Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

А. Н. Павленко

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
2011

УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я7
П 12

Рецензент - кандидат педагогических наук Е. Н. Рассоха

Павленко, А.Н.
П12 Справочные материалы по теории дифференциальных и разностных уравнений: методические указания / А. Н. Павленко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 27 с.

В данной работе изложены основные сведения справочного характера по теории дифференциальных и разностных уравнений. Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 010300 – «Фундаментальные информатика и информационные технологии».

Методические указания изданы в рамках выполнения гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» – №3.1.1/13256).

УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я7

Содержание

Введение

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой изучения дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения» студентами направления подготовки 010300 – «Фундаментальные информатика и информационные технологии». Данный предмет относится к дисциплинам общематематического и естественнонаучного цикла.

Разделы высшей математики, посвященные обыкновенным дифференциальным уравнения, уравнениям с частными производными и разностным уравнениям, не только сами имеют многочисленные практические приложения, но и является необходимыми при изучении дисциплин «Физика» и «Вычислительная математика».

Следует отметить, что в данных методических указаниях приведены исключительно важнейшие определения и методы решения наиболее часто встречающихся задач. Такое изложение материала позволяет использовать указания для быстрого поиска необходимой информации при самостоятельной работе студентов над домашними заданиями, индивидуальными заданиями и т. д.

Настоящие методические указания могут быть использованы студентами и других математических, физических и инженерных направлений подготовки.

1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

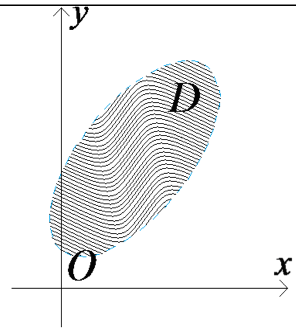
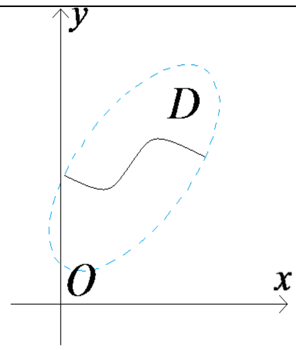
1.1 Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) первого порядка называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$.

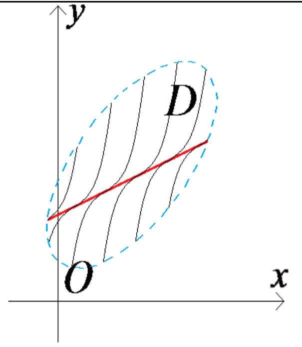
Замечание. ОДУ первого порядка обязательно в явном виде содержит y' и может не содержать в явном виде x или/и y.

$y' = f(x, y)$ - нормальный вид ОДУ первого порядка.

Таблица 1 - Решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Решение	**Определение.** Непрерывно дифференцируемую функцию $y = y(x)$ будем называть решением ОДУ первого порядка на промежутке I, если при подстановке функции $y = y(x)$ в ОДУ получается верное тождество на I.	
Общее решение	**Определение.** Пусть $y = \varphi(x, C)$ - решение ОДУ первого порядка, зависящее от произвольной постоянной C. Функция $y = \varphi(x, C)$ называется общим решением этого уравнения на области $D \subset R^2$, если: 1) через каждую точку области D проходит единственная интегральная кривая данного ОДУ; 2) интегральные кривые $y = \varphi(x, C)$ целиком заполняют область D.	
Частное решение	Пусть $y = \varphi(x, C)$ - общее решение ОДУ первого порядка. Если в общем решении мы вместо C подставим конкретное число, то получим частное решение данного ОДУ.	

Продолжение таблицы 1

Особое решение	Решение ОДУ первого порядка называется особым решением, если через каждую точку графика этого решения проходит более одной интегральной кривой.	

Теорема Коши для ОДУ первого порядка. Пусть дана задача Коши вида

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, то тогда в некоторой окрестности точки $x = x_0$ данная задача Коши имеет единственное решение.

Определение. ОДУ n-го порядка называется уравнение вида $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ - нормальный вид ОДУ n-го порядка.

Таблица 2 - Решения обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

Решение	**Определение.** n раз непрерывно дифференцируемую функцию $y = y(x)$ будем называть решением ОДУ n-го порядка на промежутке I, если при подстановке функции $y = y(x)$ в ОДУ получается верное тождество на I.
Общее решение	$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$
Частное решение	Пусть $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ - общее решение ОДУ n-го порядка. Подставив в общем решении вместо C_1, $C_2, \ldots$, C_n конкретные числа, получим частное решение данного ОДУ.

Теорема Коши для ОДУ n-го порядка. Пусть дана задача Коши вида

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \\ y\left(x^0\right) = y^0, \\ y'\left(x^0\right) = y^1, \\ y''\left(x^0\right) = y^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}\left(x^0\right) = y^{n-1}. \end{cases}$$

Если функция $f\left(x, y_0, y_1, ..., y_{n-1}\right)$ и ее частные производные $f'_{y_i}\left(x, y_0, y_1, ..., y_{n-1}\right)$ $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $M^0\left(x^0, y^0, y^1, ..., y^{n-1}\right)$, тогда в некоторой окрестности точки $x = x^0$ данная задача Коши имеет единственное решение.

1.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, разрешимые в квадратурах

Таблица 3 - Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, разрешимые в квадратурах

Название ОДУ	Вид ОДУ	Метод решения
Уравнение с разделяющимися переменными	$y' = f(x)g(y)$	Разделение переменных и последующее интегрирование. Общий интеграл: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$. **Возможна потеря решений.**
	$M(x)P(y)dx + N(x)Q(y)dy = 0$	Разделение переменных и последующее интегрирование. Общий интеграл: $\int \frac{M(x)}{N(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{P(y)}dy = C$ **Возможна потеря решений.**

Продолжение таблицы 3

Однородные уравнения	$y' = f(x,y)$, если $\forall t > 0$ выполняется $f(tx,ty) = f(x,y)$	Замена $y = ux$ и разделение переменных с последующим интегрированием. Общий интеграл: $\int \frac{du}{f(1,u)-u} - \ln\lvert x\rvert = C$. **Возможна потеря решений.**
	$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - однородные функции с одинаковой степенью однородности n, то есть $\forall t > 0$ выполняется $P(tx,ty) = t^n P(x,y)$ и $Q(tx,ty) = t^n Q(x,y)$.	Замена $y = ux$ и разделение переменных с последующим интегрированием. Общий интеграл: $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{Q(1,u)}{P(1,u)+uQ(1,u)} du = C$. **Возможна потеря решений.**
Уравнение в полных дифференциалах	$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$	$u(x,y) = \int P(x,y)dx + C_1(y)$, $u(x,y) = \int Q(x,y)dy + C_2(x)$. Общий интеграл: $u(x,y) = C$.
Линейное уравнение первого порядка	$y' + p(x)y = q(x)$	Подстановка $y = uv$. Общий интеграл: $y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}$.
Уравнение Бернулли	$y' + p(x)y = q(x)y^a$ $(a \neq 0,\ a \neq 1)$.	Сведение к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = uv$. **Возможна потеря решений.**
Уравнение Клеро	$y = xy' + \varphi(y')$	Замена $p = y'$, нахождение производной от обеих частей уравнения. Общее решение: $y = Cx + \varphi(C)$. Особое решение: $\begin{cases} x + \varphi'(p) = 0, \\ y = xp + \varphi(p). \end{cases}$

1.3 Уравнения, допускающие понижения порядка

Таблица 4 - Уравнения, допускающие понижения порядка

Вид ОДУ	Метод решения
$y^{(n)} = f(x)$	Последовательно проинтегрировать n раз
$F\left(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \;\; (1 \le m < n)$	Замена $z = y^{(m)}$
$F(y, y', y'') = 0$	Замена $p = y'$, где p - функция от y, $y'' = p'p$

1.4 Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Таблица 5 – Общее решение однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

ОДУ	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристическое уравнение	$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$		
Корни	Два простых действительных корня λ_1, λ_2	Один действительный корень второй кратности λ	Два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$
Общее решение	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$	$y = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x}$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta\right.$

Таблица 6 - Общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и **специальной правой частью**

Линейное неоднородное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью	$y''+py'+qy=f(x)$	
Характеристическое уравнение	$\lambda^2+p\lambda+q=0$	
$f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$P_m(x)$	0 не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_m(x)=A_m x^m+A_{m-1}x^{m-1}+$ $+\ldots+A_1 x+A_0$
	0 является корнем характеристического уравнения первой кратности	$x\widetilde{P}_m(x)$
ce^{ax}	a не является корнем характеристического уравнения	Ae^{ax}
	a является корнем характеристического уравнения кратности s.	$Ax^s e^{ax}$

Продолжение таблицы 6

$a\cos\beta x$, $b\sin\beta x$, $a\cos\beta x + b\sin\beta x$	$\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$
	$\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения первой кратности	$x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$	$\alpha\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения	$e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x\right)$, где $s = \max\{m, n\}$
	$\alpha\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения первой кратности	$xe^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x\right)$, где $s = \max\{m, n\}$

Таблица 7 – **Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных)** решения линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

ОДУ	$y'' + py' + qy = f(x)$
Общее решение однородного ОДУ $y'' + py' + qy = 0$	$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$
Общее решение неоднородного ОДУ	$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$
Система для нахождения $C_1(x)$, $C_2(x)$	$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$

1.5 Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

1.5.1 Метод исключения

Для случая двух уравнений с двумя неизвестными функциями такие системы имеют вид:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x). \end{cases} \qquad (1)$$

Для решения системы **методом исключения** требуется выразить из первого уравнения y_2 и подставить результат во второе уравнение или выразить из второго уравнения y_1 и подставить результат в первое уравнение и найти общее решение полученного линейного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

1.5.2 Решение однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами с помощью нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы системы

Пусть дана система

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases}$$

Найдем собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, решив характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$.

1. Пусть характеристическое уравнение имеет λ_1, λ_2 - два простых действительных корня.

Решив систему $A\overline{\alpha} = \lambda\overline{\alpha}$, находим соответствующие собственные вектора $\overline{\alpha}_1$ и $\overline{\alpha}_2$.

Общее решение данной системы имеет вид $\overline{y} = C_1 e^{\lambda_1 x}\overline{\alpha}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\overline{\alpha}_2$.

2. Пусть характеристическое уравнение имеет λ - один действительный корень второй кратности.

Будем искать решение данной системы в виде $y_1 = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$, $y_2 = (C_3 x + C_4)e^{\lambda x}$. Подставив данные решения в одно из уравнений системы, исключаем две произвольные постоянные.

3. Пусть характеристическое уравнение имеет λ_1, λ_2 - два комплексных сопряженных корня.

Решив систему $A\overline{\alpha} = \lambda\overline{\alpha}$, находим соответствующие собственные вектора $\overline{\alpha}_1$ и $\overline{\alpha}_2$.

Получаем комплексную фундаментальную систему решений: $\overline{z}_1 = e^{\lambda_1 x}\overline{\alpha}_1$, $\overline{z}_2 = e^{\lambda_2 x}\overline{\alpha}_2$.

Образуем действительную фундаментальную систему решений: $\overline{y}_1 = \dfrac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{2}$, $\overline{y}_2 = \dfrac{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}{2i}$.

Общее решение данной системы имеет вид $\overline{y} = C_1\overline{y}_1 + C_2\overline{y}_2$.

1.5.3 Нахождение частного решения неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами с помощью метода неопределенных коэффициентов

Пусть правые части неоднородной системы (1) представляют собой многочлены $P_n(x)$, функции $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$ или их произведения. Тогда частное решение системы (1) можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Например, если $f_1(x) = \sin 3x$, $f_2(x) = e^{2x}$, $\lambda = 2$ - простой корень характеристического уравнения, а $\lambda = \pm 3i$ - не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородной системы будем искать в виде

$$\overline{y} = \left[\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\right]e^{2x} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}\cos 3x + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}\sin 3x .$$

1.6 Элементы теории устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем

1. Пусть дано линейное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Все решения данного уравнения будут асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда уравнение $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ будет иметь только корни с отрицательной действительной частью.

В этом случае многочлен $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ называется устойчивым многочленом.

В случае $n \geq 3$ целесообразно осуществлять проверку многочленов на устойчивость в среде MathCAD (или в другом математическом пакете).

Достаточно ввести вектор коэффициентов

$$V := \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

и получить вектор корней многочлена (включая комплексные корни) с помощью функции

$$\mathrm{polyroots}(V) =$$

2. Пусть дана система линейных ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x). \end{cases}$$

Все решения данной системы будут асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

будет иметь только собственные значения с отрицательной действительной частью.

В случае $n \geq 3$ целесообразно находить собственные значения матриц в среде MathCAD (или в другом математическом пакете).

Достаточно ввести матрицу коэффициентов системы

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и получить вектор собственных значений матрицы (включая комплексные собственные значения) с помощью функции

$$\text{eigenvals}(A) =$$

3. Устойчивость по линейному приближению (линеаризация системы).

Пусть дана система нелинейных ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, \dots y_n). \end{cases}$$ или в векторной форме $\overline{y}' = \overline{F}(\overline{y})$,

для которой выполняется $\overline{F}(\overline{0}) = \overline{0}$.

Построим матрицу

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\overline{0})}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(\overline{0})}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n(0)}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n(\overline{0})}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Если:

1) действительные части всех собственных значений матрицы A отрицательны, то начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия;

2) хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет положительную действительную часть, то начало координат является неустойчивым положением равновесия;

3) в остальных случаях исследовать нелинейную систему на устойчивость с помощью линеаризации нельзя.

Замечание. Если f_i представляют собой многочлены, то для линеаризации системы достаточно удалить все члены, степень которых превосходит 1.

2 Разностные уравнения

2.1 Линейные разностные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Линейным разностным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y(n+2)+py(n+1)+qy(n)=f(n) \quad (q\neq 0).$$

Таблица 8 – Общее решение однородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Разностное уравнение	$y(n+2)+py(n+1)+qy(n)=0$		
Характеристическое уравнение	$\lambda^2+p\lambda+q=0$		
Корни	Два простых действительных корня $\lambda_1,\ \lambda_2$	Один действительный корень второй кратности λ	Два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$
Общее решение	$y(n)=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$	$y=(C_1 n+C_2)\lambda^n$	$y=\rho^n(C_1\cos n\varphi+C_2\sin n\varphi)$

Таблица 9 - Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и **специальной правой частью**

Линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью	$y(n+2)+py(n+1)+qy(n)=f(n)\ \ (q\neq 0)$	
Характеристическое уравнение	$\lambda^2+p\lambda+q=0$	
$f(n)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$P_m(n)$	1 не является корнем характеристического уравнения	$\widetilde{P}_m(n)=A_m\cdot n^m+A_{m-1}\cdot n^{m-1}+$ $+\ldots+A_1\cdot n+A_0$
	1 является корнем характеристического уравнения кратности s	$n^s\cdot\widetilde{P}_m(n)$

Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><td>Линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью</td><td colspan="2">$y(n+2)+py(n+1)+qy(n)=f(n)\ \ (q\neq 0)$</td></tr>
<tr><td>Характеристическое уравнение</td><td colspan="2">$\lambda^2+p\lambda+q=0$</td></tr>
<tr><td>$f(n)$</td><td>Корни характеристического уравнения</td><td>Вид частного решения</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$c\rho^n$</td><td>ρ не является корнем характеристического уравнения</td><td>$A\rho^n$</td></tr>
<tr><td>ρ является корнем характеристического уравнения кратности s.</td><td>$An^s\rho^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a\cos n\varphi$, $a\sin n\varphi$,
$a\cos n\varphi+b\sin n\varphi$</td><td>$\lambda=\cos\varphi+i\sin\varphi$ не является корнем характеристического уравнения</td><td>$A\cos n\varphi+B\sin n\varphi$</td></tr>
<tr><td>$\lambda=\cos\varphi+i\sin\varphi$ является корнем характеристического уравнения первой кратности</td><td>$n(A\cos n\varphi+B\sin n\varphi)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\rho^n(P_m(n)\cos n\varphi+Q_r(n)\sin n\varphi)$</td><td>$\lambda=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ не является корнем характеристического уравнения</td><td>$\rho^n\left(\tilde{P}_s(n)\cos n\varphi+\tilde{Q}_s(n)\sin n\varphi\right)$,
где $s=\max\{m,r\}$</td></tr>
<tr><td>$\lambda=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ является корнем характеристического уравнения первой кратности</td><td>$n\rho^n\left(\tilde{P}_s(n)\cos n\varphi+\tilde{Q}_s(n)\sin n\varphi\right)$,
где $s=\max\{m,r\}$</td></tr>
</table>

2.2 Элементы теории устойчивости для разностных уравнений

Пусть дано линейное разностное уравнение m-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y(n+m)+a_{m-1}y(n+m-1)+...+a_1y(n+1)+a_0y(n)=f(n).$$

Тогда:

1) если все корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенству $|\lambda|<1$, то все решения данного уравнения будут асимптотически устойчивы;

2) если все корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенству $|\lambda|\le 1$, причем все корни $|\lambda|=1$ являются простыми, то все решения данного уравнения будут устойчивы;

3) все решения данного уравнения будут неустойчивы во всех остальных случаях.

3 Уравнения в частных производных

3.1 Уравнения в частных производных первого порядка

Определение. Линейным уравнением в частных производных (УЧП) первого порядка называется уравнение вида

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}=C, \qquad (2)$$

где A, B и C - функции от x, y и u; $u=u(x,y)$ - неизвестная функция.

Пусть система ОДУ $\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{du}{C}$ имеет общие интегралы $F_1(x,y,u)=C_1$ и $F_2(x,y,u)=C_2$, тогда общий интеграл УЧП (2) имеет вид

$$\Phi(F_1(x,y,u),F_2(x,y,u))=0.$$

Здесь $\Phi(x, y)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

3.2 Типы линейных уравнений в частных производных второго порядка

Определение. Квазилинейным уравнением в частными производными второго порядка для функций двух переменных будем называть уравнение

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + f\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0. \qquad (3)$$

Здесь A, B и C - непрерывные функции двух переменных x и y.

Определение. Решением уравнения (3) будем называть дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x, y)$, которая при подстановке в уравнение (3) обращает его в верное тождество.

Таблица 10 – Типы квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка

Тип	$\Delta = B^2 - AC$	Канонический вид	Физические задачи
гиперболический	$\Delta > 0$	$u_{\xi\eta} + f\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0$, $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + f\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0$	Волновые процессы
параболический	$\Delta = 0$	$u_{\xi\xi} + f\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0$	Распространение тепла, диффузия
эллиптический	$\Delta < 0$	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + f\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0$	Стационарные явления

Таблица 11 – Приведение квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду

Уравнение характеристик $A\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\dfrac{dy}{dx} + C = 0$			
Тип	$\Delta = B^2 - AC$	Общие интегралы уравнения характеристик	Замена переменных
гиперболический	$\Delta > 0$	$\varphi(x, y) = C$, $\psi(x, y) = C$	$\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$
параболический	$\Delta = 0$	$\varphi(x, y) = C$	$\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = x$ или $\eta = y$
эллиптический	$\Delta < 0$	$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$	$\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$

Таблица 12 – Виды задач для различных типов уравнений в частных производных

Задача		Тип
Задача Коши	уравнение в частных производных + начальные условия	гиперболический, параболический
Граничная задача	уравнение в частных производных + граничные условия	эллиптический
Смешанная задача	уравнение в частных производных + начальные условия + граничные условия	гиперболический, параболический

3.3 Задачи для гиперболических и параболических уравнений

1. Задача Коши для однородного одномерного гиперболического уравнения в частных производных имеет вид:

УЧП: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ($-\infty < x < +\infty$, $t > 0$);

НУ: $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

Она имеет решение $u(x,t) = \dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau$.

2. Задача Коши для однородного одномерного параболического уравнения в частных производных имеет вид:

УЧП: $u_t = a^2 u_{xx}$ ($-\infty < x < +\infty$, $t > 0$);

НУ: $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

Она имеет решение $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$.

3. Смешанная задача для однородного одномерного гиперболического уравнения в частных производных и неоднородных начальных условий имеет вид:

УЧП: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ($0 < x < L$, $t > 0$);

НУ: $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$ ($0 \le x \le L$);

ГУ: $u\big|_{x=0} = 0$, $u\big|_{x=L} = 0$ ($t \ge 0$).

Ее решение $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi a n}{L}t + B_n \sin\frac{\pi a n}{L}t\right)\sin\frac{\pi n}{L}x$, где $A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{L}x dx$, $B_n = \dfrac{2}{\pi a n}\displaystyle\int_0^L \psi(x)\sin\frac{\pi n}{L}x dx$.

4. Смешанная задача для однородного одномерного параболического уравнения в частных производных и неоднородных начальных условий имеет вид:

УЧП: $u_t = a^2 u_{xx}$ ($0 < x < L$, $t > 0$);

НУ: $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ ($0 \le x \le L$);

ГУ: $u\big|_{x=0} = 0$, $u\big|_{x=L} = 0$ ($t \ge 0$).

Ее решение $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{L} x$, где $A_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{L} x dx$.

5. Смешанная задача для неоднородного одномерного гиперболического уравнения в частных производных и однородных начальных условий имеет вид:

УЧП: $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ ($0 < x < L$, $t > 0$);

НУ: $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = 0$ ($0 \le x \le L$);

ГУ: $u\big|_{x=0} = 0$, $u\big|_{x=L} = 0$ ($t \ge 0$).

Ее решение $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(t)\sin\frac{\pi n}{L} x$, где

$$C_n(t) = \frac{1}{\pi a n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi a n}{L}(t-\tau)d\tau, \quad f_n(t) = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x,t)\sin\frac{\pi n}{L} x dx.$$

6. Смешанная задача для неоднородного одномерного параболического уравнения в частных производных и однородных начальных условий имеет вид:

УЧП: $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ ($0 < x < L$, $t > 0$);

НУ: $u\big|_{t=0} = 0$ ($0 \le x \le L$);

ГУ: $u\big|_{x=0} = 0$, $u\big|_{x=L} = 0$ ($t \ge 0$).

Ее решение $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(t)\sin\frac{\pi n}{L} x$, где

$$C_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2 (t-\tau)} d\tau, \quad f_n(t) = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x,t)\sin\frac{\pi n}{L} x dx.$$

3.4 Некоторые задачи Дирихле для уравнения Лапласа

1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге имеет вид:

УЧП: $u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = 0$ ($0 < \rho < R$);

ГУ: $u\big|_{\rho=R} = f(\varphi)$.

Ее решение $u(\rho,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$, где

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi,\ A_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\ B_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Решение также можно записать в виде интеграла Пуассона

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi)}d\psi.$$

2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа во внешности круга имеет вид:

УЧП: $u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = 0$ ($\rho > R$);

ГУ: $u\big|_{\rho=R} = f(\varphi)$.

Ее решение $u(\rho,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$, где

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi,\ A_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\ B_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце имеет вид:

УЧП: $u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = 0$ ($r < \rho < R$);

ГУ: $u\big|_{\rho=r} = f(\varphi)$, $u\big|_{\rho=R} = f(\varphi)$.

Ее решение

$$u(\rho,\varphi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}\right)\cos n\varphi + \left(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}\right)\sin n\varphi\right],$$

где коэффициенты A_0, B_0, A_n, B_n, C_n и D_n находятся из систем:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln r = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi, \\ A_0 + B_0 \ln R = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\varphi)d\varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} A_n r^n + B_n r^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \\ A_n R^n + B_n R^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\varphi)\cos n\varphi d\varphi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_n r^n + D_n r^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi, \\ C_n R^n + D_n R^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\varphi)\sin n\varphi d\varphi. \end{cases}$$

Список использованных источников

1 Краснов, М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.   М.: КомКнига, 2005. 256 с.

2 Самарский, А.А. Разностные уравнения / А.А. Самарский, Ю.М. Карамзин. М.: Знание, 1978. - 62 с.

3 Боголюбов, А. Н. Задачи по математической физике: учеб. пособие / А. Н. Боголюбов. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.