмотке, т.е. потери на нагрев вторичной обмотки;

P_2 - мощность, выделяемая на нагрузке во вторичной цепи, она равна $P_2 = I_2 U_2 \cos\varphi_2$.

Очевидно, что полезной мощностью в данном случае является мощность, выделяемая на нагрузке во вторичной цепи P_2. Тогда коэффициент полезного действия трансформатора равен

$$\eta = \frac{польза}{затраты} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{м1} + P_{м2} + P_{ст}}.$$

Потери в меди снижают, делая первичную и вторичную обмотку трансформатора из медного провода большого сечения. Потери энергии на перемагничивание стального сердечника уменьшают, используя магнитомягкие сорта стали (с узкой петлей гистерезиса). Потери на вихревые токи Фуко снижают, делая сердечник наборным из листовой стали, покрытой лаком. Тем самым добиваются того, что КПД правильно рассчитанного и используемого в номинальном режиме трансформатора достигает 98 – 99%.

Поскольку КПД трансформатора настолько велик, можно примерно записать $P_1 \approx P_2$ или $I_1 U_1 \cos\varphi_1 \approx I_2 U_2 \cos\varphi_2$. Сдвиги по фазе между током и напряжением в первичной и вторичной обмотках близки по значению, поэтому

$$I_1 U_1 \approx I_2 U_2$$

$$\frac{I_2}{I_1} \approx \frac{U_1}{U_2} \approx \frac{n_1}{n_2}.$$

Видим, что повышение напряжения во вторичной цепи U_2 приводит к уменьшению тока I_2. Этот замечательный факт позволяет снижать потери электроэнергии при передачи ее на большие расстояния при помощи ЛЭП. Джоулево тепло в проводах ЛЭП, соединяющих электростанцию и потребителя, зависит от сопротивления ЛЭП и тока в ней

$$P_{ЛЭП} = I^2 R_{ЛЭП}.$$

Уменьшать сопротивление проводов можно двумя способами: увеличивая площадь сечения и используя материал с меньшим удельным сопротивлением (медь, золото, серебро и т.д.). Оба варианта экономически не выгодны. Гораздо проще уменьшить ток в линии электропередач, поставив на выходе генератора электростанции повышающий трансформатор.

§8 Примеры решения задач

*Задача 1 Холостой ход трансформатора**

Число витков во вторичной обмотке трансформатора с замкнутым сердечником в $n = 2$ раза больше числа витков в первичной обмотке. При включении первичной обмотки в сеть с напряжением $U_1 = 100$ В на концах разомкнутой вторичной обмотки возникает напряжение $U_2 = 197$ В. Каким будет напряжение на концах разомкнутой вторичной катушки U_2', если использовать в трансформаторе сердечник того же размера, но из материала с магнитной проницаемостью в 10 раз меньшей, чем в первом случае? Рассеянием магнитного потока в сердечнике пренебречь.

Решение:

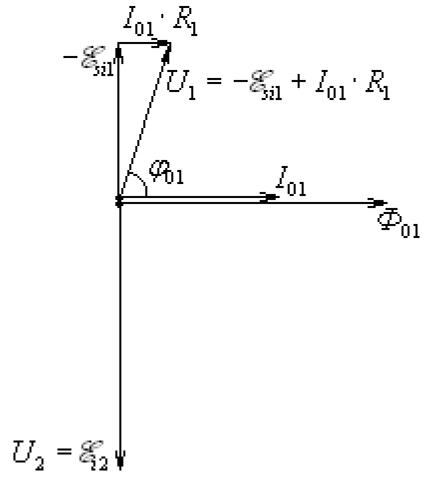
1 Из условия видно, что отношение напряжений на клеммах первичной и вторичной катушек не равно отношению числа витков в них $\frac{U_2}{U_1} = \frac{197}{100} = 1{,}97 < \frac{n_2}{n_1} = 2$. Одной из причин такого расхождения может быть рассеяние магнитного потока в сердечнике, но оно тоже отсутствует.

Строго говоря, отношение числа витков в катушках должно равняться отношению возникающих в них ЭДС

$$\frac{\mathcal{E}_{si1}}{\mathcal{E}_{i2}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Поскольку на холостом ходу $U_2 = \mathcal{E}_{i2}$, то очевидно, что $U_1 \neq \mathcal{E}_{si1}$.

2 ЭДС самоиндукции в первичной катушке и напряжение на ее концах не совпадают потому, что у первичной катушки есть активное сопротивление.



Для мгновенных значений тока и напряжения в первичной катушке можно записать второй закон Кирхгофа:

$$i_{01} \cdot R_1 = u_1 + \varepsilon_{si1}.$$

Из векторной диаграммы для холостого хода видно, что

$$U_1^2 = \sqrt{\left(I_{01}R_1\right)^2 + (\varepsilon_{si1})^2}\sqrt{\left(I_{01}R_1\right)^2 + \left(U_L\right)^2} = \sqrt{\left(I_{01}R_1\right)^2 + \left(I_{01}X_L\right)^2} = I_{01}\sqrt{R_1^2 + X_L^2}.$$

Тогда

$$\frac{\varepsilon_{si1}}{U_1} = \frac{U_L}{U_1} = \frac{I_{01}X_L}{I_{01}\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_1}{X_L}\right)^2 + 1}}.$$

При замене сердечника индуктивность первичной катушки, следовательно, индуктивное сопротивление изменятся в k = 1/10 раз:

$$\frac{\left|\varepsilon'_{si1}\right|}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_1}{kX_L}\right)^2 + 1}},$$

$$\left|\varepsilon'_{si1}\right| = \frac{U_1}{\sqrt{\left(\frac{R_1}{kX_L}\right)^2 + 1}}.$$

3 После замены сердечника отношение ЭДС в катушках по-прежнему равно отношению числа витков

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon_{si1}}{\varepsilon_{i2}} = \dfrac{\varepsilon_{si1}}{U_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{U_1}{U_2\sqrt{\left(\dfrac{R_1}{X_L}\right)^2 + 1}} \\ \dfrac{\varepsilon'_{si1}}{\varepsilon'_{i2}} = \dfrac{\varepsilon'_{si1}}{U'_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{U_1}{U'_2\sqrt{\left(\dfrac{R_1}{kX_L}\right)^2 + 1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{U_2\sqrt{\left(\dfrac{R_1}{X_L}\right)^2 + 1}}{U_1} = 2 \\ \dfrac{U'_2\sqrt{\left(\dfrac{R_1}{kX_L}\right)^2 + 1}}{U_1} = 2 \end{cases}$$

Исключаем из полученной системы отношение

$$\left(\frac{R_1}{X_L}\right)^2 = \left(\frac{2U_1}{U_2}\right)^2 - 1 \approx 0{,}15.$$

Из второго уравнения находим

$$U'_2 = \frac{2U_1}{\sqrt{\left(\dfrac{R_1}{kX_L}\right)^2 + 1}} = \frac{2 \cdot 100}{\sqrt{\left(\dfrac{0{,}15}{0{,}1}\right)^2 + 1}} = \frac{200}{\sqrt{3{,}25}} \approx 111\,(\text{В}).$$

Удивительно! Никакого увеличения напряжения в 2 раза!

Из рассмотренной ситуации видно, что для нормальной работы трансформатора активное сопротивление первичной обмотки должно быть пренебрежимо малым в сравнении с ее индуктивным сопротивлением.

Задача 2 Рабий ход трансформатора

Первичная обмотка трансформатора включена в сеть переменного тока с напряжением U_1 = 220 В, разность потенциалов на зажимах вторичной обмотки U_2 = 20 В, ее сопротивление R_2 = 1 Ом. Сила тока во вторичной обмотке I_2 = 2 А. Определите коэффициент трансформации и КПД трансформатора. Потерями в первичной обмотке, рассеянием магнитного потока и потерями энергии на перемагничивание сердечника пренебречь.

Решение

1 Коэффициент трансформации равен

$$k = \frac{\varepsilon_{si1}}{\varepsilon_{i2}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Поскольку «потерь в первичной катушке нет», то ее активное сопротивление равно нулю. Следовательно, $U_1 = \varepsilon_{si1} = 220\ \text{В}$.

2 Для нахождения ЭДС индукции, возникающей во вторичной цепи, запишем закон Ома для полной цепи: $\varepsilon_{i2} = U_2 + I_2 R_2 = 20 + 2 \cdot 1 = 22\ (\text{В})$.

3 Коэффициент трансформации равен

$$k = \frac{\varepsilon_{si1}}{\varepsilon_{i2}} = \frac{U_1}{U_2 + I_2 R_2} = \frac{220}{22} = 10.$$

4 КПД трансформатора равен $\eta = \dfrac{\textit{польза}}{\textit{затраты}} = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{P_2}{P_2 + P_{м1} + P_{м2} + P_{ст}}$.

По условию задачи потери в стали и потери в меди в первичной катушке отсутствуют, следовательно,

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{м2}} = \frac{I_2 U_2}{I_2 U_2 + I_2^2 R_2} = \frac{2 \cdot 20}{2 \cdot 20 + 2^2 \cdot 1} = \frac{40}{44} \approx 0{,}91\ (91\%).$$

§9 Задания для самостоятельного решения

Тест «Трансформатор. Передача электроэнергии»

1 Трансформатор – устройство, предназначенное для…

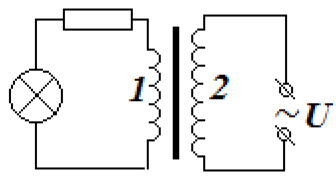
А) Преобразования мощности в цепи переменного тока;

Б) Преобразования напряжения в цепи постоянного тока;

В) Преобразования тока в цепи постоянного тока;

Г) Преобразования напряжения в цепи переменного тока.

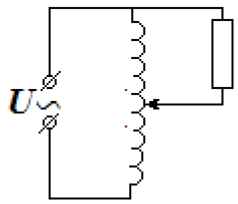
2 На рисунке изображен трансформатор. Какая катушка на рисунке является первичной?



А) 1; Б) 2; В) Обе катушки первичные;

Г) Первичная катушка на рисунке не показана.

3 К какому виду относится трансформатор, изображенный на рисунке?

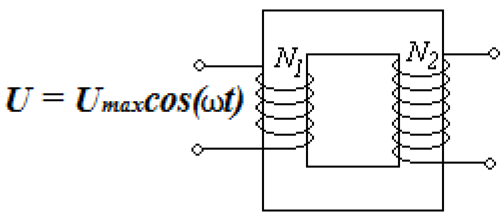


А) Повышающий трансформатор;

Б) Понижающий трансформатор;

В) Изображенное устройство не является трансформатором.

4 К какому виду относится трансформатор, изображенный на рисунке?



А) Повышающий трансформатор;

Б) Понижающий трансформатор;

В) Изображенное устройство не является трансформатором.

5 Чему равен коэффициент трансформации, если первичная катушка питается от городской сети, а вольтметр, подключенный к выводам вторичной катушки, показывает 10 В?

А) 2200; Б) 22; В) 0,045;

Г) Данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ.

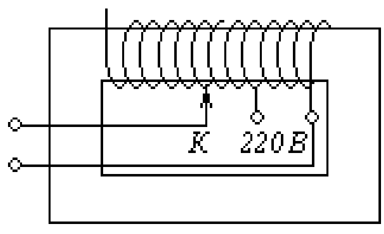
6 Первичная обмотка трансформатора содержит 30 витков, вторичная – 300 витков. Действующее значение напряжения, подаваемого на первичную катушку равно 5 В. Что показывает вольтметр с очень большим сопротивлением, подключенный к клеммам вторичной катушки? Сопротивлением обмоток и рассеянием магнитного потока пренебречь.

А) 0, 05 В; Б) 0,5 В; В) 5 В; Г) 50 В; Д) 500 В.

7 Вольтметр, подключенный к клеммам вторичной катушки трансформатора показывает напряжение 100 В, когда на первичную катушку подается напряжение 5 В. Что покажет вольтметр, если его поменять местами с генератором? Сопротивлением обмоток и рассеянием магнитного потока в сердечнике пренебречь.

А) 100 В; Б) 20 В; В) 5 В; Г) 0,25 В; Д) 0,05 В.

8 Ток в первичной обмотке изменяют по закону $I_1 = \alpha t$, где $\alpha = const$. По какому закону меняется напряжение во вторичной обмотке?



А) $U_2 = \beta t$; где $\beta = const$

Б) $U_2 = const$;

В) $U_2 = U_{\max} \cos \omega t$;

Г) $U_2 = 0$.

9 Как меняется напряжение на выходе регулировочного трансформатора при перемещении контакта К вправо?

А) Увеличивается;

Б) Уменьшается;

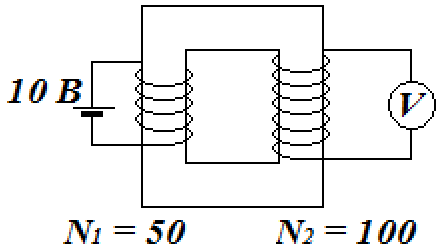
В) Остается неизменным;

Г) Напряжение на выходе равно нулю.

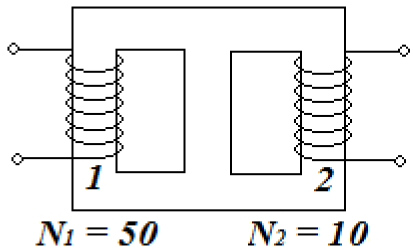
10 Что показывает вольтметр, подключенный к клеммам вторичной катушки?

А) 28 В; Б) 20 В;

В) 5 В; Г) 0 В.



11 На железный сердечник намотаны две катушки. Магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника и делится поровну в местах его разветвления. При включении катушки 1 в цепь переменного тока с напряжением 40 В напряжение на второй катушке равно …



А) 8 В; Б) 4 В; В) 2 В; Г) 1 В.

12 Первичная катушка трансформатора питается от городской сети. Индуктивность первичной катушки равна 0,1 Гн, ее активное сопротивление 10 Ом. Что можно сказать о напряжении между разомкнутыми концами вторичной катушки, если она содержит вдвое больше витков, чем первичная катушка? Рассеянием магнитного потока в сердечнике пренебречь.

А) $U_2 = 220$ В; Б) $U_2 = 440$ В; В) $U_2 < 440$ В; Г) $U_2 > 440$ В.

13 Катушки трансформатора намотаны на замкнутый железный сердечник. Как изменится отношение напряжений на клеммах катушек $\frac{U_2}{U_1}$, если сердечник разомкнуть?

А) $\frac{U_2}{U_1}$ уменьшится; Б) $\frac{U_2}{U_1}$ увеличится; В) $\frac{U_2}{U_1}$ останется неизменным;

Г) данных задачи не достаточно для того, чтобы дать ответ.

14 Как изменится сила тока в первичной катушке трансформатора, если сила тока во вторичной цепи возрастет?

А) Увеличится; Б) Уменьшится; В) Останется неизменной;

Г) Может увеличиться или уменьшиться.

15 Действующее значение тока в первичной катушке трансформатора равно 10 А. Каково действующее значение тока во вторичной цепи, если во вторичной катушке вдвое больше витков, чем в первичной? Сопротивлением обмоток и рассеянием магнитного потока в сердечнике пренебречь.

А) 20 А; Б) 10 А; В) 7 А; Г) 5 А.

16 Ток в первичной обмотке трансформатора I_1 = 0,5 А, напряжение на ее концах U_1 = 220 В. Ток во вторичной катушке I_2 = 11 А, напряжение на ее концах U_2 = 9,5 В. Определите КПД трансформатора, пренебрегая активным сопротивление первичной обмотки и рассеянием магнитного потока в сердечнике.

А) 4,3 % ; Б) 22 % ; В) 23 %; Г) 95 %.

17 Повышающий трансформатор на электростанции используют для…

А) Увеличении силы тока в линии электропередач;

Б) Увеличения частоты передаваемого напряжения;

В) Уменьшения частоты передаваемого напряжения;

Г) Уменьшения доли потерянной электроэнергии на линии электропередач.

18 Как изменятся тепловые потери в линии электропередач, если при условии передачи одинаковой мощности увеличить напряжение с 11 кВ до 110 кВ?

А) Увеличатся в 10 раз;

Б) Уменьшатся в 10 раз;

В) Увеличатся в 100 раз;

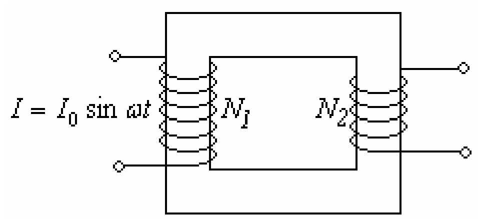
Г) Уменьшатся в 100 раз;

Д) Не изменятся.

Задачи

Трансформатор. Холостой ход

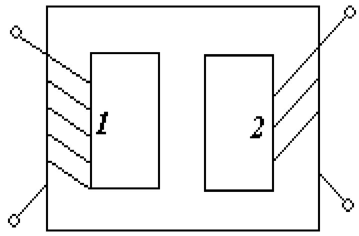
1 В первичной обмотке трансформатора течет ток $I = I_0 \sin\omega t$. Магнитный поток, создаваемый этим током, практически полностью проходит через железный сердечник трансформатора. Магнитная проницаемость сердечника μ. Определите ЭДС индукции во вторичной разомкнутой обмотке, если число витков в первичной обмотке N_1, а во вторичной N_2. Какое напряжение подается на первичную обмотку, Сечение сердечника трансформатора S, Эффективная длина сердечника L. Активным сопротивлением первичной обмотки пренебречь.



2 Активное сопротивление первичной обмотки трансформатора равно 100 Ом, индуктивность обмотки 3 Гн. Первичная обмотка трансформатора питается от сети переменного тока с частотой 50 Гц и напряжением 220 В.

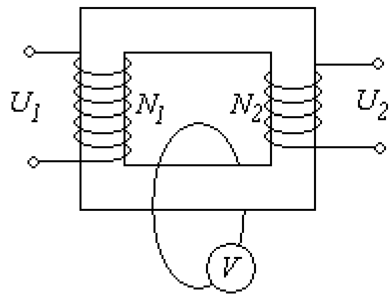
Определите ток в первичной катушке при холостом ходе, ЭДС индукции, возникающую в первичной катушке, и мощность, потребляемую трансформатором на холостом ходу.

3 На железный сердечник намотаны две катушки. Магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника и делится поровну в местах его разветвления. При включении катушки 1 в цепь переменного тока с напряжением 40 В напряжение на второй катушке равно 10 В. Какое напряжение будет на разомкнутых зажимах катушки 1, если катушку 2 включить в цепь переменного тока с напряжением 10 В?



4 Почему при разомкнутой вторичной цепи энергия, потребляемая трансформатором, мала? На что тратится эта энергия? Является ли энергия, потребляемая трансформатором на холостом ходу, полезной? Как уменьшают потери?

5 Через замкнутый кольцевой сердечник трансформатора, понижающего напряжение с U_1 = 220 В до U_2 = 42 В, пропущен провод, концы которого присоединены к вольтметру. Вольтметр показывает напряжение U = 0,5 В. Определите число витков в каждой из катушек.



Трансформатор. Рабочий ход

1 Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации К = 8 включена в сеть с напряжением U_1 = 220 В. Сопротивление вторичной обмотки R_2 = 2 Ом, сила тока в ней I_2 = 3 А. Определите

напряжение на зажимах вторичной обмотки. Потерями в первичной обмотке и рассеянием магнитного потока пренебречь. Каков КПД трансформатора?

2 Почему опасно замыкание хотя бы одного витка вторичной обмотки?

3 От вторичной обмотки трансформатора сопротивлением R = 0,1 Ом питаются 1000 параллельно включенных ламп мощности P = 100 Вт каждая, рассчитанных на напряжение U = 220 В. Определите КПД трансформатора, пренебрегая рассеянием магнитного потока в ярме трансформатора и потерями энергии в первичной обмотке.

4 Первичная обмотка трансформатора, включенного в сеть напряжением U_1 = 380 В, имеет N_1 = 2400 витков. Какое число витков должна иметь вторичная обмотка этого трансформатора, чтобы при напряжении U_2 = 11 В на ее зажимах передавать во внешнюю цепь мощность P = 22 Вт? Сопротивление вторичной обмотки R_2 = 0,2 Ом. Рассеяние магнитного потока в ярме трансформатора и потери энергии в его первичной обмотке пренебрежимо малы.

Глава 8 Автоколебания, автоколебательные системы

Под автоколебательной системой понимают всякое реальное устройство, являющееся источником незатухающих колебаний, то есть ***систему, на которую не действуют периодические воздействия извне и которая, тем не менее, совершает незатухающие колебания***. Слово «реальная» означает здесь, что исключается идеализированный случай, когда система не обладает трением или сопротивлением.

Автоколебания принципиально отличаются от незатухающих колебаний, возникающих под действием периодически меняющейся внешней силы (вынужденных колебаний). Потери на трение в этих системах компенсируются за счет работы, совершаемой внешней силой. Поэтому амплитуда вынужденных колебаний с течением времени неизменна. Если же действие периодически меняющейся внешней силы прекратить, то и вынужденные колебания постепенно прекратятся. Например, перестанем периодически толкать качели, когда они приходят в крайнее положение. Колебания качелей будут некоторое время продолжаться, но размах этих колебаний будет уменьшаться, поскольку энергия системы переходит в тепло за счет работы силы трения. В конечном итоге колебания полностью прекратятся.

В автоколебательной системе амплитуда колебаний неизменна с течением времени, то есть колебания не затухают. Но ведь система реальная, следовательно, потери энергии на трение в этой системе есть!! Очевидно, потери компенсируются поступлением энергии от какого-то источника. Автоколебательная система включает в себя источник энергии. Более того, в отличие от вынужденных колебаний, это ***постоянный источник*** энергии (источник постоянной силы, постоянного момента силы или источник постоянного тока). Колебательная система сама регулирует поступление энергии от постоянного источника.

Примеры автоколебательных систем известны вам давно.

Вспомните обычные домашние «ходики». Для того, чтобы маятник колебался мы не воздействуем на них периодической силой, а поднимаем гирю. Момент силы тяжести гири создает постоянный вращающий момент, действующий на ось маятника часов. Потенциальная энергия гири – это и есть постоянный источник энергии.

Механические часы – тоже автоколебательная система. Мы деформируем пружина, ее потенциальная энергия становится источником энергии для часов, деформированная пружина создает постоянный вращающий момент, действующий на ось колесика часов.

Свисток, органная труба или флейта звучат под действием постоянного дутья. Труба будет звучать сколь угодно долго, пока мы не остановим поток воздуха через нее.

Скрипичная струна звучит (а значит, она колеблется), пока мы равномерно ведем по ней смычком.

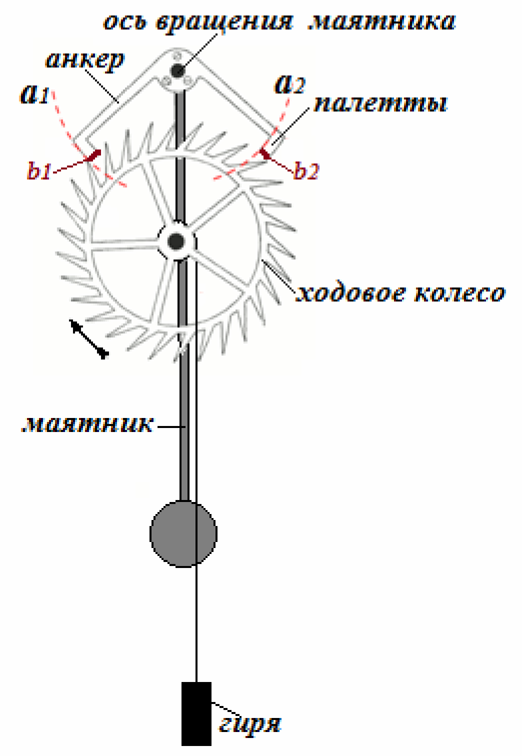
Итак, любая автоколебательная система обязательно включает в себя следующие характерные элементы: резонатор, ***постоянный источник энергии*** и устройство обратной связи между резонатором и источником энергии.

Резонатор – это система, в которой могут происходить собственные затухающие колебания (маятник часов, струна смычкового инструмента, колебательный контур радиотехнического генератора).

Обратная связь осуществляется устройством, с помощью которого резонатор сам регулирует поступление энергии от источника. Благодаря обратной связи обеспечивается восполнение энергии резонатора, компенсирующее потери, так что амплитуда колебаний остается неизменной.

§ 1 Часы с бестиковым механизмом

Мятник снабжен изогнутым равноплечим рычагом – анкером; с анкером сцеплено ходовое колесо. Оно приводится во вращение гирей, подвешенной на цепи, перекинутой через зубчатое колесо, сидящее на одной оси с ходовым колесом.



Маятник совершает незатухающие колебания благодаря тому, что заставляет ходовое колесо подталкивать себя в подходящие моменты за счет энергии, высвобождаемой при опускании гири.

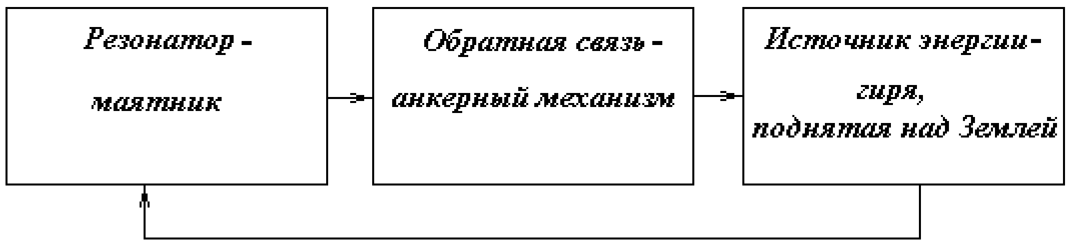
Рассмотрим поверхности палетт – зубья анкера – вступающие в контакт с зубьями ходового колеса. Поверхности $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ – это круговые поверхности с центром на оси маятника. Когда зуб ходового колеса находятся в контакте с любой из этих поверхностей, направление силы, с которой он давит на нее, проходит через ось маятника и ее момент относительно этой оси равен нулю. Маятник совершает свободное колебание. Гиря в этот момент тоже неподвижна, потому что зуб ходового колеса упирается в палетту, скользящую при качании маятника по поверхности зуба.

Поверхности $\boldsymbol{в_1}$ и $\boldsymbol{в_2}$ – плоские. Когда зуб ходового колеса скользит по ним, возникает момент силы относительно оси маятника, стремящийся отклонить его влево или вправо. Таким образом маятник колеблется свободно за исключением коротких (по сравнению с собственным периодом) мгновений, когда наступает контакт между одним из зубьев ходового колеса с одной из поверхностей $\boldsymbol{в_1}$ или $\boldsymbol{в_2}$.

Эти мгновения наступают в определенных положениях маятника. При прохождении маятником положения равновесия зубья анкера перестают преграждать путь зубьям ходового колеса, и ходовое колесо поворачивается на один зуб под действием гири.

Палетты и зубья ходового колеса сконструированы так, что поверхность $в_1$ попадает под зуб ходового колеса именного тогда, когда маятник проходит через положение равновесия, двигаясь справа налево. Поверхность $в_2$ попадает под зуб, когда маятник проходит положение равновесия, но двигаясь при этом слева направо.

Таким образом, маятник дважды за период (при прохождении положения равновесия) получает толчки по ходу движения. Эти толчки и поддерживают незатухающие колебания.

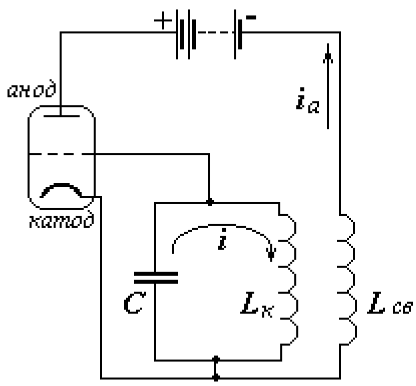


Амплитуда автоколебаний остается неизменной с течением времени и не зависит от того начального отклонения маятника от положения равновесия. Амплитуда автоколебаний определяется исключительно величиной энергии ΔE, получаемой маятником за период от гири (она опускается на одно звено цепи, к которой подвешена).

§2 Автогенератор Ван-дер-Поля на триоде

Для получения длительно существующих электрических колебаний используют так называемые автогенераторы. Автогенераторы могут генерировать гармонические (синусоидальные) колебания или колебания более сложной формы. Эти колебания могут продолжаться неограниченно долго, пока не вышли из строя элементы, образующие систему (в том числе источник питания).

Одна из простейших схем автогенератора изображена на рисунке. Колебательный контур, содержащий емкость С и индуктивность $L_к$, включен в цепь сетки триода. В цепи анода, кроме питающей батареи, имеется еще катушка связи $L_{св}$, расположенная в непосредственной близости к катушке $L_к$, так что между обеими катушками существует индуктивная связь.



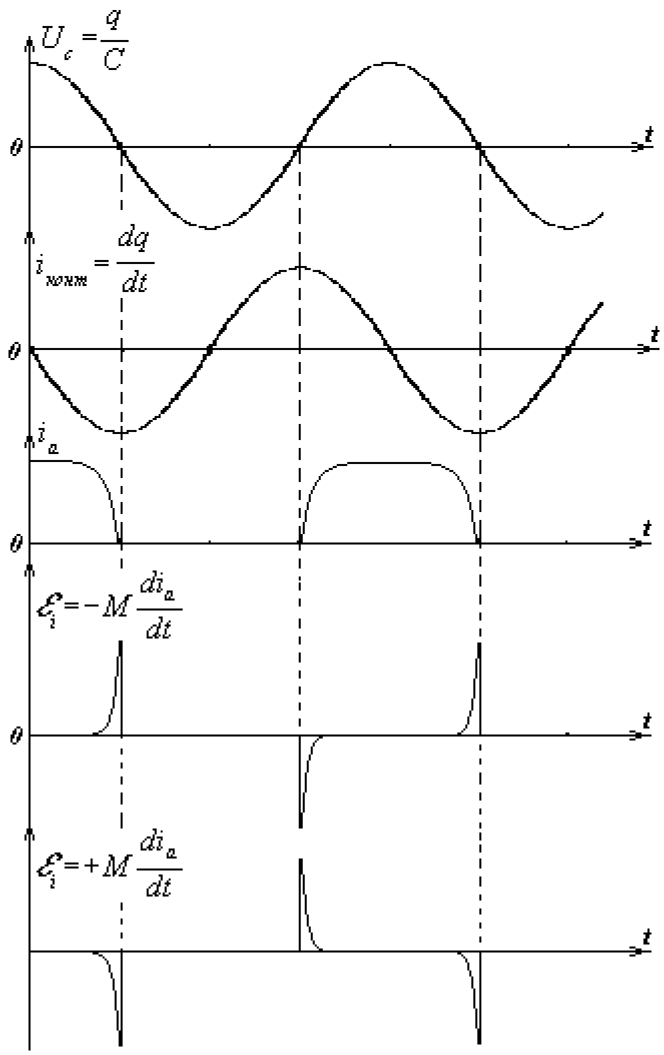
Принцип действия генератора

Когда в колебательном контуре возникают колебания, то между обкладками конденсатора появляется переменное напряжение. Такое же напряжение возникает между катодом лампы и сеткой, так как они соединены параллельно. Вследствие этого в цепи анода появляется переменный ток i_a. Этот переменный ток течет через катушку связи $L_{св}$. Но контурная катушка и катушка связи индуктивно связаны между собой, поэтому переменный ток i_a вызывает в контурной катушке $L_к$ переменную ЭДС индукции

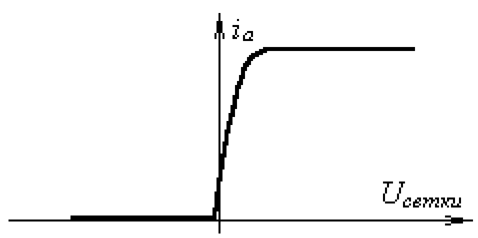
$$\varepsilon_i = -M\frac{di_a}{dt},$$

где М – коэффициент взаимной индукции. Эта ЭДС в зависимости от направления витков в катушках может либо препятствовать колебаниям в контуре, либо способствовать им. Покажем это.

Напряжение на конденсаторе меняется по гармоническому закону. Ток в контурной катушке – это производная от заряда на обкладках конденсатора от времени – опережает напряжение по фазе на $\pi/2$.



Характеристика лампы как правило близка к Z – характеристике.

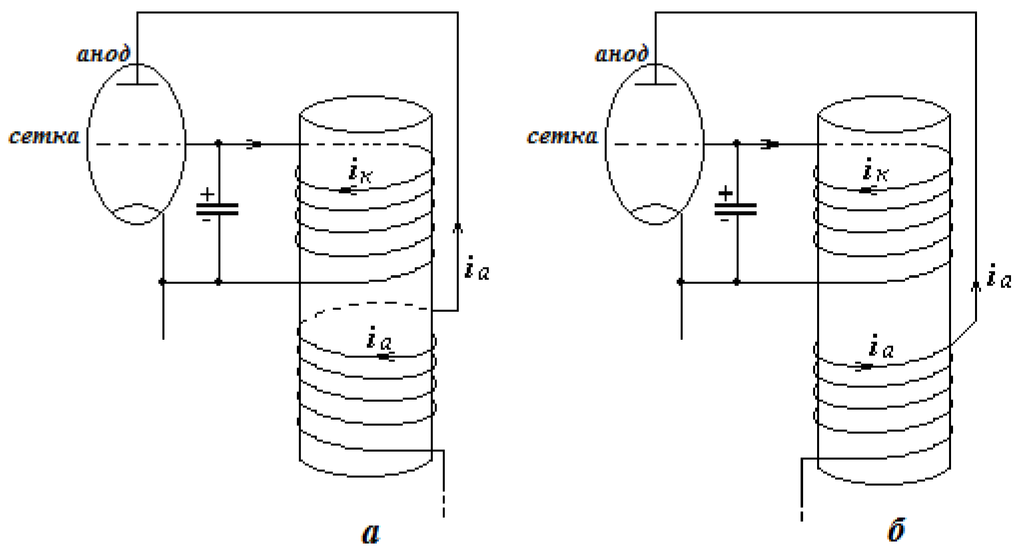


Видно, что лампа пропускает ток только тогда, когда потенциал сетки положителен. Более того, большую часть полупериода анодный ток постоянен.

Производная анодного тока, и, следовательно, пропорциональная ей ЭДС, представляет собой последовательность кратковременных импульсов, чередующегося знака.

Если знак ЭДС индукции совпадает со знаком тока в контуре (направление вихревого электрического поля совпадает с направлением тока), то контур получает «толчок» – вихревое электрическое поле «подталкивает» ток. Происходит раскачивание колебаний толчками, как в часах с анкерным механизмом. Если знак ЭДС противоположен знаку тока в контуре, колебания в контуре, наоборот гасятся.

Подталкивающее или тормозящее действие ЭДС индукции зависит от направления намотки витков контурной катушки и катушки связи. Покажем это.



Контурная катушка и катушка связи накручены на один сердечник. На рисунках показано два варианта намотки катушки связи.

Показан момент, когда потенциал сетки положителен, следовательно, триод открыт, в анодной цепи есть ток i_a. Конденсатор разряжается, потенциал сетки уменьшается, это приводит к уменьшению анодного тока. Магнитный поток, создаваемый анодным током и сосредоточенный в сердечнике, на который накручены обе катушки, тоже уменьшается. В этом случае возникает вихревое электрическое поле, стремящееся поддержать убывающий анодный ток. Нетрудно видеть, что в случае *а)* вместе с анодным током будет «подгоняться» и ток в контурной катушке (токи направлены в одну сторону) – контур «получает толчок», подпитывается энергией.

В случае *б)* вихревое электрическое поле, поддерживающее анодный ток, будет направлено против контурного тока. Колебания в контуре будут гаситься.

Основные свойства автоколебательной системы, рассмотренные на примере лампового генератора, сохраняются, если использовать вместо лампы полупроводниковый триод.

Глава 9 Упругие волны

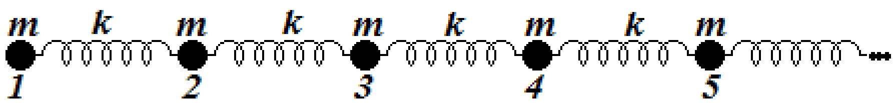
§1 Механические волны

Механическая или упругая волна – это процесс распространения колебаний в упругой среде. Например, вокруг колеблющейся струны или диффузора динамика начинает колебаться воздух – струна или динамик стали источниками звуковой волны.

Для возникновения механической волны необходимо выполнение двух условий – наличие источника волны (им может быть любое колеблющееся тело) и упругой среды (газа, жидкости, твердого вещества).

Выясним причину возникновения волны. Почему частицы среды, окружающие любое колеблющееся тело, тоже приходят в колебательное движение?

Простейшей моделью одномерной упругой среды является цепочка шариков, соединенных пружинками. Шарики – модели молекул, соединяющие их пружины моделируют силы взаимодействия между молекулами.



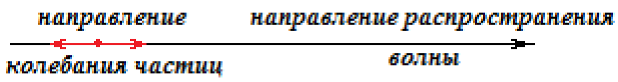
Допустим, первый шарик совершает колебания с частотой ω. Пружина 1-2 деформируется, в ней возникает сила упругости, меняющаяся с частотой ω. Под действием внешней периодически меняющейся силы второй шарик начинает совершать вынужденные колебания. Поскольку вынужденные колебания всегда происходят с частотой внешней вынуждающей силы, частота колебаний второго шарика будет совпадать с частотой колебаний первого. Однако вынужденные колебания второго шарика будут происходить с некоторым запаздыванием по фазе относительно внешней вынуждающей силы. Другими словами, второй шарик придет в колебательное движение несколько позже, чем первый шарик.

Колебания второго шарика вызовут периодически меняющуюся деформацию пружины 2-3, которая заставит колебаться третий шарик и так далее. Таким образом, все шарики в цепочке будут поочередно вовлекаться в колебательное движение с частотой колебаний первого шарика.

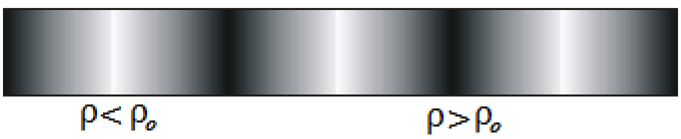
Очевидно, причиной распространения волны в упругой среде является наличие взаимодействия между молекулами. Частота колебания всех частиц в волне одинакова и совпадает с частотой колебаний источника волны.

По характеру колебаний частиц в волне волны делят на поперечные, продольные и поверхностные.

В ***продольной волне*** колебание частиц происходит вдоль направления распространения волны.

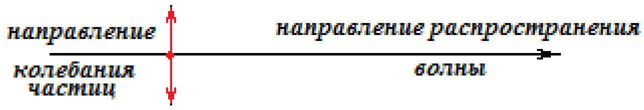


Распространение продольной волны связано с возникновением в среде деформации растяжения-сжатия. В растянутых участках среды наблюдается уменьшение плотности вещества – разрежение. В сжатых участках среды, наоборот, происходит увеличение плотности вещества – так называемое сгущение. По этой причине продольная волна представляет собой перемещение в пространстве областей сгущения и разрежения.



Деформация растяжения - сжатия может возникать в любой упругой среде, поэтому продольные волны могут распространяться в газах, жидкостях и твердых телах. Примером продольной волны является звук.

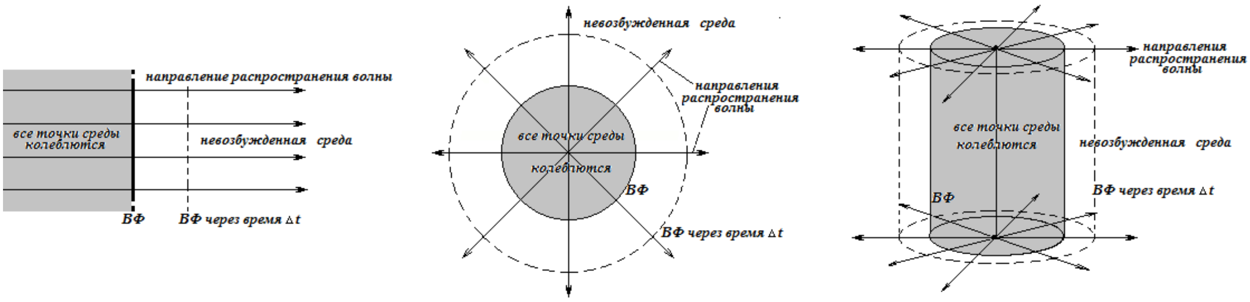
В ***поперечной волне*** частицы совершают колебания перпендикулярно направлению распространения волны.



Распространение поперечной волны связано с возникновением в среде деформации сдвига. Этот вид деформации может существовать только в твердых веществах, поэтому поперечные волны могут распространяться исключительно в твердых телах. Примером поперечной волны является сейсмическая S-волна.

Поверхностные волны возникают на границе раздела двух сред. Колеблющиеся частицы среды имеют как поперечную, перпендикулярную поверхности, так и продольную составляющие вектора смещения. Частицы среды описывают при своих колебаниях эллиптические траектории в плоскости, перпендикулярной поверхности и проходящей через направление распространения волны. Примером поверхностных волн являются волны на поверхности воды и сейсмические L – волны.

Волновым фронтом называют геометрическое место точек, до которых дошел волновой процесс. Форма волнового фронта может быть разной. Наиболее распространенными являются плоские, сферические и цилиндрические волны.



Обратите внимание – волновой фронт всегда располагается ***перпендикулярно*** направлению распространения волны! Все точки волнового фронта начинают колебаться ***в одной фазе***.

Для характеристики волнового процесса вводят следующие величины:

Частота волны ν – это частота колебания всех частиц в волне1.

2 *Амплитуда волны* А – это амплитуда колебания частиц в волне.

3 *Скорость волны* v – это расстояние, на которое распространяется волновой процесс (возмущение) в единицу времени.

Обратите внимание – скорость волны и скорость колебания частиц в волне – это разные понятия! Скорость волны зависит от двух факторов: вида волны и среды, в которой волна распространяется.

Общая закономерность такова: скорость продольной волны в твердом веществе больше, чем в жидкостях, а скорость в жидкостях, в свою очередь, больше скорости волны в газах.

$$v_{тверд} > v_{жидк} > v_{газ}.$$

Понять физическую причину этой закономерности несложно. Причина распространения волны – взаимодействие молекул. Естественно, возмущение быстрее распространяется в той среде, где взаимодействие молекул более сильное.

В одной и той же среде существует другая закономерность – скорость продольной волны больше скорости поперечной волны.

$$v_{прод} > v_{попер}.$$

Например, скорость продольной волны в твердом теле $v_{прод} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$,

где Е – модуль упругости (модуль Юнга) вещества, ρ – плотность вещества.

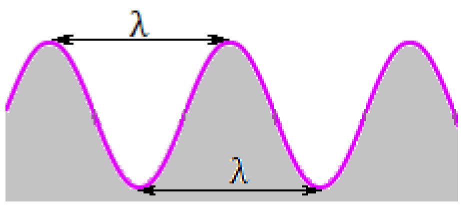
Скорость поперечной волны в твердом теле $v_{попер} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}$, где N – модуль сдвига. Поскольку для всех веществ $E > N$, то $v_{прод} > v_{попер}$. На отличии скоростей продольных и поперечных сейсмических волн основан один из методов определения расстояния до очага землетрясения.

Скорость поперечной волны в натянутом шнуре или струне определяется силой натяжения F и массой единицы длины μ:

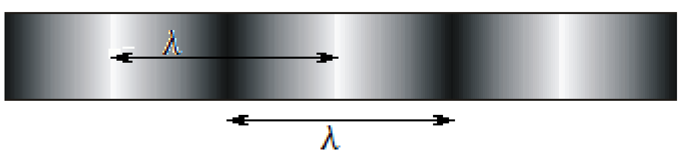
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ .$$

1 *Длина волны* λ – минимальное расстояние между точками, которые колеблются одинаково.

Для волн, бегущих по поверхности воды, длина волны легко определяется как расстояние между двумя соседними горбами или соседними впадинами.



Для продольной волны длина волны может быть найдена как расстояние между двумя соседними сгущениями или разрежениями.



2 В процессе распространения волны участки среды вовлекаются в колебательный процесс. Колеблющаяся среда, во-первых, двигается, следовательно, обладает кинетической энергией. Во-вторых, среда, по которой бежит волна, деформирована, следовательно, обладает потенциальной энергией. Нетрудно видеть, что распространение волны связано с переносом энергии к не-

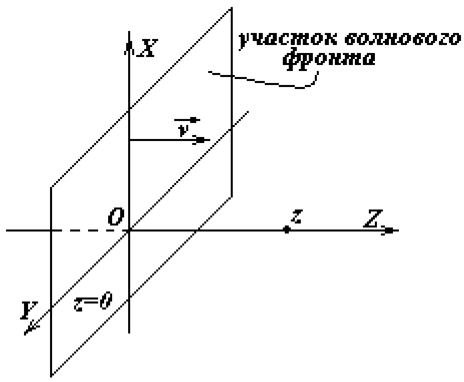
возбужденным участкам среды. Для характеристики процесса переноса энергии вводят **интенсивность волны** *I*.

Уравнение плоской бегущей волны

Задача: получить уравнение, позволяющее рассчитывать смещение любой точки упругой среды, в которой распространяется волновой процесс, в любой момент времени.

Решение:

Пусть вдоль оси Oz распространяется плоская монохроматическая волна с частотой ω: это значит, что вектор скорости волны v направлен вдоль OZ, а волновые фронты перпендикулярны этой оси.



Пусть смещения точек в плоскости z = 0 происходят по закону

$$\xi(0) = \xi_0 \cos \omega t,$$

где ξ_0 - амплитуда колебания точек в плоскости z =0; t - время колебания точек плоскости z = 0.

Тогда зависимость смещения точек, имеющих координату z, будет зависеть от времени следующим образом:

$$\xi(t, z) = \xi_0 \cos \omega (t - \tau) = \xi_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{v} \right),$$

где τ - время запаздывания , то есть то время, которое потребовалось волновому процессу, чтобы распространиться на расстояние z. Очевидно, что время колебания точек с координатой z меньше времени колебания точек с координатой z = 0 на время запаздывания $\tau = \frac{z}{v}$.

Уравнение $\xi(t,z) = \xi_0 \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)$ носит название уравнения плоской бегущей волны.

Обратите внимание – уравнение бегущей волны – это функция двух переменных – координаты z и времени t. Зафиксировав координату точки, вы получаете зависимость ее смещения от времени. Зафиксировав время, вы получаете картину мгновенного распределения смещений точек среды, в которой распространяется волна.

Чаще всего уравнение бегущей волны записывают иначе. Преобразуем наше уравнение

$$\xi\left(t,z\right) = \xi_0 \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) = \xi_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{v}\right) = \xi_0 \cos\left(\omega t - kz\right).$$

Отношение циклической частоты ω к скорости волны v обозначили за k – волновое число:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Физический смысл волнового числа: волновое число показывает, как изменяется фаза волны при перемещении на 1 м вдоль направления распространения волны.

В связи с этим произведение kz в уравнении бегущей волны называют *запаздыванием по фазе* или *набегом фазы*.

Аналогичное уравнение можно записать для случая волн другой формы. Необходимо лишь учесть изменение амплитуды колебания точек по мере удаления от источника колебаний. Например, для цилиндрической волны

$$\xi(t,z) = \frac{A_0}{\sqrt{R}}\cos(\omega t - kr),$$

где r – расстояние от прямой, являющейся источником волны;

для сферической волны

$$\xi(t,z) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr),$$

где r – расстояние до точки, являющейся источником колебаний.

Уравнение бегущей волны позволяет установить связь между скоростью, длиной волны и частотой. Смещения точек, находящихся на расстоянии в длину волны, одинаковые:

$$\xi(t,z) = \xi(t, z+\lambda)$$
$$\xi_0 \cos(\omega t - kz) = \xi_0 \cos(\omega t - k(z+\lambda))$$
$$\cos(\omega t - kz) = \cos(\omega t - k(z+\lambda)).$$

Значения косинусов для двух различных аргументов будут одинаковы, если аргументы отличаются на 2π. после

$$(\omega t - kz) - 2\pi = (\omega t - k(z+\lambda))$$
$$2\pi = k\lambda$$
$$2\pi = \frac{\omega}{V}\lambda$$
$$\frac{2\pi}{\omega}\cdot V = \lambda.$$

С учетом того, что $\frac{2\pi}{\omega} = T$, получаем $\lambda = vT$. Видим, что длина волны λ – это расстояние, которое проходит волна за время, равное периоду колебания одной частицы.

Фазовая и групповая скорости волн

Уточним введенное ранее понятие скорости волны. Допустим, в пространстве распространяется монохроматичная волна (волна одной частоты). Уравнение плоской волны имеет $\xi\left(t,z\right)=A_0\cos\left(\omega t-kr\right)$. Аргумент косинуса $\left(\omega t-kr\right)$ - это фаза. Зафиксируем значение фазы – тем самым мы зафиксируем определенное смещение точки от положения равновесия, допустим «горб» волны. С течением времени слагаемое ωt изменяется, значит, слагаемое kr тоже должно изменяться, чтобы разность оставалась неизменной. Это означает, что зафиксированный нами «горб» волны перемещается в пространстве. Скорость перемещения этого «горба» (фазы) называется **фазовой скоростью** волны. Для нахождения фазовой скорости продифференцируем выражение $\left(\omega t-kr\right)=const$ по времени:

$$\frac{d\left(\omega t-kr\right)}{dt}=0$$

$$\omega-k\frac{dr}{dt}=0.$$

Производная от расстояния по времени $\frac{dr}{dt}$ - это не что иное, как скорость перемещения фазы в пространстве, т.е. фазовая скорость $\frac{dr}{dt}=v_{\text{ф}}$. С учетом того, что $k=\frac{\omega}{v}$, получаем

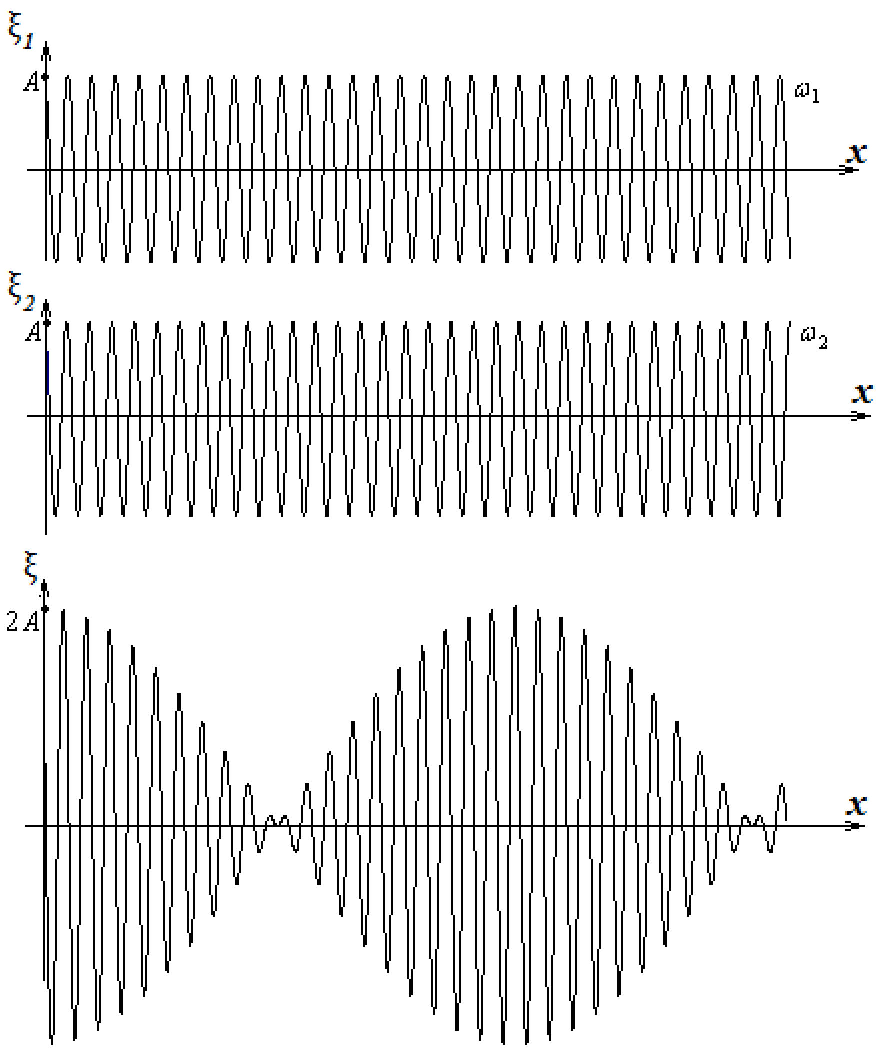
$$v_{\text{ф}}=\frac{dr}{dt}=\frac{\omega}{k}=v.$$

Таким образом, скорость, входящая в уравнение бегущей волны, – это фазовая скорость.

В общем случае фазовая скорость зависит от частоты волны, т.е. волны разных частот в одной и той же среде распространяются с разной скоростью. Это явление называется дисперсией.

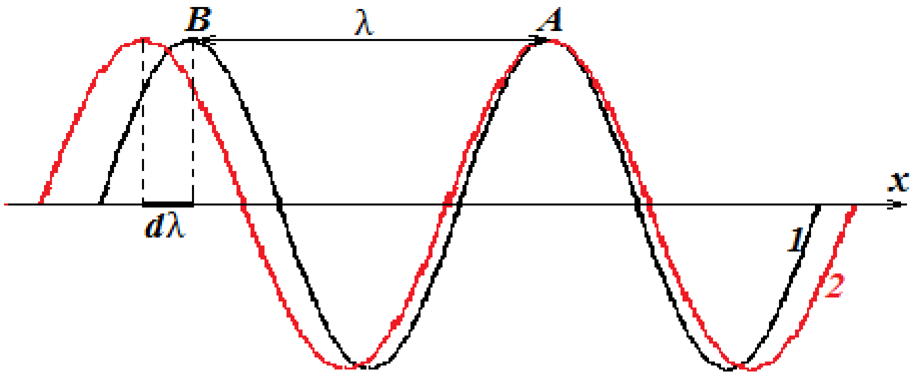
Допустим, в пространстве распространяется группа волн – «волновой пакет». Мы наблюдаем результат наложения этих волн. Например, волновой пакет состоит всего из двух волн близких частот ω_1 и ω_2. На рисунке показаны распределение смещений частиц среды ξ_1 и ξ_2 вдоль оси OX в какой-то момент времени. Ниже показана картина наложения смещений частиц. Видно, что будут области, где смещение частиц от положения равновесия максимально. Эти области называют «горбами» волны.

Если волны, образующие волновой пакет, не обладают дисперсией, то картинка наложения волн, перемещаясь в пространстве, не изменяет своей формы.



Если составляющие волнового пакета перемещаются с разными скоростями, то картинка наложения волн с течением времени видоизменяется. «Горб» картины наложения будет перемещаться в пространстве, но его скорость будет отличиться от скорости распространения отдельных составляющих волнового пакета. Скорость перемещения максимума волнового пакета называют **групповой скоростью**. Найдем связь групповой скорости с фазовой.

Пусть первая волна длиной λ распространяется со скоростью $v_{ф}$. Вторая волна длиной (λ+dλ) распространяется со скоростью $\left(v_{ф} + dv_{ф}\right)$. В какой-то момент времени «горб» волнового пакета совпадает с точкой А.



Вторая волна догоняет первую со скоростью $dv_ф$, и в системе отсчета, связанной с первой волной, через время $t = \dfrac{d\lambda}{dv_ф}$ «горб» волнового пакета совпадет с точкой В. Очевидно, что в лабораторной системе отсчета скорость перемещения «горба» будет меньше скорости первой волны

$$v_{гр} = v_ф - \frac{\lambda}{t} = v_ф - \frac{\lambda}{\dfrac{d\lambda}{dv_ф}} = v_ф - \lambda \frac{dv_ф}{d\lambda}.$$

В рассмотренном примере вторая, более длинная волна, распространялась быстрее первой, более короткой волны ($\dfrac{dv_ф}{d\lambda} > 0$). Этот случай называют нормальной дисперсией. Групповая скорость в этом случае оказывается меньше фазовой.

Если более короткие волны в пакете будут бежать быстрее длинных ($\dfrac{dv_ф}{d\lambda} < 0$), то групповая скорость окажется больше фазовой. Это так называемая аномальная дисперсия.

В жизни практически всегда приходится сталкиваться не с бесконечной монохроматичной волной, а с волновым пакетом. Поэтому скорость волны, измеряемая на практике, это чаще всего групповая скорость.

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном идеальный случай – бесконечную синусоидальную волну. Поэтому всюду, если это не оговорено особо, под скоростью волны будем понимать фазовую скорость.

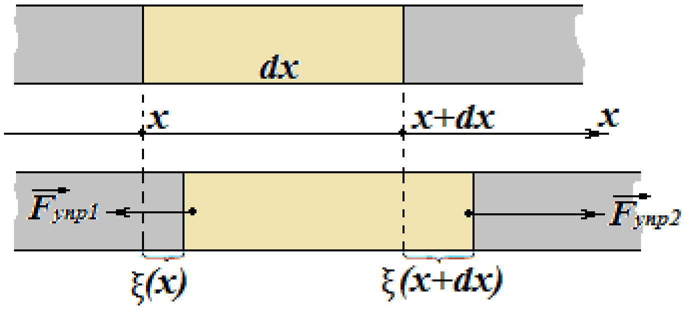
Волновое уравнение

Для доказательства существования в системе свободных гармонических колебаний, необходимо было получить дифференциальное уравнение вида $\frac{d^2S}{dt^2} = -\omega^2 S$. Из дифференциального уравнения можно было определить циклическую частоту собственных колебаний ω и, следовательно, рассчитать период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Можно предположить, что наличие в системе волнового процесса тоже описывается дифференциальным уравнением. Каков вид этого уравнения? Какие характеристики волнового процесса можно определить из этого уравнения?

Рассмотрим длинный твердый стержень, вдоль которого бежит продольная волна. Распространение продольной волны связано с возникновением в теле деформации растяжения-сжатия. Кроме того, все точки среды, по которой бежит волна, двигаются.

Пусть малый участок стержня длиной dx, расположенный между сечениями стержня с координатами x и $(x + dx)$, испытывает деформацию растяжения.



где $\xi(x)$ - смещение от положения равновесия точек, находящихся в левом сечении рассматриваемого участка стержня и имеющих координату *x;*
$\xi(x+dx)$ - смещение от положения равновесия точек, находящихся в правом сечении рассматриваемого участка стержня и имеющих координату $(x+dx)$.

На выделенный участок стержня действуют силы упругости $\vec{F}_{упр1}$ и $\vec{F}_{упр2}$ со стороны растянутых соседних участков стержня. Строго говоря, скорости и ускорения различных точек рассматриваемого участка разные, но ввиду малости участка dx отличием скоростей и ускорений можно пренебречь. Запишем для выделенного участка стержня dx второй закон Ньютона:

$$dm \cdot \vec{a} = \vec{F}_{упр1} + \vec{F}_{упр2},$$

где dm - масса рассматриваемого участка.

В проекции на OX:

$$dm \cdot a_x = -F_{упр1} + F_{упр2}.$$

Масса рассматриваемого участка стержня $dm = \rho dV = \rho S dx.$

По определению проекция ускорения a_x – это вторая производная от смещения по времени $a_x = \dfrac{d^2\xi}{dt^2}$.

Силы упругости могут быть рассчитаны через напряжения в соответствующих сечениях: $F_{упр1} = \sigma(x)S$ и $F_{упр2} = \sigma(x+dx)S$.

После подстановки получаем

$$\rho S dx \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \sigma(x+dx)S - \sigma(x)S$$

$$\rho \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\sigma(x+dx) - \sigma(x)}{dx}.$$

Очевидно, что отношение $\frac{\sigma(x+dx) - \sigma(x)}{dx}$ - это не что иное, как производная от напряжения по координате $\frac{\sigma(x+dx) - \sigma(x)}{dx} = \frac{d\sigma}{dx}$.

$$\rho \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d\sigma}{dx}. \qquad (*)$$

Согласно закону Гука напряжение прямо пропорционально относительному удлинению $\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль упругости вещества или модуль Юнга. Относительное удлинение ε – это отношение абсолютного удлинения к начальной длине образца. В нашем случае абсолютное удлинение равно $(\xi(x+dx) - \xi(x))$, а первоначальная длина рассматриваемого участка - dx. Тогда относительное удлинение $\varepsilon = \frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = \frac{d\xi}{dx}$ - производная от смещения по координате. Подставляем значение относительного удлинения в уравнение (*):

$$\rho \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d\left(E \cdot \frac{d\xi}{dx}\right)}{dx}.$$

С учетом того, что модуль Юнга E – это постоянная величина, получаем уравнение

$$\rho \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = E\frac{d^2\xi}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}.$$

Нетрудно показать, что если ввести обозначение $\frac{E}{\rho} = v^2$, то решением уравнения $\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}$ является уравнение плоской бегущей волны

$\xi(t,x) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$

Подведем итоги

1 Если для какой-либо системы удается получить дифференциальное уравнение вида $\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}$, то в системе распространяется волновой процесс. По этой причине дифференциальное уравнение $\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}$ называется волновым уравнением.

2 Волновое уравнение позволяет определить скорость волны v. Константа, стоящая в волновом уравнении перед второй производной по координате, - это величина, равная квадрату скорости волны.

В нашем случае получено значение скорости продольной волны в твердом теле $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (как уже было сказано выше).

Энергия упругой волны

Процесс распространения упругой волны связан с вовлечением в колебательное движение частиц среды. Любое же колеблющееся тело обладает энергией, следовательно, можно говорить о передаче энергии колебательного движения от одних частиц среды другим. Иными словами, упругая волна переносит энергию.

Пусть в некоторой области пространства вдоль оси ОХ распространяется плоская продольная волна. Ее уравнение имеет вид

$$\xi = \xi_0 \cos\left(\omega t - kx\right).$$

Рассмотрим малый элемент объема dV среды, в которой распространяется волна. Частицы среды, находящиеся в выделенном нами объеме, двигаются, участвуя в колебательном движении, а значит, они обладают кинетической энергией. Поскольку выбранный нами элемент объема очень мал, можно считать, что все его точки имеют одинаковые скорости. Тогда кинетическая энергия выделенного объема может быть рассчитана как

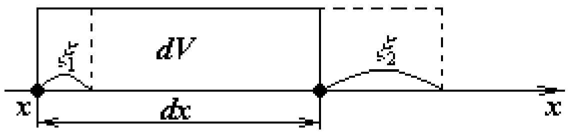
$$dW_k = \frac{dm \cdot v^2}{2} = \frac{\rho dV \cdot v^2}{2},$$

где ρ - плотность упругой среды, v – скорость всех точек выделенного нами объема. Скорость колебательного движения может быть найдена как производная от смещения по времени:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = \left(\xi_0 \cos\left(\omega t - kx\right)\right)' = -\xi_0 \omega \sin\left(\omega t - kx\right).$$

Тогда кинетическая энергия выделенного объема будет равна:

$$dW_k = \frac{\rho dV \cdot v^2}{2} = \frac{\rho \xi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)}{2} dV.$$



Распространение волны связано с деформацией упругой среды. Величина относительной деформации выделенного нами участка равна

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} = -\xi_0 \cdot (-k)\sin(\omega t - kx) = \xi_0 k \sin(\omega t - kx).$$

Потенциальная энергия упругой деформации выделенного объема dV:

$$dW_p = \frac{E\varepsilon^2}{2} dV = \frac{E\xi_0^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx)}{2} dV =$$

$$= \frac{E\xi_0^2 \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \sin^2(\omega t - kx)}{2} dV = \frac{E\xi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)}{2\frac{E}{\rho}} dV,$$

$$dW_p = \frac{\rho \xi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)}{2} dV.$$

Интересно!! Кинетическая и потенциальная энергии выделенного объема упругой среды (он, кстати, был выбран произвольно) одинаковы, более того, они меняются в одной фазе (в отличие от кинетической и потенциальной энергий колеблющегося маятника).

Полная энергия выделенного участка

$$dW = dW_k + dW_p = \rho \xi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) dV.$$

Плотность энергии волны (энергия единицы объема)

$$w=\frac{dW}{dV}=\rho\xi_0^2\omega^2\sin^2\left(\omega t-kx\right).$$

Видно, что плотность энергии любого участка среды, в которой распространяется волна, меняется с течением времени – переносится, передается от одних частиц другим.

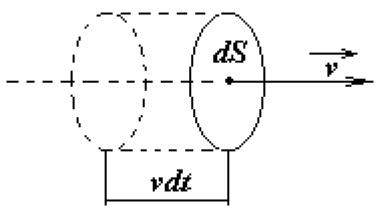
Среднее за период значение квадрата синуса равно ½, следовательно, средняя за период плотность энергии волны будет равна

$$\langle w\rangle=\frac{dW}{dV}=\frac{1}{2}\rho\xi_0^2\omega^2.$$

Обычно, для характеристики волновых процессов пользуются понятием ***интенсивности волны***. *Интенсивностью волны называют энергию, переносимую волной за 1 секунду через поверхность площадью в 1 м^2, расположенную перпендикулярно скорости распространения волны.*

$$I=\frac{dW}{dSdt}.$$

Рассчитаем интенсивность волны.



Через площадку dS за время dt будет перенесена энергия, заключенная в объеме цилиндра с основанием dS и высотой vdt. Поскольку размеры цилиндра очень малы, можно считать плотность энергии в каждой его точке одинаковой. Тогда:

$$I = \frac{w \cdot dS \cdot vdt}{dSdt} = wv = \frac{1}{2}\rho\xi_0^2\omega^2 v.$$

Интенсивность волны прямо пропорциональна:

1 плотности среды;

2 ***квадрату амплитуды волны*** (эта зависимость характерна для волнового процесса любой природы) ;

3 квадрату частоты волны;

4 скорости волны.

Если волна плоская, то ежесекундно в колебательное движение вовлекается одинаковое количество частиц, волновой фронт проходит через поверхность одинаковой площади. Это значит интенсивность волны везде одинаковая, следовательно, амплитуды колебания всех точек среды одинаковые.

Если волна сферическая, то волновыми поверхностями для нее будут сферы. Энергия, переносимая волной за секунду через каждую сферу одинакова, а вот интенсивность волны будет убывать обратно пропорционально площади поверхности, то есть обратно пропорционально расстоянию до источника волны:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Тогда амплитуда колебания точек в сферической волне будет убывать обратно пропорционально расстоянию до источника волны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Выводы, полученные нами, справедливы и для поперечной волны.

Мы рассмотрели идеальный случай незатухающей волны. В реальной плоской волне амплитуда и интенсивность убывают с расстоянием по закону

$$A = A_0 \exp(-kx)$$
$$I = I_0 \exp(-2kx).$$

Энергия волны поглощается средой, в которой она распространяется.

§2 Примеры решения задач

Задача 1 Скорость и длина разных видов волн в твердом теле

Рассчитайте скорость и длину волны, частота которой f = 400 Гц, в стали в случаях:

а) вдоль стального стержня бежит продольная волна;

б) вдоль стержня бежит поперечная волна;

в) волна бежит по струне д линой сечением 1 мм^2, натянутой силой 200 Н.

Решение:

Скорость волны зависит не только от среды, в которой она распространяется, но и от вида волны. В одной и той же среде скорость разных волн разная.

1 Скорость продольной волны равна $v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E - модуль Юнга, ρ - плотность вещества. $v_1=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=\sqrt{\frac{200\cdot 10^9}{7{,}8\cdot 10^3}}=5064\,(\text{м/с})$.

2 Скорость поперечной волны равна $v=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$, где G - модуль сдвига, ρ - плотность вещества. $v_2=\sqrt{\frac{G}{\rho}}=\sqrt{\frac{80\cdot 10^9}{7{,}8\cdot 10^3}}=3203\,(\text{м/с})$.

3 Скорость поперечной волны в натянутой струне $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$, где F – сила натяжения струны, μ - погонная масса. Погонная масса или масса единицы длины равна $\mu=\frac{m}{L}=\frac{\rho\cdot L\cdot S}{L}=\rho\cdot S$.

Тогда скорость $v_3=\sqrt{\frac{F}{\rho\cdot S}}=\sqrt{\frac{10^3}{7{,}8\cdot 10^3\cdot 10^{-6}}}=358\,(\text{м/с})$.

Нетрудно видеть, что быстрее всего в веществе распространяются продольные волны.

Длина волны связана со скоростью и частотой $\lambda=\frac{v}{f}$.

Длина продольной волны $\lambda_1=12{,}7$ м, поперечной волны $\lambda_2=8$ м, волны в струне $\lambda_3=0{,}9$ м.

Задача 2 Интенсивность сейсмической волны

На расстоянии 100 км от очага землетрясения зафиксирована сейсмическая волна интенсивностью $I_1=1{,}4\cdot 10^6$ Дж/м$^2\cdot$с. Чему была рана интенсивность волны в точке, расположенной на расстоянии 2 км от очага землетрясения? Чему равна мощность, приходящаяся на поверхность площадью 20 м^2, на расстоянии 2 км от очага землетрясения?

Решение:

1 От очага землетрясения волна распространяется по всем направлениям, то есть волна сферическая. Интенсивность сферической волны обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника волны $I \sim \frac{1}{r^2}$.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} = I_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = I_1 \cdot 5^2 = 7 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^2 \cdot \text{с}.$$

2 По определению интенсивность волны – это $I = \frac{W}{t \cdot S}$.

$\frac{W}{t} = I \cdot S$ – мощность, приходящаяся на поверхность площадью S.

$$P = \frac{W}{t} = 28 \cdot 10^6 \text{ Вт}.$$

Задача 3 Частота звука, записанного на грампластинке

В канавке грампластинки, вращающейся со скоростью 33 об/мин, на расстоянии 12,5 см от оси вращения «бугорки» располагаются с интервалом 2,45 мм. Чему равна частота записанного в этом месте звука?

Решение:

1 Частота звука совпадает с частотой колебания иголки. Игла совершает вынужденные колебания под действием толчков со стороны «бугорков». Частота же вынужденных колебаний совпадает с частотой внешней вынуждающей силы. Следовательно, частота звука равняется частоте следова-

ния толчков со стороны «бугорков» на иголку. Найдем число «бугорков», которые проходят под иголкой за 1 с.

Линейная скорость точек грампластинки, располагающихся на расстоянии R = 12 см от оси вращения:

$$v = 2\pi Rn.$$

2 Найдем длину дуги окружности, проходящей под иголкой за время $\tau = 1\,с$:

$$L = v \cdot \tau = 2\pi Rn\tau.$$

3 Найдем число «бугорков» на длине дуги L, если расстояние между соседними «бугорками» равно S = 2,45 мм:

$$n = \frac{L}{S} = \frac{2\pi Rn\tau}{S} = 176$$

Частота звука $\nu = 176\,Гц$.

Задача 4 Графическое изображение волны

Конец длинной горизонтальной натянутой струны совершает гармоническое колебание с частотой ν = 250 Гц. Сила натяжения струны F = 75 Н, а погонная плотность $\mu = 0{,}12\ кг/м$. В начальный момент времени конец струны движется из положения равновесия вверх со скоростью 4 м/с. Постройте

а) график зависимости смещения частиц струны от их расстояния до конца струны через 0,01 с;

б) график зависимости смещения точки струны, расположенной на расстоянии 0,1 м от ее конца.

Решение:

Составляем уравнение бегущей по струне волны. Ось координат OX направим вдоль струны, начало координат совмести с колеблющимся концом. Волна бежит в положительном направлении оси OX.

1 Циклическая частота волны $\omega = 2\pi\nu = 1570$ с$^{-1}$.

2 Амплитуда колебаний всех частиц струны такая же, как амплитуда колебаний ее конца. Конец струны пришел в колебательное движение из положения равновесия, следовательно, его скорость в начальный момент времени была максимальна. Амплитуда колебаний связана с начальной скоростью соотношением $A = \frac{v_{max}}{\omega} = 2,5$ мм.

3 Скорость волны в натянутой струне $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 25$ м/с.

4 Волновое число $k = \frac{\omega}{v} = 62,8$ м$^{-1}$.

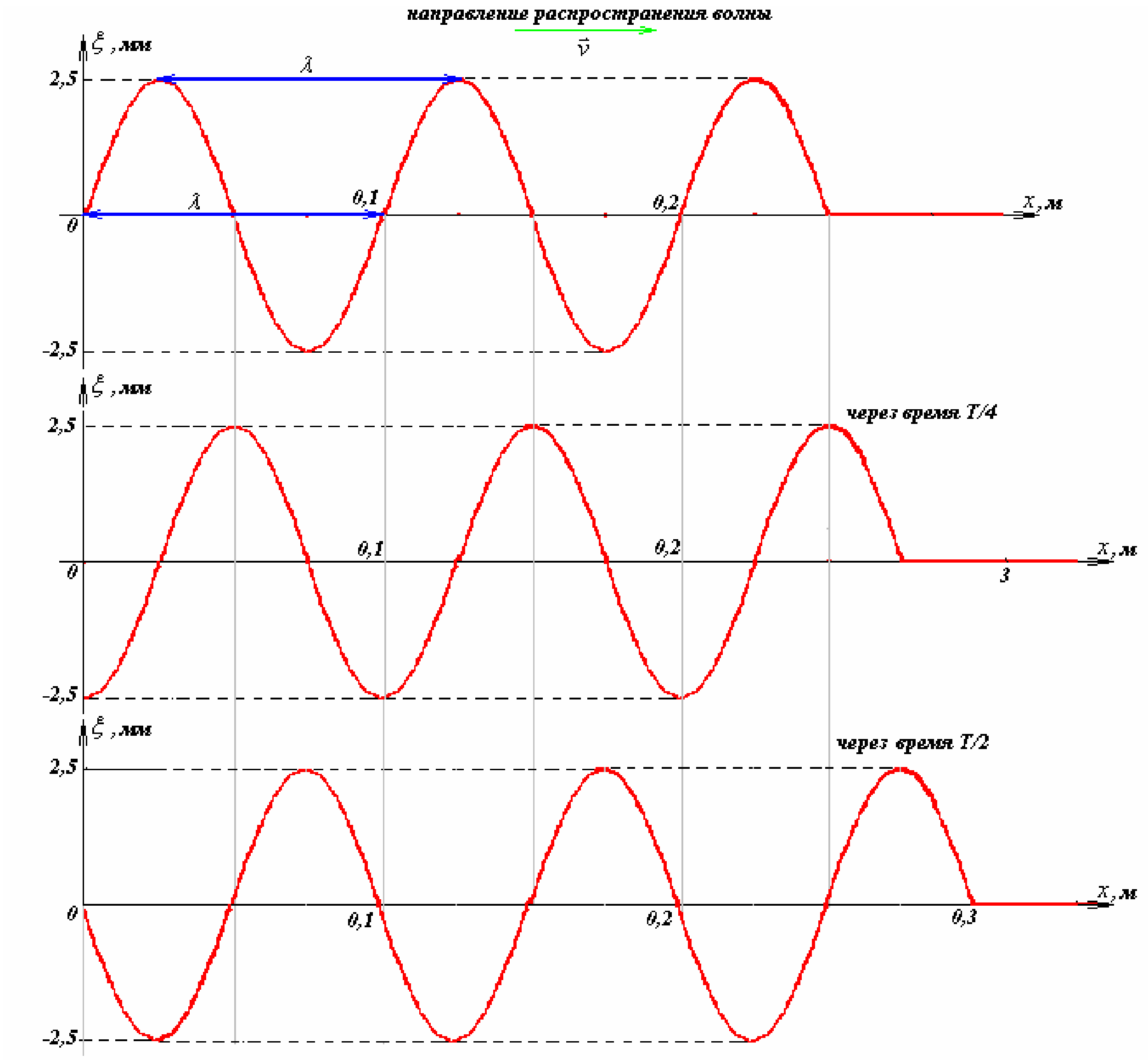
5 Уравнение колебаний свободного конца струны, являющегося источником волны $\xi_{ucm}(t) = 0,0025 \cdot \sin(1570t)$.

Уравнение бегущей вдоль струны волны

$$\xi(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx) = 0,0025 \cdot \sin(1570t - 62,8x)\,(\text{м}).$$

6 Уравнение бегущей волны $\xi(x,t)$ - есть функция двух переменных x и t.

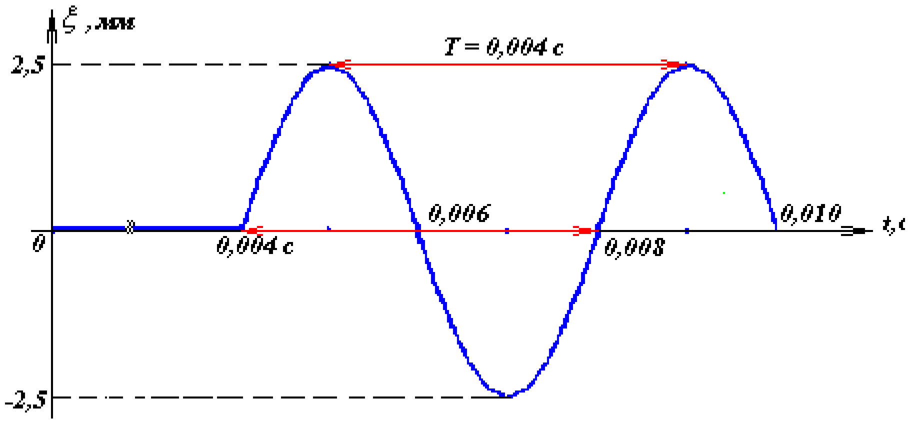
Зафиксировав время, можно получить $\xi(x)$ -картину распределения смещений частиц струны . По условию t = 0,01 c, тогда $\xi(x) = 0,0025 \cdot \sin(15,7 - 62,8x)\,(\text{м})$. Смещение частиц выглядит так:



По существу, график $\xi(x)$ при t = const является профилем (фотографией) струны, по которой бежит волна.

За время, равное 0,01с волна ушла от конца струны на расстояние 0,25 м. Видим, что минимальное расстояние между точками, колеблющимися одинаково, то есть длина волны, равна $\lambda = 0{,}1\,\text{м}$.

Зависимость смещения точки струны, расположенной на расстоянии $x = 0{,}1\,\text{м}$, выглядит так $\xi(t) = 0{,}0025 \cdot \sin(1570t - 6{,}28)\,(\text{м})$.



В течение времени $t_{зап.} = \frac{x}{v} = \frac{0{,}1\,\text{м}}{25\,\text{м/с}} = 0{,}004\,\text{с}$ точка покоилась, затем пришла в колебательное движение с такой же частотой, как источник волны.

Задача 5 Определение разности фаз между точками в волне

Поперечная волна распространяется вдоль натянутого шнура со скоростью 25 м/с. Период колебаний точек шнура Т = 1 с, амплитуда А = 2 см. Определите разность фаз между точками шнура, находящимися на расстояниях $x_1 = 20\,\text{м}$ и $x_2 = 30\,\text{м}$ от источника волны.

Ответ: $\Delta\varphi = 0{,}8\pi$ рад

Решение:

1 Определяем циклическую частоту колебаний точек шнура $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

2 Определяем волновое число $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{v \cdot T}$.

3 Записываем уравнение бегущей волны

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx) = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{v\cdot T}\right).$$

4 Фаза – это аргумент косинуса в уравнении волны.

Фаза первой точки $\varphi_1 = \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{v\cdot T}\right)$, фаза второй точки $\varphi_2 = \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_2}{v\cdot T}\right)$.

Разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{v\cdot T}\right) - \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{v\cdot T}\right) = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{v\cdot T}$

$$\Delta\varphi = 0{,}8\pi \text{ рад}$$

§3 Задания для самостоятельного решения

Тест «Механические волны»

1 Механическая или упругая волна – это процесс…

А) Колебания поверхности твердого тела или жидкости;

Б) Колебания вещества под действием внешней вынуждающей силы;

В) Возникновения свободных колебаний в упругой среде, возникающий при деформации;

Г) Распространения колебаний в упругой среде.

2 По характеру колебания частиц в волне относительно ее направления распространения волны делят на … (укажите **все** виды волн)

А) Поперечные; Б) Сферические; В) Плоские;

Г) Продольные; Д) Поверхностные; Е) Цилиндрические.

3 Укажите, какой вид деформации возникает в среде при распространении упругой волны, и в каких средах могут распространяться волны разных видов.

Вид волны	Деформация, возникающая при распространении волны	Среда, в которой может распространяться волна
Продольная		
Поперечная		
Варианты ответов	А) Растяжения –сжатия; Б) Изгиб; В) Сдвиг; Г) Кручение; Д) Все виды деформации.	А) Газ; Б) Жидкость; В) Твердое тело; Г) Любая упругая среда.

4 Фронтом волны называют…

А) Геометрическое место точек, которые уже участвуют в колебательном движении;

Б) Геометрическое место точек, которые еще не участвуют в колебательном движении;

В) Геометрическое место точек, до которых дошел волновой процесс.

5 Если какое-либо тело начинает колебаться, то от него побежит упругая волна. Причина возникновения этой волны - …

А) Взаимодействие молекул упругой среды, окружающей колеблющееся тело;

Б) Толчки, которые испытывает упругая среда под действием колеблющегося тела;

В) Деформация среды, окружающей колеблющееся тело;

Г) Способность молекул упругой среды, окружающей колеблющееся тело, двигаться;

6 В процессе распространения упругой волны переносятся…

А) Энергия; Б) Импульс; В) Вещество;

Г) Деформация; Д) Информация.

7 Частота колебания частиц среды при распространении в ней упругой волны зависит только от…

А) Упругих свойств среды, в которой распространяется волна;

Б) Частоты колебания источника волны;

В) Температуры среды, в которой распространяется волна;

Г) Наличия в среде механических напряжений.

8 Заполните таблицу «Физические величины, характеризующие упругую волну».

Физическая величина, характеризующая волну	Физический смысл величины
Амплитуда волны, А	
Частота волны , ν	
Скорость волны,v	
Длина волны, λ	
Интенсивность волны, ***I***	

А) Это частота колебания частиц в волне;

Б) Это расстояние между точками, которые колеблются в одной фазе;

В) Это энергия колебания всех частиц в единице объема;

Г) Это скорость колебания частиц в волне;

Д) Это амплитуда колебания источника волны;

Е) Это средняя за период энергия, переносимая волной в единицу времени через поверхность единичной площади, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны;

Ж) Это расстояние, на которое распространяется возмущение в упругой среде в единицу времени;

З) Это расстояние между гребнем и впадиной волны;

И) Это минимальное расстояние между точками, которые колеблются одинаково;

К) Это амплитуда колебания частиц в волне.

9 Как связаны амплитуда и интенсивность волны?

А) $A \sim I$; Б) $A \sim I^2$; В) $I \sim \sqrt{A}$; Г) $I \sim A^2$.

10 Как зависят амплитуда и интенсивность плоской и сферической волн от расстояния до источника волны? Затуханием колебаний при распространении волны пренебречь.

А) $A = \text{const}$, $I = \text{const}$ как для плоской, так и для сферической волны;

Б) $A \sim \frac{1}{r}$, $I \sim \frac{1}{r^2}$ как для плоской, так и для сферической волны;

В) $A = \text{const}$, $I = \text{const}$ для плоской волны,

$A \sim \frac{1}{r}$, $I \sim \frac{1}{r^2}$ для сферической волны;

Г) $A = \text{const}$, $I = \text{const}$ для сферической волны,

$A \sim \frac{1}{r}$, $I \sim \frac{1}{r^2}$ для плоской волны.

11 Сравните амплитуды и интенсивности сейсмической Р-волны на расстояниях r_1 = 10 км и r_2 = 20 км от очага землетрясения.

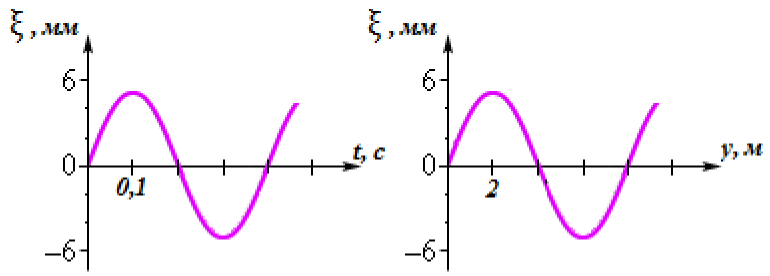
А) $A_1 = A_2$, $I_1 = I_2$; Б) $A_1 = 2A_2$, $I_1 = 4I_2$;

В) $A_1 = 4A_2$, $I_1 = 4I_2$; Г) $A_1 = 2A_2$, $I_1 = 2I_2$.

12 Уравнение бегущей поперечной волны имеет вид $\xi(x,t) = 0{,}0003 \cdot \sin(314t - x)\,(\text{м})$. Определите скорость распространения волны.

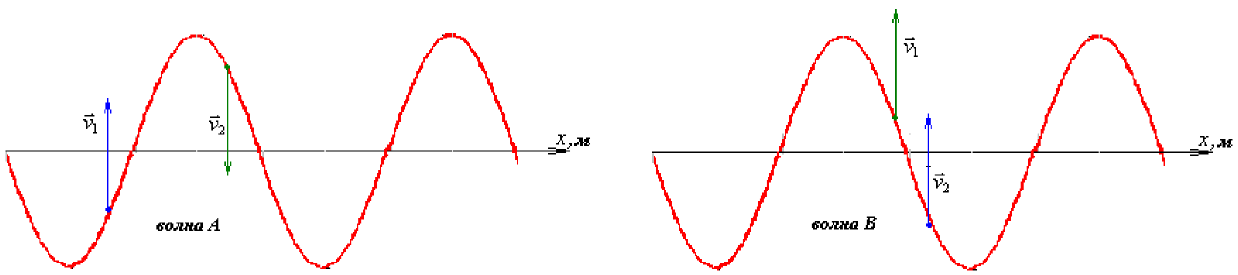
А) 1 м/с; Б) 6,26 м/с; В) 314 м/с; Г) $\dfrac{1}{314}$ м/с.

13 Плоская волна распространяется вдоль оси OY. По графикам зависимости смещения частиц от времени и координаты определите скорость волны.



А) 0, 8 м/с; Б) 3,2 м/с; В) 20 м/с; Г) 40 м/с.

14 На рисунке изображен профиль волны и скорость двух ее точек. В каком направлении распространяется волна?



А) Обе волны распространяются вправо;

Б) Обе волны распространяются влево;

В) Волна А распространяется вправо, волна В – влево;

Г) Волна А распространяется влево, волна В - вправо.

15 Каково минимальное расстояние между точками волны, колеблющимися в противофазе? Длина волны $\lambda = 8$ см.

А) 2 см; Б) 4 см; В) 8 см.

Задачи

1 Поперечная волна, бегущая по веревке, описывается уравнением описывается уравнением $\xi(x,t) = 0,42 \cdot \sin(94t + 7,6x)$, где ξ и x измеряются в метрах, t в секундах. Определите: направление распространения волны; амплитуду колебаний точек в волне; частоту волны; длину волны; скорость волны; максимальную скорость колебаний частиц веревки.

2 Вычислите скорость и длину продольной волны, частота которой f = 400 Гц, в граните, воде и воздухе при 20^0 С.

Справочные данные: модуль Юнга гранита Е = 45 ГПа; коэффициент всестороннего сжатия воды В = 2,2 ГПа; плотность гранита ρ = 2600 кг/м^3; молярная масса воздуха М = 29 г/моль.

3 Два динамика испускают звуковые волны в противофазе. Частоты волн одинаковы и равны 170 Гц. Чему равна разность фаз волн, приходящих в точку, расположенную на расстояниях $l_1 = 3$ м и $l_2 = 3,5$ м от динамиков? Скорость звука принять равной 340 м/с.

4 Сейсмические S- и P-волны (продольные и поперечные) распространяются со скоростями 9 км/с и 5 км/с соответственно. Определите расстояние до очага землетрясения, если сейсмическая станция зафиксировала приход этих волн с интервалом $\tau = 2$ мин.

5 По торцу длинного стального стержня нанесли удар молотком. Определите длину L стержня, если короткий упругий импульс, отразившись от второго торца, возвратился к месту удара через время $\tau = 10–3$ с. Модуль Юнга стали $E = 1{,}9\cdot1011$ Н/м^2 , плотность стали $\rho = 7{,}6\cdot103$ кг/м^3 .

6 При помощи эхолота измерялась глубина моря. Промежуток времени между испусканием звукового импульса и его приемом после отражения от дна оказался равным $\tau = 2{,}50$ с. Плотность морской воды $\rho = 1030$ кг/м^3, коэффициент сжимаемости воды $k = 4{,}6\cdot10–10$ Па$^{-1}$. Определите глубину H моря.

§4 Звук

Звуком называют механическую волну с частотой от 20 до 20000 Гц. Значимость этого вида упругих волн определяется тем, что звук воспринимается нашим ухом и используется как источник информации.

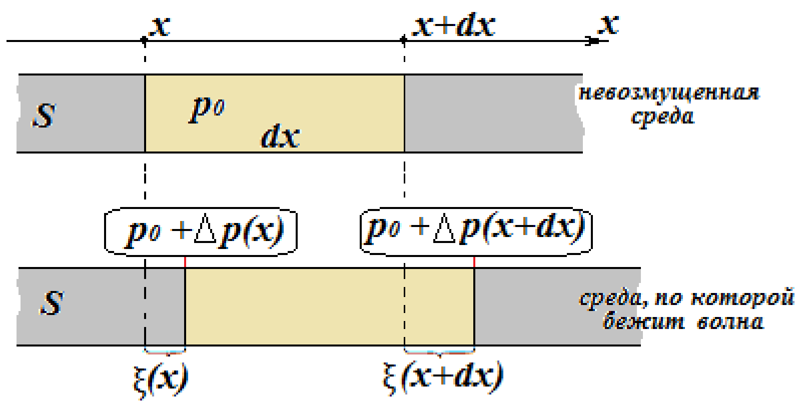
Волны с частотами ниже 20 Гц называют инфразвуком, выше 20000 Гц – ультразвуком.

Скорость звука в жидкостях и газах

Звук – продольная волна. При распространении звука в жидкости или газе возникают области сгущения или разрежения. В областях сгущения давление повышается на Δp по отношению к давлению газа p_0 в невозмущенной среде. В областях разрежения давление соответственно понижается. Величину избыточного давления Δp называют звуковым давлением.

Наша цель – определить скорость звуковой волны в газе. Для нахождения скорости необходимо составить волновое уравнение $\frac{d^2\xi}{dt^2} = const \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}$.
Константа, стоящая в волновом уравнении перед второй производной по координате, - это квадрат скорости волны.

Пусть в направлении OX в воздухе распространяется волна. Выделим цилиндрический участок среды длиной dx, расположенный параллельно оси.



где $\xi(x)$ - смещение от положения равновесия точек, находящихся в левом сечении рассматриваемого участка среды и имеющих координату x. Давление в этом сечении равно $p_0 + \Delta p(x)$;

$\xi(x+dx)$ - смещение от положения равновесия точек, находящихся в правом сечении рассматриваемого участка среды и имеющих координату $(x+dx)$. Давление в этом сечении равно $p_0 + \Delta p(x+dx)$.

Запишем для выделенного участка среды второй закон Ньютона:

$$dm \cdot a_x = \left(p_0 + \Delta p\left(x+dx\right)\right)S - \left(p_0 + \Delta p\left(x\right)\right)S$$

$$\rho S dx \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\Delta p\left(x+dx\right) - \Delta p\left(x\right)\right)S$$

$$\rho \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\Delta p\left(x+dx\right) - \Delta p\left(x\right)}{dx} \qquad (*)$$

$$\rho \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d\left(\Delta p\right)}{dx}.$$

В общем случае давление газа зависит от плотности и температуры $p = \frac{\rho RT}{M}$. В процессе распространения волны плотность газа меняется – чередуются области сгущения и разрежения. Изменяется ли температура?

Теплопроводность газов очень плохая, это позволяет предположить, что в процессе сжатия или разрежения участка среды теплообмен с соседними участками отсутствует. Поэтому процесс распространения возмущения в газе можно считать адиабатным. Запишем уравнение Пуассона и уравнение состояния идеального газа:

$$\begin{cases} \dfrac{p^{\gamma-1}}{T^\gamma} = \dfrac{p_0^{\gamma-1}}{T_0^\gamma} \\ p = \dfrac{\rho RT}{M} \end{cases};$$

где p_0 и T_0 - давление и температура в невозмущенной среде;

p и T - давление и температура в какой-либо точке возмущенной среды;

$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ - показатель адиабаты.

Преобразуя уравнения, входящие в систему, нетрудно получить соотношения: $T = T_0 \left(\dfrac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$ и $p = \dfrac{\rho^{\gamma} R T_0}{M \rho_0^{\gamma-1}}$. Видим, что давление является функцией одной переменной – плотности $p = p(\rho)$. При небольших изменениях плотности отклонение давления в газе Δp от нормального p_0 можно рассчитать следующим образом:

$$\Delta p = \frac{dp}{d\rho} \cdot \Delta\rho = \left(\frac{\rho^{\gamma} R T_0}{M \rho_0^{\gamma-1}} \right)' \cdot \Delta\rho = \frac{\gamma \rho^{\gamma-1} R T_0}{M \rho_0^{\gamma-1}} \Delta\rho.$$

Производную находим в точке $p = p_0$ и $\rho = \rho_0$. Тогда $\Delta p = \dfrac{\gamma R T_0}{M} \Delta\rho$.

Изменение плотности $\Delta\rho$ находится из условия неизменности массы рассматриваемого участка среды:

$$\begin{aligned}
&\rho_0 V_0 = (\rho_0 + \Delta\rho)(V_0 + \Delta V) \\
&\rho_0 V_0 = \rho_0 V_0 + \rho_0 \Delta V + \Delta\rho V_0 + \Delta\rho \Delta V \\
&\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\Delta V}{V_0} = -\rho_0 \varepsilon,
\end{aligned}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\Delta V}{V_0} = \dfrac{S \cdot \left(\xi(x+dx) - \xi(x) \right)}{S \cdot dx} = \dfrac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = \dfrac{d\xi}{dx}$ - относительное удлинение участка среды.

Знак «-» указывает на то, что увеличение плотности приводит к сжатию участка среды. Подставляем полученный результат в уравнение (*) и считая $\rho = \rho_0$:

$$\rho \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d(\Delta p)}{dx}, \quad где \quad \Delta p = \frac{\gamma R T_0}{M}\Delta\rho = \frac{\gamma R T_0}{M}\rho_0\varepsilon = \frac{\gamma R T_0}{M}\cdot\rho_0\cdot\frac{d\xi}{dx}$$

$$\rho \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\gamma R T_0}{M}\cdot\rho_0\cdot\frac{d\xi}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\gamma R T_0}{M}\frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Скорость звука в газе, как это видно из волнового уравнения, равна

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}.$$

При нормальных условиях $T = 273\text{К}$ в воздухе ($M = 29\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ и $\gamma = \frac{7}{5}$ как для двухатомного газа) скорость звука равна $v = \sqrt{\frac{7\cdot 8{,}31\cdot 273}{5\cdot 29\cdot 10^{-3}}} = 331\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

Этот результат прекрасно согласуется с опытными данными. Это подтверждает правильность предположения, что процесс распространения возмущения в газе является адиабатным.

Нетрудно видеть, что по порядку величины скорость звука в газе совпадает со средней квадратичной скоростью молекул газа $v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. Этот факт имеет простое физическое объяснение: передача возмущения в газах осуществляется за счет теплового движения молекул!

В жидкостях скорость звука равна $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$, где B – модуль всестороннего сжатия, ρ – плотность жидкости. Для воды модуль всестороннего сжатия равен B=2,2·10^9 Н/м^2. Скорость звука в воде

$$v = \sqrt{\frac{2,2 \cdot 10^9}{10^3}} \approx 1480 \text{ м/с}.$$

Объективные и субъективные характеристики звука

Помимо объективных характеристик, используемых для описания любого волнового процесса, для звука были введены характеристики, описывающие ощущения слушающего человека. Эти характеристики называют субъективными, поскольку восприятие одной и той же звуковой волны различными слушателями разное. Однако, каждой субъективной характеристике соответствует величина, измеряемая физическими методами – объективная характеристика.

Объективная характеристика	Субъективная характеристика
Частота звуковой волны	***Высота тона*** Чем больше частота волны, тем выше тон звука, который мы слышим.
Спектр волны – набор частот, присутствующих в волне	***Тембр звука***
Интенсивность волны	***Громкость*** звука

Поговорим более подробно о громкости звука. Человеческое ухо может воспринимать звуковую волну с интенсивностью от 10^{-12} Вт/м^2 (порог слышимости) и выше. Естественно, порог слышимости у разных людей разный, приведенное значение характеризует ухо «среднего человека». При интенсивности 1 Вт/м^2 звуковая волна начинает вызывать болевые ощущения.

Громкостью звука называют десятичный логарифм отношения интенсивности воспринимаемой звуковой волны I к порогу слышимости I_0:

$$L = \lg\frac{I}{I_0}.$$

Субъективность данной характеристики звука налицо – порог слышимости у всех людей различен. Кроме того, порог слышимости зависит от частоты волны – минимум приходится на частоту порядка 1000 Гц. Поэтому при одинаковой интенсивности волна с частотой 1000 Гц будет восприниматься громче, чем волна с частотой 300 Гц.

Единицы громкости – Бел (Б) и децибел (1дБ = 0,1 Б). Например, обычному спокойному разговору соответствует уровень громкости порядка 60 дБ : $L = \lg\frac{I}{I_0} = 6\text{Б}$. Следовательно, интенсивность звуковой волны во время разговора превосходит порог слышимости в миллион раз: $\frac{I}{I_0} = 10^6$.

Обратите внимание, зависимость громкости звука от интенсивности волны не является линейной! Например, увеличение громкости звука в 2 раза от 20 до 40 дБ означает увеличение интенсивности волны в 100 раз! А увеличение громкости звука в 2 раза от 20 до 60 дБ означает увеличение интенсивности волны в 10000 раз.

Из таблицы хорошо видно, насколько универсально человеческое ухо – этот созданный природой «прибор» измеряет интенсивности волны, отличающиеся в 10^{12} раз. Ни один рукотворный прибор не имеет столь широкого диапазона измеряемой величины.

Источник звука	Интенсивность, Вт/м^2	Громкость, дБ
Шум листвы	$1\cdot10^{-11}$	10
Шепот	$1\cdot10^{-10}$	20
Негромкое радио	$1\cdot10^{-8}$	40
Обычный разговор	$1\cdot10^{-6}$	60
Интенсивное уличное движение	$1\cdot10^{-5}$	70
Крик	$1\cdot10^{-4}$	80
Рок-концерт в закрытом помещении	1	120
Порог болевых ощущения	1	120
Реактивный самолет (на расстоянии 30 м)	100	140

Эффект Доплера для звуковых волн

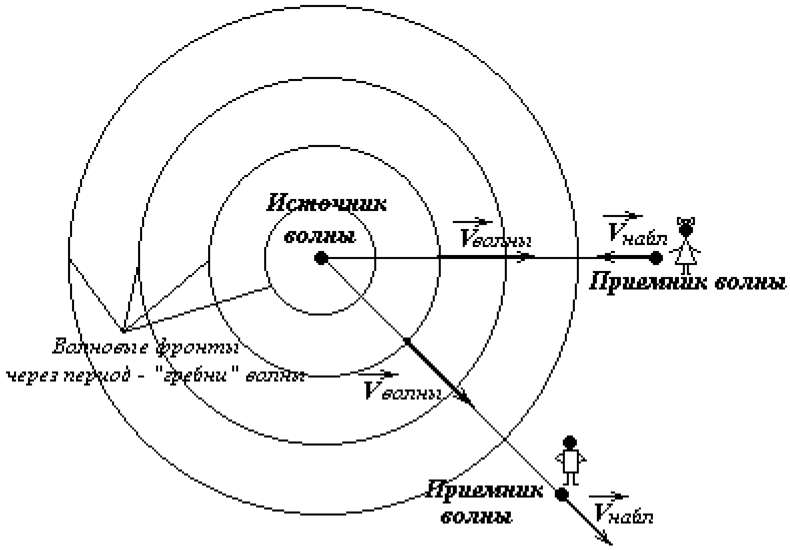
Эффектом Доплера называют изменение частоты звука, воспринимаемой приемником при движении источника или приемника звука. Эффект легко «наблюдаем» в жизни. Достаточно вспомнить, как мимо вас с большой скоростью проносится пожарная машина с включенной сиреной. Мы слышим резкое изменение высоты тона этой сирены как только автомобиль проедет мимо нас.

Рассмотрим причины возникновения эффекта Доплера и вычислим изменение частоты звуковых волн, обусловленное этим эффектом.

Случай 1 – движется приемник звука вдоль прямой, соединяющей его с источником.

Пусть источник волны колеблется с частотой f_0.

Очевидно, что расстояние между «гребнями», которое фиксирует приемник, не изменилось в сравнении с ситуацией, если бы приемник покоился. А вот приближаться к приемнику «гребни» волны будут с другой скоростью.



Если приемник приближается к источнику, то «гребни» двигаются относительно него со скоростью

$$v_{отн} = v_{волны} + v_{набл}.$$

Выразим относительную скорость через длину волны и частоту, воспринимаемую приемником:

$$v_{отн} = \lambda f = \frac{v_{волны}}{\nu_0} f.$$

После подстановки получаем

$$\frac{v_{волны}}{f_0} \cdot f = v_{волны} + v_{набл}$$

$$f = f_0 \left(1 + \frac{v_{набл}}{v_{волны}} \right).$$

В случае удаления приемника звука от источника не трудно заметить, что в формуле для относительной скорости волны появится знак “-“, поэтому минус появится и в окончательном выражении для частоты, воспринимаемой приемником звука. Итак,

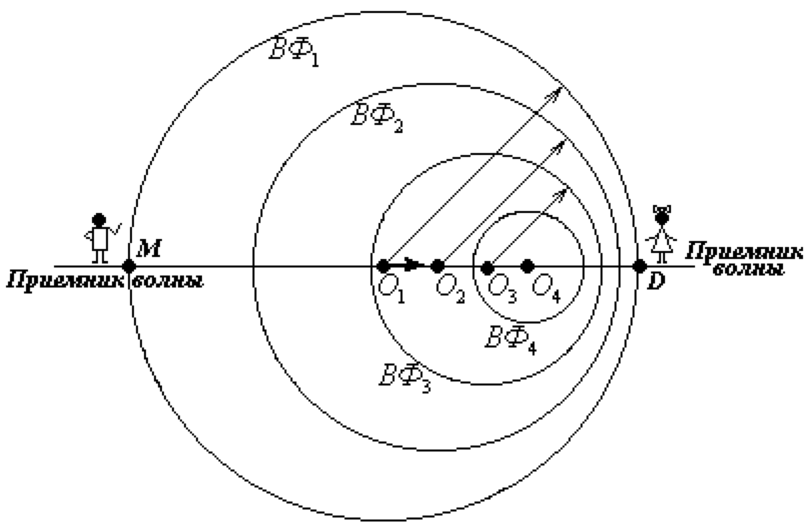
$$f = f_0\left(1 \pm \frac{v_{набл}}{v_{волны}}\right),$$

где знак “+“ для случая приближения приемника звука, знак “-“ для случая удаления приемника.

Проанализируем результат:

- в случае приближения приемника звука к источнику частота, воспринимаемая приемником, больше частоты волны, излучаемой источником;
- в случае удаления приемника звука от источника частота, воспринимаемая приемником, меньше частоты волны, излучаемой источником волны.

Случай 2 – движется источник звука вдоль прямой, соединяющей его с приемником.



Пусть сирена продолжает испускать звук с частотой f_0. Автомобиль же «догоняет» испущенные им волны. Поэтому наблюдатель, стоящий у дороги, заметит, что при прежней скорости волны расстояния между «гребнями» стали короче – длина волны стала меньше.

С другой стороны, волны распространяющие позади автомобиля, будут дальше отстоять друг от друга, поскольку автомобиль как бы «отрывается» от них.

Пусть за время движения от O_1 до O_4 источник звука испустил N волн. Все они располагаются на отрезке

$$O_4D = O_1D - O_1O_4 = v_{волны}t - v_{ист}t = \left(v_{волны} - v_{ист}\right)t.$$

Расстояние между «гребнями» волн или длина волны будут равны

$$\lambda = \frac{O_4D}{N} = \frac{\left(v_{волны} - v_{ист}\right)t}{N}.$$

С учетом того, что

$$\lambda = \frac{v_{волны}}{f} \qquad \frac{t}{N} = \frac{1}{f_0},$$

после подстановки получаем:

$$\frac{v_{волны}}{f} = \frac{\left(v_{волны} - v_{ист}\right)}{f_0}$$

$$f = \frac{f_0}{1 - \dfrac{v_{ист}}{v_{волны}}}.$$

Видно, что наблюдатель, к которому источник звука приближается, слышит звук более высокой частоты или более высокого тона.

Для наблюдателя, стоящего позади удаляющегося автомобиля, рассуждения будут теми же самыми, с той лишь разницей, что испущенные источником волны будут лежать на отрезке O_1M, что приведет к результату

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{v_{ист}}{v_{волны}}}.$$

Для этого наблюдателя частота звука, испускаемого удаляющимся источником меньшей той, на которой он колеблется.

В общем случае движения источника звука можно записать

$$f = \frac{f_0}{1 \pm \frac{v_{ист}}{v_{волны}}},$$

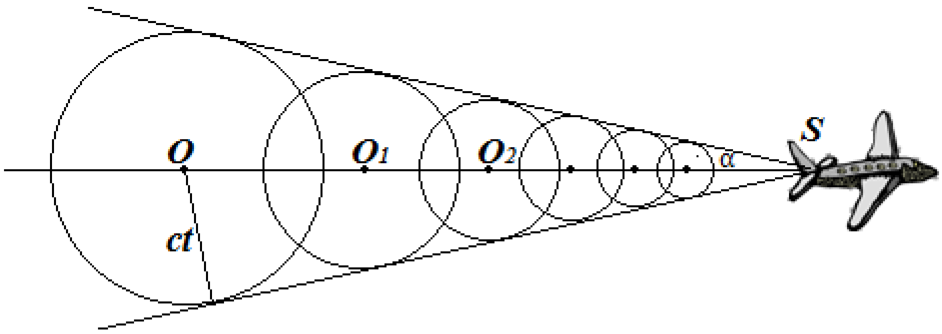
где верхний знак для случая удаления, нижний – приближения источника к приемнику звука.

Если звуковая волна отражается от движущегося препятствия, то частота отраженной волны будет отличаться от частоты падающей волны. Если же падающую и отраженную волну теперь наложить одна на другую, то возникнут биения. Такое проявление эффекта Доплера широко используется в медицинских приборах, использующих, как правило, ультразвуковые волны в мегагерцевом диапазоне частот. Например, отраженные от красных кровяных телец ультразвуковые волны можно использовать для определения скорости тока крови. Аналогичным образом можно осуществлять дистанционный контроль за сердцебиением, обнаруживать движение грудной клетки зародыша и т.д.

Следует отметить, что эффект Доплера лежит также в основе метода обнаружения с помощью радара автомобилей, которые превышают предписываемую скорость движения. Только в этом случае используются электромагнитные волны (радиоволны), а не звуковые.

Движение источника со сверхзвуковой скоростью

Если источник звуковой волны движется быстрее звука, то возникает более серьезный эффект, называемый **ударной волной**.



Пусть самолет, двигающийся со скоростью v, превышающей скорость звука c, за время t переместился из точки O в точку S: OS = vt . Из каждой точки отрезка OS побежала сферическая звуковая волна. Огибающая сферических волн, испущенных из разных точек отрезка OS, представляет собой конус с вершиной на самолете (конус Маха). Угол раствора конуса равен $\sin\alpha = \frac{ct}{OS} = \frac{ct}{\upsilon t} = \frac{c}{\upsilon}$. Таким образом, самолет обгоняет издаваемый им звук.

Волновой фронт каждой сферической волны – это область сгущения, т.е. область повышенного давления. Понятно, что в каждой точке поверхности конуса Маха давление воздуха будет превышать атмосферное. Это и есть ударная волна. Давление в ударной волне убывает по мере удаления от вершины конуса. Если самолет летит со сверхзвуковой скоростью на малой высоте, то человек, находящийся на земле, оказывается в области, близкой к вершине конуса Маха. Ударная волна проходит мимо человека за доли секунды, но он воспринимает ее как «акустический удар», который может привести к контузии.

§5 Примеры решения задач

Задача 1 Определение громкости звука по интенсивности волны

Интенсивность звуковой волны равна $7{,}5\cdot10^{-8}$ Вт/м^2. Какова громкость звука, воспринимаемая человеком? Порог слышимости для среднего человека принять равным $I_0 = 1{,}0\cdot10^{-12}$ Вт/м^2. Как изменится громкость звука, если интенсивность волны возрастет вдвое?

Решение:

1 Громкость звука определяется выражением $L = \lg\dfrac{I}{I_0}$, где I - интенсивность звуковой волны, I_0 - порог слышимости – минимальная интенсивность волны, которая еще может вызывать слуховые ощущения у среднего человека.

2 После подстановки получаем

$$L_1 = \lg\frac{I_1}{I_0} = \lg\frac{7{,}5\cdot10^{-8}}{1{,}0\cdot10^{-12}} = \lg\left(7{,}5\cdot10^{4}\right) = \lg 7{,}5 + \lg 10^{4} = 0{,}88 + 4 = 4{,}88\,(\text{Б})$$

$$L_1 = 48{,}8\,\text{дБ}$$

Такая громкость наблюдается при обычном негромком разговоре.

3 Если интенсивность звуковой волны возрастет вдвое, то

$$L_2 = \lg\frac{2I_1}{I_0} = \lg 2 + \lg\frac{I_1}{I_0} = 0,3 + 4,88 = 5,12\,(\text{Б})$$

$$L_2 = 51,2\,\text{дБ}$$

Важно заметить, что зависимость громкости звука от интенсивности волны не является линейной! Увеличение интенсивности волны в два раза приводит к увеличению громкости всего лишь на 3 дБ.

Задача 2 Максимальное смещение молекул воздуха в звуковой волне

Рассчитайте смещение молекул воздуха от положения равновесия в звуковой волне, интенсивность которой равна порогу слышимости $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12}$ Вт/м^2. Частота звука 1000 Гц, плотность воздуха при нормальных условиях 1,29 кг/м^3, скорость звука при 0 ^{0}C примерно равна 330 м/с.

Решение:

1 Интенсивность звука в упругой среде равна $I = \frac{1}{2}A^2\omega^2\rho V$,

где А – амплитуда колебания частиц; ω - циклическая частота колебаний частиц в волне; ρ - плотность среды; V - скорость распространения волны в упругой среде.

Интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды колебания частиц!

2 Находим амплитуду колебания частиц в волне на пороге слышимости

$$A = \frac{1}{2\pi\nu} \cdot \sqrt{\frac{2I_0}{\rho V}}$$

$$A = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1000} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-12}}{1{,}29 \cdot 330}} \approx 10^{-11}\ (\text{м}).$$

Полученный результат показывает, насколько чувствительно человеческое ухо – оно может улавливать перемещения молекул воздуха, меньшие размеров самих молекул (10^{-10} м)!

Задача 3 Колебания давления в звуковой волне на пороге слышимости и пороге болевых ощущений

Оцените колебания давления в звуковой волне на пороге слышимости и пороге болевых ощущений. Интенсивность волны на пороге слышимости равна $I_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-12}$ Вт/м^2, громкость звука на пороге болевых ощущений равна 120 дБ, плотность воздуха при нормальных условиях 1,29 кг/м^3, скорость звука при 0 ^{0}С примерно равна 330 м/с.

Решение:

Найдем связь между амплитудой колебания частиц и амплитудой колебания давления в звуковой волне.

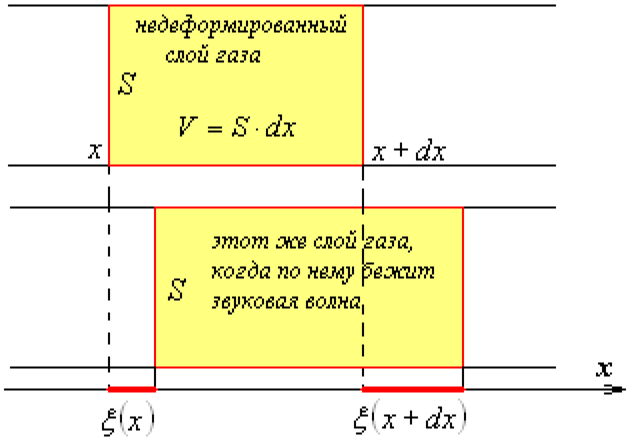
1 По определению модуля всестороннего сжатия жидкостей или газов

$$\Delta p = -B \cdot \frac{\Delta V}{V},$$

где $\frac{\Delta V}{V}$ - относительное изменение объема газа, вызванное изменением давления Δp.

Знак «-» означает, что при расширении ($\Delta V > 0$) давление уменьшается ($\Delta p < 0$).

2 Рассмотрим слой газа объемом V:



Изменение объема газа при смещении частиц в волне равно $\Delta V = S \cdot \left(\xi\left(x + dx\right) - \xi\left(x\right)\right)$.

Относительное изменение объема газа равно

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S \cdot \left(\xi\left(x + dx\right) - \xi\left(x\right)\right)}{S \cdot dx} = \frac{\left(\xi\left(x + dx\right) - \xi\left(x\right)\right)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

3 Подставляем найденное значение $\frac{\Delta V}{V}$ в выражение для расчета Δp:

$$\Delta p = -B \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Смещение частиц определяется уравнением бегущей волны

$$\xi\left(x, t\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - kx\right)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = Ak \cdot \sin\left(\omega t - kx\right).$$

Изменение давления в звуковой волне с течением времени определяется выражением $\Delta p = -AkB \cdot \sin(\omega t - kx)$. Таким образом, звуковая волна представляет собой чередование областей повышенного и пониженного давления.

4 Амплитуда давления $\Delta p_{\max} = AkB$.

Выразим амплитуду колебания через интенсивность волны $A = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{2I}{\rho v}}$, заменим волновое число на $k = \frac{\omega}{v}$ и скорость волны $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$. После преобразования для амплитуды давления получим $\Delta p_{\max} = \sqrt{2\rho v I}$.

5 Амплитуда давления на пороге слышимости

$$\Delta p_{\max} = \sqrt{2 \cdot 1{,}29 \cdot 330 \cdot 10^{-12}} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-5}\,(\text{Па}).$$

Удивительно!

6 Амплитуда давления на пороге болевых ощущений

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0} = 120\ \text{дБ} \Rightarrow I = 10^{12} \cdot I_0,$$

$$\Delta p_{\max} = \sqrt{2 \cdot 1{,}29 \cdot 330 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-12}} \approx 29\,(\text{Па}).$$

Задача 4 Громкость звука при одновременном звучании двух роялей

В концертном зале звучат два рояля одновременно. Громкость звучания первого $L_1 =$ 80 дБ, второго $L_2 =$ 70 дБ. Каков результирующий уровень громкости звука в зале?

1 Определяем интенсивность волны, испускаемой первым инструментом:

$$L_1 = \lg\frac{I_1}{I_0} = 8 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10^8 \cdot I_0.$$

2 Определяем интенсивность волны, испускаемой вторым инструментом:

$$L_2 = \lg\frac{I_2}{I_0} = 7 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 10^7 \cdot I_0.$$

3 Результирующая интенсивность звука

$$I = I_1 + I_2 = 10^8 \cdot I_0 + 10^7 \cdot I_0 = 10^8 \cdot I_0 \left(1 + 0{,}1\right) = 1{,}1 \cdot 10^8 \cdot I_0.$$

4 Результирующий уровень громкости

$$L = \lg\frac{I}{I_0} = \lg\frac{1{,}1 \cdot 10^8 \cdot I_0}{I_0} = \lg 1{,}1 + \lg\frac{10^8 \cdot I_0}{I_0} = 0{,}04 + 8 = 8{,}04\left(\text{Б}\right).$$

$$L = 80{,}4 \text{ дБ}.$$

С точки зрения физики второй музыкант мог бы и не играть – его усилия не потревожат сон Васи Медведева, которого мама привела на концерт.

Задача 5 Движение приемника и источника звука

Основная частота звука сирены милицейского автомобиля, когда он стоит на месте, равна f_0 = 1800 Гц. На какой частоте услышит звук сирены преступник, если он едет на угнанной «Оке» со скоростью v_1 = 144 км/ч, а милицейский автомобиль двигается по встречной полосе со скоростью v_2 = 54 км/ч? Скорость звука c = 343 м/с.

Решение:

1 Приближение автомобиля (источника волны) к преступнику приводит к увеличению частоты звуковой волны. Если бы преступник (приемник звука) не двигался, он слышал бы звук частоты $f_1 = \dfrac{f_0}{1 - \dfrac{v_2}{c}}$..

2 Движение приемника навстречу звуковой волне приводит еще к одному изменению воспринимаемой частоты:

$$f_2 = f_1 \cdot \left(1 + \frac{v_1}{c}\right) = \frac{f_0}{1 - \dfrac{v_2}{c}} \cdot \left(1 + \frac{v_1}{c}\right) = f_0 \cdot \frac{c + v_1}{c - v_2}.$$

Преступник слышит звук $f_2 = 1800 \cdot \dfrac{343 + 40}{343 - 14} = 2095\,(\text{Гц})$.

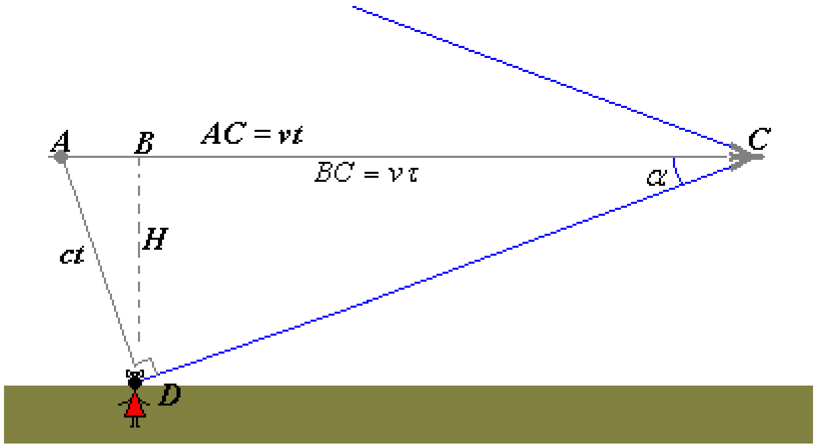
Задача 6 Звук двигателя самолета, движущегося со сверхзвуковой скоростью

Самолет летит горизонтально на высоте H = 4 км над поверхностью земли со сверхзвуковой скоростью. Звук дошел до наблюдателя через время τ = 10с после того, как над ним пролетел самолет. Определите скорость v самолета. Скорость звука с = 330 м/с.

Решение:

1 Звуковая волна «тянется» за самолетом в виде конуса Маха с углом раствора 2α, где $\sin\alpha = \dfrac{c}{v}$.

2



Сначала самолет пролетел над головой человека (прошел через точку B) только после этого, через время τ = 10 с, до человека дошел фронт звуковой волны. Звук, дошедший до человека, был испущен самолетов в точке A. За это время самолет из B переместился в C, пролетев расстояние CB = vτ.

3 Рассмотрим подобные треугольники ACD и BCB:

$$\frac{ct}{vt}=\frac{H}{\sqrt{H^2+(v\tau)^2}} \Rightarrow \frac{c^2}{v^2}=\frac{H^2}{H^2+(v\tau)^2} \Rightarrow v=\frac{cH}{\sqrt{H^2-(c\tau)^2}}=584\ \text{м/с}$$

§6 Задания для самостоятельного решения

Тест « Звук»

1 Укажите формулу для расчета скорости звука в различных упругих средах

Твердые тела	Жидкости	Газы

А) $v=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$; Б) $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$; В) $v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$; Г) $v=\sqrt{\frac{B}{\rho}}$.

2 Задержка между моментом наблюдения молнии и звуком грома составила 5 с. Оцените, на каком расстоянии от наблюдателя идет гроза. Скорость звука при 20 ^{0}С примерно 340 м/с.

А) 68 м; Б) 850 м; В) 1700 м; Г) 3400 м.

3 Оцените минимальное расстояние, на котором должна располагаться преграда, чтобы человек мог услышать эхо при отражении звука от нее. Ухо человека различает два звуковых сигнала, если время между их приходом составляет не менее 1/15 с. Скорость звука при 20 ^{0}С примерно равна 340 м/с.

А) $S \geq 23$ м; Б) $S \geq 46$ м; В) $S \geq 11{,}5$ м; Г) $S \geq 5100$ м.

4 Установите соответствие между объективными и субъективными характеристиками звука.

Объективная характеристика	Субъективная характеристика
Частота звуковой волны	
Набор частот в звуковой волне	
Интенсивность звуковой волны	

А) Громкость; Б) Тембр; В) Высота тона.

5 Громкость звучания TV увеличили от $L_1 = 30$ дБ до $L_2 = 60$ дБ. Во сколько раз увеличилась интенсивность звуковой волны $\frac{I_2}{I_1}$?

А) $\dfrac{I_2}{I_1} = 2$; Б) $\dfrac{I_2}{I_1} = 100$; В) $\dfrac{I_2}{I_1} = 10^{30}$; Г) $\dfrac{I_2}{I_1} = 1000$.

6 Уровень громкости от реактивного самолета на расстоянии 30 м от него равен L_1 = 140 дБ. Каков уровень громкости от этого самолета на расстоянии 300 м? Отражением волны от земли пренебречь.

А) $L_2 = 1{,}4$ дБ; Б) $L_2 = 14$ дБ; В) $L_2 = 70$ дБ; Г) $L_2 = 120$ дБ.

7 Звуковая волна переходит из одной упругой среды в другую. Что при этом происходит с характеристиками волны: скоростью, частотой, длиной волны?

А) Все три характеристики волны остаются неизменными;
Б) Все три характеристики меняются в зависимости от изменения среды;
В) Скорость и частота изменяются обратно пропорционально друг другу, длина волны остается неизменной;
Г) Скорость и длина волны изменяются прямо пропорционально друг другу, частота волны остается неизменной.

8 Составьте верное утверждение. Эффект Доплера – это явление…

А) Уменьшения амплитуды звуковой волны по мере удаления приемника от источника звука;
Б) Это явление изменения скорости и длины звуковой волны при переходе из одной среды в другую;

В) Это явление изменения частоты звуковой волны, воспринимаемой приемником, при относительном движении источника и приемника волны;
Г) Это явление наложения бегущей и отраженной волн с образованием стоячей волны.

9 Какая из приведенных формул правильно описывает эффект Доплера в случае движущегося наблюдателя и неподвижного источника звука? Скорость приемника звука v_n лежит на прямой, соединяющей источник и приемник волны. Скорость звука с.

$$\text{А) } f = \frac{f_0}{\left(1 \pm \frac{v_n}{c}\right)}; \quad \text{Б) } f = \frac{f_0}{\left(1 \mp \frac{v_n}{c}\right)}; \quad \text{В) } f = f_0\left(1 \mp \frac{v_n}{c}\right); \quad \text{Г) } f = f_0\left(1 \pm \frac{v_n}{c}\right).$$

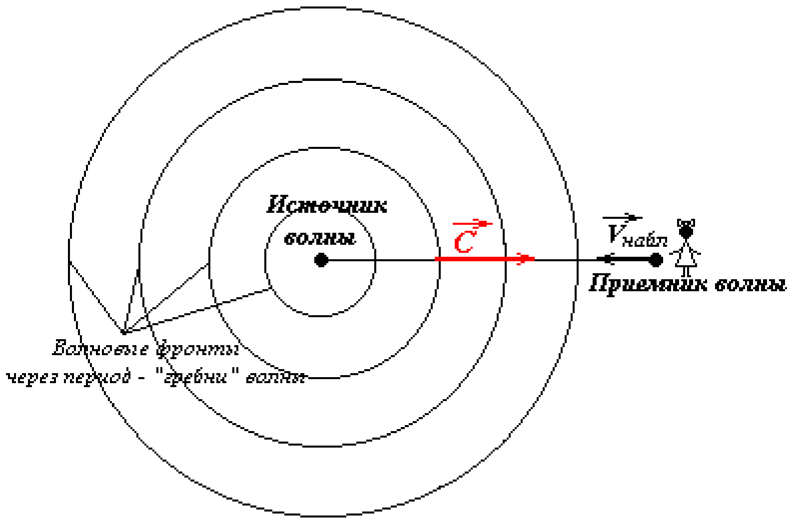
Примечание: верхние знаки в формулах для случая сближения, нижние – для случая удаления.

10 Какая из приведенных формул правильно описывает эффект Доплера в случае неподвижного наблюдателя и движущегося источника звука? Скорость источника звука $\vec{v}_u$ лежит на прямой, соединяющей источник и приемник волны. Скорость звука с.

$$\text{А) } f = \frac{f_0}{\left(1 \pm \frac{v_u}{c}\right)}; \quad \text{Б) } f = \frac{f_0}{\left(1 \mp \frac{v_u}{c}\right)}; \quad \text{В) } f = f_0\left(1 \mp \frac{v_u}{c}\right); \quad \text{Г) } f = f_0\left(1 \pm \frac{v_u}{c}\right).$$

Примечание: верхние знаки в формуле для случая сближения, нижние – для случая удаления.

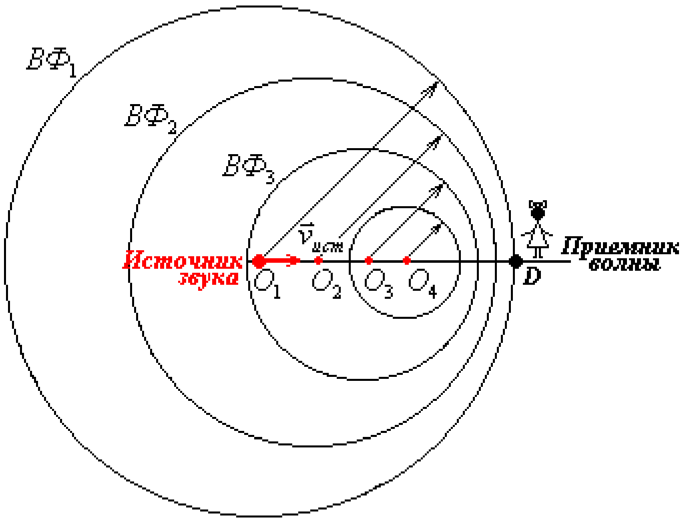
11 В неподвижном воздухе частота звука f_0, скорость с, длина волны λ_0. Укажите причину того, что приближающийся к источнику звука приемник воспринимает волны, частота которой больше f_0.



А) Для приближающегося приемника уменьшилось расстояние между гребнями воспринимаемой волны, то есть длина волны. Скорость же приближения гребней осталась неизменной. Из выражения $v = \lambda f$ видим, что при неизменной скорости уменьшение длины волны приводит к увеличению частоты;

Б) Скорость сближения приемника и гребней волны увеличилась, а расстояние между гребнями (длина волны) не изменилась. Из выражения $v = \lambda f$ видим, что при неизменной длине волны увеличение скорости приводит к увеличению частоты.

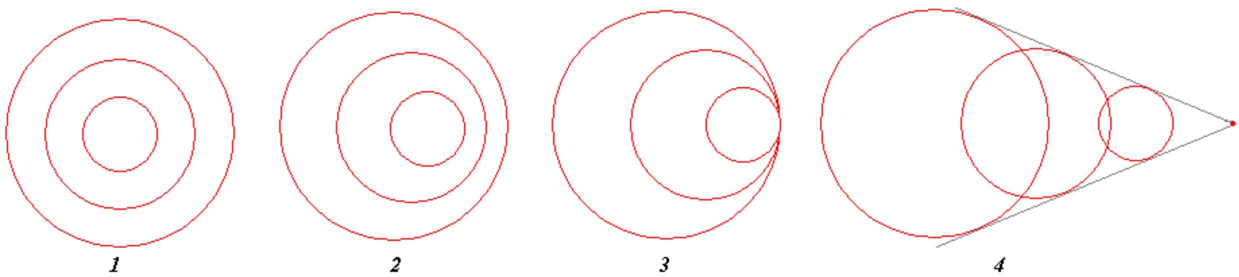
12 В неподвижном воздухе частота звука f_0, скорость с, длина волны λ_0. Укажите причину того, что при приближении к приемнику источника звука приемник воспринимает волну, частота которой больше f_0.



А) Для приближающегося приемника уменьшилось расстояние между гребнями воспринимаемой волны, то есть длина волны. Скорость же приближения гребней осталась неизменной. Из выражения $v = \lambda f$ видим, что при неизменной скорости уменьшение длины волны приводит к увеличению частоты;

Б) Скорость сближения приемника и гребней волны увеличилась, а расстояние между гребнями (длина волны) не изменилась. Из выражения $v = \lambda f$ видим, что при неизменной длине волны увеличение скорости приводит к увеличению частоты.

13 На рисунке показаны волновые поверхности через промежутки времени, равные периоду. Что можно сказать о движении источника звуковой волны в каждом случае?



А) Источник звуковой волны двигается со скоростью $v_{ист} = c$;

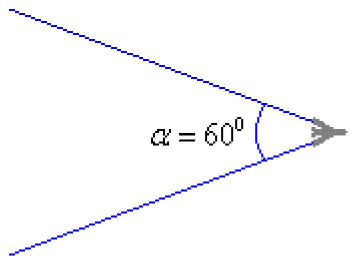
Б) Источник звуковой волны двигается со скоростью $v_{ист} > c$;

В) Источник звуковой волны двигается со скоростью $v_{ист} < c$;

Г) Источник звуковой волны не двигается.

1	2	3	4

14 На рисунке показана звуковая волна, излучаемая самолетом. Угол $\alpha = 60^0$. С какой скоростью двигается самолет? Скорость звука принять равной 310 м/с.



А) 105 м/с; Б) 268 м/с; В) 358 м/с; Г) 620 м/с.

Задачи

1 Вася Медведев наслаждается музыкой в клубе, где используется акустическая система Microlab PRO 1 Dark, выходная мощность которой 60 Вт. Регулятор громкости установлен в положение «max». Считая звуковую волну, излучаемую системой сферической и пренебрегая отражение звуковой волны от пола и стен, определите уровень громкости на расстоянии 3 м от

динамика, где в это время блаженствует Вася. Интенсивность звуковой волны на пороге слышимости равна $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12}$ Вт/м^2.

2 Оцените выходную мощность нормальной разговорной речи, считая, что звук распространяется приблизительно равномерно в полусфере вокруг рта человека. Громкость звука на расстоянии одного метра от говорящего равна 60 дБ. Интенсивность звуковой волны на пороге слышимости равна $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12}$ Вт/м^2.

3 Во сколько раз изменится длина звуковой волны при переходе из воздуха в воду? Скорость звука в воздухе 340 м/с, в воде – 1480 м/с.

4 При какой интенсивности ультразвука в воде при атмосферном давлении начнется кавитация - появление микрополостей, разрывов в жидкости? Скорость ультразвука в воде 1480 м/с.

5 Одиночный комар, находящийся на расстоянии 10 м от человека, создает звук, близкий к порогу слышимости. Звук какой громкости создадут 1000 комаров?

6 Летучая мышь летит перпендикулярно к стене со скоростью v = 10 м/с, издавая ультразвук частотой $f_0 = 5 \cdot 104$ Гц. Какую частоту f звуковой волны, отраженной от стенки, воспринимает мышь? Скорость звука примите равной c = 340 м/с.

7 Самолет летит горизонтально со скоростью v = 470 м/с. Человек услышал звук самолета через τ = 10с после того, как самолет пролетел над ним. Определите, на какой высоте летит самолет. Скорость звука c = 330 м/с.

§7 Интерференция волн

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн по отдельности. Следовательно, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это утверждение носит название *принципа суперпозиции волн*.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, происходят с *одной частотой и обладают постоянной во времени разностью фаз*, волны называют ***когерентными***.

При наложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Выясним, почему это происходит и каким условиям должны удовлетворять точки среды, чтобы в них наблюдалось усиление или гашение колебаний.

Пусть в некоторой области пространства распространяются две плоские волны одинаковой частоты ω. Выясним, как будет вести себя произвольная точка Р среды, до которой доходят обе волны.

Согласно принципу суперпозиции точка Р должна прийти в два колебательных движения:

$$\xi_1 = A_1 \cos\left(\omega t - \varphi_1\right), \qquad \xi_2 = A_2 \cos\left(\omega t - \varphi_2\right),$$

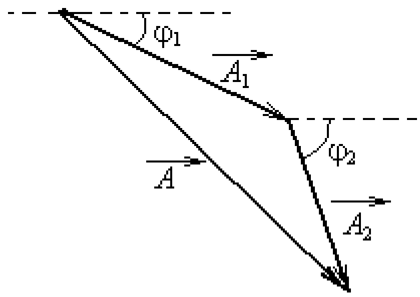
где φ_1 - запаздывание первой волны по фазе;

φ_2 - запаздывание второй волны по фазе.

Суммарное смещение точки Р будет равно

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos\left(\omega t - \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(\omega t - \varphi_2\right).$$

Складывать гармонические функции одной частоты удобно, используя метод векторных диаграмм.



Амплитуда результирующего колебания А находится по теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left(180^0 - \left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\right) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ - разность фаз волн, приходящих в точку Р.

Поскольку интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, можно записать

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi.$$

Получили потрясающий результат!! Две волны приходят в точку, но энергия, приносимая в эту точку не равна сумме энергии каждой волны! Почему? Не нарушается ли здесь закон сохранения энергии?

Все дело в cos$\Delta\varphi$. Он может быть положительным – это будет означать, что энергия, приходящая к данную точку среды больше суммарной энергии двух волн. Колебания в этой точке усилились. Но ведь будут и такие точки среды, для которых cos$\Delta\varphi$ отрицателен. Энергия, приходящая в эти точки, меньше суммарной энергии двух волн. Энергия двух волн просто перераспределилась между точками среды. За счет этого некоторые точки стали колебаться с большей амплитудой, а некоторые – с меньшей.

Очевидно, будут такие точки среды, для которых cos$\Delta\varphi = 1$. Энергия, приносимая волнами в эти точки, самая большая, они будут колебаться с максимально возможной амплитудой.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2$$
$$A = A_1 + A_2.$$

Говорят, что для таких точек выполняется *условие максимума*. Волны, приходящие в точку, должны быть синфазные, то есть $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$

Если амплитуды волн одинаковы, то точки, для которых выполняется условие максимума, колеблются с амплитудой $A = A_1 + A_1 = 2A_1$, а энергия этих точек увеличивается в 4 раза в сравнении с тем, если бы точки совершали колебание в одной волне.

Найдутся такие точки среды, для которых cos$\Delta\varphi = -1$. Энергия, приходящая в эти точки, будет наименьшей, и колебаться эти точки будут с самой маленькой амплитудой.

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}, \qquad A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2.$$

$$A = \left| A_1 - A_2 \right|.$$

Говорят, что для таких точек выполняется условие минимума. Нетрудно видеть, что волны, приходящие в этом случае в точку, должны быть в противофазе, т.е. $\Delta\varphi = \pi, 3\pi,\ldots$

Если волны, приходящие в точку, для которой выполняется условие минимума, имеют одинаковые амплитуды, то, легко видеть, что I = 0 и A = 0. Точки просто не колеблются!!! Волны не просто ослабили друг друга, они полностью погасили друг друга.

Подведем некоторые итоги

1 В результате наложения когерентных волн наблюдается интерференционная картина – ***все точки среды колеблются***, но амплитуды колебания точек разные. Эти амплитуды с течение времени не меняются, то есть картинка распределения амплитуд в пространстве остается неизменной. Говорят, что получилась *устойчивая картина наложения*. Устойчивая – не значит неподвижная! Все колеблются!

2 В некоторых точках среды волны усилили друг друга, точки колеблются с амплитудой, превышающей амплитуду каждой из волн в отдельности. Сюда поступает больше энергии.

3 Среди точек, в которых произошло усиление колебаний, можно выделить точки максимума – их амплитуда колебаний самая большая $A = |A_1 + A_2|$. Для того, чтобы в какой-либо точке выполнялось условие максимума, в нее должны приходить синфазные волны: $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi,\ldots$

4 В некоторых точках среды волны будут ослаблять друг друга – амплитуда колебания точек будет меньше, чем в каждой из волн в отдельности. В эти точки поступает меньше энергии.

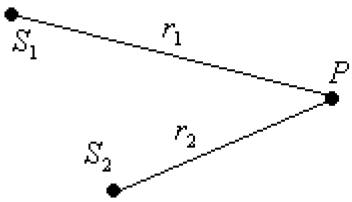
5 Среди точек, в которых произошло ослабление колебаний, выделяют точки минимума – амплитуда колебания этих точек самая маленькая $A = |A_1 - A_2|$. В эти точки приходит самое маленькое количество энергии. В

точках минимума может наблюдаться полное гашение колебаний, если амплитуды накладывающихся волн равны. В точки минимума волны должны приходить в противофазе: $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, \ldots$

Осталось выяснить, ***откуда берется разность фаз волн***, приходящих в какую-либо точку среды.

Во-первых, сами источники могут колебаться в разных фазах.

Во-вторых, расстояния, проходимые волнами, от источников до наблюдаемой точки, в общем случае разные.



Разность расстояний от источников до рассматриваемой точки называется разностью хода волн

$$\Delta = r_1 - r_2.$$

Разность хода дает разность фаз, которую несложно рассчитать через длину волны (пока мы рассматривает случай, когда волны распространяются в одной среде):

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta}{\lambda} \cdot 2\pi.$$

В общем случае разность фаз волн, приходящих в какую-либо точку среды, равна

$$\Delta\varphi = \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \cdot 2\pi + \left(\varphi_{01} - \varphi_{02}\right).$$

Все становится намного проще, если источники волн колеблются в одной фазе. Тогда разность фаз волн обусловлена только их разностью хода. В этом случае условия максимума и минимума можно сформулировать иначе.

Для точек максимума на разности хода должно укладываться целое число длин волн:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta}{\lambda} \cdot 2\pi = 2\pi n \qquad \Rightarrow \Delta = n\lambda, \qquad где \qquad n = 0,1,2.$$

Для точек минимума на разности хода должно укладываться нечетное число полуволн:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta}{\lambda} \cdot 2\pi = (2n-1)\pi \qquad \Rightarrow \Delta = (2n-1)\frac{\lambda}{2}, \qquad где \qquad n = 0,1,2.$$

Стоячие волны

Частным случаем интерференции является наложение падающей и отраженной волны, бегущей в противоположном направлении. Такое явление наблюдается, если дернуть за струну музыкального инструмента. По ней побежит волна, она отразится от точки закрепления струны, и мы будем наблюдать результат наложения падающей и отраженной волн.

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении встречных волн одной амплитуды. Исследуем эффект теоретически.

Уравнение бегущей волны

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx).$$

Уравнение встречной волны

$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx).$$

Результирующее колебание

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Нетрудно видеть, что в результате наложения двух встречных волн все точки колеблются с той же частотой ω, что и встречные волны. Но вот амплитуды разных точек на оси OX, вдоль которой распространялись волны, разные.

$$амплитуда = \left|2A\cos(kx)\right|.$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos(kx) = \pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad kx = \pm\pi n \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0,1,2,....),$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения 2A. Эти точки называются ***пучностями*** стоячей волны.

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$\cos(kx) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad kx = \pm(2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm(2n-1)\frac{\lambda}{4}.$$

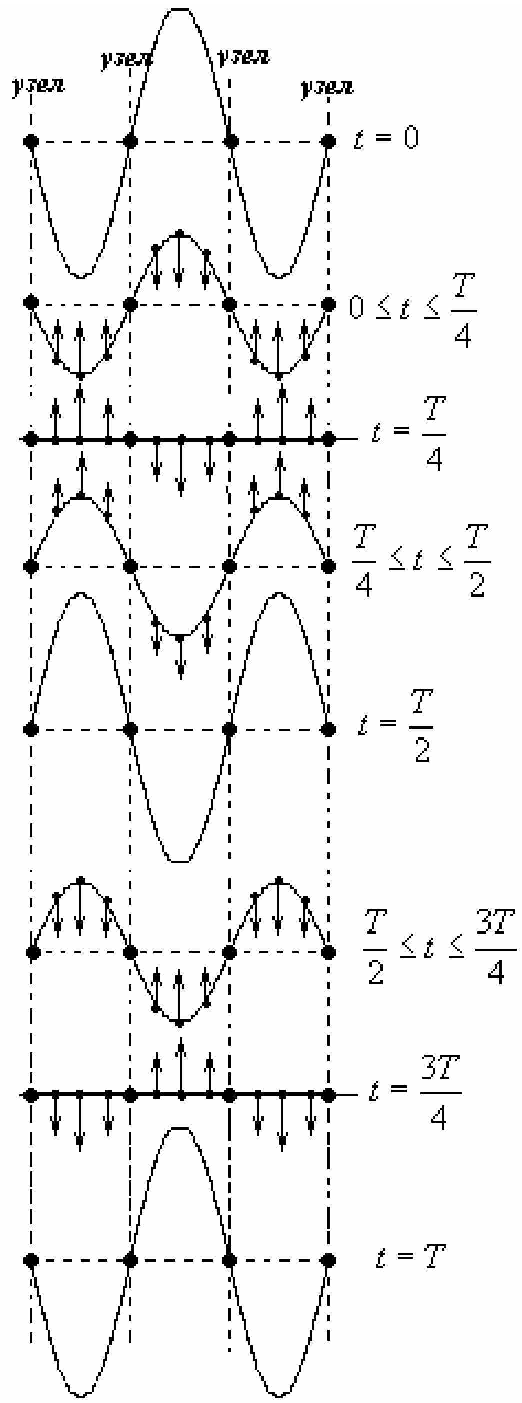
Амплитуда колебаний обращается в ноль. Эти точки называются ***узлами*** стоячей волны. Точки, находящиеся в узлах стоячей волны, колебаний не совершают!!!

Расстояние между соседними узлами, как и между соседними пучностями, равно λ/2. Пучности и узлы сдвинуты относительно друг друга на четверть длины волны.

На рисунке показан ряд моментальных «фотографий» отклонения точек от положения равновесия в стоячей волне. Стрелками показаны скорости частиц.

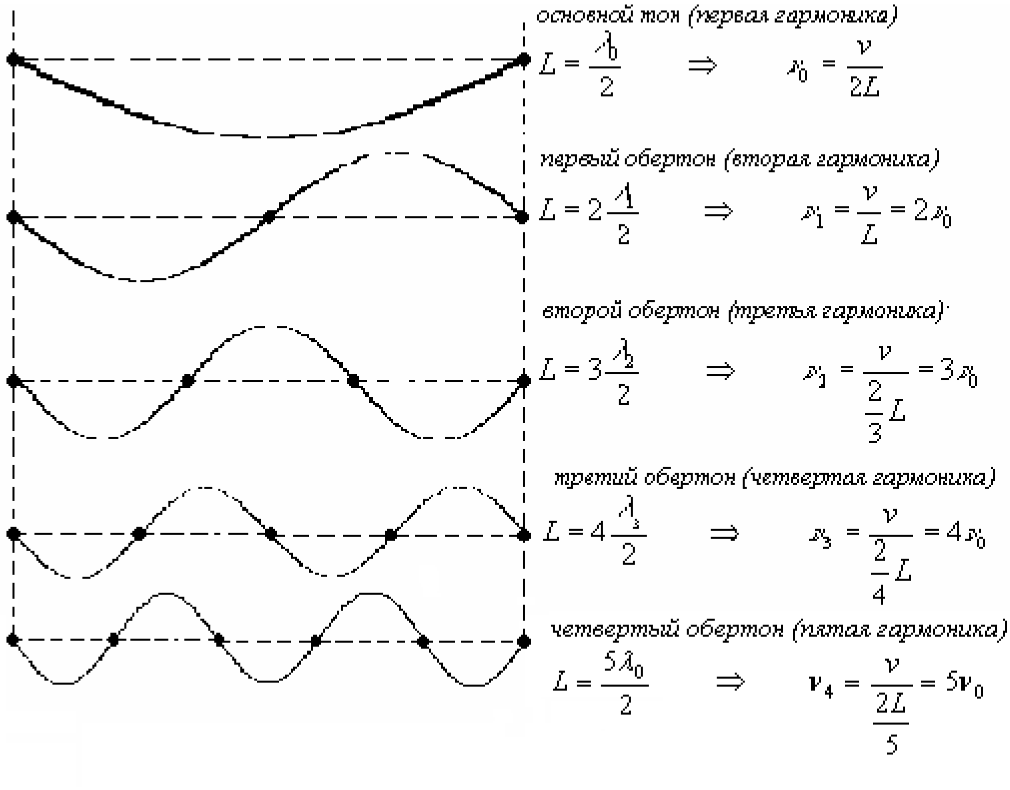
Все точки, расположенные между двумя соседними узлами, колеблются в одной фазе: они одновременно проходят положение равновесия и одновременно приходят в положение максимального отклонения от положения равновесия.

Видно, что точки по разные стороны от узлов колеблются в противофазе.



Почему стоячие волны столь важны в физике?

Вернемся к струне, закрепленной с двух сторон. При возбуждении колебаний в ней устанавливается стоячая волна. Причем в местах закрепления у этой волны должны располагаться узлы, ибо эти точки колебаться не могут. Поэтому в струне возбуждаются с заметной амплитудой только такие колебания, половина длины которых укладывается на длине струны целое число раз. Например, закрепленная струна может совершать следующие колебания:



и т.д.

Частоты ν_0, ν_1, ν_2, ν_3 и т.д. называются для струны собственными частотами (или нормальными колебаниями). В общем случае колебания струны представляет собой наложение различных гармоник, т.е. струна одновременно участвует в нескольких собственных колебаниях.

Наибольшая амплитуда колебаний , как правило, будет на частоте основного тона. Чем выше номер гармоники, тем амплитуда колебаний будет меньше. Поэтому основной тон мы и слышим громче всего.

Важно!!

Струна в отличие от маятника имеет целый набор собственных частот колебаний! Сравните – маятник может совершать собственные колебания только с одной, собственной, частотой.

Любое тело подобно струне имеет набор собственных частот колебаний. Эти частоты соответствуют частотам стоячих волн, которые могут устанавливаться в теле. Очевидно, что собственные частоты или частоты стоячих волн будут зависеть от геометрических размеров и формы тела (они определяют длину волны), а также от вещества, из которого изготовлено тело (оно определяет скорость распространения волны в теле).

Если на тело будет действовать внешняя периодически меняющаяся сила с частотой, совпадающей с одной из собственных частот тела, возникнет резонанс. Это свойство используется при создании приборов для измерения частоты колебаний (частотомеров), для усиления звука (резонаторные ящики музыкальных инструментов).

С инженерной точки зрения возможность резонанса, как правило, играет отрицательную роль. Любая строительная конструкция (мост, стена здания, плита перекрытия и так далее), корпус двигателя (станка, самолета и так далее) способны резонировать на определенных частотах. Важно, чтобы при расчете инженерных конструкций возможные частоты внешних воздействий были далеки от собственных. Задача усложняется еще и тем, что резонировать может не вся конструкция в целом, но и отдельные ее части.

Принцип Гюйгенса – Френеля

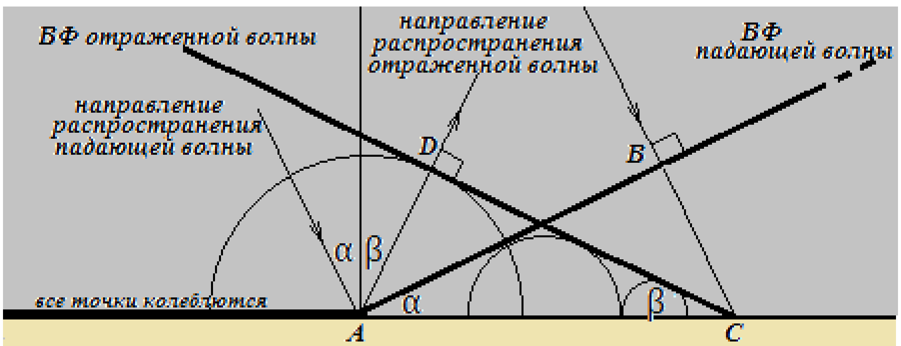
В 1690 году Гюйгенс сформулировал принцип, позволивший объяснить процесс распространения волн и из свойства – отражение, преломление и дифракцию.

Суть принципа заключается в следующем: **каждая точка среды, до которой дошел волновой процесс, становится источником вторичных сферических волн. Чтобы построить волновой фронт, нужно провести огибающую этих вторичных сферических волн.**

Физическое толкование принципа Гюйгенса было дано Френелем: **вторичные сферические волны когерентны, они интерферируют**. В направлении распространения волны вторичные сферические волны, интерферируя, усиливают друг друга, в противоположном направлении – гасят.

Применим принцип Гюйгенса – Френеля к объяснению явлений отражения и преломления.

Отражением называют явление возвращения волны в первоначальную среду при попадании на границу раздела двух сред.



Пусть на границу раздела двух сред падает плоская волна.

Углом падения называют угол между направлением распространения волны и перпендикуляром к границе раздела двух сред, восстановленным из точки падения (на рисунке угол α) .

Видно, что волна дошла до всех точек границы, расположенных левее точки А. Эти точки колеблются, от них бегут вторичные сферические волны.

За то время t, что падающая волна дойдет от точки В до точки С, расположенной на границе раздела, все точки отрезка АС будут вовлечены в колебательный процесс, от них побегут вторичные сферические волны. Волновой фронт отраженной волны строится как огибающая этих вторичных сферических волн.

Направление распространения отраженной волны перпендикулярно фронту отраженной волны. Угол между направлением распространения отраженной волны и перпендикуляром к границе раздела двух сред, восстановленным из точки падения, называется **углом отражения** (на рисунке угол β).

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и ADC.

Сторона АС в этих треугольниках общая. Расстояние AD – это путь, пройденный вторичной волной за то время, пока падающая волна идет от В до С:

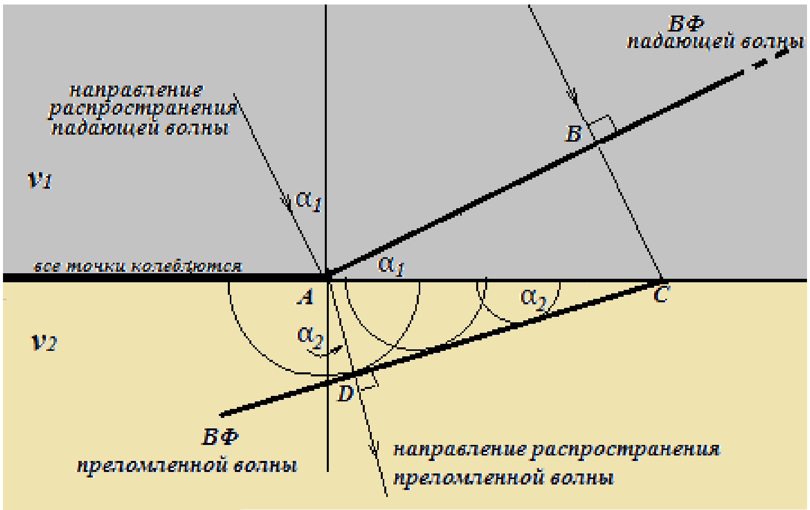
$$AD = v \cdot t = v \cdot \frac{BC}{v} = BC,$$

где v – скорость распространения волны.

Таким образом, ΔABC = ΔADC. В равных треугольниках против равных сторон ($AD = BC$) находятся одинаковые углы α = β. **Угол падения равен углу отражения.**

Преломлением называется изменение направления распространения волны при переходе из одной среды в другую.

Пусть плоская волна переходит из среды, где скорость ее распространения равна v_1, в среду, где скорость распространения волны v_2.



За то время t, что падающая волна дойдет от точки В до точки С, расположенной на границе раздела, все точки отрезка АС будут вовлечены в колебательный процесс, от них побегут вторичные сферические волны во вторую среду. Волновой фронт отраженной волны строится как огибающая этих вторичных сферических волн.

Направление распространения прошедшей во вторую среду волны перпендикулярно фронту отраженной волны. Угол между направлением распространения прошедшей волны и перпендикуляром к границе раздела двух сред, восстановленным из точки падения, называется **углом преломления** (на рисунке угол α_2).

В прямоугольных треугольниках ABC и ADC

$$\sin\alpha_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{v_1 t}{AC} \qquad \sin\alpha_2 = \frac{AD}{AC} = \frac{v_2 t}{AC}.$$

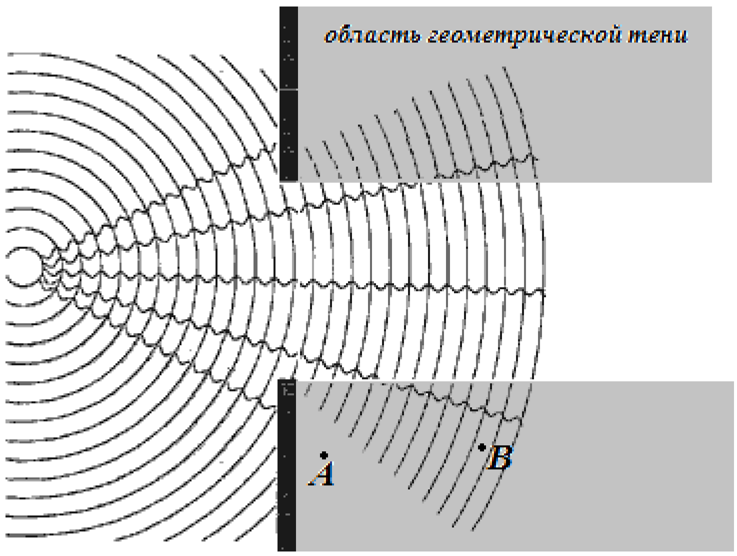
Находим отношение синусов углов падения и преломления

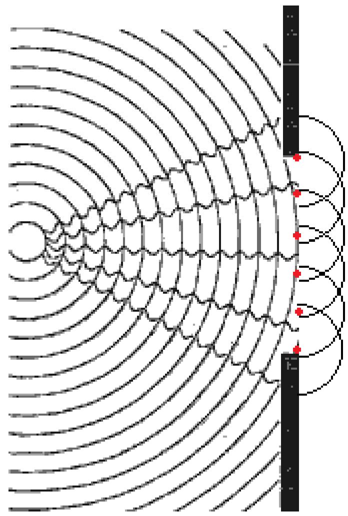
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Полученный результат свидетельствует о том, что причиной изменения направления распространения волны при переходе из одной среды в другую является изменение скорости волны.

Дифракция – явление огибания волнами преград и попадания в область геометрической тени.

Например, вы слышите музыку, находясь по обратную сторону летней эстрады. Стоя за глухим высоким забором школьного стадиона, вы слышите крики болельщиков. Круговая волна на поверхности воды, проходя через зазор в преграде, распространяется не параллельным пучком, а расходится, попадает в области за преградой.





Качественное объяснение явлению можно дать, опять-таки используя принцип Гюйгенса – Френеля. От каждой точки отверстия распространяется вторичная сферическая волна. Оказывается, что в области геометрической тени вторичные сферические волны, интерферирую, не гасят друг друга. Таким образом, волна огибает преграду, попадает за преграду. Степень расхождения волны после прохождения отверстия (преграды) зависит от размеров отверстия, длины волны и удаленности наблюдателя от отверстия (в точке А на рисунке волны нет, а в точку В волна пришла). Чем меньше отверстие (преграда), тем степень расхождения (схождения) волны за ней будет больше.

§8 Примеры решения задач

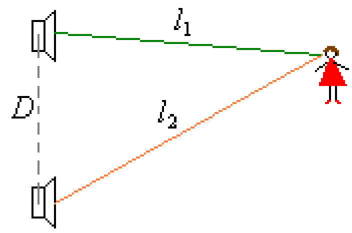
Задача 1 Наложение двух звуковых волн одной частоты

Два громкоговорителя воспроизводят звук на частоте 1150 Гц. Человек находится на расстоянии 3 м от одного громкоговорителя и 4,15 м от другого. Каков результат интерференции волн в том месте, где находится человек? Скорость звука примите равной 343 м/с. Рассмотрите два случая:

а) громкоговорители работают в одной фазе;

б) громкоговорители работают в противофазе.

Решение:



1 Записываем уравнения волн, бегущих от громкоговорителей, в случае, когда они излучают волны в одной фазе:

$$\xi_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t - kl_1)$$
$$\xi_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t - kl_2).$$

2 Результат интерференции зависит от разности фаз волн, приходящих в точку:

$$\Delta\varphi = (\omega t - kl_1) - (\omega t - kl_2) = k(l_2 - l_1) = \frac{\omega}{v}(l_2 - l_1) = \frac{2\pi f}{v}(l_2 - l_1)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot 1150 \cdot (4{,}15 - 4)}{343} = \pi\,(\text{рад}).$$

Полученный результат означает, что волны приходят в точку в противофазе – это условие минимума. В точке наблюдения происходит ослабляющая интерференция, то есть амплитуда результирующей волны равна

$A = |A_1 - A_2|$. Если же амплитуды волн, приходящих в точку равны $A_1 = A_2$, то интерференция будет вообще гасящей, звука в точке наблюдения не будет.

3 Пусть при той же самой геометрии громкоговорители работают в противофазе. Тогда разности фаз волн, приходящих в точку наблюдения, равна :

$$\Delta\varphi = (\omega t - kl_1) - (\omega t - kl_2 - \pi) = k(l_2 - l_1) + \pi = \frac{\omega}{v}(l_2 - l_1) + \pi = \frac{2\pi f}{v}(l_2 - l_1) + \pi.$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot 1150 \cdot (4{,}15 - 4)}{343} + \pi = 2\pi\ (\text{рад})$$

При разности фаз волн, приходящих в точку, равной 2π рад, наблюдается усиливающая интерференция (выполняется условие максимума). В этом случае амплитуда результирующей волны равна $A = A_1 + A_2$.

Задача 2 Собственные частоты колебаний органной трубы

Чему равны частоты, на которых звучит органная труба длиной 26 см, закрытая с одного конца, при температуре 20 ^{0}С? Скорость звука в воздухе при 20 ^{0}С равна 343 м/с.

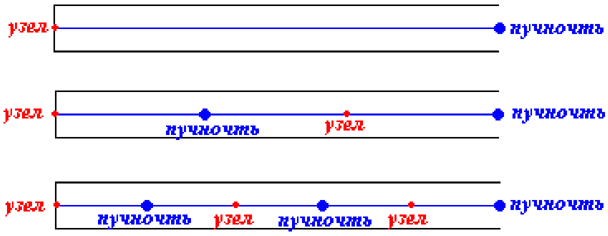
Решение:

1 При вдувании воздуха в органную трубу наблюдается наложение бегущей и отраженной звуковых волн. Внутри трубы частицы воздуха колеблются, образуя продольную стоячую волну.

На **закрытом** конце трубы образуется **узел** (это точка минимума в интерференционной картине), ибо в этом месте воздух свободно двигаться не может.

На **открытом** конце трубы образуется **пучность** (это точка максимума интерференционной картины).

2 Расстояние между узлом и пучностью в стоячей волне равно $\frac{\lambda}{4}$.



$$L = \frac{\lambda_1}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4L \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{v}{4L}$$

$$L = 3\frac{\lambda_2}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{4}{3}L \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{3v}{4L} = 3f_1$$

$$L = 5\frac{\lambda_3}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = \frac{4}{5}L \quad \Rightarrow \quad f_3 = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$

Основной тон, на котором звучит труба $f_1 = \dfrac{v}{4L} = 330\ \text{Гц}$. Амплитуда этого колебания самая большая.

Обертоны $f_2 = 3f_1 = 990\ \text{Гц}$, $f_3 = 5f_1 = 1650\ \text{Гц}$, $f_4 = 7f_1 = 2310\ \text{Гц}$ и так далее. Амплитуда обертонов убывает по мере увеличения номера обертона.

Задача 3 Полное внутреннее отражение звука

Плоская звуковая попадает на границу вода – стекло. Переход в какую среду может не произойти? При каких углах падения это возможно?

Коэффициенты всестороннего сжатия стекла и воды равны соответственно $B_1 = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Па и $B_2 = 2{,}2 \cdot 109$ Н/м^3 , плотности стекла и воды $\rho_1 = 2{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $\rho_2 = 10^3$ кг/м^3.

Решение:

1 Определяем скорость звука в стекле и воздухе

$$v_1 = \sqrt{\frac{B_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{37 \cdot 10^9}{2{,}6 \cdot 10^3}} \approx 3770\ \text{м/с}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{B_2}{\rho_2}} = \sqrt{\frac{2{,}2 \cdot 10^9}{10^3}} \approx 1480\ \text{м/с}.$$

2 Волна может не пройти в ту среду, где ее скорость больше, то есть в стекло. Для нахождения предельного угла падения звуковой волны на грани-

цу раздела вода-стекло записываем закон преломления $\frac{\sin 90^0}{\sin\alpha_{2пред}} = \frac{v_1}{v_2}$. Синус предельного угла $\sin\alpha_{2пред} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1480}{3770} = 0{,}39$, предельный угол $\alpha_{2пред} = 23^0$. При углах падения $\sin\alpha_2 > 23^0$ звуковая волна не сможет пройти из воды в стекло, испытает полное внутреннее отражение.

§9 Задания для самостоятельного решения

Тест «Интерференция. Стоячие волны»

1 Явление интерференции при наложении волн наблюдается только в том случае, если…

А) Частоты и фазы волн, приходящих в какую-либо точку, одинаковы;

Б) Частоты и фазы волн, приходящих во все точки, одинаковы;

В) Частоты волн одинаковы и разность фаз волн, приходящих в любую точку, неизменна с течением времени;

Г) интерференция наблюдается при любом наложении волн одинаковой частоты.

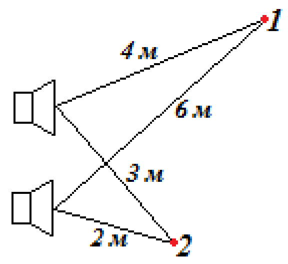
2 При наложении когерентных волн наблюдается следующее…

А) Все точки среды неподвижны и смещены от положения равновесия на разные расстояния. В точках максимума смещение равно $A = A_1 + A_2$, в точках минимума смещение составляет $A = |A_1 - A_2|$. Смещение всех остальных точек $|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$;

Б) Все точки среды разделились на точки максимума, колеблющиеся с амплитудой $A = A_1 + A_2$, и точки минимума, колеблющиеся с амплитудой $A = |A_1 - A_2|$;

В) Все точки среды колеблются. Точки максимума колеблются с амплитудой $A = A_1 + A_2$, точки минимума колеблются с амплитудой $A = |A_1 - A_2|$. Амплитуды колебания все остальных точек лежат в интервале $|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$.

3 Два динамика подключены к выходам двух генераторов электрических колебаний и излучают звуковые волны длиной 2 м. Определите результат интерференции волн в точках 1 и 2, если генераторы работают в противофазе.



А) В точках 1 и 2 – максимум;   Б) В точках 1 и 2 – минимум;

В) В точке 1 – максимум, в точке 2 – минимум;

Г) В точке 1 – минимум, в точке 2 – максимум.

4 Струна на скрипке имеет длину 32 см (между точками закрепления). Скорость волны в струне 280 м/с. Определите частоту основного тона, на котором звучит струна.

А) 179,2 Гц;   Б) 437,5 Гц;   В) 875 Гц;   Г) 1750 Гц.

5 Два динамика излучают звуковую волну длиной 1 м с разностью фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$. Наблюдатель располагается на расстоянии 2 м от одного динамика и 2,5 м от другого. Какова амплитуда результирующей волны в точке наблюдения, если амплитуды обеих волне в точке наблюдения одинаковы и равны A_0?

А) $A = 2A_0$;   Б) $A = 0$;   В) $A = A_0$;

Г) Определить результат интерференции невозможно, ибо $\Delta\varphi \neq 2\pi n$ или $\Delta\varphi \neq \pi + 2\pi n$.

6 Как выглядит закон преломления звуковой волны на границе раздела двух сред?

А) $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{v_2}{v_1}$, где α_1 и α_2 - углы между направлением распространения волны и границей раздела сред, v_1 и v_2 – скорости волны в первой и второй среде соответственно;

Б) $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{v_2}{v_1}$, где α_1 и α_2 - углы между направлением распространения волны и перпендикуляром к границе раздела сред; v_1 и v_2 – скорости волны в первой и второй среде соответственно;

В) $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$, где α_1 и α_2 - углы между направлением распространения волны и границей раздела сред, v_1 и v_2 – скорости волны в первой и второй среде соответственно;

Г) $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$, где α_1 и α_2 - углы между направлением распространения волны и перпендикуляром к границе раздела сред; v_1 и v_2 – скорости волны в первой и второй среде соответственно.

7 На границе раздела воды и воздуха звуковая волна может испытывать полное внутреннее отражение – она не проходит во вторую среду, полностью отражаясь от границы раздела и возвращаясь в первую среду. В какую среду, в воздух или в воду, может не попасть звуковая волна? Каким должен быть угол падения волны в этом случае? Скорость звука в воздухе принять равным 340 м/с, в воде – 1480 м/с.

А) Звуковая волна может не пройти из воды в воздух при углах падения $\alpha > 13^0$;

Б) Звуковая волна может не пройти из воды в воздух при углах падения $\alpha < 13^0$;

В) Звуковая волна может не пройти из воздуха в воду при углах падения $\alpha < 13^0$;

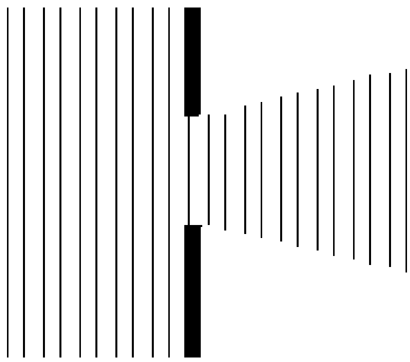
Г) Звуковая волна может не пройти из воздуха в воду при углах падения $\alpha > 13^0$.

8 Вы идете по коридору и слышите из-за угла голос директора. Свидетелем какого физического явления вы стали?

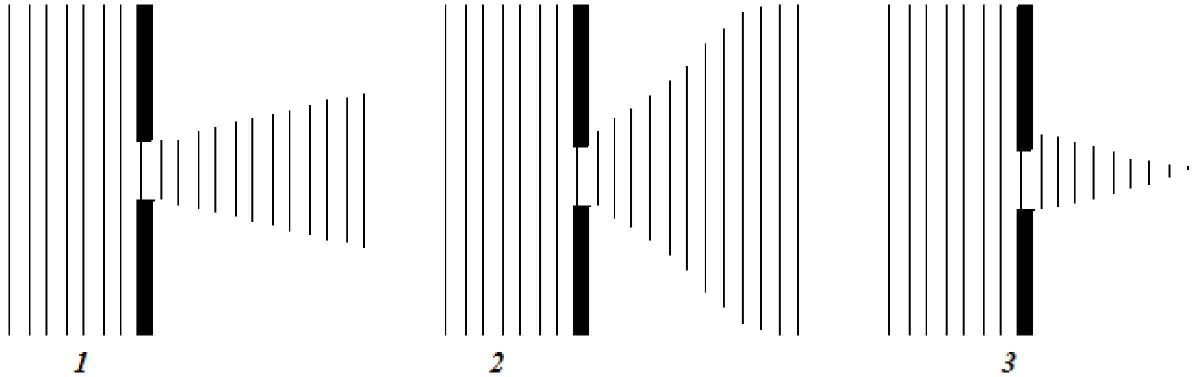
А) Интерференции; Б) Дифракции; В) Преломления;

Д) Многократного отражения звуковой волны от стен здания.

9 На пути плоской волны, бегущей по поверхности воды, поставлена преграда со щелью. За преградой наблюдают дифракционную картину.

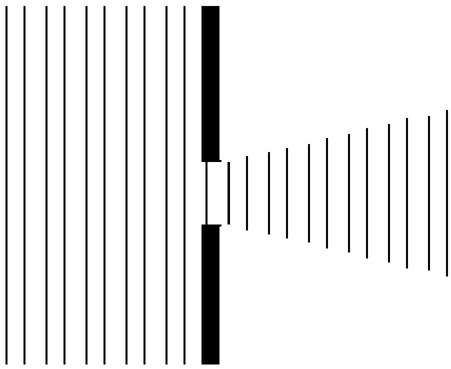


Как изменится дифракционная картина, если ширину щели уменьшить?

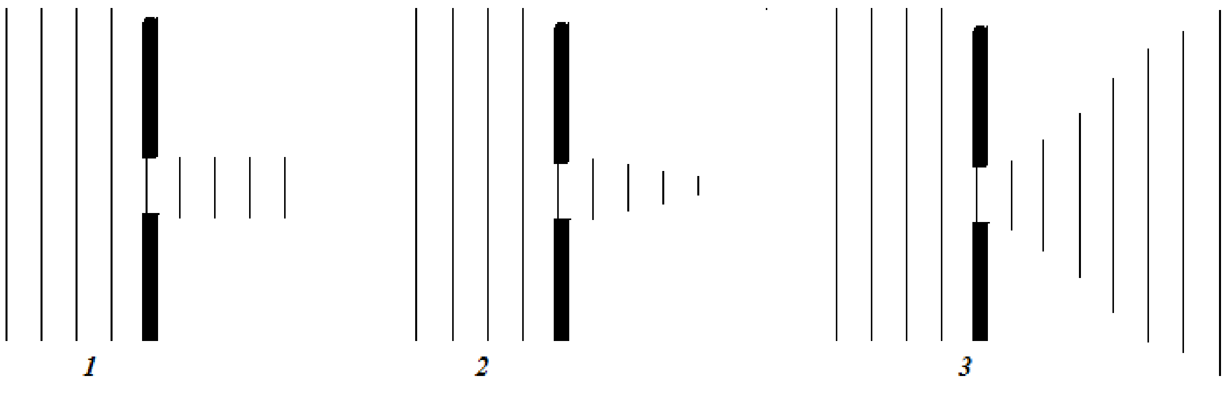


А) 1; Б) 2; В) 3; Г) Дифракционная картина не изменится.

10 На пути плоской волны, бегущей по поверхности воды, поставлена преграда со щелью. За преградой наблюдают дифракционную картину.



Как изменится дифракционная картина, если при неизменной ширине щели увеличится длина волны?



А) 1; Б) 2; В) 3; Г) Дифракционная картина не изменится.

Задачи

1 Два громкоговорителя расположены на расстоянии 2,5 м друг от друга. Человек находится на расстоянии 3,0 м от одного из них и на расстоянии 3,5 м от другого.

а) Какова наименьшая частота, на которой в этой точке будет происходить гасящая интерференция?

б) Вычислите две другие частоты, которые также будут давать гасящую интерференцию в этой точке. Температура воздуха 20 ^{0}C.

2 Два источника звука расположены друг против друга и испускают звуки одинаковой частоты 250 Гц и одинаковой амплитуды, но различающиеся по фазе на π. При каком минимальном расстоянии между двумя громкоговорителями в какой-либо точке будет наблюдаться:

а) усиливающая интерференция?

б) гасящая интерференция? Температура воздуха 20 ^{0}C.

3 Человек слышит звук чистого тона, исходящий от двух источников. Ему кажется, что частота звука лежит в диапазоне 500 – 1000 Гц. Громкость звука максимальна в точках, равноудаленных от обоих источников. Чтобы точно определить частоту звука, человек перемещается и обнаруживает, что уровень громкости минимален в точке, отстоящей от одного источника на 0,22 м дальше, чем от другого. Чему равна частота звука, если температура воздуха 20 ^{0}C.

4 Гитарная струна имеет длину 90 см и массу 3,6 г. Расстояние между верхним и нижним порожками L = 60 см, струна натянута с силой 520 Н. Чему равны частоты основного тона и первых двух обертонов струны?

5 Сейсмическая Р-волна, распространяющаяся со скоростью 14,5 км/с, падает на границу раздела между двумя горными породами под углом 42^0. Волна преломляется под углом 26^0. Чему равна скорость волны во второй среде?

Глава 10 Электромагнитные волны

В процессе распространения механической волны в упругой среде в колебательное движение вовлекаются частицы среды. Причиной этого процесса является наличие взаимодействия между молекулами.

Помимо упругих волн в природе существует волновой процесс иной природы. Речь идет об электромагнитных волнах, представляющих собой процесс распространения колебаний электромагнитного поля. По существу мы живем в мире ЭМВ. Их диапазон невероятно широк – это радиоволны, инфракрасное излучение, ультрафиолетовое, рентгеновское излучения, γ – лучи. Особое место в этом многообразии занимает видимая часть диапазона – свет. Именно с помощью этих волн мы получаем подавляющее количество информации об окружающем мире.

Что такое электромагнитная волна? Какова ее природа, механизм распространения, свойства? Существуют ли общие закономерности, характерные как для упругих, так и для электромагнитных волн?

§1 Уравнения Максвелла и волновое уравнение

Электромагнитные волны интересны тем, что первоначально они были «открыты» Максвеллом на бумаге. Основываясь на предложенной им системе уравнений, Максвелл показал, что электрическое и магнитное поля могут существовать в отсутствие зарядов и токов, распространяясь в виде волны со скоростью $3\cdot10^8$ м/с. Спустя почти 40 лет предсказанный Максвеллом материальный объект – ЭМВ – был обнаружен Герцем экспериментально.

Уравнения Максвелла являются постулатами электродинамики, сформулированными на основе анализа опытных фактов. Уравнения устанавливают связь между зарядами, токами и полями – электрическим и магнитным. Обратимся к двум уравнениям.

1 Циркуляция вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ по произвольному замкнутому контуру l пропорциональна скорости изменения магнитного потока через поверхность, натянутую на контур (это закон электромагнитной индукции Фарадея):

$$\oint_l E_l dl = -\int_S \dot{B}_n dS. \qquad (1)$$

Физический смысл этого уравнения – меняющееся магнитное поле $\vec{B}$ порождает электрическое поле $\vec{E}$.

2 Циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ по произвольному замкнутому контуру l пропорциональна скорости изменения потока вектора электрической индукции $\vec{D}$ через поверхность, натянутую на контур:

$$\oint_l H_l dl = \int_S j_n dS + \int_S \dot{D}_n dS. \qquad (2)$$

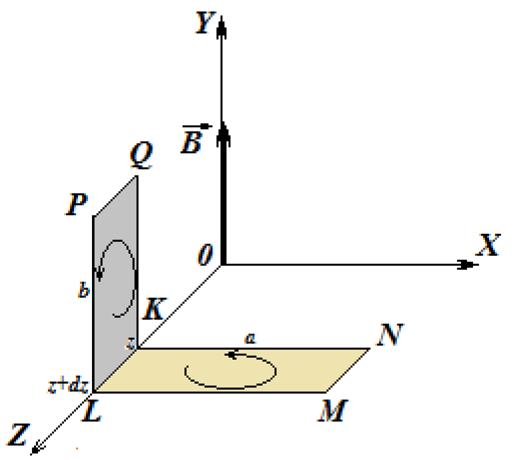
Физический смысл этого уравнения – магнитное поле $\vec{H}$ порождается токами и меняющимся электрическим полем $\vec{D}$.

Даже без каких-либо математических преобразований этих уравнений понятно: если в какой-то точке меняется электрическое поле, то в соответствии с (2) возникает магнитное поле. Это магнитное поле, изменяясь, порождает в соответствие с (1) электрическое поле. Поля взаимно индуцируют друг друга, они уже не связаны с зарядами и токами!

Более того, процесс взаимного индицирования полей будет распространяться в пространстве с конечной скоростью, то есть возникает электромагнитная волна. Для того, чтобы доказать факт существования в системе волнового процесса, в котором колеблется величина S, необходимо получить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}.$$

Рассмотрим однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Пусть в этой среде существуют магнитное поле $\vec{B}$. Для простоты будем полагать, что вектор напряженности магнитного поля располагается вдоль оси OY и зависит только от координаты z и времени t: $\vec{B} = \vec{B}(z,t)$.



Записываем уравнения (1) и (2) с учетом связи между характеристиками полей в однородной изотропной среде: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ и $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$:

$$\begin{cases} \oint\limits_l E_l dl = -\int\limits_S \dot{B}_n dS \\ \dfrac{1}{\mu\mu_0}\oint\limits_l B_l dl = \varepsilon\varepsilon_0 \int\limits_S \dot{E}_n dS \end{cases}$$

Найдем поток вектора $\vec{B}$ через прямоугольную площадку KLMN и циркуляцию вектора по прямоугольному контуру KLPQ (KL = dz, LP= KQ = *b*, LM = KN = *a*)

$$\begin{cases} \oint\limits_{KLMN} E_l dl = -B_y \cdot a \cdot dz \\ \dfrac{1}{\mu\mu_0} B_y(z) \cdot b - \dfrac{1}{\mu\mu_0} B_y(z+dz) \cdot b = \varepsilon\varepsilon_0 \int\limits_{KLMN} \dot{E}_n dS \end{cases}$$

Очевидно, что поток вектора $\vec{B}$ через площадку KLMN и циркуляция по контуру KLPQ отличны от нуля. Тогда циркуляция вектора $\vec{E}$ по контуру KLMN и поток вектора $\vec{E}$ через поверхность KLPQ тоже отличны от нуля. Такое возможно только при условии, что при изменении магнитного поля $\vec{B}$ возникло электрическое поле $\vec{E}$, направленное вдоль оси OX.

Вывод : При изменении магнитного поля возникает электрическое поле, напряженность которого $\vec{E}$ перпендикулярна индукции магнитного поля $\vec{B}$.

С учетом сказанного система уравнений перепишется

$$\begin{cases} E_x(z+dz) \cdot a - E_x(z) \cdot a = -\dot{B}_y \cdot a \cdot dz \\ \dfrac{1}{\mu\mu_0} B_y(z) \cdot b - \dfrac{1}{\mu\mu_0} B_y(z+dz) \cdot b = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \dot{E}_y \cdot b \cdot dz \end{cases}$$

После преобразований получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{E_x(z+dz)-E_x(z)}{dz} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{1}{\mu\mu_0}\cdot\dfrac{B_y(z)-B_y(z+dz)}{dz} = \varepsilon\varepsilon_0\cdot\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} & (1.1) \\ \dfrac{1}{\mu\mu_0}\cdot\dfrac{\partial B_y}{\partial z} = -\varepsilon\varepsilon_0\cdot\dfrac{\partial E_x}{\partial t} & (2.1) \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение (1.1) по координате z, второе уравнение (2.1) – по времени t:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial z\partial t} \\ \dfrac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\cdot\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial z\partial t} = -\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \end{cases}$$

Очевидно,

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\cdot\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}.$$

Электрическое поле, порождаемое меняющимся магнитным полем, подчиняется волновому уравнению! Это означает, что возникшее электрическое поле подчиняется законам распространения волн.

Нетрудно видеть, что если продифференцировать первое уравнение (1.1) по времени t, второе уравнение (2.1) - по координате z , получим уравнение

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\cdot\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}.$$

Магнитное поле тоже подчиняется волновому уравнению, причем волна B_y бежит в том же направлении, что и волна E_x.

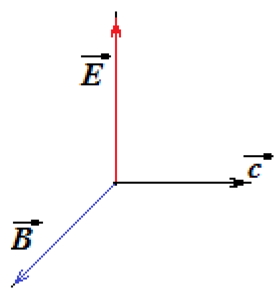
Подведем некоторые итоги

Преобразуя уравнения Максвелла, можно показать, что в природе должен существовать волновой процесс, связанный с распространением в пространстве меняющихся электрического и магнитного полей. Этот процесс называется электромагнитной волной.

1 В электромагнитной волне, в отличие от упругой волны, колеблются не частицы, а поля – электрическое и магнитное. Периодические изменения испытывают характеристики этих полей – напряженность электрического поля $\vec{E}$ и индукция магнитного поля $\vec{B}$.

2 В любой точке пространства, где бежит ЭМВ, существуют два поля, причем вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ всегда ***перпендикулярен*** вектору индукция магнитного поля $\vec{B}$.

3 ЭМВ поперечная. Колебания векторов напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ перпендикулярны направлению распространения волны. Вектора скорости волны $\vec{v}$, напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ образуют в любой точке ***правую тройку векторов****:* Если вращать буравчик по направлению от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{B}$, то его поступательное движение укажет направление вектора скорости волны $\vec{v}$.



4 Распространение изменяющегося электромагнитного поля происходит с конечной скоростью. Она легко определяется из волнового уравнения –

коэффициент перед второй производной от колеблющейся величины по координате представляет собой квадрат скорости волны:

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}.$$

Скорость волны :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}.$$

5 Электромагнитная волна может распространяться не только в веществе, но и в вакууме. Для вакуума ε = 1 и μ = 1. Скорость волны в вакууме

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Это одна из важнейших мировых констант в физике – скорость света в вакууме.

6 Колебания векторов напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ в волне происходят в одной фазе, численные значения векторов в любой момент времени в каждой точке пространства пропорциональны друг другу. Это нетрудно показать.

Поскольку E_x и B_y подчиняются волновому уравнению, то изменения E_x и B_y описываются функциями:

$$\begin{cases} E_x(z,t) = f(z \pm vt) \\ B_y(z,t) = q(z \pm vt) \end{cases}$$

Находим производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial t} = \dfrac{\partial q}{\partial t} \cdot (\pm v) \end{cases}$$

Подставляем полученные значения в уравнение (1.1)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial t} \cdot (\pm v).$$

После интегрирования получаем

$$f = \pm v \cdot q + const.$$

Знак $\pm$ определяет направление распространения волны. Константа в полученном выражении определяет некоторое статическое поле, которое никак не связано с переменными полями, образующими волну. Поэтому, полагая для волны $const = 0$, получаем

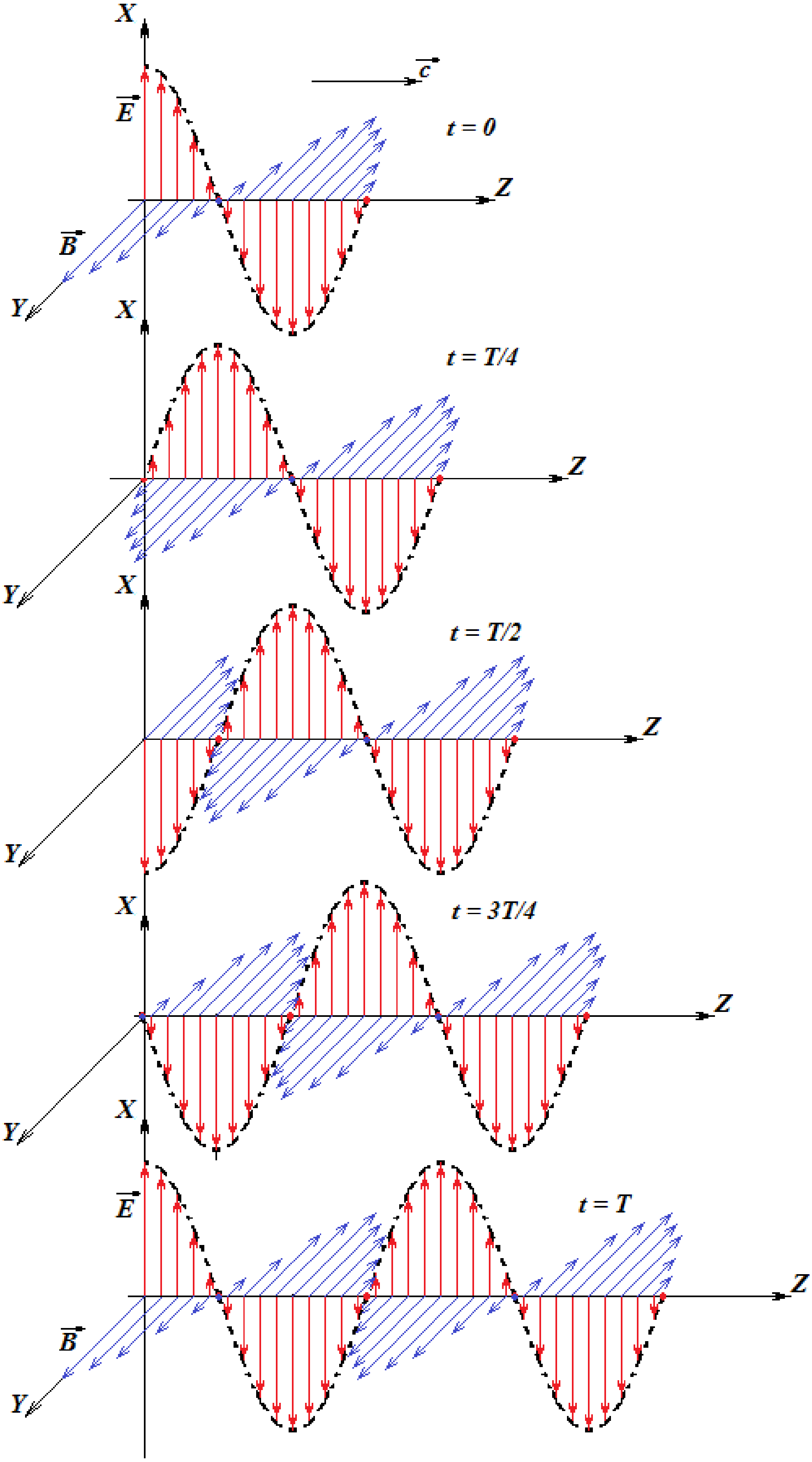
$$E_x = \pm v B_y.$$

$$E_x = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} B_y.$$

7 Вид функции $q(z \pm vt)$, описывающей электромагнитную волну, может быть различным. Одним из важных частных случаев электромагнитной волны является плоская монохроматичная волна:

$$\begin{cases} E_x = E_{\max}\cos(\omega t - kz) \\ B_y = B_{\max}\cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

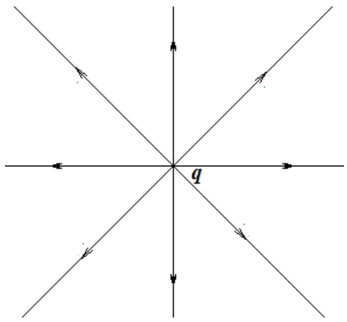
Мгновенные «фотографии» этой волны, сделанные через четверти периода, выглядят следующим образом:


X
$\vec{c}$
$\vec{E}$
t = 0
Z
$\vec{B}$
Y
X
t = T/4
Z
Y
X
t = T/2
Z
Y
X
t = 3T/4
Z
Y
X
$\vec{E}$
t = T
Z
$\vec{B}$
Y

§ 2 Излучение электромагнитной волны

Излучение электромагнитной волны происходит при любом ускоренном движении заряда. Объяснение механизма процесса излучения было предложено Дж. Томсоном.

Пусть электрическое поле создается неподвижным точечным зарядом q. Силовые линии этого электростатического поля представляют собой радиально расходящиеся лучи. Модуль вектора напряженности на расстоянии r от заряда определяется выражением $E = \frac{kq}{r^2}$.

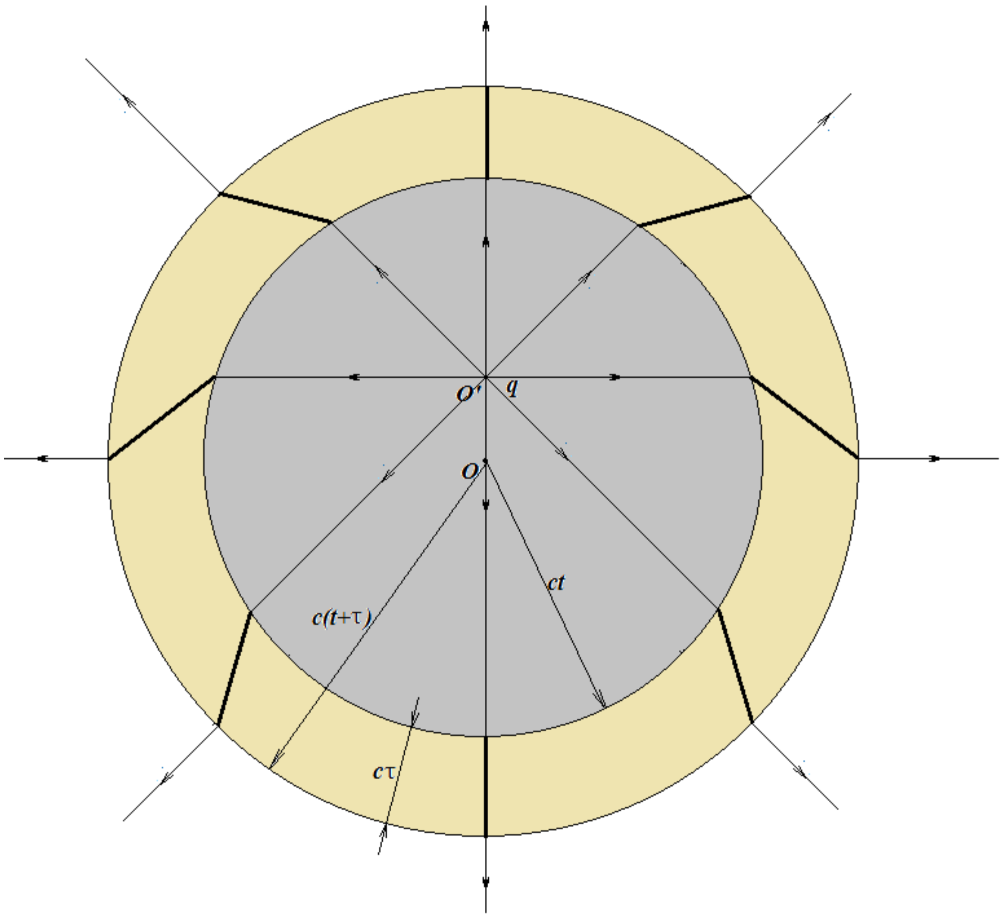


Пусть заряд приходит в движение. В течение интервала времени τ он разгоняется с ускорением a до скорости $v = a\tau$. Потом в течение времени $t \gg \tau$ заряд продолжает двигаться равномерно и из точки О перемещается в точку О'. Расстояние $OO' = \frac{a\tau^2}{2} + vt \approx a\tau t$.

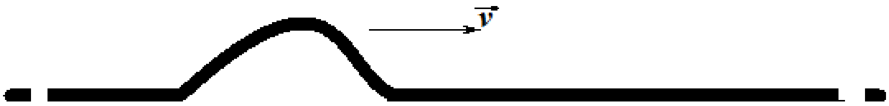
Поскольку заряд переместился, картина распределения электрического поля в пространстве тоже должна измениться. Однако, возмущение электромагнитного поля (в нашем случае, информация о том, что заряд пришел в движение и переместился) распространяется не мгновенно, а с конечной скоростью c.

Изобразим картину силовых линий заряда q в момент времени $(t+\tau)$. За пределами сферы радиусом $c(t+\tau)$ поле не изменилось, сюда возмущение электромагнитного поля не дошло. Силовые линии представляют собой лучи, расходящиеся радиально из точки О.

Поле равномерно движущегося заряда совпадает с полем неподвижного заряда, поскольку все инерциальные системы отсчета равноправны. Строим сферу радиусом ct с центром в точке О (строго говоря, центр сферы должен отстоять от точки О на расстояние, пройденное зарядом за время ускорения $\frac{a\tau^2}{2} \to 0$). Внутри этой сферы силовые линии должны быть опять-таки радиально расходящимися лучами, но проведенными из той точки, в которой находится заряд в данный момент времени – в нашем случае из точки О'.



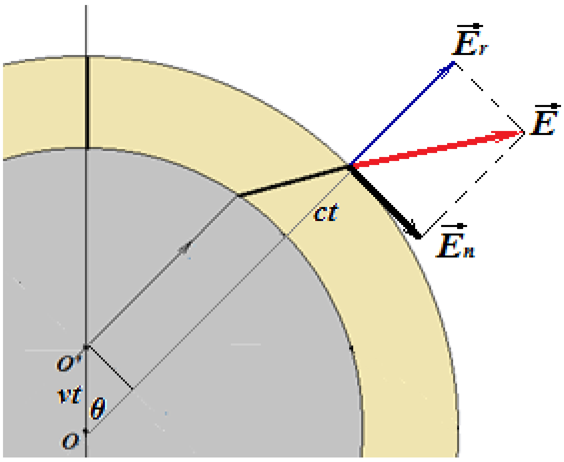
Внутри сферического слоя толщиной $c\tau$ силовые линии испытывают излом. Этот излом и есть возмущение электромагнитного поля. Картина схожа с распространением единичного импульса по натянутому шнуру.



Найдем величину напряженности электрического поля E в распространяющемся возмущении (волне). Вектор напряженности $\vec{E}$ на границе сферы радиусом $c(t+\tau)$ направлен по касательной к силовой линии. Разложим вектор $\vec{E}$ на две составляющих – нормальную $\vec{E}_n$ и радиальную $\vec{E}_r$:

$$E = E_n + E_r ,$$

$\vec{E}_n$ – перпендикулярная радиус-вектору составляющая, это и есть напряженность поля в электромагнитном возмущении.



Из подобия треугольников видно

$$\frac{E_n}{E_r} = \frac{vt\sin\theta}{c\tau}.$$

$$E_n = E_r \cdot \frac{vt\sin\theta}{c\tau} = \frac{kq}{r^2}\cdot\frac{a\tau t\sin\theta}{c\tau} = \frac{kq}{r(ct)}\cdot\frac{a\tau t\sin\theta}{c\tau} = \frac{kqa\sin\theta}{rc^2}.$$

$$E_n = \frac{kqa\sin\theta}{rc^2}.$$

Подведем итоги

1 Излучение электромагнитной волны происходит только при ускоренном движении заряда. Модуль напряженности электрической составляющей волны E прямо пропорционален ускорению a, с которым двигается заряд.

2 Напряженность электрического поля E в волне обратно пропорциональна расстоянию до излучающего заряда. Такая зависимость характерна для сферической волны.

3 Ускоренно движущийся заряд не излучает волну вдоль направления движения ($\sin 0 = 0,\ \sin 180^0 = 0$).

4 Величина напряженности электрического поля E в волне зависит от направления, в котором распространяется волна. Наибольшее значение имеет амплитуда волн, излучаемых в направлениях, перпендикулярных движению ($\sin 90^0 = 1$).

§ 3 Энергия электромагнитной волны

Электрическое и магнитное поля обладают энергией. Плотность энергии в любой точке пространства, где распространяется ЭМВ, равна

$$w = w_{эл} + w_{магн} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

С учтем связи между векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в волне ($B = E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$) нетрудно показать, что плотность энергии электрического и магнитного полей в какой-либо точке в любой момент времени равны.

$$w_{магн} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{(E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu})^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = w_{эл}.$$

Обратите внимание, точно так же ведут себя плотности кинетической и потенциальной энергий в упругой волне!

Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля в волне непрерывно изменяются, поэтому в каждой точке пространства изменяется плотность энергии. В некоторый момент времени вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$ **одновременно** принимают максимальное значение - плотность энергии в данном месте в данный момент тоже максимальна. Через четверть периода вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$ **одновременно** становятся равными нулю, поле в данной точке в данный момент времени нет. Куда делась энергия? При распространении электромагнитная волна переносит энергию подобно упругой волне. По этой причине для ЭМВ, как для механической волны, вводят понятия плотности потока энергии и интенсивности.

Плотность потока энергии - это энергия, переносимая волной за 1 секунду через поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Для плотности потока энергии воспользуемся полученным ранее результатом:

$$S = w \cdot v.$$

$$S = \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0}\right)v = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \cdot v = (\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E)\left(\frac{B}{\sqrt{\mu\mu_0}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}} = E\cdot\frac{B}{\mu\mu_0}.$$

$$S = E \cdot H.$$

С учетом направления переноса энергии $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$. Вектор $\vec{S}$ называют вектором Пойнтинга, он определяет не только величину и направление потока электромагнитной энергии. Направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением вектора скорости волны (проверьте это, используя правило определения направления векторного произведения).

Наиболее распространенными системами, излучающими ЭМВ, являются колеблющийся заряд или колеблющийся диполь.

Смещение заряда, совершающего гармонические колебания, с течением времени меняется по закону $\xi = A\cos\omega t$. Ускорение колеблющегося заряда – вторая производная от смещения:

$$a = \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2 A\cos\omega t .$$

Видим, что ускорение прямо пропорционально частоте колебаний заряда ω. Электрическая составляющая волны в точке, расположенной на расстоянии r от заряда:

$$E = \frac{qa\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 rc^2} = -\frac{qA\omega^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}\cos(\omega t - kr) .$$

Понятно, что совершающий гармонические колебания заряд, излучает монохроматичную волну, частота которой совпадает с частотой колебания заряда. Амплитуда электрической составляющей этой волны равна

$$E_{\max} = \frac{qA\omega^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 rc^2} .$$

Интенсивность волны I – это средняя за период плотность потока энергии. Поскольку среднее за период значение квадрата косинуса равно $1/2$, то для интенсивности электромагнитной волны можно записать:

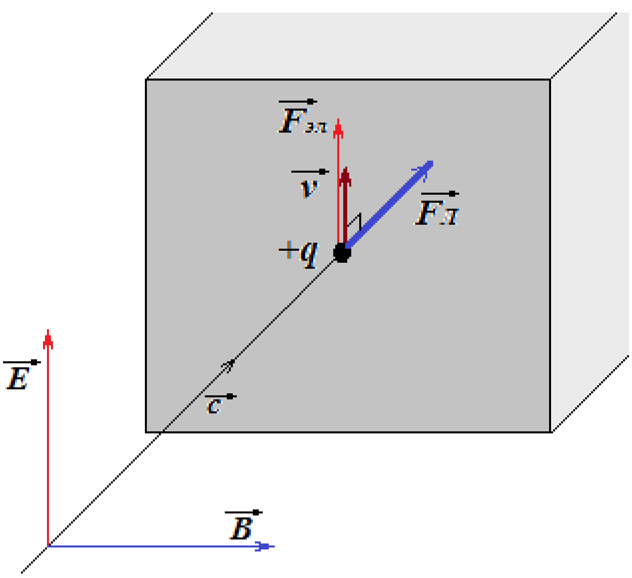
$$I = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_{\max}^2 \cdot v = \frac{B_{\max}^2}{2\mu\mu_0} \cdot v$$

Как и для упругой волны, интенсивность электромагнитной волны прямо пропорциональна квадрату амплитуды волны. Поскольку амплитуда ЭМВ прямо пропорциональна квадрату частоты, то интенсивность ЭМВ будет прямо пропорциональна четвертой степени частоты.

§ 4 Импульс электромагнитной волны

Попадая на поверхность тела, электромагнитная волна производит давление. Объясним механизм этого явления.

Для простоты рассмотрим нормальное падение волна на поверхность тела. Под действием электрической составляющей волны свободные заряды в проводнике придут в движение, возникнут токи. В диэлектрике будут смещаться заряды, входящие в состав молекул. На движущиеся заряды со стороны магнитной составляющей волны будет действовать сила Лоренца. Из рисунка нетрудно видеть, что эта сила Лоренца направлена вглубь тела. Результирующая сил Лоренца создает давление на поверхность тела.



Согласно второму закону Ньютона сила, в нашем случае сила давления, равна изменению импульса тела в единицу времени $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Под действием электромагнитной волны тело приобретает импульс! Откуда у тела появляется импульс? Объяснение может быть одно – электромагнитная волна переносит не только энергию, но и импульс. При взаимодействии с поверхностью тела ЭМВ передает ему свой импульс.

Плотность импульса электромагнитной волны – это импульс единицы объема:

$$\vec{q} = \frac{d\vec{p}}{dV}.$$

Рассчитать плотность импульса несложно, используя эйнштейновскую формулу связи массы и энергии $E = mc^2$. Численно значение плотности импульса равно

$$q = \frac{w}{c^2} \cdot c = \frac{w}{c}.$$

Это выражение можно трактовать следующим образом – «масса единицы объема» $\frac{w}{c^2}$ умножается на скорость ее «перемещения» c.

Рассчитаем давление ЭМВ на абсолютно черную поверхность – такая поверхность поглощает волну, отраженной волны нет. За время dt волна передает поверхности импульс

$$dp = q \cdot dV = \vec{q} \cdot S \cdot c \cdot dt,$$

где $\vec{q}$ - средняя плотность импульса в объеме dV, из которого волна дойдет до поверхности; S – площадь поверхности; $c \cdot dt$ - расстояние, пройденное волной за время *dt.*

Силу давления находим по второму закону Ньютона

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{\vec{q} \cdot S \cdot c \cdot dt}{dt} = \vec{q}Sc = \frac{\vec{w}}{c}Sc = \vec{w}S .$$

Давление электромагнитной волна на абсолютно черную поверхность равно средней плотности энергии:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\vec{w}S}{S} = \vec{w} .$$

Очевидно, давление электромагнитной волны на идеальную зеркальную поверхность будет вдвое больше, чем на черную.

Давление ЭМВ было теоретически предсказано Максвеллом. Световое давление было экспериментально обнаружено и измерено П.Н. Лебедевым только в 1900 году, почти через 50 лет после предсказания Максвелла.

§5 Опыты Герца

В 1888 году Герц экспериментально обнаружил электромагнитные волны и исследовал их свойства.

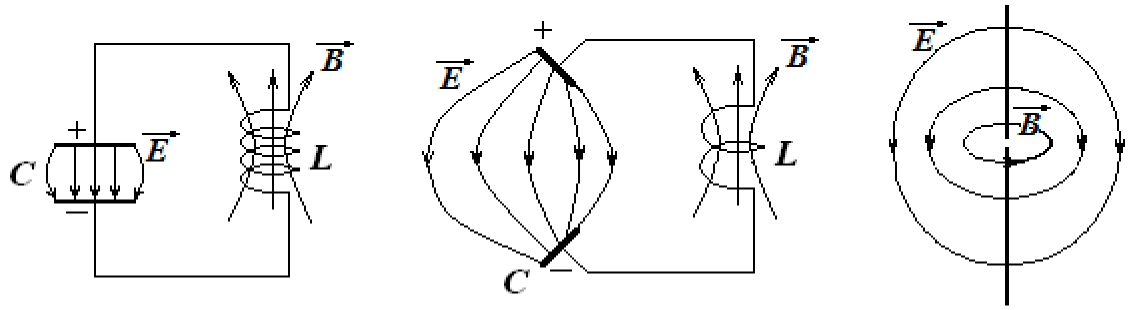
По существу Герцу необходимо было решить две экспериментальные проблемы.

1 Как получить электромагнитную волну?

2 Как обнаружить электромагнитную волну?

Чтобы получить ЭМВ, необходимо в какой-либо области пространства создать изменяющееся электрическое или магнитное поле. Меняющиеся поля существуют в колебательном контуре. Проблема заключается в том, что эти поля локализованы в очень малой, ограниченной области пространства: электрическое поле между обкладками конденсатора, магнитное – внутри катушки.

Можно увеличить область, занимаемую полями, раздвигая обкладки конденсатора и уменьшая число витков катушки.



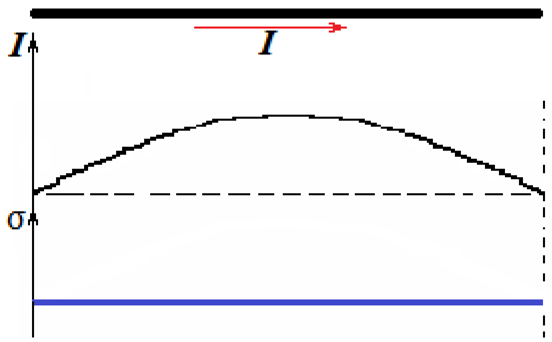
В пределе контур, состоящий из конденсатора и катушки, преобразуется в отрезок провода, который называется открытым колебательным контуром или вибратором Герца. Магнитные линии охватывают вибратор, силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на самом вибраторе.

При увеличении расстояния между обкладками конденсатора его электроемкость С уменьшается. Уменьшение числа витков катушки приводит к уменьшению ее индуктивности L. Изменение параметров контура в соответствии с формулой Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ приводит к уменьшению периода и увеличению частоты колебаний в контуре. Период колебаний в контуре уменьшается настолько, что становится сопоставимым со временем распространения электромагнитного поля вдоль провода. Это означает, что процесс протекания тока в открытом колебательном контуре перестает быть квазистационарным: сила тока в разных участках вибратора уже не будет одинаковой.

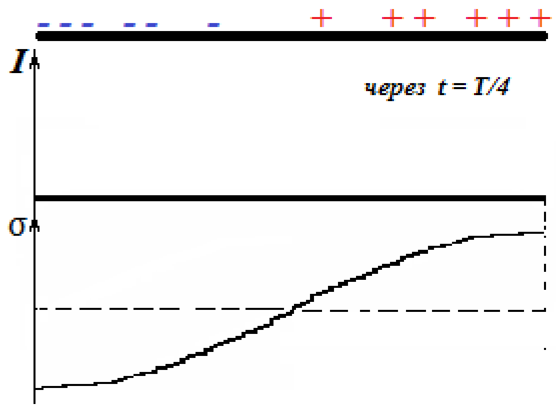
Процессы, происходящие в открытом колебательном контуре эквиваленты колебаниям закрепленной струны, в которой, как известно, устанавливается стоячая волна. Аналогичные стоячие волны устанавливаются для заряда и тока в открытом колебательном контуре.

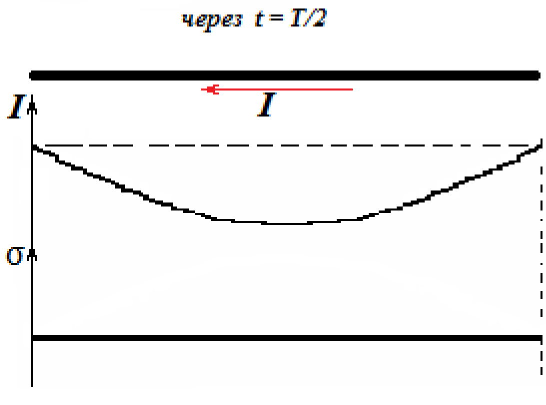
Понятно, что на торцах вибратора ток всегда равен нулю. Вдоль контура ток изменяется, его амплитуда максимальна посередине (там, где раньше была катушка).

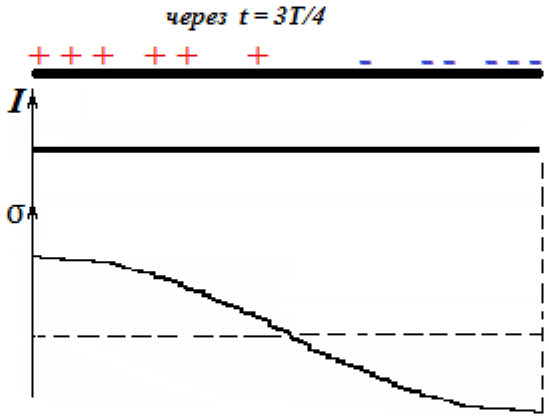
Когда ток в контуре максимален, плотность заряда вдоль вибратора равна нулю. На рисунке показано распределение тока и заряда вдоль вибратора. Электрическое поле вокруг вибратора в этот момент отсутствует, магнитное поле максимально.



Через четверть периода ток становится равным нулю, магнитное поле вокруг вибратора тоже «исчезает». Максимальная плотность заряда наблюдается вблизи концов вибратора, распределение заряда показано на рисунке. Электрическое поле вблизи вибратора в этот момент максимально.

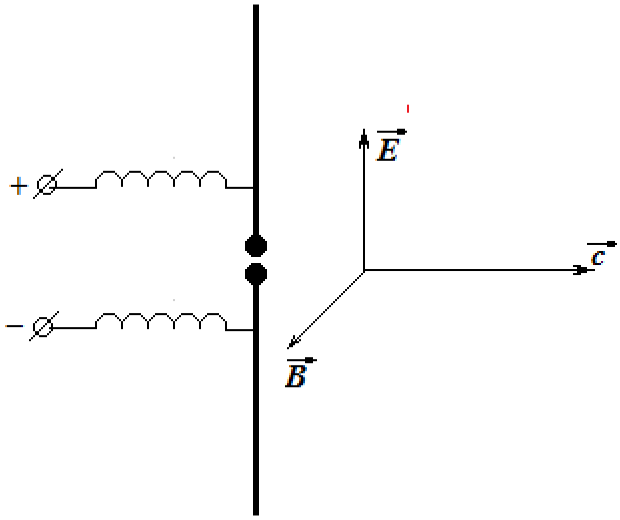






Изменяющееся магнитное поле вокруг вибратора порождает вихревое электрическое поле, а изменяющееся магнитное поле порождает магнитное поле. Вибратор становится источником электромагнитной волны. Волна бежит в направлении, перпендикулярном вибратору, колебания вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ в волне происходят параллельно вибратору. Вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ колеблется в плоскости, перпендикулярной вибратору.

Вибратор, который Герц использовал в опытах, представлял собой прямой проводник, разрезанный пополам. Половинки вибратора разделял небольшой воздушный зазор. Через дроссельные катушки половинки вибратора подключались к источнику высокого напряжения. Дроссельные катушки обеспечивали медленный процесс зарядки половинок вибратора. По мере накопления заряда росло электрическое поле в зазоре. Как только величина этого поля достигала пробойного значения, между половинками вибратора проскакивала искра. Пока искра замыкала воздушный зазор, в вибраторе происходили высокочастотные колебания, он излучал электромагнитную волну.



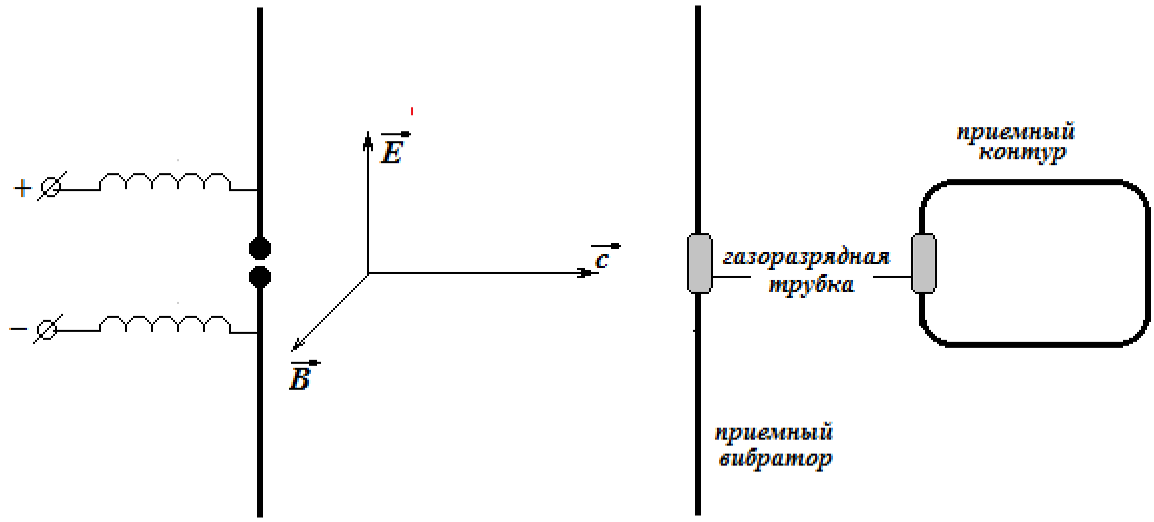
Длина волны, излучаемая вибратором, зависит от его размеров. Воспользуемся тем фактом, что в вибраторе устанавливается стоячая волна тока. Узлы этой стоячей волны располагаются на концах вибратора (здесь ток отсутствует), пучность стоячей волны посередине – здесь ток максимален. Расстояние между узлами стоячей волны равно половине длины волны, следовательно,

$$\lambda = 2L,$$

где L – длина вибратора.

Для обнаружения электромагнитной волны можно воспользоваться тем фактом, что электрическое поле действует на заряды. Под действием электрической составляющей ЭМВ свободные заряды в проводнике должны прийти в направленное движение, т.е. должен появиться ток.

В своих опытах Герц использовал приемный вибратор такого же размера, как и передающий. Тем самым обеспечивалось равенство собственных частот колебаний вибраторов, необходимое для получения резонанса в приемном вибраторе. Для успешного приема волны приемный вибратор следовало расположить параллельно вектору напряженности электрического поля $\vec{\mathbf{E}}$, чтобы под действием электрической силы электроны в проводнике могли прийти в направленное движение. Высокочастотный ток в принимающем проводнике обнаруживался по свечению маленькой газоразрядной трубки, включенной между половинками приемного вибратора.



Можно «поймать» волну приемным контуром, располагая его в одной плоскости в излучающим вибратором. При таком расположении контура вектор магнитной индукции $\vec{B}$ будет перпендикулярен контуру, а пронизывающий контур магнитный поток максимален. При изменении магнитного потока в контуре возникнет индукционный ток, индикатором которого опять-таки служит маленькая газоразрядная трубка.

Герц не только обнаружил электромагнитную волну, но и пронаблюдал ее свойства: отражение, преломление, интерференцию, дифракцию.

§ 6 Задания для самостоятельного решения

Тест «Электромагнитные волны»

1 Что такое электромагнитная волна?

А) процесс распространения электрических колебаний в упругой среде;

Б) процесс распространения меняющегося электрического поля;

В) процесс распространения меняющихся электрического и магнитного полей в пространстве;

Г) процесс распространения электрических колебаний в вакууме.

2 Что колеблется в электромагнитной волне?

А) Электроны; Б) Любые заряженные частицы;

В) электрическое поле; Г) электрическое и магнитное поля.

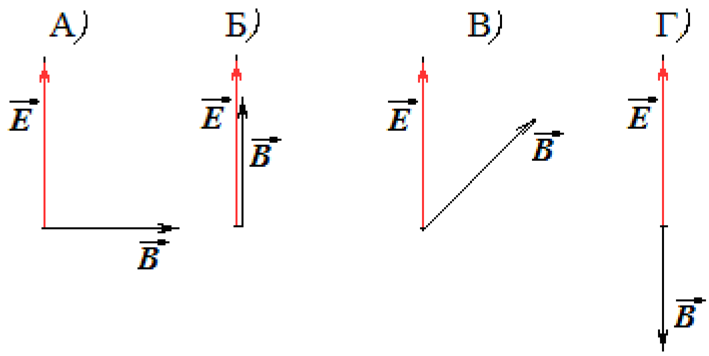
3 К какому виду волн относится электромагнитная волна?

А) К поперечным; Б) К продольным;

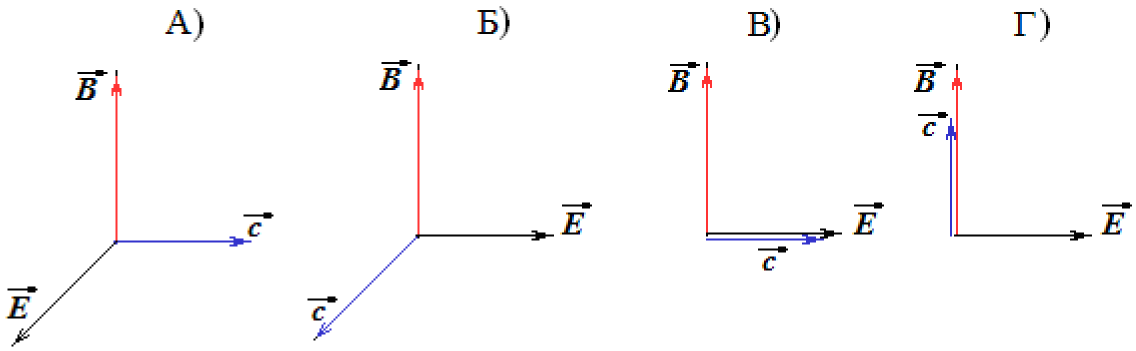
В) ЭМВ может быть как поперечной, так и продольной – в зависимости от среды, в которой она распространяется;

Г) ЭМВ может быть как поперечной, так и продольной – в зависимости от способа ее излучения.

4 Как располагаются относительно друг друга вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ в волне?



5 Где правильно показано взаимное расположение векторов скорости $\vec{c}$, напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ в волне?



6 Что можно сказать о фазах колебаний векторов напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ в волне?

А) Вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$ колеблются в одной фазе;

Б) Вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$ колеблются в противофазе;

В) колебания вектора $\vec{E}$ отстают по фазе от колебаний вектора $\vec{B}$ на $\dfrac{\pi}{2}$;

Г) колебания вектора $\vec{B}$ отстают по фазе от колебаний вектора $\vec{E}$ на $\dfrac{\pi}{2}$.

7 Укажите связь между мгновенными значениями векторов напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ в волне.

А) $B = E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$; Б) $B = \dfrac{E}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$;

В) $B\sqrt{\mu_0\mu} = E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}$; Г) $\dfrac{B}{\sqrt{\mu_0\mu}} = \dfrac{E}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}$.

8 Укажите выражение для расчета скорости электромагнитной волны в вакууме.

А) $c = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$; Б) $c = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; В) $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$; Г) $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

9 Отношение скорости распространения электромагнитных волн в среде к скорости электромагнитных волн в вакууме…

А) > 1; Б) < 1; В) $= 1$; Г) В одних средах > 1, в других средах < 1.

10 Среди радиоволн длинного, короткого и ультракороткого диапазона наибольшую скорость распространения в вакууме имеют волны…

А) Длинного диапазона; Б) Короткого диапазона;

В) Ультракороткого диапазона;

Г) скорости распространения волн всех диапазонов одинаковы.

11 Электромагнитная волна переносит…

А) Вещество; Б) Энергию;

В) Импульс; Г) Энергию и импульс.

12 В каком случае происходит излучение электромагнитной волны?

А) Электрон двигается равномерно и прямолинейно;

Б) По спирали лампы накаливания течет переменный ток;

В) По спирали лампы карманного фонарика течет постоянный ток;

Г) заряженная сфера плавает в масле.

13 Колеблющийся заряд излучает электромагнитную волну. Как изменится амплитуда колебаний вектора напряженности электрического поля

$\vec{E}$, если при неизменной частоте амплитуда колебаний заряда увеличится в 2 раза?

А) Увеличится в 2 раза; Б) Увеличится в 4 раза;

Г) Уменьшится в 2 раза; Д) Не изменится.

14 Колеблющийся заряд излучает электромагнитную волну. Как изменится амплитуда колебаний вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$, если при неизменной амплитуде частота колебаний заряда увеличится в 2 раза?

А) Не изменится; Б) Увеличится в 2 раза;

В) Увеличится в 4 раза; Г) увеличится в 8 раз.

15 Колеблющийся заряд излучает электромагнитную волну. Как изменится интенсивность излучаемой волны, если при неизменной амплитуде частота колебаний заряда увеличится в 2 раза?

А) Не изменится; Б) Увеличится в 2 раза;

В) Увеличится в 4 раза; Г) Увеличится в 8 раз.

16 В каком направлении интенсивность излучаемой вибратором Герца электромагнитной волны максимальна?

А) Интенсивность волны одинакова по всем направлениям;

Б) Вдоль оси вибратора;

В) В направлениях вдоль серединных перпендикуляров к вибратору;

Г) Ответ зависит от геометрических размеров вибратора.

17 Длина волны, на которой суда передают сигнал бедствия SOS, равна 600 м. На какой частоте передаются такие сигналы?

А) $1,8\cdot10^{11}$ Гц; Б) $2\cdot10^{-6}$ Гц ; В) $5\cdot10^{5}$ Гц; Г) $2\cdot10^{5}$ Гц.

18 Если зеркальную поверхность, на которую падает электромагнитная волна, заменить на абсолютно черную, то давление, производимое волной на поверхность, …

А) Увеличится в 2 раза; Б) Уменьшится в 2 раза;

В) Уменьшится в 4 раза; Г) Не изменится.

19 При работе радиолокатора – прибора, служащего для определения расстояния до объекта, - используется явление…

А) Отражения электромагнитных волн;

Б) Преломления электромагнитных волн;

В) Интерференции электромагнитных волн;

Г) Дифракции электромагнитных волн.

20 При работе пеленгатора – прибора, служащего для определения направления на источник электромагнитной волны, - используется…

А) Интерференции электромагнитных волн;

Б) Отражение электромагнитных волн;

В) Преломление электромагнитных волн;

Г) Тот факт, что вектора скорости $\vec{c}$, напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны.

Список использованных источников

1 Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика: учебное пособие для вузов / Д.В.Сивухин.- М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 560 с. – ISBN 5-9221-0715-1.

2 Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Т.3. Электричество: учебное пособие для вузов / Д.В.Сивухин.- М: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004.- 656 с. – ISBN 5-9221-0227-3.

3 Кингсен, А.С. Основы физики. Курс общей физики: В 2 т. Т 1. Механика, электричество магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / А.С.Кингсен., Г.Р.Локшин, О.А. Ольхов О.А. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2001, - 560 с. – ISBN 5 – 9221 – 0164 – 1.

4 Бутиков, Е.И., Физика. В 3 кн. Кн 1.Механика: учебное пособие / Е.И.Бутиков, А.С. Кондратьев – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000, - 352 с. - ISBN 5-9221-0026-2.

5 Методическое пособие д ля поступающих в вузы / Под ред. Чешева Ю.В. - М.: Физматкнига, 2008. – 336 с. - ISBN 985 - 5 – 89155 – 172 – 5.

6 Джанколи Д. Физика: В 2-х т. Т.1: Пер. с англ.- М.: Мир, 1989.-656 с., - ISBN 5 – 03 - 000346 – 0.

7 Сборник задач по физике: Для 10-11 кл. с углубл. изуч. физики / Под. Ред.С.М.Козела. – 3 –е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 2001. – 264 с. - ISBN 5 – 010630 - 4.

8 Задачи по физике: учебное пособие/ И.И.Воробьев, П.И.Зубков, Г.А.Кутузова и [др.]; под ред. О.Я.Савченко. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат.лит., 1988. – 416 с.

9 Горелик, Г.С. Колебания и волны / Г.С. Горелик– М.:Физматлит, 2010. – 656 с. - ISBN 978 - 5 – 9221 – 0776 – 1.