Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

В.Г. Казачков, Ф.А. Казачкова, Е.В. Волков

ЗАДАЧИ
ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Часть 4

Рекомендовано к изданию Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям подготовки 230400.62 Информационные системы и технологии, 140400.62 Электроэнергетика и электротехника, 221700.62 Стандартизация и метрология, 090900.62 Информационная безопасность, 210100.62 Электроника и наноэлектроника, 150001.65 Технология машиностроения

Оренбург
ОГУ
2012

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
К 14

Рецензент – кандидат технических наук, доцент Ф.Г. Узенбаев

Казачков, В.Г.

К 14 Задачи по курсу общей физики. Часть 4: учебное пособие для студентов очного и заочного отделений / В.Г. Казачков, Ф.А. Казачкова, Е.В. Волков; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2012. – 110 с.

Учебное пособие предназначено для выполнения самостоятельных и контрольных работ по физике студентами очного и заочного отделений инженерно-технических специальностей.

Учебное пособие содержит методические указания к выполнению контрольной работы, краткие теоретические сведения по разделам молекулярной физики и термодинамики, примеры решения задач, задачи для решения, справочные данные в приложениях.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

Содержание

Введение 4
1 Общие методические указания 5
2 Уравнение состояния идеального газа 9
2.1 Основные формулы и понятия 9
2.2 Методические указания 10
2.3 Примеры решения задач 11
2.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы 23
3 Молекулярно-кинетическая теория газа 27
3.1 Основные формулы и понятия 27
3.2 Методические указания 31
3.3 Примеры решения задач 32
3.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы 45
4 Первое начало термодинамики 49
4.1 Основные формулы и понятия 49
4.2 Методические указания 51
4.3 Примеры решения задач 53
4.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы 66
5 Второе начало термодинамики. Энтропия 70
5.1 Основные формулы и понятия 70
5.2 Методические указания 71
5.3 Примеры решения задач 72
5.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы 82
6 Реальные газы 85
6.1 Основные формулы и понятия 85
6.2 Методические указания 86
6.3 Примеры решения задач 87
6.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы 100
Список использованных источников 102
Приложение А 103
Приложение Б 104
Приложение В 105
Приложение Г 106
Приложение Д 108
Приложение Е 109
Приложение Ж 110

Введение

Данный сборник представляет собой четвертую часть издаваемого кафедрой общей физики учебно-методического пособия для студентов очного и заочного отделений. При составлении сборника основное внимание было уделено анализу как методических, так и физических подходов к решению типовых задач, тщательному подбору задач для контрольных работ. В сборнике представлены задачи по разделам курса физики «Молекулярная физика» и «Термодинамика».

1 Общие методические указания

Курс общей физики изучается студентами очного и заочного отделений университета по учебникам и учебным пособиям. В течение семестра они слушают лекции по основным разделам программы, выполняют лабораторные работы, сдают экзамены и зачеты. Если при изучении курса возникают неясности, то каждый студент может получить консультацию в устной и письменной форме, обратившись на кафедру или непосредственно к преподавателю, ведущему данный курс.

Объем материала по курсу физики достаточно большой и рассчитан на планомерное, систематическое изучение. Освоение того или иного раздела предполагает хорошее знание предыдущего материала.

Сдача зачетов и экзаменов предшествует самостоятельная работа в межсессионный период по выполнению контрольных работ, включающих определенное число задач по изучаемому предмету. Прежде чем их решать, необходимо проработать материал соответствующего раздела по учебникам и конспектам лекций. Решение задач позволяет лучше уяснить и запомнить основные законы физики, помогает правильно применять общие закономерности к отдельным конкретным случаям, понять наиболее важные приложения физики в производственной деятельности людей. Умение решать задачи приобретается только в результате систематической тренировки.

Разумеется, общего алгоритма решения нет, но придерживаться определенного порядка действий необходимо. Можно рекомендовать следующий порядок.

1.1 Решение задачи начинается с внимательного чтения и изучения её условия с одновременным анализом физических законов, описывающих рассматриваемые явления. Наиболее продуктивный прием работы на этом этапе – графический (рисунок, чертеж, схема). Графическая схема должна отражать процессы и явления в динамике. Для этого необходимо сделать (не всегда) два рисунка: один соответствующий началу явления, описанного в условии, другой - его окончанию.

В результате анализа условия устанавливается круг физических явлений, воспроизводятся в памяти относящиеся к этим явлениям закономерности, особое внимание обращается на различного рода допущения, которые следуют из условия или должны быть сделаны в ходе решения.

Надо иметь в виду, что в задачах не всегда указывается все данные, необходимые для проведения расчетов, студент сам должен ввести недостающие величины, когда станет очевидной их необходимость.

1.2 При аналитическом методе решения задачи вначале записывается формула, содержащая искомую величину. Затем она анализируется с целью привлечения формул, связывающих неизвестные величины с известными.

Анализу подвергаются все последовательно применяемые уравнения. В результате должно быть записано столько уравнений, сколько имеется неизвестных.

При синтетической схеме логических операций искомая величина может появиться не сразу. Но и при этом подходе уравнений должно быть записано столько, сколько имеется неизвестных.

Решение полученной системы уравнений приводит к ответу на вопрос задачи в общем виде, в который входят заданные в условии величины и табличные данные.

1.3 Важно не только уметь решать, но и овладеть элементарными способами проверки полученных результатов. Универсальной схемы для проверки решения в общем виде не существует. Чаще всего пользуются методом размерностей, т.к. обе части любого физического уравнения должны иметь одинаковую размерность. Проверку ведут следующим образом. В итоговую формулу подставляют только единицы измерения входящих в неё величин и проводят с ними необходимые математические действия. Полученная единица измерения должна соответствовать единице измерения искомой величины. Однако правильная размерность еще не говорит о верном решении, т.к. одинаковые размерности могут иметь различные величины. Например, в термодинамике – количество теплоты, работа и энергия имеют одинаковые размерности.

Если ответ представляет собой функцию и надо выяснить характер её изменения, то целесообразно исследовать ее на максимумы, минимумы, бесконечные значения и т.д. Обычно при этом помогает графическое изображение полученной функции.

1.4 Убедившись в правильности общего решения, производят расчет, для чего в формулу подставляются значения в одной системе единиц. Чаще всего все числовые значения выражают в системе единиц СИ.

При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти, например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00157 записать $1{,}57 \cdot 10^{-3}$ и т.п.

Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

1.5 Имеет смысл, получив числовой ответ, проверить, не противоречит ли действительности полученное значение искомой величины. Такая оценка в ряде случаев позволяет обнаружить ошибку. Например, коэффициент полезного действия тепловой машины может быть только в пределах от 0 до 1. Иногда можно сопоставить ответ с порядком значений аналогичных величин в справочниках.

1.6 В период изучения курса общей физики студент заочник должен представить, в зависимости от специальности, от одной до пяти контрольных работ. Номера задач для контрольных работ и их количество определяются преподавателем и выдаются индивидуально каждому студенту, при этом количество задач в работе не должно быть более десяти.

Контрольные работы выполняются в тетради, на обложке которой приводятся сведения по следующему образцу:

1.7 Условия задач в контрольной работе надо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах оставлять поля.

В контрольной работе указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

1.8 Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых оказались неверными. Повторную работу необходимо представить вместе с не зачтенной.

Зачтенные контрольные работы представляются экзаменатору. Студент должен быть готов во время экзамена дать пояснения по существу решения задач, входящих в контрольные работы.

2 Уравнение состояния идеального газа

2.1 Основные формулы и понятия

Количество вещества – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т.п.), содержащихся в теле или системе. Количество вещества выражается в молях. Моль равен количеству вещества тела (системы), содержащего столько же структурных элементов (атомов или молекул), сколько содержится атомов в 12 граммах углерода C_{12}. Один моль вещества содержит $6{,}02 \cdot 10^{23}$ молекул.

Отсюда, количество вещества

$$\nu = \frac{N}{N_A}, \tag{2.1}$$

где N – число структурных элементов, составляющих тело (систему),

N_A – число Авогадро ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$).

Молярная масса вещества

$$\mu = \frac{m}{\nu}, \tag{2.2}$$

где m – масса однородного тела (системы),

ν – количество вещества этого тела (системы).

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона)

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT, \tag{2.3}$$

где p – давление газа, [Па],

V – объем, занимаемый газом, [м^3],

m – масса газа, [кг],

μ – молярная масса, [кг/моль],

R – универсальная газовая постоянная, [Дж/(моль·К)],

T – термодинамическая температура, [К].

Закон Дальтона, определяющий давление смеси газов,

$$p = p_1 + p_2 + \ldots p_n, \quad (2.4)$$

где p_n – парциальное давление газа, входящего в состав смеси,

n – число компонентов.

Молярная масса смеси двух газов, как это следует из закона Дальтона, равна

$$\frac{m_1 + m_2}{\mu_{см}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}$$

откуда

$$\mu_{см} = \frac{\mu_1 \mu_2 \left(m_1 + m_2\right)}{\mu_1 m_2 + \mu_2 m_1}. \quad (2.5)$$

Если смесь газов состоит из нескольких компонентов, то формула (2.5) примет вид

$$\mu_{см} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots m_n}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \ldots \frac{m_n}{\mu_n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\mu_i}}.$$

2.2 Методические указания

2.2.1 Уравнение состояния идеального газа (2.3) применяют к газам при условиях незначительно отличающихся от нормальных.

2.2.2 При решении задач под нормальными условиями понимают газ взятый при температуре T_0 = 273 К, давлении $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Объем одного киломоля газа при нормальных условиях равен V_0 = 22,4 м^3/кмоль.

2.2.3 Уравнение состояние (2.3) связывает между собой пять физических величин, характеризующих состояние газа (p, V, T, m, μ), и позволяет по заданным четырем найти пятую величину. Напомним, что отношение $\nu = \dfrac{m}{\mu}$ дает число молей газа; $\rho = \dfrac{m}{V}$ есть плотность газа и $v = \dfrac{V}{m}$ – удельный объем газа.

2.2.4 В условиях некоторых задач иногда даются показания технических манометров. В силу конструктивных особенностей они измеряют не полное давление газа в баллоне, а давление избыточное над атмосферным. Поэтому полное давление газа в баллоне равно сумме показаний манометра и атмосферного давления.

2.2.5 Соотношения между некоторыми внесистемными единицами давления:

1 атм (физическая атмосфера) = 760 мм.рт.ст = $1{,}01 \cdot 10^5$ Па,

1 ат (техническая атмосфера) = 1 кгс/см^2 = $9{,}81 \cdot 10^4$ Па,

1 мм.рт.ст = 133 Па,

1 мм.вод.ст = 9,81 Па,

1 бар = 10^5 Па.

2.3 Примеры решения задач

Задача 1. Определить молярную массу смеси $\mu_{см}$ кислорода массой m_1 = 25 г и азота массой m_2 = 75 г.

Решение. Согласно соотношению (2.2) молярная масса смеси равна

$$\mu_{см} = \frac{m_{см}}{\nu_{см}}, \tag{1}$$

где масса смеси равна сумме масс компонентов смеси

$$m_{см} = m_1 + m_2,$$

а количество вещества смеси равно сумме количества вещества компонентов

$$\nu_{см} = \nu_1 + \nu_2 = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}.$$

Подставив в формулу (1) выражения для $m_{см}$ и $\nu_{см}$, получим

$$\mu_{см} = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}}. \qquad (2)$$

В единицах СИ $\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Подставив эти значения в формулу (2) и произведя вычисления, получим

$$\mu_{см} = \frac{25 \cdot 10^{-3} + 75 \cdot 10^{-3}}{\dfrac{25 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} + \dfrac{75 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}}} = 28{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Задача 2. Определить число N молекул, содержащееся в объеме $V = 1$ мм^3 воды, и массу m молекулы воды. Считая условно, что молекулы воды имеют вид шариков, соприкасающихся друг с другом, найти диаметр d молекул.

Решение. Число N молекул, содержащихся в некоторой системе, определяется из соотношения (2.1)

$$N = \nu N_A. \qquad (1)$$

Так как $\nu = \dfrac{m}{\mu}$, то $N = \dfrac{mN_A}{\mu}$. С учетом того, что масса равна $m = \rho V$, перепишем (1) в виде

$$N = \frac{\rho V N_A}{\mu}. \qquad (2)$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu_{H_2O} = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$$N = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-9} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{18 \cdot 10^{-3}} = 3,34 \cdot 10^{19} \text{ молекул.}$$

Массу m_1 одной молекулы можно найти по формуле

$$m_1 = \frac{\mu}{N_A}. \qquad (3)$$

Подставив в (3) значения μ и N_A найдем массу молекулы воды

$$m_1 = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

Если молекулы воды плотно прилегают друг к другу, то можно считать, что на каждую молекулу приходится объем (кубическая ячейка) $V_1 = d^3$, где d – диаметр молекулы. Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_1}. \qquad (4)$$

Объем V найдем разделив молярный объем V_m на число молекул в моле, то есть на N_A

$$V_1 = \frac{V_m}{N_A}. \qquad (5)$$

Подставив в выражение (5) в формулу (4)

$$d = \sqrt[3]{\frac{V_m}{N_A}},$$

где $V_m = \dfrac{\mu}{\rho}$.

Тогда окончательно

$$d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} = 3{,}1 \cdot 10^{-8} \text{ м.} \quad (6)$$

Проверим размерность

$$\left(\frac{[\mu]}{[\rho][N_A]} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\text{кг/моль}}{\left(\text{кг/м}^3\right) \cdot \text{моль}^{-1}} \right)^{\frac{1}{3}} = \text{м} .$$

Задача 3. В баллоне объемом V = 10 л находится гелий под давлением p_1 = 10 МПа и при температуре T_1 = 300 К. После того как из баллона было взято m = 10 г гелия, температура в баллоне понизилась до T_2 = 290 К. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением состояния идеального газа (2.3), применив его к конечному состоянию газа

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2 , \quad (1)$$

где m_2 – масса гелия в конечном состоянии, [кг].

Из уравнения (1) выразим искомое давление

$$p_2 = \frac{m_2 R T_2}{\mu V} . \quad (2)$$

Масса гелия m_2 по условию задачи запишется как

$$m_2 = m_1 - m . \quad (3)$$

Первоначальную массу m_1 гелия также найдем из формулы (2.3), применив ее к начальному состоянию

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{R T_1} . \quad (4)$$

Подставив выражение для массы m_1 в (3), а затем выражение m_2 в (2), найдем

$$p_2 = \left(\frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m \right) \frac{RT_2}{\mu V},$$

или

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{\mu} \frac{RT_2}{V}. \qquad (5)$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu_{He} = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$$p_2 = \left(\frac{290}{300} \cdot 1 \cdot 10^6 - \frac{1 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8,31 \cdot 290}{1 \cdot 10^{-2}} \right) = 3,64 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,364 \text{ МПа}.$$

Задача 4. Баллон содержит m_1 = 80 г кислорода и m_2 = 320 г аргона. Давление смеси p = 1 МПа, температура T = 300 К. Принимая данные газы за идеальные определить объем V баллона.

Решение. По закону Дальтона (2.4), давление смеси газов равно сумме парциальных давлений газов, входящих в состав смеси. Из уравнения (2.3) парциальные давления p_1 кислорода и p_2 аргона выражаются формулами

$$p_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V}, \qquad p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V}.$$

Следовательно, по закону Дальтона, давление смеси газов

$$p = p_1 + p_2 = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) \frac{RT}{V},$$

откуда объем баллона

$$V=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{p}.$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu_1=32\cdot10^{-3}$ кг/моль, $\mu_2=40\cdot10^{-3}$ кг/моль

$$V=\left(\frac{80\cdot10^{-3}}{32\cdot10^{-3}}+\frac{320\cdot10^{-3}}{40\cdot10^{-3}}\right)\cdot\frac{8,31\cdot300}{1\cdot10^{6}}=26,2\cdot10^{-3}\text{ м}^3=26,2\text{ л}.$$

Задача 5. В узкой запаянной с одного конца стеклянной трубке находится воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути длиной h = 2 см. Когда трубка расположена вертикально открытым концом вниз, длина воздушного столба l_1 = 0,39 м; когда же трубка расположена вертикально открытым концом вверх, длина воздушного столба l_2 = 0,37 м. Определить атмосферное давление, если температура воздуха t = 5 °C.

Решение. Закрытая часть трубки, отделенная столбиком ртути, заполнена воздухом и насыщающими парами ртути. При температуре t = 5 °C давление насыщающих паров ртути $p_{\text{рт}}$ = $26\cdot10^{-5}$ мм.рт.ст., и им можно пренебречь по сравнению с давлением атмосферного воздуха. Кроме того, будем считать, что воздух, находящийся в трубке, подчиняется уравнению состояния идеального газа и что при изменении положения трубки температура и масса воздуха остаются постоянными. Другими словами, будем считать, что при поворотах трубки мы имеем изотермический процесс. Когда столбик ртути неподвижен, давление воздуха в трубке равно внешнему давлению. Если трубка достаточно широкая (не капиллярная), то давлением, вызванным кривизной поверхности ртути, можно пренебречь.

Найдем параметры состояния воздуха, когда трубка расположена отверстием вниз (p_1, V_1) и когда она расположена отверстием вверх (p_2, V_2)

$$p_1 = p_{\text{атм}} - \rho g h, \qquad V_1 = Sl_1,$$
$$p_2 = p_{\text{атм}} + \rho g h, \qquad V_2 = Sl_2, \tag{1}$$

где ρ – плотность ртути, [кг/м^3],

S – площадь поперечного сечения трубки, [м^3].

Из уравнения состояния идеального газа (2.3) получим для изотермического процесса

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) легко показать, что атмосферное давление

$$p_{\text{атм}} = \rho g h \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}. \tag{3}$$

Подставляя в формулу (3) численные значения величин, приведенных в условии задачи, и учитывая, что ρ = 13,6·10^3 кг/м^3 получим

$$p_{\text{атм}} = 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{0{,}39 + 0{,}37}{0{,}39 - 0{,}37} = 1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Задача 6. В теплоизолированном цилиндре под поршнем находится 20 г гелия. При медленном перемещении поршня газ переводится из состояния, которому соответствует объем V_1 = 32·10^{-3} м^3 и давление p_1 = 4·10^5 Па, в состояние, при котором объем V_2 = 9·10^{-3} м^3 и давление p_2 = 15,5·10^5 Па. Какова будет наибольшая температура газа при этом процессе, если давление является линейной функцией объема (рисунок 1)?

Решение. Так как процесс перемещения поршня происходит медленно (т.е. процесс сжатия будет равновесным), то каждая точка прямой 1–2 удовлетворяет определенному состоянию газа, параметры которого соответствуют соотношению (2.3)

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \,. \tag{1}$$

Связь между давлением и объемом (рисунок 1) задается по условию задачи уравнением

$$p = p_0 - \alpha V \,, \tag{2}$$

где α – размерная константа, равная тангенсу угла наклона прямой 1–2 к оси $0V$.

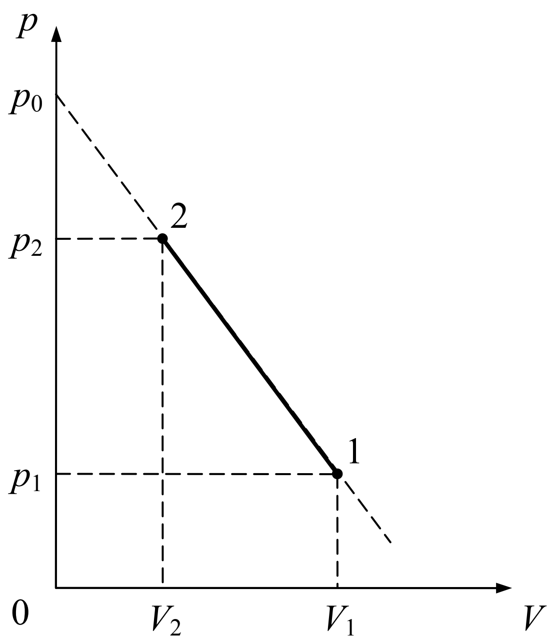

Рисунок 1

Из графика видно, что при уменьшении объема ($V \to 0$), давление будет стремиться к значению p_0.

С учетом уравнения (2), соотношение (1) перепишем в виде

$$\left(p_0 - \alpha V\right) V = \frac{m}{\mu} RT \,, \tag{3}$$

Из (3) получим зависимость температуры газа от его объема

$$T = \frac{\mu}{mR}\left(p_0 V - \alpha V^2\right). \qquad (4)$$

Для нахождения объема газа при максимальном значении температуры приравняем к нулю производную $\frac{dT}{dV}$

$$\frac{dT}{dV} = \frac{\mu}{mR}\left(p_0 - 2\alpha V\right) = 0 .$$

Отсюда

$$V_m = \frac{p_0}{2\alpha}. \qquad (5)$$

Из соотношений (2) и (5) найдем давление p_m при максимальной температуре

$$p_m = \frac{p_0}{2}. \qquad (6)$$

Максимальную температуру найдем, воспользовавшись соотношением (1)

$$T_{\max} = \frac{\mu}{mR} p_m V_m = \frac{\mu}{mR}\frac{p_0^2}{4\alpha}. \qquad (7)$$

Значение коэффициента α найдем из графика

$$\alpha = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \qquad (8)$$

Величину p_0 найдем используя выражение (2), записав систему уравнений

$$p_1 = p_0 - \alpha V_1,$$
$$p_2 = p_0 - \alpha V_2.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$p_0 = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2}. \tag{9}$$

Подставляя данные, приведенные в условии задачи, в соотношения (7), (8), (9) получаем

$$\alpha = 5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^5, \quad p_0 = 20 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad T_{max} = 480 \text{ К}.$$

Задача 7. Какое количество кислорода выпустили из баллона емкостью $V = 10{,}0$ л, если при этом показания манометра на баллоне изменились от $p_1 = 14{,}0$ ат до $p_2 = 7{,}0$ ат, а температура понизилась от $t_1 = 27$ °C до $t_2 = 7$ °C?

Решение. Масса выпущенного из баллона газа Δm равна разности между начальной массой m_1 кислорода в баллоне и конечной массой m_2

$$\Delta m = m_1 - m_2 \tag{1}$$

Воспользуемся уравнением состояния идеального газа (2.3), записав его для начального и конечного состояний газа в баллоне

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \qquad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) получим

$$\Delta m = \frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right). \tag{3}$$

Чтобы найти давления газа в баллоне p_1 и p_2, прибавим к показаниям манометра величину атмосферного давления, равную 1 ат.

Выразим в единицах СИ числовые значения величин, входящих в формулу (3)

$p_1 = 15{,}0 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4$ Па, $p_2 = 8{,}0 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4$ Па, $T_1 = 300$ К, $T_2 = 280$ К, $V = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ м^3, $\mu = 0{,}032$ кг/моль.

Подставив эти значения в (3), получим

$$\Delta m = 80{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 80{,}9 \text{ г}.$$

Задача 8. Сколько времени необходимо откачивать газ из колбы объемом $V_0 = 1{,}5 \cdot 10^3$ см^3 ротационным насосом, чтобы давление понизилось от атмосферного p_0 = 760 мм.рт.ст. до p = 0,10 мм.рт.ст.? Производительность насоса для указанного интервала давлений считать постоянной и равной K = 180 см^3/с. Изменением температуры газа в колбе во время откачки пренебречь.

Решение. Производительность насоса K определяется объемом газа, который ежесекундно переходит из откачиваемого сосуда в камеру насоса, а затем в атмосферу. Если за время dt из сосуда вышел объем dV, то

$$K = \frac{dV}{dt}. \tag{1}$$

Согласно условию задачи откачка происходит изотермически. Проследим за этим процессом откачки газа в течение элементарного промежутка времени dt. За это время газ, который вначале (в произвольный момент времени t = 0, принятый за начало отсчета) занимал объем V_0 при давлении p_0, частично перешел в камеру насоса. Этот процесс логично рассматривать как прирост объема одной и той же массы газа на величину dV и убыли давления газа на величину dp. Для этого случая, на основании закона Бойля-Мариотта, можно записать

$$pV_0 = \left(p + dp\right)\left(V_0 + dV\right).$$

Раскрывая скобки в этом выражении и пренебрегая величиной $dpdV$ (как величиной второго порядка малости, получим

$$pdV + V_0 dp = 0. \tag{2}$$

Разделив обе части выражения (2) на приращение времени dt и учитывая соотношение (1), получаем

$$pK + V_0 \frac{dp}{dt} = 0. \tag{3}$$

Данное дифференциальное уравнение выражает зависимость давления p воздуха в колбе от времени t. Разделив в уравнении (3) переменные и учитывая, что при изменении времени от нуля до t давление изменяется от p_0 до p, запишем

$$\frac{K}{V_0} dt = -\frac{dp}{p},$$

$$\frac{K}{V_0} \int_0^t dt = -\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p}. \tag{4}$$

Интегрируя выражение (4), получаем

$$\frac{K}{V_0} t = \ln \frac{p_0}{p},$$

или

$$t = \frac{V_0}{K} \ln \frac{p_0}{p}. \tag{5}$$

Подставляя в формулу (5) данные из условия задачи, найдем время

$$t = 74 \text{ с}.$$

2.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы

2.4.1 Некоторый идеальный газ испытывает сначала изобарное расширение, а затем изотермическое сжатие. Изобразить эти процессы в координатах p, T и V, T.

2.4.2 Изобразить графически зависимость плотности ρ некоторой массы идеального газа от давления p при изотермическом процессе.

2.4.3 Некоторая масса идеального газа изохорно нагревается, а затем изобарно сжимается. Изобразить графики этих процессов в координатах: а) p, V; б) p, T; в) ρ, T.

2.4.4 Некоторая масса идеального газа изобарно нагревается, а затем после изотермического сжатия и изохорного охлаждения возвращается в исходное состояние. Изобразить эти процессы в координатах p, V и p, T.

2.4.5 Изобразить в координатах p, T две изохоры, соответствующие разным массам одного и того же газа, занимающим одинаковые объемы.

2.4.6 Объем пузырька воздуха по мере всплывания его со дна озера на поверхность увеличивается в 3 раза. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Температура воды одинакова на разных глубинах. Какова глубина озера?

2.4.7 В шаре диаметром $d = 20$ см находится воздух массой $m = 7{,}0$ г. До какой температуры можно нагреть этот шар, если максимальное давление, которое выдерживают стенки шара, $p = 0{,}30$ МПа? Молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

2.4.8 Сколько качаний n поршневого насоса надо сделать, чтобы накачать пустую камеру футбольного мяча объемом $V = 2{,}5$ дм^3 до давления, превышающего атмосферное в 4 раза? За каждое качание насос захватывает из атмосферы воздух объемом $V_0 = 200$ см^3. Температуру мяча считать постоянной.

2.4.9 В одном баллоне вместимостью $V_1 = 15$ дм^3 находится газ под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа, а в другом – тот же газ под давлением $p_2 = 1$ МПа. Баллоны, температура которых одинакова, соединены трубкой с краном. Если открыть кран, то в обоих баллонах устанавливается давление p = 0,4 МПа. Какова вместимость второго баллона?

2.4.10 В двух сосудах одинакового объема находятся гелий и аргон, массы которых равны. Во сколько раз давление гелия больше, чем аргона, если температуры газов одинаковы?

2.4.11 Плотность газа при давлении p = 0,20 МПа и температуре t = 7 °С равна ρ = 2,41 кг/м^3. Какова масса 1 моль этого газа?

2.4.12 Газ находится при температуре t_1 = 20 °С и давлении p_1 = 0,50 МПа. Какое давление p_2 потребуется для того, чтобы увеличить плотность газа в 2 раза, если температура газа будет доведена до t_2 = 80 °С?

2.4.13 Считая, что воздух по массе состоит из 76% азота, 23% кислорода и 1% аргона, найти массу ν = 1 моль воздуха.

2.4.14 Найти объем смеси, состоящей из азота массой m_1 = 2,8 кг и кислорода массой m_2 = 3,2 кг и имеющей температуру t = 17 °С и давление p = 0,40 МПа.

2.4.15 В баллоне вместимостью V = 14 дм^3 находится смесь гелия с кислородом массой m = 64 г при температуре t = 7 °С и давлении p = 0,12 МПа. Найти массу гелия и массу кислорода в смеси.

2.4.16 Определить плотность смеси, состоящей из гелия массой m_1 = 8,0 г и аргона массой m_2 = 4,0 г, при температуре t = 17 °С и давлении p = 0,10 Мпа.

2.4.17 В вертикальном цилиндре под поршнем находится воздух при давлении $p = 2\cdot10^5$ Па при температуре t_1 = 27 °С. Груз какой массы необходимо положить на поршень после нагревания воздуха до t_2 = 50 °С, чтобы объем воздуха в цилиндре был равен первоначальному? Площадь поршня S = 30 см^2.

2.4.18 Горизонтальный цилиндрический сосуд длиной l = 36 см разделен подвижной перегородкой на две части. В одной части сосуда находится кислород, в другой части – вдвое меньшая масса водорода. Где будет находиться подвижная перегородка? Температуры газов одинаковы.

2.4.19 Открытая с обоих концов цилиндрическая трубка небольшого сечения длиной l = 100 см наполовину погружена в ртуть. Верхний конец ее закрывают и вынимают трубку из ртути, при этом часть ртути вытекает. Определите длину столбика ртути, оставшейся в трубке. Атмосферное давление нормальное.

2.4.20 В баллоне емкостью $V = 20$ л находится кислород при температуре $t_1 = 17$ °С и давлении $p = 400$ кПа. Спустя несколько часов температура кислорода возросла до $t_2 = 27$ °С, а давление из-за утечки осталось прежним. Сколько кислорода вытекло?

2.4.21 Баллон содержит сжатый газ при $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 20$ атм. Каково будет давление, если из баллона будет выпущено 0,3 массы газа, а температура понизится до $t_2 = 12$°С?

2.4.22 До какой температуры нужно нагреть открытую колбу, содержащую воздух при $t_1 = 20$ °С, чтобы плотность воздуха уменьшилась в 1,5 раза?

2.4.23 В цилиндре площадью основания $S = 0{,}2$ м^2 находится $V = 500$ л воздуха. Наружное давление равно $p_0 = 0{,}98 \cdot 10^5$ Па. На сколько опустится поршень, если на него подействовать силой $F = 980$ Н? Массу поршня и трение поршня о стенки сосуда не учитывать.

2.4.24 В цилиндре под поршнем находится газ. Масса поршня равна $m = 600$ г, площадь поршня $S = 20$ см^2, атмосферное давление равно $p = 100$ кПа. Какой добавочной силой надо действовать на поршень, чтобы объем газа в цилиндре уменьшился вдвое?

2.4.25 Закрытый цилиндр длиной $l = 0{,}5$ м разделен на две равные части теплонепроницаемым поршнем. В обеих половинах находятся одинаковые массы одного и того же газа при температуре $T_1 = 200$ К. На какое расстояние сместится поршень, если в одной из частей цилиндра температуру газа повысить до $T_2 = 300$ К?

2.4.26 В баллоне находится сжатый газ. Есть ли утечка газа из баллона, если $t_1 = -3$ °С его давление $p_1 = 18 \cdot 10^5$ Па, а при температуре $t_2 = 27$ °С давление равно $p_2 = 20 \cdot 10^5$ Па?

2.4.27 На дне озера температура воды $t_1 = 7$ °С, а на поверхности $t_2 = 22$ °С. Атмосферное давление $p_0 = 750$ мм. рт. ст. Пузырек воздуха, имеющий объем $V_1 = 1$ мм^3, медленно поднимается со дна озера. Объем его у поверхности становится $V_2 = 2{,}6$ мм^3. Найдите глубину озера.

2.4.28 В колбе объемом $V = 10$ л содержится некоторый газ при температуре $T = 300$ К. Насколько понизится давление газа в колбе, если в результате утечки газа из колбы выйдет 10^{20} молекул?

2.4.29 В баллоне был некоторый газ. После того, как часть газа выпустили, температура в баллоне уменьшилась в n раз, а давление в k раз. Какая часть газа выпущена?

2.4.30 Два сосуда наполнены одним и тем же газом массой $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг и под давлением $p_1 = 400$ и $p_2 = 900$ кПа соответственно. Сосуды соединяют трубкой, объемом которой можно пренебречь по сравнению с объемами обоих сосудов. Найдите установившееся давление, если температура газа в сосудах была одинакова, а после соединения сосудов увеличилась на 20 %.

3 Молекулярно-кинетическая теория газа

3.1 Основные формулы и понятия

Число молекул в единице массы вещества равно числу Авогадро N_A деленному на молярную массу μ вещества

$$n_1 = \frac{N_A}{\mu}. \tag{3.1}$$

Число молекул в данной массе вещества равно числу Авогадро, умноженному на количество вещества ν

$$N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A. \tag{3.2}$$

Число молекул в единице объема вещества (концентрация) равно числу молекул в единице массы вещества n_1, умноженному на плотность этого вещества ρ

$$n = n_1 \rho = \frac{N_A}{\mu} \rho. \tag{3.3}$$

Основное уравнение кинетической теории газов. Давление p, производимое газом на стенки сосуда, численно равно

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \varepsilon_{\text{пост}} \right\rangle, \tag{3.4}$$

где n – концентрация молекул, [число молекул/м^3].

$\left\langle \varepsilon_{\text{пост}} \right\rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы.

В случае смеси газов выражение (3.4) можно записать в виде

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} n_i m_i v_i^2 \tag{3.5}$$

где n_i – концентрация молекул i-сорта,

m_i – масса молекулы i-сорта,

v_i – скорость молекулы i-сорта.

Средняя кинетическая энергия $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ поступательного движения одной молекулы пропорциональна абсолютной температуре T

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT \,, \tag{3.6}$$

где $k = \dfrac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \; \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.

Уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p = nkT \,. \tag{3.7}$$

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT \,. \tag{3.8}$$

Средняя кинетическая энергия (поступательного и вращательного движения) одной молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT \,, \tag{3.9}$$

где i – число степеней свободы. В зависимости от сложности строения молекулы i принимает следующие значения:

$i = 3$ для одноатомных молекул;

$i = 5$ для двухатомных молекул;

$i = 6$ для трех- и многоатомных молекул (если не учитывать колебаний частей молекул).

При колебательном движении одной молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = kT \tag{3.10}$$

Средняя внутренняя энергия произвольной массы газа m равна

$$\langle U \rangle = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT \tag{3.11}$$

Максвелловская функция распределения молекул газа по компонентам скоростей

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}, \tag{3.12}$$

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}. \tag{3.13}$$

Максвелловская функция распределения молекул газа по модулю скорости (плотность вероятности случайной величины v)

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \tag{3.14}$$

Скорости молекул газа вычисляются по формулам

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \text{ – наиболее вероятная скорость,} \tag{3.15}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \text{ – средняя арифметическая скорость,} \tag{3.16}$$

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \text{ – средняя квадратичная скорость.} \tag{3.17}$$

Функция распределения молекул по кинетическим энергиям поступательного движения

$$\Phi(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \tag{3.18}$$

где $A = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}$ – нормировочный множитель.

Наиболее вероятная энергия

$$\varepsilon_{\text{в}} = \frac{1}{2}kT. \tag{3.19}$$

Распределение Больцмана (распределение молекул в силовом потенциальном поле)

$$n = n_0 e^{-\frac{\Pi}{kT}}, \tag{3.20}$$

где Π – потенциальная энергия молекулы во внешнем поле, n_0 – концентрация молекул в точке, где $\Pi = 0$.

Барометрическая формула, выражающая изменение давления p с высотой h над поверхностью Земли

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}, \tag{3.21}$$

где p_0 – давление на поверхности Земли ($h = 0$).

Среднее число столкновений в единицу времени, испытываемых одной молекулой

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi\sigma^2 n \langle v \rangle, \tag{3.22}$$

где σ – эффективный диаметр молекулы.

3.2 Методические указания

3.2.1 При решении задач приходится использовать три скорости (3.15), (3.16), (3.17), которые при одной и той же температуре мало отличаются друг от друга.

Обычно, средней квадратичной скоростью $v_{кв}$ пользуются, при расчетах физических величин, пропорциональных квадрату скорости, например кинетической энергии поступательного движения молекул или давления газа.

Средняя арифметическая скорость $\langle v \rangle$ позволяет определять средние значения физических величин идеального газа, в формулы которых входит скорость в первой степени, например средний импульс молекул, среднее время свободного пробега молекул, среднее число столкновений молекул в единицу времени.

Наиболее вероятной скоростью $v_в$ пользуются в задачах, связанных с применением закона распределения молекул по скоростям (3.14). Следует отметить, что в этом случае удобней ввести относительную скорость, равную

$$u = \frac{v}{v_в}, \tag{3.23}$$

где v – заданная скорость.

В этом случае распределение Максвелла (3.14) запишется в виде

$$F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}, \tag{3.24}$$

при этом число молекул, относительные скорости которых лежат в итервале скоростей от u до $u + du$, определяются как

$$\Delta N = \int_{u_1}^{u_2} NF(u)\,du, \tag{3.25}$$

где N – полное число молекул газа под заданной кривой распределения (3.24).

При подсчете вероятности или числа молекул в заданном интервале скоростей (или энергий) не всегда следует прибегать к интегрированию. Если рассматриваемый интервал скоростей не велик, т.е. $\Delta u \ll u$, или, что то же самое, $\Delta v \ll v$, то можно не считать интеграл (3.25), а воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} &\Delta N = NF(u)\Delta u \\ &\Delta P \approx F(u)\Delta u \end{aligned} \qquad (3.26)$$

3.3 Примеры решения задач

Задача 1. Плотность смеси азота и водорода при температуре t = 47 ºС и давлении p = 2,00 атм равна ρ = 0,30 г/л. Найти концентрацию молекул азота n_1 и водорода n_2 в смеси.

Решение. Для определения концентрации азота и водорода в смеси газов воспользуемся формулой (3.7) и законом Дальтона (2.4). На основании сказанного можно записать, что

$$n_1 + n_2 = n = \frac{p}{kT}. \qquad (1)$$

В выражении (1) два неизвестных, поэтому необходимо еще одно соотношение, связывающее величины n_1 и n_2. Из уравнения состояния идеального газа (2.3) следует, что молярная масса смеси равна

$$\mu_{см} = \frac{mRT}{pV} = \rho\frac{RT}{p}. \qquad (2)$$

Воспользовавшись соотношениями (2.5) и (3.3), которые связывают между собой молярные массы $\mu_{см}$, μ_1, μ_2 и массы m_1 и m_2 компонентов смеси, получим

$$\mu_{см} = \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2}. \quad (3)$$

Приравнивая правые части выражений (2) и (3), получим

$$\frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2} = \frac{\rho RT}{p}. \quad (4)$$

Решив систему уравнений (1) и (4), найдем неизвестные n_1 и n_2

$$n_1 = \frac{\rho RT - p\mu_2}{kT(\mu_1 - \mu_2)}, \qquad n_2 = \frac{\rho RT - p\mu_1}{kT(\mu_2 - \mu_1)}. \quad (5)$$

Выразим входящие в формулы (5) величины в единицах СИ: $p = 2{,}00 \cdot 9{,}8 \cdot 10^4$ Па, T = 320 К, ρ = 0,30 кг/м^3, μ_1 = 0,028 кг/моль, μ_2 = 0,0020 кг/моль, R = 8,31 Дж/(моль·К), $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Подставив эти величины в формулы (5) и произведя вычисления, получим

$$n_1 = 2{,}4 \cdot 10^{24}\ \text{м}^{-3}, \qquad n_2 = 4{,}2 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

Задача 2. В сосуде, объем которого равен V = 5 л, находится кислород массой m = 4 г при температуре t = 13 ºС. Определить внутреннюю энергию газа и давление газа.

Решение. Для каждой молекулы идеального двухатомного газа средняя кинетическая энергия определяется формулой (3.9) и равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{5}{2} kT. \quad (1)$$

Число молекул в данной массе газа по формуле (3.2) равно

$$N = \frac{m}{\mu} N_A. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) получим выражение для средней кинетической энергии всей массы газа

$$\langle U \rangle = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu} N_A kT . \qquad (3)$$

Подставив в (3) данные из условия задачи, выраженные в единицах СИ, получим

$$\langle U \rangle = 296 \text{ Дж.}$$

Давление газа на стенки сосуда определим из соотношения (3.7), которое для нашего случая запишется в виде

$$p = \frac{m}{\mu}\frac{N}{V} kT . \qquad (4)$$

Подстановка в (4) числовых данных в единицах СИ дает результат

$$p = 5{,}93 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Задача 3. Некоторая масса азота заключена в сосуде, емкостью $V = 2$ л. Температура азота t = 27 ºС, давление газа на стенки сосуда p = 10^{-6} мм.рт.ст. Определить количество молекул азота в сосуде, массу азота в сосуде, внутреннюю энергию азота.

Решение. Зная связь между давлением идеального газа, его температурой и концентрацией молекул (3.7), можно определить концентрацию молекул

$$n = \frac{p}{kT} .$$

Умножив концентрацию молекул на объем, занимаемый газом, получим число молекул в сосуде

$$N = nV = \frac{p}{kT} V . \qquad (1)$$

Подставляя в (1) данные из условия задачи, выраженные в единицах СИ, получим

$$N = 6{,}43 \cdot 10^{13} \text{ молекул.}$$

Число молекул газа связано с количеством вещества газа соотношением (3.2)

$$N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A ,$$

откуда

$$m = \frac{N}{N_A} \mu . \qquad (2)$$

Подставляя в (2) числовые значения, получим

$$m = 3 \cdot 10^{-12} \text{ кг.}$$

Внутренняя энергия газа

$$\langle U \rangle = N \frac{5}{2} kT ,$$

или, с учетом (1)

$$\langle U \rangle = \frac{5}{2} kT \frac{pV}{kT} = \frac{5}{2} pV . \qquad (3)$$

Подставляя в (3) данные из условия задачи, выраженные в единицах СИ, получим

$$\langle U \rangle = 6{,}65 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

Задача 4. Сосуд, содержащий газ, движется со скоростью v_0, затем быстро останавливается. На сколько увеличится при этом средний квадрат скорости теплового движения молекул газа: 1) в случае одноатомного газа, 2) в случае двухатомного газа? Газ считать идеальным.

Решение. Воспользуемся законом сохранения энергии. Пусть m – масса газа в сосуде. Двигаясь со скоростью v_0, газ как единое целое обладает кинетической энергией

$$E_{\text{к}} = \frac{mv_0^2}{2}. \tag{1}$$

Формула (1) определяет кинетическую энергию направленного движения молекул, в котором они участвуют вместе с сосудом. После резкой остановки сосуда направленное движение молекул, в результате их соударений со стенками сосуда, очень быстро превратится в хаотическое движение. Пренебрегая теплообменом между газом и стенками сосуда, за рассматриваемый малый промежуток времени, можно считать газ изолированной системой. Тогда из закона сохранения энергии следует, что кинетическая энергия направленного движения молекул газа $E_к$ должна равняться приросту энергии хаотического движения молекул (приросту внутренней энергии) ΔU

$$E_{\text{к}} = \Delta U . \tag{2}$$

Найдем внутреннюю энергию газа.

Для идеального одноатомного газа внутренняя энергия равна энергии поступательного хаотического движения молекул

$$U = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_i^2}{2}, \tag{3}$$

где m – масса молекулы,

N – число молекул в газе.

Произведя суммирование, используя выражение (3.5), получим

$$U = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 = \frac{m}{2} N \left\langle v^2 \right\rangle .$$

Из полученного выражения следует, что изменение внутренней энергии одноатомного газа при торможении равно

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{M}{2}\left(\left\langle v_2^2 \right\rangle - \left\langle v_1^2 \right\rangle\right). \tag{4}$$

Подставляя в выражение (2) $E_к$ из (1) и ΔU из (4), получим первый ответ

$$\Delta\left(\left\langle v^2 \right\rangle\right) = \left\langle v_2^2 \right\rangle - \left\langle v_1^2 \right\rangle = v_0^2 .$$

Внутренняя энергия идеального двухатомного газа (3.11) является суммой энергий поступательного и вращательного движений молекул. При этом три степени свободы приходятся на поступательное движение и две – на вращательное. По условию задачи изменяется только поступательное движение. Следовательно, для двухатомной молекулы изменение энергии равно

$$\frac{3}{5}\frac{M\left\langle v^2 \right\rangle}{2} = \frac{M\left\langle v_2^2 \right\rangle}{2} - \frac{M\left\langle v_1^2 \right\rangle}{2},$$

отсюда получим второй ответ

$$\left\langle v_2^2 \right\rangle - \left\langle v_1^2 \right\rangle = 0{,}6 v_0^2 .$$

Задача 5. Какая часть молекул имеет скорости, превышающие наиболее вероятную скорость?

Решение. По условию задачи речь идет о молекулах, скорости которых заключены в интервале от наиболее вероятной $v_в$ до $v_в + \infty$, то есть в бесконечно большом интервале. Для расчета этого числа молекул используем формулу (3.25), которая справедлива для любых интервалов скоростей. Учитывая, что относительная скорость (3.23) $u = \frac{v}{v_в}$ и что по условию $v_1 = v_в$ и $v_2 = \infty$, получим: $u_1 = 1$ и $u_2 = \infty$. Следовательно, искомая часть молекул выразится интегралом

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} u^2 e^{-u^2} du . \qquad (1)$$

Чтобы избежать математических трудностей, связанных с решением несобственного интеграла (метод интегрирования по частям), воспользуемся очевидным фактом – скорости всех молекул лежат в интервале от 0 до ∞. Поэтому, обозначив через $\Delta N'$ число молекул со скоростями меньше наиболее вероятной, то есть в интервале u от 0 до 1, можно записать

$$\Delta N + \Delta N' = N$$

или

$$\frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta N'}{N} = 1 . \qquad (2)$$

Таким образом, вместо того, чтобы искать $\frac{\Delta N}{N}$ по (1), можно искать $\frac{\Delta N'}{N}$ по формуле

$$\frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1} u^2 e^{-u^2} du , \qquad (3)$$

а затем по формуле (2) найти $\frac{\Delta N}{N}$ как

$$\frac{\Delta N}{N} = 1 - \frac{\Delta N'}{N} . \qquad (4)$$

Интеграл (3) в конечном виде не берется, поэтому воспользуемся методом приближенного интегрирования. Для этого разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена

$$e^{-u^2} = 1 - \frac{u^2}{1} + \frac{u^4}{2} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{24} - \ldots,$$

тогда

$$u^2 e^{-u^2} = 1 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} + \frac{u^{10}}{24} - \ldots.$$

Подставив последнее выражение в (3) и произведя интегрирование, получим

$$\frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} + \frac{1}{264} - \ldots\right).$$

Ограничиваясь первыми четырьмя членами разложения, найдем результат с погрешностью не более 0,01

$$\frac{\Delta N'}{N} = 0{,}43,$$

отсюда на основании выражения (4) получим ответ

$$\frac{\Delta N}{N} = 1 - 0{,}43 = 0{,}57.$$

Задача 6. Определить долю молекул водорода, модули скоростей которых при температуре t = 27 ºС лежат в интервале от v_1 = 1898 м/с до v_2 = 1903 м/с.

Решение. В данной задаче интервал скоростей $\Delta v = v_2 - v_1$ = 5 м/с достаточно мал по сравнению с самими скоростями. Поэтому для определения искомой доли молекул воспользуемся формулами (3.24) и (3.26)

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} \Delta u\,, \tag{1}$$

где u – относительная скорость (3.23).

Наиболее вероятная скорость (3.15) равна

$$v_{в} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}\,.$$

Подставляя числовые данные в это выражение, получим

$$v_{в} = 1{,}57 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Отсюда относительная скорость будет равна

$$u = 1{,}2$$

и

$$\Delta u = \frac{\Delta v}{v_{в}} = 3{,}16 \cdot 10^{-3}\,.$$

Подставив числовые значения $v_{в}$, u и Δu в формулу (1), получим

$$\frac{\Delta N}{N} = 2{,}45 \cdot 10^{-3} = 0{,}245\ \%.$$

Задача 7. Концентрация молекул идеального газа n_0, температура T, масса молекул m. Газ находится в тепловом равновесии. Определить число молекул газа, ударяющихся в единицу времени об единицу поверхности.

Решение. О выбранную единицу поверхности сосуда ударяются те молекулы, проекции скоростей которых на направление перпендикулярное к поверхности, отлично от нуля. Пусть x перпендикулярна к рассматриваемой поверхности. Тогда, используя формулу (3.12), число молекул dn_x в единице объема, проекция скорости которых заключена в интервале между v_x и $v_x + dv_x$, равно

$$dn_x = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x .$$

Из этого числа молекул только те достигнут за единицу времени поверхности сосуда, которые расположены от нее не далее расстояния, численно равного v_x. Число этих молекул равно

$$dn'_x = v_x n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x .$$

Полное число молекул, которые за единицу времени достигнут единицы поверхности сосуда, равно

$$N = \int_0^\infty v_x n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x . \qquad (1)$$

Введем обозначение $\frac{m}{2\pi kT} = \alpha$. Тогда формула (1) запишется в виде

$$N = \frac{n_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\alpha}\, v_x e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \frac{n_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\frac{1}{-2\sqrt{\alpha}}\right) d\left(e^{-\alpha v_x^2}\right) = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2kT}{m}} ,$$

где подынтегральное выражение внесено под знак дифференциала.

Учитывая, что средняя арифметическая скорость молекул равна

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} ,$$

получим

$$N = \frac{n_0 \langle v \rangle}{4}.$$

Задача 8. Узкую трубку длиной l, один конец которой закрыт, вращают с постоянной угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси OO', проходящей через открытый конец трубки (рисунок 2). В трубке находится газ, состоящий из молекул массы m, при температуре T. Концентрация молекул у открытого конца трубки равна n_0. Найти концентрацию молекул n у закрытого конца.

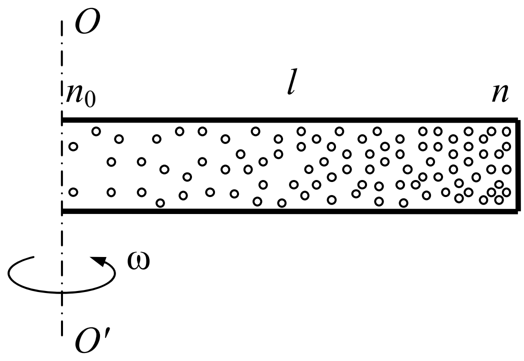

Рисунок 2

Решение. Эту задачу удобнее решать в неинерциальной системе отсчета (связанной с вращающейся трубкой), в которой молекулы газа находятся под действием центробежных сил инерции

$$F = m\omega^2 r. \tag{1}$$

В этом случае изменение потенциальной энергии на длине трубки равно

$$\Pi_0 - \Pi = \int_0^l m\omega^2 r dr = \frac{m\omega^2 l^2}{2}, \tag{2}$$

где Π_0 и Π – потенциальные энергии соответствующие открытому и закрытому концам трубки. Подставляя соотношение (2) в формулу распределения Больцмана (3.20), получим

$$n = n_0 e^{\frac{\Pi_0 - \Pi}{kT}} = n_0 e^{\frac{m\omega^2 l^2}{2kT}} .$$

Задача 9. Найти число столкновений z, которые происходят в течение секунды между всеми молекулами водорода, находящимися в объеме $V = 1{,}0$ мм^3 при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы водорода σ = $2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение. Число столкновений z_1, испытываемых одной молекулой за секунду, определяется формулой (3.22). Полное число столкновений будет равно

$$z = \frac{z_1 N}{2} = \frac{znV}{2}. \tag{1}$$

Двойка в знаменателе появилась из-за того, что в одном столкновении участвуют две молекулы, поэтому в число zN каждое столкновение входит дважды.

Подставив в формулу (1) вместо z его значение из выражения (3.22), получим

$$z = \frac{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n^2 \langle v \rangle V}{2}.$$

Найдем из формулы (3.7) концентрацию молекул n и учтем, что $\langle v \rangle$ дается выражением (3.17). Тогда, окончательно, полное число столкновений запишется в виде

$$z = \frac{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p^2 V}{2k^2 T}\sqrt{\frac{8R}{\pi\mu T}}. \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) числовые данные из условия задачи в единицах СИ, получим

$$z = \frac{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot \left(2,3 \cdot 10^{-10}\right)^2 \cdot \left(1 \cdot 10^5\right)^2 \cdot 1 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \left(1,38 \cdot 10^{-23}\right)^2 \cdot 273} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 273}} = 1,6 \cdot 10^{26}\ \text{с}^{-1}.$$

3.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы

3.4.1 Радоновые ванны, применяемые для лечения, содержат $N = 1{,}8 \cdot 10^6$ атомов радона в воде объемом $V = 1{,}0$ дм^3. На сколько молекул воды приходится один атом радона в лечебной ванне?

3.4.2 Сколько частиц (атомов и молекул) содержится в азоте массой $m = 1{,}0$ г, если степень диссоциации азота 7,0%?

3.4.3 Сколько атомов ртути содержится в воздухе объемом $V = 1{,}0$ дм^3 в помещении, зараженном ртутью, при температуре $t = 20$ °C, если давление насыщенного пара ртути при этой температуре $p = 133$ мПа?

3.4.4 Какова длина ребра куба, содержащего $N = 1{,}0 \cdot 10^6$ молекул идеального газа при нормальных условиях?

3.4.5 В сосуде объемом $V = 3{,}0$ дм^3 находится гелий массой $m_1 = 4{,}0$ мг, азот массой $m_2 = 70$ мг и $N = 5{,}0 \cdot 10^{21}$ молекул водорода. Каково давление смеси, если ее температура $t = 27$ °C?

3.4.6 Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул водорода, содержащихся в $\nu = 1{,}0$ моль при $t = 18$ °C.

3.4.7 В сосуде объемом $V = 2{,}0$ дм^3 находится газ под давлением $p = 0{,}50$ МПа. Чему равна средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа?

3.4.8 Полная кинетическая энергия молекул многоатомного газа, масса которого $m = 20$ г, равна $E = 3{,}2$ кДж. Найти среднюю квадратичную скорость молекул этого газа.

3.4.9 Каковы средняя квадратичная и средняя арифметическая скорости пылинки, находящейся в воздухе во взвешенном состоянии при температуре $t = 17$ °C, если ее масса $m = 0{,}10$ нг?

3.4.10 Во сколько раз средняя квадратичная скорость молекул водорода больше средней квадратичной скорости молекул водяных паров при той же температуре?

3.4.11 При какой температуре молекулы аргона имеют такую же среднюю квадратичную скорость, как молекулы гелия при температуре $T = 100$ К?

3.4.12 В сосуде объемом $V = 1$ дм^3 находится газ массой $m = 6$ г под давлением $p = 80$ кПа. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа.

3.4.13 Какова средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа, если известно, что его плотность $\rho = 30$ г/м^3, а давление p = 3,6 кПа?

3.4.14 В объеме $V = 1{,}0$ см^3 при давлении $p = 20$ кПа находится $N = 5{,}0 \cdot 10^{19}$ молекул гелия. Определить среднюю квадратичную скорость молекул при этих условиях.

3.4.15 Определить среднюю арифметическую скорость молекул газа, если известно, что средняя квадратичная скорость $v_{ср.кв} = 600$ м/с.

3.4.16 Найти наиболее вероятную скорость молекул метана и гелия при температуре $t = 127$ °С.

3.4.17 Какая часть молекул азота при температуре $t = 7$ °С обладает скоростями в интервале от $v_1 = 500$ м/с до $v_2 = 510$ м/с?

3.4.18 Какая часть молекул кислорода обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не более чем на $\Delta v = 10$ м/с, при температурах $t_1 = 0$ °С и $t_2 = 300$ °С?

3.4.19 Определить отношение числа молекул водорода, обладающих скоростями в интервале от $v_1 = 2{,}0$ км/с до $v_2 = 2{,}01$ км/с, к числу молекул, обладающих скоростями от $v_3 = 1{,}0$ км/с до $v_4 = 1{,}01$ км/с, если температура водорода $t = 0$ °С.

3.4.20 Определить высоту горы, если давление воздуха на ее вершине равно половине давления воздуха на уровне моря. Температуру считать всюду одинаковой и равной $t = 0$ °С.

3.4.21 На поверхности Земли барометр показывает $p_0 = 101$ кПа. Каково будет показание барометра при подъеме его на Останкинскую телевизионную башню, высота которой $h = 540$ м? Температуру считать всюду одинаковой и равной $t = 7$ °С.

3.4.22 При подъеме вертолета на некоторую высоту барометр, находящийся в его кабине, изменил свое показание на Δp = 11 кПа. На какой высоте летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал p_0 = 0,1 МПа? Температуру считать всюду одинаковой и равной t = 17 °С.

3.4.23 Каковы давление и концентрация молекул воздуха на высоте h = 2,0 км над уровнем моря? Давление на уровне моря p = 101 кПа, температура t = 10 °С. Изменением температуры с высотой пренебречь.

3.4.24 Пылинки массой $m = 1 \cdot 10^{-18}$ г взвешены в воздухе. Определить толщину слоя воздуха, в пределах которого концентрация пылинок различается не более чем на 1,0 %. Температуру воздуха во всем объеме считать одинаковой и равной t = 27 °С

3.4.25 У поверхности Земли молекул водорода почти в $1{,}0 \cdot 10^6$ раз меньше, чем молекул азота. На какой высоте число молекул водорода будет равно числу молекул азота? Среднюю температуру атмосферы принять равной t = 0 °С.

3.4.26 При повышении температуры идеального газа на ΔT = 150 К средняя квадратичная скорость его молекул увеличилась с v_1 = 400 м/с до v_2 = 500 м/с. На сколько необходимо нагреть этот газ, чтобы увеличить среднюю квадратичную скорость его молекул с v_2 = 500 м/с до v_3 = 600 м/с?

3.4.27 Два одинаковых сосуда, содержащих одинаковое количество молекул азота, соединены краном. В первом сосуде средняя квадратичная скорость молекул равна v_1 = 400 м/с, во втором v_2 = 500 м/с. Какая установится скорость молекул, если открыть кран, соединяющий сосуды? Потерями теплоты пренебречь.

3.4.28 В закрытом сосуде находится идеальный газ. Как изменится его давление, если средняя квадратичная скорость его молекул увеличится на 20 %?

3.4.29 Концентрация молекул некоторого газа при нормальных условиях равна $n = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Этот же газ при температуре t = 91 °С и давлении

p = 800 кПа имеет плотность ρ = 5,4 кг/м^3. Найти массу одной молекулы этого газа.

3.4.30 Средняя квадратичная скорость хаотического движения молекул кислорода, находящегося при нормальных условиях равна $v_{ср.кв}$ = 460 м/с. Масса молекулы m_0 = 5,3·10^{-26} кг. Какова средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул? Найти кинетическую энергию поступательного движения всех молекул, содержащихся в 1 м^3 при нормальных условиях.

4 Первое начало термодинамики

4.1 Основные формулы и понятия

Первое начало термодинамики утверждает, что количество тепла, сообщаемое системе, затрачивается на приращение внутренней энергии системы и совершение системой работы над внешними телами:

$$Q = U_2 - U_1 + A \tag{4.1}$$

или в дифференциальной форме

$$\delta Q = dU + \delta A, \tag{4.2}$$

где δQ и δA – означают, соответственно, элементарное количество тепла и элементарную работу.

Элементарная работа, совершаемая системой при бесконечно малом изменении объема, равна

$$\delta A = pdV. \tag{4.3}$$

Если при изменении объема меняется и давление, то работа, совершаемая при конечных изменениях объема, рассчитывается по формуле

$$A_{12} = \int\limits_{V_1}^{V_2} pdV. \tag{4.4}$$

Работа при изобарическом процессе

$$A = p\left(V_2 - V_1\right). \tag{4.5}$$

Работа при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{4.6}$$

Работа при адиабатическом процессе

$$A = \frac{m}{\mu} C_V \left(T_1 - T_2 \right), \tag{4.7}$$

или

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \tag{4.8}$$

Молярная теплоемкость измеряется количеством теплоты необходимой для нагревания одного моля вещества на один Кельвин

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT}, \tag{4.9}$$

где $\nu = \dfrac{m}{\mu}$ – число молей.

Молярная теплоемкость смеси газов, состоящей из n компонентов

$$C = \frac{C_1 \nu_1 + C_2 \nu_2 + \ldots + C_n \nu_n}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n}. \tag{4.10}$$

Удельная теплоемкость измеряется количеством теплоты необходимым для нагревания единицы массы вещества на один Кельвин

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}. \tag{4.11}$$

Удельная теплоемкость смеси газов, состоящей из n компонентов

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \tag{4.12}$$

Молярная теплоемкость газа при изохорическом процессе ($V = const$)

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \frac{iR}{2}. \qquad (4.13)$$

Молярная теплоемкость газа при изобарическом процессе ($p = const$)

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = C_V + R. \qquad (4.14)$$

Внутренняя энергия произвольной массы идеального газа

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} RT. \qquad (4.15)$$

Величина $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ (показатель адиабаты) представляет собой характерную для газа величину.

4.2 Методические указания

4.2.1 Приступая к решению задач по данной теме, прежде всего необходимо выяснить характер процесса (если об этом не сказано в условии задачи). Обычно это не вызывает затруднений в случаях изохорического ($V = const$) или изобарического ($p = const$) процессов.

4.2.2 Нужно иметь в виду, что для осуществления *изотермического* процесса ($T = const$) необходим достаточный теплообмен между газом и окружающей средой. Этому способствуют большая теплопроводность стенок сосуда, в котором заключен газ, и *медленное* протекание процесса.

4.2.3 Условием *адиабатического* процесса является отсутствие теплообмена между газом и окружающей средой. Это условие на практике выполняется тем точнее, чем меньше теплопроводность стенок сосуда, в котором содержится газ, и чем *быстрее* протекает процесс.

4.2.4 В *изохорическом* и *изобарическом* процессах количество теплоты, полученное газом, всегда связано с изменением температуры (см. формулу (4.9))

$$dQ = \nu C dT$$

При *изотермическом* и *адиабатическом* процессах не существует связи между приращением температуры газа и количеством теплоты, полученной им. В изотермическом процессе отсутствует изменение температуры (T = *const*), хотя газ при этом получает или отдает тепло. В адиабатическом процессе, наоборот, газ не получает и не отдает тепло (Q = 0), хотя при этом изменяется его температура.

4.2.5 Если процесс изохорический (V = const), то газ не совершает работы, следовательно, согласно (4.1) и (4.2), все тепло идет на приращение внутренней энергии газа

$$\delta Q = dU, \tag{4.16}$$

отсюда вытекает, что выражение для теплоемкости можно записать в виде

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \tag{4.17}$$

что бывает удобным при решении задач.

4.2.6 При решении ряда задач для расчета теплоемкости и внутренней энергии идеального газа удобно воспользоваться формулами

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \tag{4.18}$$

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} pV. \tag{4.19}$$

4.2.7 Выражение (4.4) справедливо для расчета работы при любых изменениях объема жидких и газообразных тел.

4.2.8 При решении задач удобно пользоваться уравнениями адиабатического процесса выраженными через различные термодинамические параметры

$$pV^{\gamma} = const,$$
$$TV^{\gamma-1} = const, \qquad (4.20)$$
$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const.$$

4.3 Примеры решения задач

Задача 1. Баллон емкостью V = 2,0 л заполненный кислородом при давлении p_1 = 100 ат и температуре t_1 = 7 ºС нагревается до t_2 = 27 ºС. Какое количество теплоты при этом поглотит газ?

Решение. Поскольку коэффициенты теплового расширения для твердых тел значительно меньше (приблизительно в 100 раз), чем для газа, то в условиях данной задачи расширением баллона можно пренебречь и считать процесс изохорическим.

Данную задачу можно решить двумя способами.

1. Для решения используем первое начало термодинамики. Поскольку при изохорическом процессе газ не совершает работу, из уравнения (4.1) получим

$$Q = \Delta U, \qquad (1)$$

то есть все сообщенное газу тепло идет на приращение его внутренней энергии. Из формулы (4.15), используя уравнение состояния, запишем

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT = \frac{i}{2}pV. \qquad (2)$$

Отсюда для изменения внутренней энергии получим выражение

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2}(p_2 - p_1)V = \frac{i}{2}p_1V\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right). \qquad (3)$$

Используя уравнение изохорического процесса $\left(\frac{p}{T}=const\right)$, выразим отношение давлений через отношение температур и запишем формулу (3) в виде

$$Q=\Delta U=\frac{i}{2}p_1V\left(\frac{T_2}{T_1}-1\right). \tag{4}$$

Молекула кислорода состоит из двух атомов и имеет пять степеней свободы ($i = 5$).

2. Из формулы (4.9) для молярной теплоемкости следует, что элементарное количество теплоты, сообщенное газу при повышении его температуры на dT, равно

$$dQ=\frac{m}{\mu}C_V dT$$

или, используя уравнение состояния,

$$dQ=\frac{i}{2}\frac{p_1V}{T_1}dT\ . \tag{5}$$

Интегрируя выражение (5), найдем полное количество теплоты поглощенное телом

$$Q=\frac{i}{2}\frac{p_1V}{T_1}\left(T_2-T_1\right). \tag{6}$$

Подставляя в полученные выражения (4) или (6) числовые данные условия задачи, выраженные в единицах СИ, получим

$$Q=3{,}5\cdot10^4\ \text{Дж} = 35\ \text{кДж}.$$

Задача 2. Два моля кислорода очень медленно переводятся из состояния 1 в состояние 2. Какое количество теплоты необходимо подвести к газу, если в координатах pV процесс изображается прямой линией (рисунок 3)? В состоянии 1 газ характеризуется параметрами: p_1 = 1 атм, V_1 = 24,6 л, T_1 = 300 К; в состоянии 2 – параметрами: $p_2 = 3p_1$, $V_2 = 2V_1$.

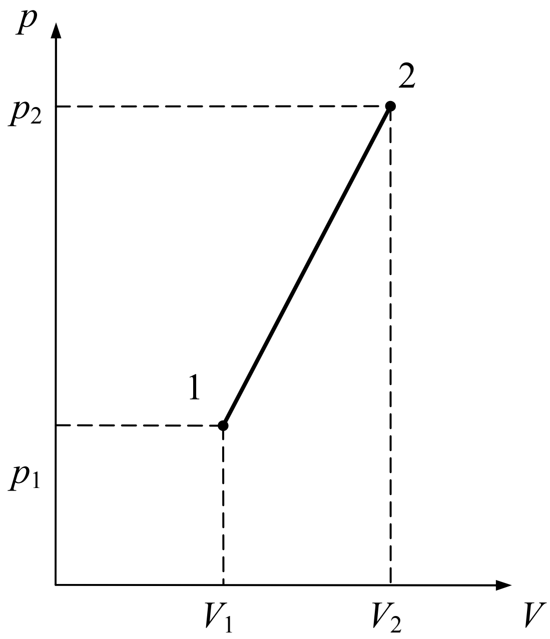

Рисунок 3

Решение. Количество теплоты Q, необходимое для перевода газа из состояния 1 в состояние 2, определяется из первого начала термодинамики

$$Q = \Delta U + A.$$

Изменение внутренней энергии идеального газа зависит только от изменения температуры (4.15) и не зависит от характера перехода из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T. \qquad (1)$$

Температура газа в состоянии 2 определяется из уравнения состояния идеального газа

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

откуда

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1},$$

или, как следует из условия задачи,

$$T_2 = T_1 \frac{3 p_1 2 V_1}{p_1 V_1} = 6 T_1. \qquad (2)$$

Молекула кислорода состоит из двух атомов и имеет пять степеней свободы ($i = 5$). Тогда формула изменения внутренней энергии (1) с учетом формулы (2) запишется в виде

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R \left(6 T_1 - T_1 \right) = \frac{25}{2} \frac{m}{\mu} R T_1 = \frac{25}{2} \nu R T_1. \qquad (3)$$

Работа, совершаемая газом, зависит от того, каким образом совершается переход газа из состояния 1 в состояние 2. Найти работу в данной задаче можно двумя способами.

1. Элементарная работа при бесконечно малом изменении объема рассчитывается по формуле (4.3)

$$\delta A = p dV.$$

В данной задаче между давлением и объемом задана линейная зависимость

$$p = b + aV,$$

где a и b – постоянные величины.

Следовательно, выражение для элементарной работы можно записать как

$$\delta A = \left(b + aV \right) dV. \qquad (4)$$

Интегрируя выражение (4), получим

$$A = b\left(V_2 - V_1\right) + \frac{1}{2}a\left(V_2^2 - V_1^2\right). \tag{5}$$

Постоянные a и b находим из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= b + aV_1 \\ p_2 &= b + aV_2 \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = \frac{2p_1}{V_1}; \quad b = -p_1 .$$

С учетом этих результатов выражение (5) примет вид

$$A = 2p_1V_1. \tag{6}$$

Подставляя выражения (3) и (6) в первое начало термодинамики, окончательно получим

$$Q = \frac{25}{2}\nu RT_1 + 2p_1V_1. \tag{7}$$

2. Второй способ – графический. Площадь под линией перехода из состояния 1 в состояние 2 численно равна работе газа

$$A = \frac{1}{2}\left(p_2 - p_1\right)\left(V_2 - V_1\right)$$

или, подставляя данные из условия задачи

$$A = 2p_1V_1.$$

Полное количество теплоты, которое получил газ равно сумме изменения внутренней энергии (3) и совершенной газом работе

$$Q = \frac{25}{2}\nu RT_1 + 2p_1V_1, \qquad (8)$$

что совпадает с формулой (7).

Подставляя в формулы (7) и (8) числовые данные из условия задачи, выраженные в единицах СИ, получим

$$Q = 674 \cdot 10^2 \text{ Дж.}$$

Задача 3. Углекислый газ (CO_2), начальная температура которого $T_1 = 300$ К, адиабатически сжимается до 1/20 своего первоначального объема. Определить изменение внутренней энергии и совершенную при этом работу, если масса газа $m = 20$ г.

Решение. Адиабатический процесс происходит без теплообмена с окружающей средой. Изменение внутренней энергии газа происходит за счет работы внешних сил. При этом согласно первому началу термодинамики (4.1)

$$Q = 0, \quad \Delta U = -A. \qquad (1)$$

Изменение внутренней энергии, согласно формуле (4.15), определяется как

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \left(T_2 - T_1\right). \qquad (2)$$

Так как молекулы углекислого газа CO_2 состоят из трех атомов ($i = 6$), то молярная теплоемкость при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{i}{2}R = \frac{6}{2}R = 3R. \qquad (3)$$

Из уравнения адиабатического процесса (4.20)

$$TV^{\gamma - 1} = const$$

определяем температуру газа после сжатия

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1}.$$

Найдем показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{6+2}{6} = \frac{4}{3}. \tag{4}$$

Тогда температура газа T_2 запишется в виде

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{1}{3}}. \tag{5}$$

Подставляя формулы (3) и (5) в выражение (2), предварительно вынося T_1 за скобки, получим

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} 3RT_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right]. \tag{6}$$

Подставляя в формулу (6) численные значения, выраженные в единицах СИ, получаем

$$|A| = |\Delta U| = 7{,}05 \text{ Дж.}$$

Задача 4. Один моль одноатомного идеального газа переходит из состояния 1 в состояние 2 одним из четырех путей, как показано на рисунке 4.

1. Процесс 1–3–2. Объем газа уменьшается при постоянном давлении от V_1 до V_2, а затем при постоянном объеме газу сообщают некоторое количество теплоты, в результате давление возрастает от p_1 до p_2.

2. Процесс 1–4–2. Сначала газу сообщают некоторое количество теплоты при постоянном начальном объеме V_1, а затем газ сжимают до объема V_2.

3. Процесс 1–2 (*I*). Изменение объема и передача газу теплоты происходят так, что давление меняется с изменением объема по линейному закону.

4. Процесс 1–2 (*II*). Изменение объема и давления газа происходят при его теплоизоляции.

Во всех случаях начальные и конечные объемы и давления газа даны на рисунке 4.

Считая процессы во всех четырех случаях квазистатическими найти работу, производимую газом; количество теплоты, полученное газом; изменение внутренней энергии газа.

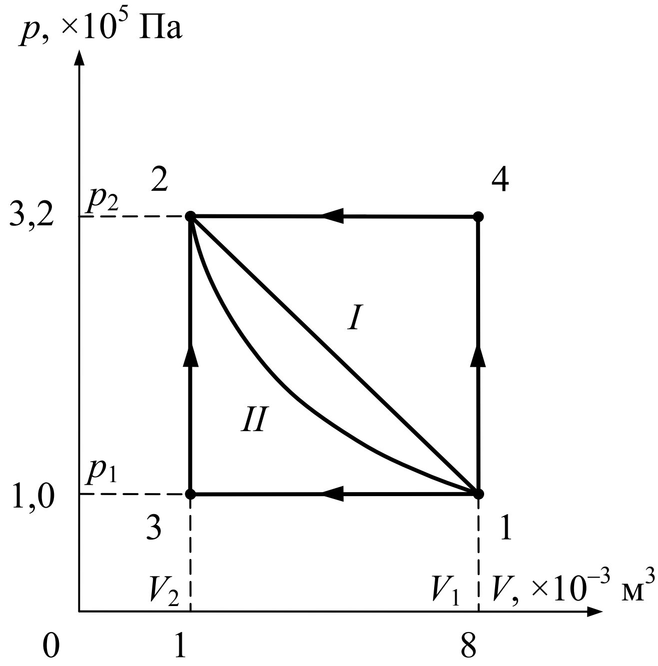

Рисунок 4

Решение. Внутренняя энергия газа есть функция состояния и ее изменение зависит только от начальной и конечной температур. Поэтому при всех переходах изменение внутренней энергии одинаково и равно

$$\Delta U = C_V\left(T_2 - T_1\right).$$

Начальная и конечная температуры газа могут быть найдены из уравнения состояния

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{R}, \qquad T_2 = \frac{p_2V_2}{R}.$$

Кроме того, $C_V = \frac{3}{2}R$, так как газ одноатомный.

Отсюда

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) = 9,2 \cdot 10^2 \text{ Дж.}$$

Работа во всех случаях равна

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} pdV.$$

1. Для перехода 1–3–2

$$A = p_1\left(V_2 - V_1\right) = -7 \cdot 10^2 \text{ Дж.}$$

2. Для перехода 1–4–2

$$A = p_2\left(V_2 - V_1\right) = -22,4 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

В этом случае совершается большая работа, чем в предыдущем случае, так как сжатие газа происходит при более высоком давлении.

В то же время, при переходах 1–4 и 3–2 работа не совершается и все подводимое тепло идет на увеличение внутренней энергии газа.

3. Переход 1–2 (*I*). Работа при переходе рассчитывается графически и численно равна площади треугольника 123 (рисунок 4)

$$A = \frac{1}{2}\left(p_2 - p_1\right)\left(V_2 - V_1\right) = -10,8 \cdot 10^2 \text{ Дж.}$$

4. Переход 1–2 (*II*). Работа сжатия при адиабатическом процессе идет на увеличение внутренней энергии

$$A = -\Delta U = C_V \left(T_1 - T_2\right) = \frac{3}{2}\left(p_1 V_1 - p_2 V_2\right) = 3,6 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Количество теплоты, подводимое к газу, подсчитывается по формуле

$$\Delta Q = C \Delta T ,$$

где C – теплоемкость того или иного процесса.

Найдем количество теплоты, полученное газом в различных процессах.

1. Для перехода 1–3–2

$$Q = C_p \left(T_3 - T_1\right) + C_V \left(T_2 - T_3\right),$$

где температура определяется из уравнения состояния $T = \dfrac{pV}{R}$ и, кроме того, $C_V = \dfrac{3}{2} R$ и $C_V = \dfrac{5}{2} R$.

Поэтому

$$Q = \frac{5}{2}\left(p_1 V_2 - p_1 V_1\right) + \frac{3}{2}\left(p_2 V_2 - p_1 V_2\right) =$$

$$= p_1 V_2 + \frac{3}{2} p_2 V_2 - \frac{5}{2} p_1 V_1$$

и

$$Q = 2,9 \cdot 10^3 \text{ Дж,}$$

соответственно

$$\Delta U = 3,6 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

2. Для перехода 1–4–2

$$Q = \Delta U - A ,$$

то есть

$$Q = -7,2 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

В этом случае за счет работы внешних сил происходит повышение внутренней энергии, а часть теплоты выделяется.

4. Система по условию теплоизолирована, $Q = 0$. Повышение внутренней энергии происходит только за счет работы внешних сил.

Задача 5. В цилиндре с плохо проводящими стенками, закрытом сверху легко скользящим поршнем, площадь которого равна S = 20 см^2 и масса $m_п$ = 2,0 кг, находится воздух, занимая объем V_1 = 1,0 л. На поршне лежит гиря массой $m_г$ = 8,0 кг (рисунок 5). Если быстро убрать гирю, воздух расширится и

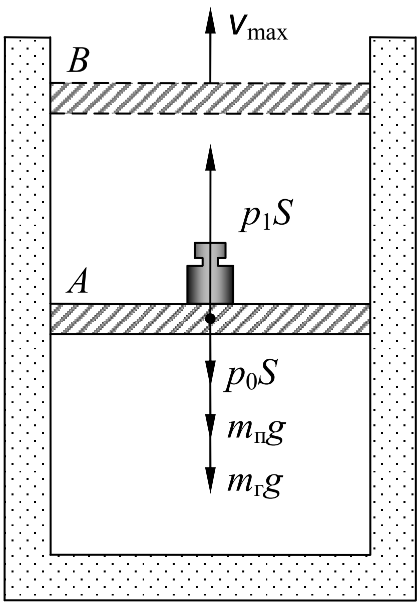

Рисунок 5

поднимет поршень. Определить работу расширения воздуха за время, в течение которого скорость поднимающегося поршня достигнет максимального значения v_{max}. Атмосферное давление p_0 принять равным 1 атм.

Решение. Учитывая, что по условию, воздух расширяется быстро, а стенки сосуда обладают плохой теплопроводностью (то есть можно пренебречь теплообменом между воздухом в цилиндре и окружающей средой), процесс расширения воздуха можно считать адиабатическим.

Из условия задачи, легко определить начальное давление p_1 воздуха в цилиндре. На поршень в положении *A* действуют три силы, направленные вниз: сила тяжести поршня $m_п g$, вес гири $m_г g$, сила атмосферного давления $p_0 S$ и сила давления воздуха под поршнем $p_1 S$, направленная вверх. Из условия равновесия поршня запишем

$$p_1 S = m_п g + m_г g + p_0 S,$$

откуда

$$p_1 = \frac{(m_п + m_г)g}{S} + p_0 = 1{,}47 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Из условия задачи можно определить давление p_2 воздуха под поршнем в момент, когда скорость поднимающегося поршня достигнет максимума (положение *B*). Непосредственно после снятия гири с поршня сила давления воздуха на поршень снизу больше суммы сил ($m_п g$ + $p_0 S$), действующих на поршень сверху. Через некоторый промежуток времени, в течение которого поршень двигался ускоренно, наступит равновесие сил, приложенных к поршню. В этот момент скорость поршня достигает максимального значения. При дальнейшем движении поршня равнодействующая сил приложенных к нему направлена вниз и скорость поршня уменьшается.

Таким образом, из условия равновесия сил, соответствующего максимуму скорости, следует

$$p_2 S = m_п g + p_0 S,$$

откуда

$$p_2 = \frac{m_п g}{S} + p_0 = 1{,}08 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Зная начальное p_1 и конечное p_2 давления воздуха в адиабатическом процессе, а также начальный объем V_1, работу расширения газа можно найти по формуле (4.8)

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]. \qquad (1)$$

В формуле (1) неизвестное отношение объемов выразим через отношение давлений, используя уравнение адиабатического процесса (4.20)

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1}, \qquad \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}},$$

и вместо (1) запишем

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right]. \qquad (2)$$

Принято считать воздух двухатомным газом, то есть для него $i = 5$, значит

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i + 2}{2} = \frac{7}{2} = 1{,}4\,.$$

Подставляя в формулу (2) числовые данные из условия задачи, выраженные в единицах СИ, получим

$$A = 30 \text{ Дж.}$$

4.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы

4.4.1 Удельная теплоемкость при постоянном давлении некоторого газа $c_p = 970$ Дж/(кг·К), молярная масса $\mu = 0,03$ кг/моль. Определить, каким числом степеней свободы обладают молекулы этого газа.

4.4.2 Разность между удельными теплоемкостями при постоянном давлении и постоянном объеме некоторого газа равна 260 Дж/(кг·К). Определить молярную массу данного газа.

4.4.3 Плотность некоторого газа при нормальных условиях $\rho = 1,25$ кг/м^3. Отношение удельных теплоемкостей $\frac{c_p}{c_V} = 1,4$. Определить удельные теплоемкости c_p и c_V этого газа.

4.4.4 Определить γ для газовой смеси, состоящей из водорода массой $m_1 = 4,0$ г и углекислого газа массой $m_2 = 22,0$ г.

4.4.5 Определить удельные теплоемкости c_p и c_V смеси, состоящей из азота в количестве $\nu_1 = 1$ моль, метана в количестве $\nu_2 = 4$ моль и аргона массой $m_3 = 8,0$ г.

4.4.6 Воздух содержит 25 % водяного пара. Считая сухой воздух двухатомным газом с молярной массой $\mu = 0,029$ кг/моль, определить удельную теплоемкость влажного воздуха при постоянном давлении.

4.4.7 Найти удельные теплоемкости воздуха теплоемкости c_p и c_V, считая, что в его составе находится: азот – 76 %, кислород – 23 %, аргон – 1 %.

4.4.8 Количество теплоты, необходимое при нагревании газа на $\Delta T_1 = 25$ К при постоянном давлении, равно $Q_1 = 500$ Дж, а количество теплоты, выделяемое при охлаждении того же газа на $\Delta T_1 = 75$ К при постоянном объеме, равно $Q_2 = 1,07$ кДж. Определить γ данного газа.

4.4.9 В закрытом сосуде вместимостью $V = 20$ дм^3 содержится одноатомный газ, плотность которого $\rho = 0,20$ кг/м^3. Количество теплоты, необходимое для нагревания газа на $\Delta T = 80$ К при этих условиях, равно $Q = 997$ Дж. Найти молярную массу этого газа.

4.4.10 Газ, для которого $\frac{c_p}{c_V} = \frac{4}{3}$, находится под давлением p = 0,20 МПа и занимает объем V_1 = 3,0 дм^3. В результате изобарного нагревания объем газа увеличивается в 3 раза. Определить количество теплоты, переданное газу.

4.4.11 Закрытый баллон вместимостью V = 0,80 м^3 заполнен азотом под давлением p = 2,3 МПа при температуре t = 20 °С. Количество теплоты, переданное газу, равно Q = 4,6 МДж. Определить температуру и давление газа в конце процесса.

4.4.12 В цилиндре диаметром d = 40 см содержится двухатомный газ объемом V = 80 дм^3. На сколько следует увеличить нагрузку на поршень при подводе количества теплоты Q = 84 Дж, чтобы поршень не пришел в движение?

4.4.13 Двухатомный газ, находящийся при температуре t = 250 °С, сжимают изотермически так, что его объем уменьшается в 3 раза. Затем газ расширяется адиабатически до начального давления. Найти температуру газа в конце адиабатического расширения.

4.4.14 Двухатомный газ, находящийся при температуре t = 22 °С, адиабатически сжимают так, что его давление возрастает в 2 раза, а затем охлаждают при постоянном объеме до начального давления. Вычислить конечную температуру газа.

4.4.15 Углекислый газ массой m = 4,4 г под давлением p = 0,10 МПа при температуре t = 87 °С адиабатически сжимают до 1/20 его начального объема. Определить конечную температуру и давление газа, приращение внутренней энергии и работу, совершенную газом.

4.4.16 При уменьшении объема кислорода от V_1 = 20 дм^3 до V_2 = 10 дм^3 его давление возросло от p_1 = 0,10 МПа до p_2 = 0,25 МПа. Каково приращение внутренней энергии газа?

4.4.17 В результате адиабатического расширения кислорода массой m = 3,2 г, находящегося при температуре t_1 = 20 °С, давление уменьшилось от p_1 = 1,0 МПа до p_2 = 0,38 МПа. Определить: 1) во сколько раз увеличился объем; 2) температуру в конце процесса; 3) какое количество теплоты необходимо сообщить газу при постоянном объеме, для того чтобы температура снова повысилась до 20 °С; 4) какое при этом установится давление.

4.4.18 В цилиндре под поршнем находится двухатомный газ в количестве $\nu = 1$ мол при температуре t = 27 °С. Сначала газ расширяется адиабатически так, что его объем увеличивается в 5 раз, а затем сжимается изотермически до первоначального объема. Определить совершенную газом работу.

4.4.19 Воздух массой m = 0,5 кг изотермически сжимают от давления p_1 = 0,10 МПа до p_2 = 1,0 МПа, при этом совершается работа A = 103 кДж. В конце сжатия при постоянном давлении к воздуху подводится количество теплоты, равное отведенному ранее при изотермическом сжатии. Определить температуру и объем в конце каждого из этих процессов.

4.4.20 Газ объемом V = 50 дм^3, находящийся под давлением p = 0,30 МПа, нагревают при постоянном объеме до тех пор, пока давление его увеличится в 2 раза, после чего газ изотермически расширяется до первоначального давления, и, наконец, его охлаждают при постоянном давлении до первоначального объема. Определить работу, совершенную газом в каждом из этих процессов.

4.4.21 Волейбольный мяч массой m = 200 г и объемом V = 8,0 дм^3 накачан до избыточного давления p = 20 кПа. Мяч был подброшен на высоту h = 20 м и после падения на твердый грунт подскочил почти на ту же высоту. Оценить максимальную температуру воздуха в мяче в момент удара о грунт.

4.4.22 Цилиндр закрыт свободно двигающимся поршнем. Объем V = 38 см^3 под цилиндром заполнен воздухом при нормальных условиях. На поршень падает груз массой m = 1,5 кг с высоты h = 0,50 м. Определить температуру воздуха после его сжатия упавшим грузом, считая сжатие адиабатическим процессом.

4.4.23 Неподвижный баллон содержит углекислый газ объемом V = 20 дм^3 под давлением p = 3,0 МПа при температуре t = 27 °С. С какой скоростью начнет двигаться баллон, если открыть выпускной вентиль? Масса баллона m = 20 кг.

4.4.24 При изобарическом нагревании газа от T_1 = 288 К до T_2 = 340 К потребовалось количество теплоты, равное Q_p = 5 кДж, при изохорическом Q_V = 3,56 кДж. Какой объем занимает газ при температуре T_1 = 288 К и давлении p = 19,6 кПа?

5 Второе начало термодинамики. Энтропия

5.1 Основные формулы и понятия

Круговым процессом или циклом называется такой термодинамический процесс, после которого рабочее тело возвращается в исходное состояние. Работа, совершаемая рабочим телом при круговом процессе, равна

$$A = Q_1 - Q_2, \tag{5.1}$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом,

Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом холодильнику.

Термический КПД η характеризует степень использования теплоты при превращении ее в работу или, другими словами, эффективность цикла по которому работает тепловой двигатель

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \tag{5.2}$$

Термический КПД обратимого цикла Карно равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{5.3}$$

где T_1 – температура нагревателя,

T_2 – температура холодильника.

Энтропией системы называют величину

$$S = k \ln \Omega, \tag{5.4}$$

где k – постоянная Больцмана,

Ω – статистический вес состояния.

Приращение энтропии системы

$$dS \geq \int \frac{\delta Q}{T}. \tag{5.5}$$

В формуле (5.5) знак неравенства относится к необратимым процессам, а знак равенства – к обратимым процессам.

Основное соотношение термодинамики

$$TdS \geq dU + pdV \,. \tag{5.6}$$

Свободная энергия выражается как

$$F = U - TS \,. \tag{5.7}$$

Абсолютная температура системы определяется из условия

$$\frac{1}{kT} = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} \,. \tag{5.8}$$

5.2 Методические указания

5.2.1 В этом разделе будут рассмотрены задачи связанные с циклическими процессами, обратимым циклом Карно и задачи на расчет изменения энтропии.

5.2.2 При решении задач связанных с циклическими процессами используются соотношения из параграфов 1, 2, 3 и первое начало термодинамики. К ним следует добавить несколько удобных при решения задач соотношений. Так из формулы (5.3) следует, что

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \,,$$

или

$$\frac{Q}{T} = const \,. \tag{5.9}$$

Приведенная теплота $\frac{Q}{T}$ для любых изотермических переходов между двумя адиабатами остается постоянной величиной.

5.2.3 При решении задач на расчет изменения энтропии используются два ее важнейших свойства: энтропия является функцией состояния системы; энтропия сложной системы равна сумме энтропий ее частей.

5.2.4 Следует помнить, что энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не уменьшается – она возрастает при необратимых процессах и остается постоянной в случае обратимых процессов.

5.2.5 Изменение энтропии в любом обратимом процессе, переводящем систему из состояния A в состояние B, рассчитывается по формуле (5.5), которую, в данном случае, удобнее записать в виде

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}, \tag{5.10}$$

где dQ – элементарное количество теплоты, полученное системой в ходе обратимого процесса.

При этом речь идет о неизолированной системе, поэтому ее энтропия не обязана сохраняться в ходе обратимого процесса.

5.2.6 Способ расчета изменения энтропии в необратимом процессе и его обоснование будет рассмотрен на примере задачи 6.

5.3 Примеры решения задач

Задача 1. В медном калориметре массой m_1 = 1 кг содержится вода при температуре t_1 = 7 ºС. Масса воды m_2 = 3 кг. В калориметр погрузили тело из алюминия массой m_3 = 0,5 кг, имеющий температуру t_2 = 77 ºС. Найти изменение энтропии системы при установлении равновесной температуры.

Решение. Так как энтропия величина аддитивная, то общее изменение энтропии системы взаимодействующих тел равно сумме изменений энтропий этих тел. В данной задаче взаимодействуют три тела: сосуд калориметра, вода и алюминиевое тело. Потому

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 . \tag{1}$$

Согласно формулы (5.5) изменение энтропии равно

$$\Delta S = \int_{T_1}^{\theta} \frac{dQ}{T}, \tag{2}$$

где θ – конечная температура (температура равновесия системы тел).

Сосуд калориметра и вода нагреваются от начальной температуры T_1 до температуры теплового равновесия системы тел θ, а алюминиевое тело охлаждается от температуры T_2 до температуры θ. Следовательно,

$$\Delta S = \int_{T_1}^{\theta} \frac{dQ_1}{T} + \int_{T_1}^{\theta} \frac{dQ_2}{T} + \int_{T_2}^{\theta} \frac{dQ_3}{T}, \tag{3}$$

где $dQ_1 = c_1 m_1 dT$;

$dQ_2 = c_2 m_2 dT$;

$dQ_3 = c_3 m_3 dT$;

c_1, c_2, c_3 – соответствующие удельные теплоемкости тел, входящих в систему.

Конечную температуру процесса находим из уравнения теплового баланса системы

$$m_1 c_1 (\theta - T_1) + m_2 c_2 (\theta - T_1) = m_3 c_3 (T_2 - \theta). \tag{4}$$

Решая уравнение (4) относительно θ и подставляя данные из условия задачи, а также табличные значения удельных теплоемкостей меди, воды и алюминия, получим величину θ = 282,3 К.

После подстановки выражений для dQ_1, dQ_2, dQ_3 в выражение (3) и проведения интегрирования (интегралы табличные) получим

$$\Delta S = \left(c_1 m_1 + c_2 m_2\right) \ln \frac{\theta}{T_1} + c_3 m_3 \ln \frac{T_2}{\theta}. \qquad (5)$$

Подставляя в выражение (5) числовые значения и производя вычисления, находим

$$\Delta S = -5,58 \text{ Дж}\cdot\text{К}^{-1}.$$

Задача 2. Рабочим телом в цикле Карно является воздух, масса которого $m = 7,25$ кг. Состояние 1 (рисунок 6) характеризуется параметрами $p_1 = 21\cdot10^5$ Па и $T_1 = 505,4$ К, а состояние 3 – параметрами $p_3 = 2,67\cdot10^4$ Па и $T_3 = 252,7$ К. Определить: полезную работу, совершаемую за 1 цикл; изменение энтропии нагревателя и холодильника; коэффициент полезного действия.

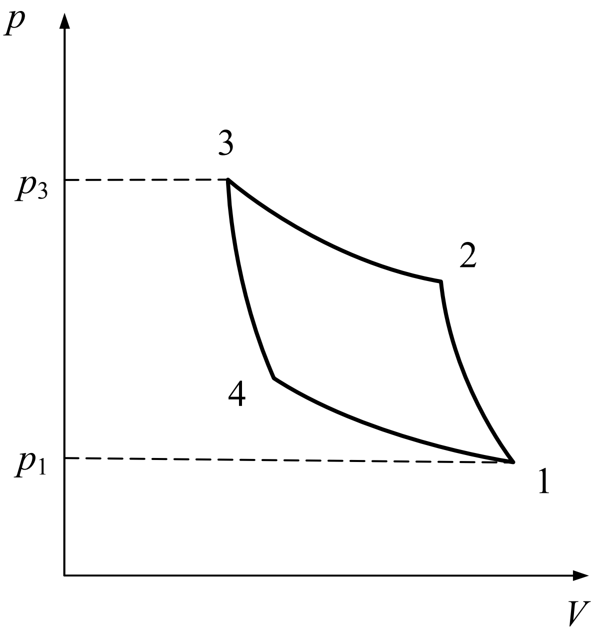

Рисунок 6

Решение. Цикл Карно – квазистатический процесс, в котором рабочее тело приводят в тепловой контакт с нагревателем и холодильником, имеющими соответственно температуру T_1 и T_3.

Работа, совершаемая рабочим телом в тепловой машине, определяется выражением (5.1)

$$A = Q_1 - Q_2, \tag{1}$$

где Q_1 – количество теплоты, полученной рабочим телом от нагревателя,

Q_2 – количество теплоты, отданное холодильнику.

При работе машины по циклу Карно, рабочее тело на участке 1–2 (при изотермическом расширении) получает теплоту

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}, \tag{2}$$

а на участке 3–4 (при изотермическом сжатии) отдает теплоту

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} R T_3 \ln\frac{V_3}{V_4}. \tag{3}$$

Работа газа за 1 цикл равна

$$A = \frac{m}{\mu} R\left(T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - T_3 \ln\frac{V_3}{V_4}\right). \tag{4}$$

Найдем объемы газа в узловых точках цикла. Для состояний в точках 1 и 3 даны два параметра – давление и температура. Используя уравнение состояния газа для этих точек

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

находим

$$V_1 = 0{,}5 \text{ м}^3, \qquad V_2 = 19{,}8 \text{ м}^3.$$

Используя уравнения (4.20) адиабатического расширения газа (участок 2–3) и адиабатического сжатия (участок 4–1), получаем

$$T_1V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1},$$
$$T_3V_4^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}. \qquad (5)$$

Подставляя в уравнения (5) числовые значения, находим

$$V_2 = 3{,}5\ \text{м}^3, \qquad V_4 = 2{,}83\ \text{м}^3.$$

При расчете учтено, что воздух состоит из двухатомных молекул.

Подставив в (4) значения всех величин, рассчитаем работу, совершаемую рабочим телом за 1 цикл

$$A = 1021{,}8\ \text{кДж}.$$

Определим изменения энтропии нагревателя и холодильника. Процессы 2–3 и 4–1 являются изоэнтропийными. Изменение энтропии нагревателя равно по модулю и противоположно по знаку изменению энтропии газа при изотермическом процессе 1–2

$$\Delta S_{\text{нагр}} = \int \frac{dQ_{12}}{T_1} = -\frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Аналогично находим изменение энтропии холодильника

$$\Delta S_{\text{хол}} = -\frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Произведя расчеты, получаем

$$\Delta S_{\text{нагр}} = \Delta S_{\text{хол}} = 4043{,}6\ \text{Дж/К}.$$

Коэффициент полезного действия тепловой машины (5.2)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Для цикла Карно, учитывая (2) и (3), находим

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 0,5\,.$$

Задача 3. Камень массой m = 10 кг упал с высоты h = 20 м на землю. Температура камня и окружающей среды t = 20 °С. Определить изменение энтропии системы камень – Земля.

Решение. Падение камня – процесс необратимый. Изменение энтропии можно найти, используя основное соотношение термодинамики (5.6)

$$TdS \geq dU + A\,. \tag{1}$$

По условию задачи температура, следовательно, и внутренняя энергия не изменяются (ΔU = 0). Работа A равна изменению потенциальной энергии системы камень – Земля

$$A = \Delta E_{\text{сист}} = mgh\,. \tag{2}$$

Исходя из этого

$$TdS = mgh\,. \tag{3}$$

Так как температура (по условию задачи) не меняется, можно провести расчет энтропии по обратимому изотермическому процессу. Именно поэтому в формуле (3) стоит знак равенства.

После подстановки числовых данных из условия задачи

$$\Delta S = \frac{mgh}{T}, \qquad \Delta S = 6,89 \text{ Дж/К}.$$

Задача 4. В баллоне объемом V = 500 л находится воздух под давлением $p_1 = 50 \cdot 10^5$ Па, температура воздуха в баллоне равна температуре окружающей среды t = 20 °С. Какую максимальную работу может совершить сжатый воздух при его изотермическом расширении? Атмосферное давление $p_2 = 10^5$ Па.

Решение. Согласно выражению (5.6) запишем

$$TdS = dU + pdV\ , \tag{1}$$

где pdV – работа, затраченная на вытеснение атмосферного воздуха,

TdS – энергия полученная газом от окружающей среды при его изотермическом расширении.

Так как процесс изотермический, то $dU = 0$, и для полной работы при изотермическом расширении можно записать

$$dA = TdS - pdV\ ,$$

или, переходя к конечным приращениям,

$$\Delta A = T\Delta S - p\Delta V\ . \tag{2}$$

В нашем случае изотермического процесса (смотри задачу 2)

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln\frac{p_1}{p_2}, \tag{3}$$

или, учитывая что

$$m = \frac{\mu p_1 V_1}{RT_1},$$

запишем выражение (3) в виде

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1}\ln\frac{p_1}{p_2}. \tag{4}$$

Приращение объема найдем используя уравнение изотермического процесса $pV = const$

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2}, \qquad V_2 = 25\ \text{м}^3.$$

Подставляя данные из условия задачи и результаты предварительных расчетов в выражение (2), найдем значение работы

$$A = 8245 \text{ кДж}.$$

Задача 5. Сосуд объемом V_0 разделен перегородкой на две части с объемами $V_1 = \frac{2}{3}V_0$ и $V_2 = \frac{1}{3}V_0$. В большей части сосуда находится ν = 0,1 моль идеального газа; в меньшей – создан высокий вакуум. Определить изменение энтропии при удалении перегородки.

Решение. При расширении идеального газа в вакуум его внутренняя энергия не изменяется, зато увеличивается доступный каждой молекуле объем в $\frac{V_0}{V_1}$ раз.

Число доступных молекуле состояний пропорционально объему сосуда V_0; поэтому число доступных состояний одной молекулы увеличивается в $\frac{V_0}{V}$ раз. Так как в сосуде N молекул, то число доступных всем молекулам состояний увеличится в $\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^N$ раз. Таким образом, конечное число доступных состояний Ω_0 связано с начальным числом доступных состояний Ω, соотношением

$$\Omega_0 = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^N \Omega_1. \qquad (1)$$

Поскольку число молекул N велико, то из уравнения (1) следует, что даже если новый объем V_0 незначительно больше объема V_1, имеет место соотношение $\Omega_0 \gg \Omega_1$.

Энтропия системы связана с числом доступных состояний формулой (5.4)

$$S = k \ln \Omega .$$

Изменение энтропии равно

$$\Delta S = S_0 - S_1 = k\left(\ln \Omega_0 - \ln \Omega_1\right) = k \ln \frac{\Omega_0}{\Omega_1} . \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что искомое изменение энтропии равно

$$\Delta S = k \ln \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^N = kN \ln \frac{V_0}{V_1} . \qquad (3)$$

Подставляя в (3) данные задачи и учитывая, что $N = 0{,}1N_0$, где $N_0 = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, получим

$$\Delta S = 0{,}34 \text{ Дж/К.}$$

Таким образом, удаление перегородки является примером необратимого процесса, приводящего к увеличению числа доступных состояний и, следовательно, к увеличению энтропии.

Задача 6. Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой, в которой имеется закрывающееся отверстие. В одной половине сосуда содержится m = 10,0 г водорода. Вторая половина откачана до высокого вакуума. Отверстие в перегородке открывают, и газ заполняет весь объем. Считая газ идеальным, найти приращение энтропии.

Решение. Расширение газа здесь является необратимым процессом. Формулой (5.10) здесь воспользоваться нельзя, так как газ теплоизолирован ($dQ = 0$) и система замкнутая. В то же время, по определению, энтропия газа при необратимом процессе должна возрастать. Поэтому, воспользуемся тем, что энтропия – функция состояния системы и ее изменение полностью определяется начальным и конечным состояниями системы, независимо от вида процесса, в ходе которого система перешла из начального состояния в конечное.

Исходя из этого, найдем такой процесс расширения газа, который переводил бы его в то же самое конечное положение, но являлся бы обратимым. Затем, найдя по формуле (5.10) приращение энтропии в таком обратимом процессе, мы решим поставленную задачу.

Так как данный газ теплоизолирован от окружающей среды ($dQ = 0$) и не совершает работы против внешних сил ($A = 0$, так как газ расширяется в вакуум), то его внутренняя энергия U, согласно первому закону термодинамики, должна оставаться постоянной. При этом согласно формуле (4.15), будет оставаться постоянной и температура газа. Исходя из сказанного, в качестве обратимого процесса переводящего газ в то же конечное состояние, можно рассматривать процесс обратимого изотермического расширения, в ходе которого объем газа увеличивается в два раза.

Так как в этом процессе $T = const$ и, следовательно, $Q = A$ (подобный случай рассмотрен в задачах 2 и 4), то получаем изменение энтропии

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{1}{T}\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}R\ln 2 .$$

Подставляя в эту формулу числовые данные из условия задачи, выраженные в единицах СИ, получим

$$\Delta S = 29 \text{ Дж/К}.$$

5.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы

5.4.1 Газ, совершающий цикл Карно, 3/4 теплоты, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Температура холодильника t = 0 °С. Определить температуру нагревателя.

5.4.2 КПД паровой машины составляет 50% от КПД идеальной тепловой машины, которая работает по циклу Карно в том же интервале температур. Температура пара, поступающего из котла в паровую машину t_1 = 227 °С, температура в конденсоре t_2 = 77 °С. Определить мощность паровой машины, если она за 1 ч потребляет уголь массой m = 200 кг с теплотворной способностью q = 31 МДж/кг.

5.4.3 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, имеет температуру нагревателя t_1 = 227 °С, температуру холодильника t_2 = 127 °С. Во сколько раз нужно увеличить температуру нагревателя, чтобы КПД машины увеличился в 3 раза?

5.4.5 Двухатомный газ совершает цикл Карно. Определить КПД цикла, если известно, что на каждый моль этого газа при его адиабатном сжатии затрачивается работа A = 2,0 кДж. Температура нагревателя t_1 = 127 °С.

5.4.6 Наименьший объем газа, совершающего цикл Карно V_1 = 12 дм^3. Определить наибольший объем, если объем газа в конце изотермического расширения V_2 = 60 дм^3, в конце изотермического сжатия V_3 = 19 дм^3.

5.4.7 Газ, совершающий цикл Карно, КПД которого 25%, при изотермическом расширении производит работу A = 240 Дж. Какова работа, совершаемая газом при изотермическом сжатии?

5.4.8 Двухатомный газ совершает цикл Карно, причем при изотермическом расширении его объем увеличивается в 2 раза, а при последующем адиабатном расширении он производит работу A = 300 кДж. Определить работу, совершаемую газом за один цикл.

5.4.9 Идеальный двухатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление в 3 раза больше наименьшего, а наибольший объем в 5 раз больше наименьшего. Определить КПД цикла.

5.4.10 Идеальный трехатомный газ нагревают при постоянном объеме так, что его давление возрастает в 2 раза. После этого газ изотермически расширяется до начального давления и затем изобарно сжимается до начального объема. Определить КПД цикла.

5.4.11 Идеальный трехатомный газ нагревают при постоянном объеме так, что его давление возрастает в 2 раза. После этого газ адиабатно расширяется до начального давления и затем изобарно сжимается до начального объема. Определить КПД цикла.

5.4.12 До какой температуры нужно довести кислород массой m = 4,0 кг, находящийся при температуре t = 227 °C, не меняя его объема, чтобы уменьшить энтропию кислорода на ΔS = 1,31 кДж/К?

5.4.13 При нагревании аргона массой m = 8,0 г его абсолютная температура увеличилась в 2 раза. Определить приращение энтропии при 1) изохорном и 2) изобарном нагревании.

5.4.14 Гелий в количестве ν = 1 моль, изобарно расширяясь, увеличил свой объем в 4 раза. Найти приращение энтропии при этом расширении.

5.4.15 В результате изотермического сжатия воздуха объемом V = 887 дм^3, находящегося при температуре t = 30 °C и начальном давлении p = 0,10 МПа, его энтропия уменьшилась на ΔS = 673 Дж/К. Определить объем воздуха в конце процесса.

5.4.16 Определить приращение энтропии углекислого газа массой m = 1,0 кг в процессе сжатия от давления p_1 = 0,20 МПа при температуре t_1 = 40 °C до давления p_2 = 4,5 МПа при температуре t_2 = 253 °C.

5.4.17 Кислород массой m = 1,0 кг при давлении p_1 = 0,50 МПа и температуре t = 127 °C, изобарно расширяясь, увеличивает свой объем в 2 раза, а затем сжимается изотермически до давления p_2 = 4,0 МПа. Определить суммарное приращение энтропии.

5.4.18 Воздух массой $m = 1{,}0$ кг сжимают адиабатически так, что его объем уменьшается в 6 раз, а затем при постоянном объеме давление возрастает в 1,5 раза. Определить приращение энтропии в этом процессе.

5.4.19 Определить приращение энтропии при смешении азота массой $m_1 = 3{,}0$ кг и углекислого газа массой $m_2 = 2{,}0$ кг. Температуры и давления газов до смешения одинаковы.

5.4.20 Два баллона с кислородом вместимостями $V_1 = 2{,}0$ дм^3 и $V_2 = 4{,}0$ дм^3 соединены трубкой с краном. Начальные температуры в обоих баллонах одинаковы и равны $t = 27$ °C. Давление в первом баллоне $p_1 = 0{,}10$ МПа, во втором баллоне $p_2 = 0{,}60$ МПа. Найти приращение энтропии системы после открывания крана, если вся система заключена в теплоизолирующую оболочку.

5.4.21 Два баллона с воздухом вместимостями $V_1 = 0{,}50$ м^3 и $V_2 = 1{,}0$ м^3 соединены трубкой с краном. В первом баллоне находится воздух массой $m_1 = 3{,}0$ кг при температуре $t_1 = 27$ °C, во втором воздух массой $m_2 = 5{,}0$ кг при температуре $t_2 = 57$ °C. Найти приращение энтропии системы после открывания крана и достижения равновесного состояния, если вся система теплоизолирована.

6 Реальные газы

6.1 Основные формулы и понятия

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса) для ν молей газа

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V_0^2}\right)\left(V_0 - \nu b\right) = \nu RT \qquad (6.1)$$

где $\frac{a}{V_0^2}$ – внутреннее давление, обусловленное силами притяжения между молекулами, b – поправка на собственный объем молекул; значения величин a и b находятся из таблиц.

Параметры одного моля газа в критическом состоянии определяются постоянными a и b

$$T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27bR}; \qquad V_{\text{кр}} = 3b; \qquad p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}. \qquad (6.2)$$

Из уравнений (6.2) вытекает, что в критической точке

$$p_{\text{кр}} V_{\text{кр}} = \frac{3}{8} R T_{\text{кр}}. \qquad (6.3)$$

Соотношение (6.3) полезно при решении задач, так как оно одинаково для всех реальных газов.

Уравнение состояния одного моля реального газа в приведенной форме

$$\left(\gamma + \frac{3}{\varphi^2}\right)\left(3\varphi - 1\right) = 8\tau, \qquad (6.4)$$

где приведенные параметры равны

$$\gamma = \frac{p}{p_{\text{кр}}}; \qquad \varphi = \frac{V}{V_{\text{кр}}}; \qquad \tau = \frac{T}{T_{\text{кр}}}. \qquad (6.5)$$

Изменение температуры при дросселировании реального газа в объем с небольшим давлением

$$\Delta T = \frac{RT_1 b}{(V_1 - b)C_p} - \frac{2a}{V_1 C_p}, \tag{6.6}$$

где T_1 и V_1 – начальные температура и объем газа,

C_p – молярная теплоемкость газа при $p = const$.

Внутренняя энергия одного моля реального газа равна

$$U = C_V T - \frac{a}{V}. \tag{6.7}$$

6.2 Методические указания

6.2.1. В данном разделе будут рассматриваться процессы в реальных газах при температуре T не ниже критической $T_{кр}$.

Обычно в условии задачи оговариваются те случаи, когда газ необходимо рассматривать как реальный. В противном случае следует выяснить этот вопрос, чтобы из двух уравнений состояний газа – Клапейрона-Менделеева и Ван-дер-Ваальса – выбрать одно для решения поставленной задачи. При этом газ следует считать реальным прежде всего в тех случаях, когда он очень сильно сжат по сравнению с газом при нормальных условиях (задача 4).

6.2.2. Если из условия задачи нельзя сразу определить с каким газом приходится иметь дело, то надо найти его молярный объем V_0 и сравнить его с молярным объемом, занимаемым любым газом при нормальных условиях $V_{0норм} = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль. Если $V_0 \geq V_{0норм}$, то его, без большой погрешности, можно считать идеальным. Если $V_0 \leq V_{0норм}$, то газ следует считать реальным. В ряде случаев, собственный объем молекул можно определить из соотношения

$$b = N_A \frac{2}{3} \pi d^3, \tag{6.8}$$

где d – диаметр молекул.

6.2.3. Если в задаче неизвестной величиной являются объем или масса, то критерием выбора может служить величина давления p. При давлении не превышающем атмосферное, газ будет достаточно разрежен и его можно считать идеальным (если температура не очень низка по сравнению с нормальной $t_0 = 0$ °C). При давлении $p >> p_0$ газ будет сильно уплотнен и его следует считать реальным (если его температура не очень высока по сравнению с t_0).

6.2.4. При решении задач бывает удобно воспользоваться приведенным уравнением (6.4), где переменные выражены через критические параметры (6.5) . В уравнение (6.4) не входят постоянные a и b, зависящие от природы газа, следовательно это уравнение одинаково для любых газов. Это утверждение называется *законом соответственных состояний*.

6.2.5. Необходимо помнить, что паром называется газ, находящийся при температуре ниже критической. В зависимости от того, насколько пар уплотнен (сжат) он подчиняется уравнению состояния идеального газа (при малых плотностях) или уравнению состояния реального газа (при больших плотностях). При этом критерий уплотнения остается тем же, что и для любого газа.

6.3 Примеры решения задач

Задача 1. В баллоне емкостью $V = 8$ л находится $m = 0{,}3$ кг кислорода при температуре $t = 27$ °C. Определить какую часть объема сосуда составляет собственный объем молекул газа; какую часть давления газа на стенки сосуда составляет внутреннее давление, обусловленное силами притяжения молекул.

Решение. Для получения ответа на первый вопрос задачи необходимо найти соотношение

$$k = \frac{V'}{V}, \qquad (1)$$

где V' – собственный объем молекул.

Собственный объем молекул найдем, воспользовавшись поправкой Ван-дер-Ваальса, учитывающей силы отталкивания молекул и численно равной объему который «недоступен» для молекул реального газа при их движении (из-за конечного, не равного нулю собственного объема молекул).

Из уравнения (6.1) эта поправка, равная νb, означает учетверенный собственный объем молекул (6.8), то есть

$$\nu b = 4V'$$

Отсюда

$$V' = \frac{\nu b}{4}$$

или

$$V' = \frac{mb}{4\mu}. \quad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу(1), найдем что

$$k = \frac{mb}{4\mu V}. \quad (3)$$

Подставив числовые значения величин в единицах СИ в формулу (3), взяв значение b из таблиц или рассчитав по формуле (6.8), получим

$$k = 9{,}1 \cdot 10^{-3} = 0{,}91\%.$$

Следовательно, собственный объем молекул составляет 0,91% от объема сосуда.

Чтобы найти ответ на второй вопрос задачи, найдем отношение

$$k_1 = \frac{p'}{p}, \quad (4)$$

где p' – внутреннее давление газа, обусловленное силами притяжения молекул,

p – давление, производимое газом на стенки сосуда.

Как следует из уравнения (6.1)

$$p' = \nu^2 \frac{a}{V^2}$$

или

$$p' = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2}, \tag{5}$$

где a – поправка на давление одного киломоля газа.

Подставляя числовые значения в формулу (5) и учитывая, что табличное значение a = 0,137 Н·м^4·моль$^{-2}$, получим

$$p' = 1,79 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Давление p, производимое газом на стенки сосуда, найдем также из уравнения (6.1)

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{a}{V^2}. \tag{6}$$

Подставив числовые значения в формулу (6), найдем

$$p = 2,84 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Исходя из соотношения (4), получим

$$k_1 = 6,3 \cdot 10^{-2} = 6,3\%.$$

Следовательно, внутреннее давление газа, обусловленное силами притяжения молекул, составляет 6,3% давления газа на стенки сосуда.

Задача 2. Определить давление m = 280 г азота, находящегося при температуре t = 27 °C в сосуде, объем которого равен: V_1 = 1,0 м^3; V_2 = 0,5 л.

Решение. Чтобы решить вопрос о том, каким следует считать газ – идеальным или реальным, – найдем молярный объем газа V_0. Если в сосуде находится ν молей газа, тогда

$$V_0 = \frac{V}{\nu} = \frac{V\mu}{m}.$$

Так как молярная масса азота μ = 0,028 кг/моль, то, соответственно, для V_1 и V_2 получим

$$V_{01} = 0{,}10 \text{ м}^3/\text{моль}, \qquad V_{02} = 5{,}0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Сравнивая V_{01} и V_{02} с молярным объемом газа при нормальных условиях ($V_{0\text{норм}} = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль), видим, что в первом случае газ достаточно разрежен и его можно считать идеальным. Исходя их уравнения состояния идеального газа $pV = \frac{m}{\mu}RT$, найдем

$$p_1 = \frac{mRT}{\mu V_1}. \tag{1}$$

После подстановки в эту формулу числовых значений, получим

$$p_1 = 2{,}5 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Во втором случае $V_{02} \le V_{0\text{норм}}$, и газ следует считать реальным. Его давление найдем из формулы (6.1) для реального газа

$$p_2 = \frac{RT}{V_2 - b} - \frac{a}{V_2}. \tag{2}$$

Взяв из таблиц значения $a = 0{,}13$ Н·м^4·моль$^{-2}$, $b = 3{,}7\cdot10^{-5}$ м^3·моль$^{-1}$ и производя вычисления получим

$$p_2 = 1{,}4 \cdot 10^8 \text{ Па.}$$

Замечание: при вычислении давления p_2 по формуле (1) был бы получен неверный результат $p = 0{,}5\cdot10^8$ Па.

Задача 3. В очень прочном закрытом стальном баллоне заключена вода, занимающая при комнатной температуре половину объема баллона. Найти давление (в технических атмосферах) и плотность водяных паров при повышении температуры до $t = 400$ °С.

Решение. Из таблицы критических температур (таблица В.1) критическая температура воды равняется $t_{кр} = 374$ °С. Таким образом, при нагревании воды до 400 °С она окажется при температуре выше критической. Это значит, что вода будет находиться в парообразно (газообразном) состоянии. Плотность водяного пара определим, учитывая, что объем одной и той же массы воды в результате нагревания увеличился вдвое. Следовательно, плотность пара, равная отношению массы к объему, будет вдвое меньше плотности воды (плотность воды $\rho_в = 1{,}0\cdot10^3$ кг/м^3)

$$\rho = \frac{\rho_в}{2} = 5{,}0 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3.$$

Так как плотность пара в баллоне оказалась много большей по сравнению с плотностью газов при нормальных условиях (для воздуха при нормальных условиях $\rho = 1{,}29$ кг/м^3), то водяной пар нужно рассматривать как реальный газ.

Согласно уравнению (6.1) давление газа равно

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}, \tag{1}$$

где V_0 – молярный объем, но не объем всей массы пара.

Исходя из определения плотности, молярный объем можно записать в виде $V_0 = \frac{\mu}{\rho}$. Исходя из этого формулу (1) перепишем в виде

$$p = \frac{RT}{\frac{\mu}{\rho} - b} - \frac{a\rho^2}{\mu^2}. \qquad (2)$$

Взяв из таблиц значения a и b для воды и выразив числовые данные задачи в единицах СИ, найдем

$$p = 5{,}1 \cdot 10^8 \text{ Па} = 5{,}2 \cdot 10^3 \text{ ат.}$$

Задача 4. Определить массу кислорода в баллоне объемом V = 10,0 л при температуре t = 27 °С и давлениях p_1 = 1,00 ат и p_2 = 410 ат.

Решение. В первом случае кислород находится в баллоне при условиях близких к нормальным, поэтому, без большой погрешности, газ можно считать идеальным. Исходя из этого, на основании уравнения состояния идеального газа, найдем

$$m = \frac{\mu p V}{RT}. \qquad (1)$$

Учитывая числовые данные задачи, из формулы (1) получим

$$m = 0{,}013 \text{ кг.}$$

Во втором случае давление газа намного превышает нормальное, поэтому газ следует считать реальным и вести расчеты на основании уравнения (6.1).

Массу газа найдем из соотношения

$$m = \mu\nu = \frac{\mu V}{V_0}, \qquad (2)$$

где V_0 – молярный объем.

Таким образом, из соотношения (6.1) нужно найти величину V_0, а затем по формуле (2) массу газа.

Уравнение (6.1) является уравнением третьей степени относительно V и поэтому имеет три корня. Однако, при температурах выше критической (по условию задачи газ находится при температуре выше критической, так как $t_{кр} = -119$ °C) изотермы Ван-дер-Ваальса близки к изотермам идеального газа, значит при определенных давлениях газ будет иметь только один объем. Другими словами, уравнение (6.1) в данном случае будет иметь только одно действительное решение.

Решения кубических уравнений довольно громоздки, поэтому удобнее воспользоваться методом последовательных приближений. В качестве первого приближения вычислим молярный объем V_{01} газа, рассматривая его как идеальный. Тогда из уравнения состояния идеального газа получим

$$V_{01} = \frac{RT}{p_2} = 0,62 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Затем, обозначив в уравнении (6.1) поправку на давление $p_i = \frac{a}{V_0^2}$, найдем из (6.1) величину V_0

$$V_0 = \frac{RT}{p + p_i} + b. \tag{3}$$

Подставив в выражение (3) приближенное значение $p_i = \frac{a}{V_{01}^2}$

$$V_{02} = \frac{RT}{p + \frac{a}{V_{01}^2}} + b. \tag{4}$$

Подставив в выражение (4) числовые данные, выраженные в единицах СИ: $p = 410 \cdot 9{,}8 \cdot 10^4$ Па, $V_{01} = 0{,}62 \cdot 10^{-4}$ м^3/моль, $T = 300$ К, $a = 0{,}13$ м$^4 \cdot$Н/моль^2, $b = 3{,}1 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Произведя вычисления, получим

$$V_{02} = 0{,}65 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3\text{/моль.}$$

Еще раз вычислив по формуле (3) молярный объем, считая $p_i = \dfrac{a}{V_{02}^2}$, получим третье приближение

$$V_{03} = 0{,}66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3\text{/моль.}$$

Проделав подобным образом вычисления по формуле (3), будем получать все более точные значения V_0

$$V_{04} = 0{,}67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3\text{/моль,}$$

$$V_{05} = 0{,}67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3\text{/моль.}$$

Таким образом, если ограничится точностью до второго знака после запятой, ответ уже не будет изменяться. Поэтому действительным корнем кубического уравнения (6.1), вычисленным с точностью до второго знака, будет

$$V_0 = 0{,}67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3\text{/моль.}$$

Теперь, согласно выражению (1), найдем искомую массу газа

$$m = 4{,}8 \text{ кг.}$$

Задача 5. В цилиндре $\nu = 1$ моль углекислого газа, занимает объем $V = 2$ м^3 при температуре $t_1 = 50$ °C. До какого объема следует изотермически сжать газ для превращения его в жидкость? При какой наибольшей температуре можно получить жидкую углекислоту? Какова при этой температуре наибольшая упругость насыщенных паров? Каково давление насыщенных паров углекислоты при температуре t_2 = 20 °С?

Решение. Газ можно превратить в жидкость, если его температура ниже критической. Для углекислого газа $t_{кр}$ = 31 °С. Следовательно, изотермическим сжатием при температуре t_1 = 50 °С нельзя получить жидкую углекислоту.

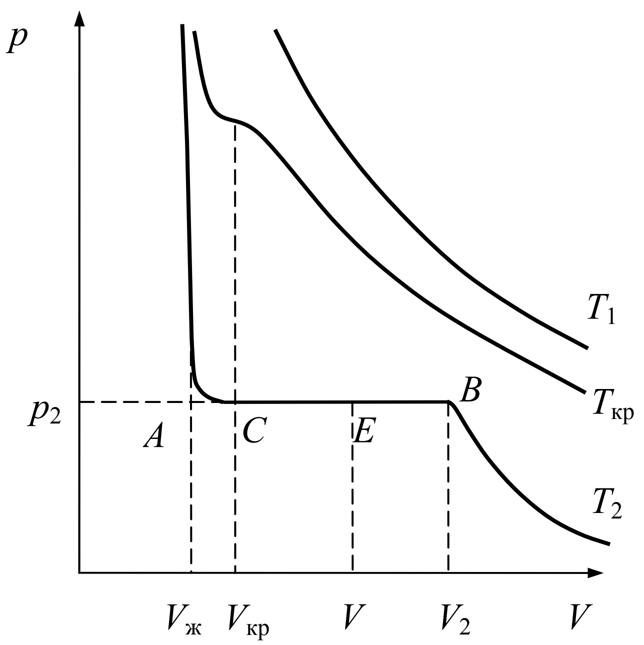

Рисунок 7

Наибольшей температурой, при которой можно получить жидкость, является критическая температура. Давление (упругость) насыщенного пара при этой температуре называется критическим давлением. Из таблицы В.1 Приложения В находим для углекислого газа $p_{кр} = 74 \cdot 10^5$ Па. Изотермическое сжатие при критической температуре приводит к образованию особого состояния, называемого критическим. На диаграмме в плоскости pV (рисунок 7) это состояние определяется точкой перегиба на критической изотерме.

Жидкость можно получить, сжимая газ изотермически при температуре ниже критической. В этом случае наибольшее давление газа соответствует участку АВ изотермы (на этом участке жидкость находится в динамическом равновесии со своим паром).

Для нахождения давления насыщенного пара при температуре T_2 воспользуемся уравнением состояния реального газа в приведенной форме (6.4). Выберем состояние газа с параметрами $V_2 = V_{\text{кр}}$, p_2, T_2 (точка C на рисунке 7). Приведенные параметры, в соответствии с формулами (6.5), равны

$$\varphi = \frac{V_2}{V_{\text{кр}}} = 1; \qquad \tau = \frac{T_2}{T_{\text{кр}}}; \qquad \gamma = \frac{p_2}{p_{\text{кр}}}. \tag{1}$$

Перепишем уравнение (6.4) в виде

$$\gamma = \frac{8\tau}{3\varphi - 1} - \frac{3}{\varphi^2}. \tag{2}$$

После подстановки в уравнение (2) приведенных параметров (1) и соответствующих расчетов получаем

$$\gamma = 0,85.$$

Следовательно, искомое давление

$$p_2 = \gamma p_{\text{кр}} = 62 \cdot 10^2 \text{ Па.}$$

Задача 6. На рисунке 8 представлена экспериментальная кривая зависимости плотности жидкого азота и его насыщенного пара от температуры. Определить параметры $m = 1$ г азота в критическом состоянии, наибольший объем жидкости и наименьший объем газа при температуре $t = -160$ °C, а также объем, при котором число молекул, находящихся в жидкости, в 2 раза больше числа молекул в насыщенном паре.

Решение. При критической температуре исчезает различие между жидкостью и ее паром – их плотности становятся одинаковыми. Из графика, приведенного на рисунке 8, видно, что плотность жидкого азота с повышением температуры уменьшается, а плотность его насыщенного пара растет. При температуре минус 147 °С плотности жидкости и пара одинаковы. Следовательно, эта температура и является критической

$$t_{\text{кр}} = -147\,°C.$$

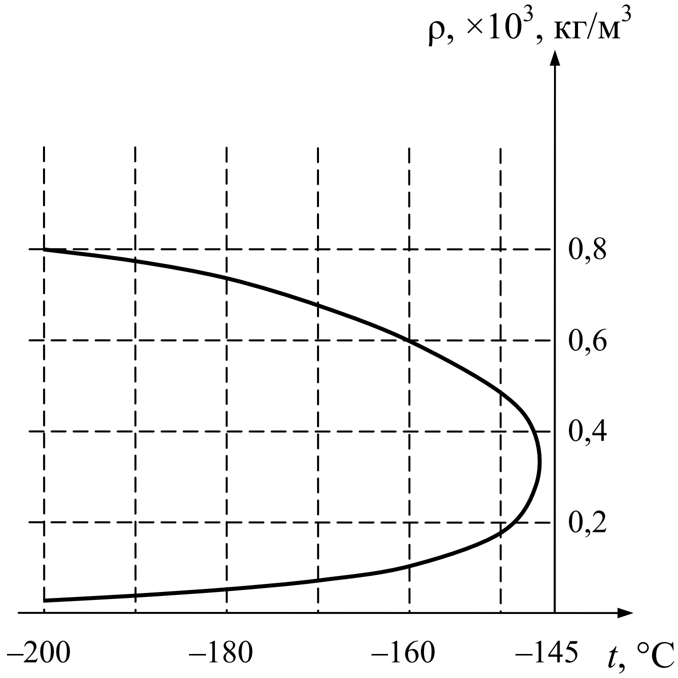

Рисунок 8

При критической температуре, как видно из того же графика, плотность азота равна $\rho = 0{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3. Следовательно, при этой температуре удельный объем азота $V' = \dfrac{1}{\rho} = 3{,}3 \cdot 10^{-3}$ м^3/кг; удельный объем 1 г азота $V = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ м^3/г; удельный объем 1 моля азота $V_{\text{кр}} = \mu V' = 92 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль.

Для нахождения давления азота в критическом состоянии воспользуемся уравнением (6.3). Решив его относительно $p_{\text{кр}}$, найдем

$$p_{\text{кр}} = \frac{3}{8}\frac{RT_{\text{кр}}}{V_{\text{кр}}}. \qquad (1)$$

Подставив в соотношение (1) найденные значения $V_{\text{кр}}$ и $T_{\text{кр}}$, найдем, что

$$p_{\text{кр}} = 42{,}4 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Замечание. Найденное значение не совпадает со значением, приведенным в таблице В.1 Приложения В. Это объясняется тем, что коэффициент $k = 3/8$ в уравнении (6.3) в действительности зависит от рода вещества и всегда превышает указанное значение, что лишний раз свидетельствует о неточности уравнения Ван-дер-Ваальса.

Чтобы найти наибольший объем жидкости и насыщенного пара при температуре минус 160 °С используем график, представленный на рисунке 8. При указанной температуре плотность насыщенного пара $\rho_п = 0{,}05 \cdot 10^3$ кг/м^3 и плотность жидкости $\rho_ж = 0{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

При изотермическом сжатии газа происходит постепенное увеличение его плотности, пока газ не приобретет плотность насыщенного пара. В этом состоянии 1 г азота занимает объем $V_2 = 20 \cdot 10^{-6}$ м^3 (рисунок 7 точка B).

При дальнейшем сжатии начинается конденсация газа – объем газа уменьшается за счет его перехода в жидкое состояние, а давление остается постоянным. На графике (рисунок 7) этот процесс соответствует горизонтальном участку изотермы. Когда газ полностью конденсируется, объем полученной жидкости будет равен

$$V_ж = \frac{m}{\rho_ж} = 1{,}67 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Насыщенный пар существует при изменении суммарного объема от V_2 до $V_ж$. Однако при разных объемах соотношение между количеством жидкости и количеством пара различно. Пусть при объеме V отношение объема насыщенного пара к общему объему равно x, а отношение объема жидкости к общему объему равно $(1 - x)$. Отсюда

$$V = xV_2 + (1 - x)V_ж. \tag{2}$$

Из уравнения (2) получим

$$x = \frac{V - V_ж}{V_2 - V_ж}, \qquad (1 - x) = \frac{V_2 - V}{V_2 - V_ж}.$$

Отсюда, отношение объема пара к объему жидкости равно

$$\alpha = \frac{x}{1 - x} = \frac{V - V_ж}{V_2 - V}. \tag{3}$$

По условию задачи $\alpha = \frac{1}{2}$. Решая уравнение (3) относительно V, получаем

$$V = \frac{V_2 - V_ж}{1 + \alpha},$$

или, после подстановки данных

$$V = 12,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Этот объем делит участок AB (рисунок 7), равный $V_2 - V_ж$, на части AE и EB, обратно пропорциональные массам жидкости и пара.

6.4 Задачи для самостоятельной и контрольной работы

6.4.1 Аргон массой $m = 4{,}0$ г занимает объем $V = 0{,}10$ дм^3 под давлением $p = 2{,}5$ МПа. Найти температуру газа, считая его идеальным, реальным.

6.4.2 Каково давление углекислого газа при температуре $t = 3$ °C, если его плотность при этой температуре $\rho = 550$ кг/м^3?

6.4.3 В баллоне вместимостью $V = 22$ дм^3 находится азот массой $m = 0{,}70$ кг при температуре $t = 0$ °C. Определить давление газа на стенки баллона, внутреннее давление газа и собственный объем молекул.

6.4.4 Объем кислорода массой $m = 4{,}0$ г увеличивается от $V_1 = 1{,}0$ дм^3 до $V_2 = 5{,}0$ дм^3. Рассматривая газ как реальный, найти работу внутренних сил при этом расширении.

6.4.5 Найти внутреннюю энергию углекислого газа массой $m = 132$ г при нормальном давлении p_0 и температуре $T = 300$ К в двух случаях, когда газ рассматривают: 1) как идеальный; 2) как реальный.

6.4.6 Какую температуру имеет масса $m = 2$ г азота, занимающего объем $V = 820$ см^3 при давлении $p = 0{,}2$ МПа? Газ рассматривать как : 1) идеальный; 2) реальный.

6.4.7 Какую температуру имеет масса $m = 3{,}5$ г кислорода, занимающего объем $V = 90$ см^3 при давлении $p = 2{,}8$ МПа? Газ рассматривать как : 1) идеальный; 2) реальный.

6.4.8 Кислород в количестве $\nu = 1$ кмоль находится при температуре $t = 27$ °C и давлении $p = 10$ МПа. Найти объем V газа, считая, что кислород при данных условиях ведет себя как реальный газ.

6.4.9 Построить изотермы $p = f(V)$ для количества $\nu = 1$ кмоль углекислого газа при температуре $t = 0$ ºC. Газ рассматривать как: 1) идеальный; 2) реальный. Значения V (в л/моль) для реального газа взять следующие: 0,07, 0,08, 0,10, 0,12, 0,14, 0,16, 0,18, 0,20, 0,25, 0,30, 0,35, 0,40; для идеального газа – в интервале $0{,}2 \le V \le 0{,}4$ л/моль.

6.4.10 Углекислый газ массой m = 6,6 кг при давлении p = 0,7 МПа занимает объем V = 3,75 м^3. Определить температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки принять равными соответственно a = 0,361 Н·м^4/моль^2 и $b = 4{,}28\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

6.4.11 Углекислый газ массой m = 2,2 кг находится при температуре T = 290 К в сосуде вместимостью V = 30 л. Определить давление газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b принять равными соответственно 0,361 Н·м^4/моль^2 и $4{,}28\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

6.4.12 Плотность азота ρ = 140 кг/м^3, его давление p = 10 МПа. Определить температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b принять равными соответственно 0,135 Н·м^4/моль^2 и $3{,}86\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

6.4.13 Углекислый газ массой m = 88 г занимает при температуре T = 290 К объем V = 1000 см^3. Определить внутреннюю энергию газа, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный. Поправку a принять равной 0,361 Н·м^4/моль^2.

6.4.14 Кислород в количестве ν = 1 моль, занимавший при T_1 = 400 К объем V_1 = 1 л, расширяется изотермически до $V_2 = 2V_1$. Определить: 1) работу при расширении; 2) изменение внутренней энергии газа. Поправки a и b принять равными соответственно 0,136 Н·м^4/моль^2 и $3{,}17\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

6.4.15 Анализируя уравнение состояния реальных газов, определить величины поправок a и b для азота. Критические давление и температура для азота соответственно равны $p_к$ = 3,39 МПа и $T_к$ = 126 К.

6.4.16 Масса m = 10 г гелия занимает объем V = 100 см^3 при давлении p = 100 МПа. Найти температуру газа, считая его: а) идеальным; б) реальным.

6.4.17 В сосуде емкостью V = 25 л при температуре T = 300 К находится ν = 40 моль кислорода. Определить давление газа, считая его идеальным; реальным.

6.4.18 В сосуде под давлением p = 8 МПа содержится кислород, плотность которого ρ = 100 кг/м^3. Считая газ реальным, определить его температуру и сравнить ее с температурой идеального газа при тех же условиях.

Список использованных источников

1 Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Академия, 2006. – 560 с.

2 Савельев, И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн.3: Молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие для втузов / И.В.Савельев. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2003. – 208с.

3 Иродов, И.Е. Физика макросистем. Основные законы / И.Е. Иродов. – М.: Издательство «Бином», 2010. – 256 с.

4 Иродов, И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М.: Издательство «Лаборатория базовых знаний», 2006. – 432 с.

5 Чертов, А.Г. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Издательство «Физматлит», 2009. – 640 с.

Приложение А

Некоторые физические постоянные

1. Объем моля идеального газа при нормальных условиях

$$V_0 = 22,42 \text{ л.}$$

2. Универсальная газовая постоянная

$$R = 8,314 \text{ Дж/моль·К} = 0,082 \text{ л·атм/моль·К.}$$

3. Число Лошмидта

$$n_0 = 2,7 \cdot 10^{-19} \text{ см}^3.$$

4. Число Авогадро

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

5. Постоянная Больцмана

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} = 0,86 \text{ эВ/К.}$$

6. Постоянная Планка

$$h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Дж·с,}$$

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж·с.}$$

7. Стандартное ускорение свободного падения

$$g = 9,807 \text{ м/с}^2$$

Приложение Б

Таблица Б.1 Молярная масса газов и эффективный диаметр молекул.

Газ	Молярная масса μ, 10^{-3} кг/моль	Эффективный диаметр молекул d, 10^{-10} м
Азот	28	3,6
Водород	2	2,2
Водяной пар (H_2O)	18	2,6
Воздух	29	3,6
Гелий	4	2,0
Кислород	32	2,7
Углекислый газ (CO_2)	44	4,0

Приложение В

Таблица В.1 Критические температуры и поправки Ван-дер-Ваальса для реальных газов

Газ	Критические величины		Поправки Ван-дер-Ваальса	
	$p_{кр}$, 10^5 Па	$T_{кр}$, К	a, $Н·м^4/моль^2$	b, 10^{-5} $м^3/моль$
Азот	33,9	126,1	0,133	3,7
Водород	12,9	33,0	0,024	2,6
Водяной пар (H_2O)	217,7	647	0,547	3,0
Воздух	37,6	132,5	0,131	3,8
Гелий	2,26	5,2	0,0033	2,3
Кислород	49,7	154,2	0,137	3,1
Углекислый газ (CO_2)	73,8	304,0	0,36	4,3

Приложение Г

Таблица Г.1 Плотность веществ

Твердые вещества	ρ, г/см^3	Жидкости	ρ, г/см^3
Алмаз	3,5	Бензол	0,88
Алюминий	2,7	Вода	1,00
Вольфрам	19,1	Глицерин	1,26
Графит	1,6	Касторовое масло	0,90
Железо (сталь)	7,8	Керосин	0,80
Золото	19,3	Ртуть	13,6
Кадмий	8,65	Спирт	0,79
Кобальт	8,9	Тяжелая вода	1,1
Лед	0,916	Эфир	0,72
Медь	8,9	Газы (при нормальных условиях)	ρ, кг/м^3
Молибден	10,2		
Натрий	0,97	Азот	1,25
Никель	8,9	Аммиак	0,77
Олово	7,4	Водород	0,09
Платина	21,5	Воздух	1,293
Пробка	0,20	Кислород	1,43
Свинец	11,3	Метан	0,72
Серебро	10,5	Углекислый газ	1,98
Титан	4,5	Хлор	3,21
Уран	19,0		
Фарфор	2,3		
Цинк	7,0		

Таблица Г.2 Давление насыщенных паров воды

t, °C	p, кПа	t, °C	p, кПа	t, °C	p, кПа
0	0,61	25	3,15	60	19,9
5	0,87	30	4,23	70	31,0
10	1,22	35	5,60	80	47,3
15	1,70	40	7,35	90	70,0
20	2,33	50	12,3	100	101

Таблица Г.3 Постоянные жидкостей и твердых тел

Вещество	Удельная теплоемкость c, Дж/(г·К)	Удельная теплота паро-образования r, Дж/г	Удельная теплота плавления λ, Дж/г	Поверхностное натяжение α, мН/м
Вода	4,18	2250	–	73
Глицерин	2,42	–	–	66
Ртуть	0,14	284	–	490
Спирт	2,42	853	–	22
Алюминий	0,90	–	321	–
Железо	0,46	–	270	–
Лед	2,09	–	333	–
Медь	0,39	–	175	–
Серебро	0,23	–	88	–
Свинец	0,13	–	25	–

Приложение Д

Таблица Д.1 Единицы величин молекулярной физики и термодинамики

Физическая величина	Единица измерения
Температурный интервал	1 К = 1 °С
Теплота	1 кал = 4,19 Дж 1 ккал = $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж 1 эрг = 10^{-7} Дж 1 Дж = 0,239 кал = 10^7 эрг = $2{,}39 \cdot 10^{-4}$ ккал
Удельная теплота плавления, парообразования	1 кал/г = $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/кг 1 ккал/кг = $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж 1 Дж/кг = $2{,}39 \cdot 10^{-4}$ кал/г = $2{,}39 \cdot 10^{-4}$ ккал/кг
Теплоемкость, энтропия	1 кал/°С = 4,19 Дж/кг 1 ккал/°С = $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/К 1 Дж/К = 0,239 кал/°С = $2{,}39 \cdot 10^{-4}$ ккал/°С
Удельная теплоемкость	1 кал/(г·°С) = 4,19 Дж/(кг·К) 1 ккал/(кг·°С) = 4,19 Дж/(кг·К) 1 Дж/(кг·К) = $2{,}39 \cdot 10^{-4}$ кал/(г·°С) = = $2{,}39 \cdot 10^{-4}$ ккал/(кг·°С)
Теплопроводность	1 кал/(см·с·°С) = $4{,}19 \cdot 10^2$ Вт/(м·К) 1 ккал/(м·ч·°С) = 1,16 Вт/(м·К) 1 Вт/(м·К) = $2{,}39 \cdot 10^{-3}$ кал/(см·с·°С) = = 0,862 ккал/(м·ч·°С)
Тепловой поток	1 кал/с = 4,19 Вт 1 ккал/ч = 1,16 Вт 1 Вт = 0,239 кал/с = 0,862 ккал/ч
Плотность теплового потока	1 кал/(см^2·с) = $4{,}19 \cdot 10^4$ Вт/м^2 1 ккал/(м^2·ч) = 1,16 Вт/м^2 1 Вт/м^2 = $2{,}39 \cdot 10^{-5}$ кал/(см^2·с) = = 0,862 ккал/(м^2·ч)

Приложение Е

Таблица Е.1 Некоторые постоянные числа и приближенные формулы

Постоянные числа	Приближенные формулы (при $\alpha \ll 1$)
$\pi = 3{,}1416$	$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$
$\pi^2 = 9{,}8696$	$e^\alpha \approx 1 + \alpha$
$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	$\ln(1+\alpha) \approx \alpha$
$e = 2{,}7183$	$\sin\alpha \approx \alpha$
$\lg e = 0{,}4343$	$\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$
$\ln 10 = 2{,}3026$	$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$

Таблица Е.2 Значения некоторых определенных интегралов

$\int\limits_0^\infty x^n e^{-x} dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & n=\frac{1}{2} \\ 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \end{cases}$	$\int\limits_0^\infty x^n e^{-x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & n=0 \\ \frac{1}{2}, & n=1 \\ \frac{1}{4}\sqrt{\pi}, & n=2 \\ \frac{1}{2}, & n=3 \end{cases}$
$\int\limits_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \begin{cases} 2{,}31, & n=\frac{1}{2} \\ \frac{\pi^2}{6}, & n=1 \\ 2{,}405, & n=2 \\ \frac{\pi^2}{15}, & n=3 \\ 24{,}9, & n=4 \end{cases}$	$\int\limits_0^\alpha \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \begin{cases} 0{,}225, & \alpha=1 \\ 1{,}18, & \alpha=2 \\ 2{,}56, & \alpha=3 \\ 4{,}91, & \alpha=5 \\ 6{,}43, & \alpha=10 \end{cases}$
Интегрирование по частям: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$	

Приложение Ж

Таблица Ж.1 Единицы измерения термодинамических параметров

Параметр	Единица измерения
Объем	1 $м^3 = 10^3$ $дм^3 = 10^6$ $см^3$ 1 л = 1 $дм^3 = 10^{-3}$ $м^3 = 10^3$ $см^3$
Давление	1 Па = 1 Н/$м^2$ 1 дин/$см^2$ = 0,1 Па 1 кгс/$см^2$ = $9{,}81 \cdot 10^4$ Па = 1 ат (техническая атмосфера) 1 мм.рт.ст = 133 Па 1 мм.водн.ст = 9,81 Па 1 бар = 10^5 Па 1 атм (нормальная атмосфера) = $1{,}01 \cdot 10^5$ Па 1 Па = 10 дин/$см^2$ = $1{,}02 \cdot 10^{-5}$ кгс/$см^2$ = = $7{,}52 \cdot 10^{-3}$ мм.рт.ст = 10^{-5} бар
Температура	$T = t + 273$ 1 К = 1 °С

Таблица Ж.2 Некоторые полезные соотношения

Одному градусу соответствует суммарная кинетическая энергия, содержащаяся в одном моле газа	$kN_A = 8{,}31$ Дж
Переводной коэффициент между градусом и электрон-вольтом	1 эВ = 11600 К
Комнатная температура, измеренная в электрон-вольтах, соответствует примерно	$\frac{1}{40}$ эВ
Механический эквивалент работы	1 кал = 4,18 Дж