

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической и общей электротехники

*Н.Ю.Ушакова, Л.В.Быковская*

# **АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В СТАЦИОНАРНЫХ И ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ**

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 140400.62 Электроэнергетика и электротехника

Оренбург

2012

УДК 621.3.011.7(075.8)

ББК 31.211я73

У 93

Рецензент - кандидат технических наук, доцент В.М. Нелюбов

У 93      **Ушакова, Н.Ю.**

Анализ линейных электрических цепей в стационарных и переходных режимах: учебное пособие / Н.Ю.Ушакова, Л.В.Быковская; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2012. – 133 с.

Учебное пособие содержит задания к курсовой работе по дисциплине «Теоретические основы электротехники», краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач с использованием системы Mathcad, вопросы для самоконтроля.

Учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения, обучающихся по направлению 140400.62 Электроэнергетика и электротехника и может быть использовано студентами, обучающимися по другим направлениям подготовки всех форм обучения.

УДК 621.3.011.7(075.8)

ББК 31.211я73

©Ушакова Н.Ю.,  
Быковская Л.В., 2012  
© ОГУ, 2012

## Содержание

Введение.....	5
1 Задание к базовой части курсовой работы .....	6
1.1. Задача 1. «Анализ трехфазной цепи при различных схемах соединения нагрузки» .....	6
1.2 Задача 2. «Анализ аварийного режима в трехфазной цепи методом симметричных составляющих» .....	9
1.3 Задача 3. «Анализ линейной электрической цепи с несинусоидальным источником» .....	12
1.4 Задача 4. «Переходные процессы в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами» .....	23
2 Краткие теоретические сведения и примеры решения. ....	29
2.1 Трехфазные цепи. ....	29
2.1.1 Основные сведения о трехфазных цепях.. ....	29
2.1.2 Основные формулы и алгоритмы для трехфазных цепей. ....	36
2.1.3 Пример решения задачи 1. ....	38
2.2 Метод симметричных составляющих .....	46
2.2.1 Основы метода симметричных составляющих. ....	46
2.2.2 Виды несимметрии в трехфазных цепях .....	49
2.2.3 Общий алгоритм расчета методом симметричных составляющих цепи с несимметричным участком в линии .....	53
2.2.4 Пример расчета цепи с поперечной несимметрией. ....	55
2.2.5 Пример решения задачи 2 в системе Mathcad. ....	62
2.3 Цепи несинусоидального тока. ....	67
2.3.1 Гармонический анализ и разложение функций. ....	67
2.3.2 Свойства периодических кривых, обладающих симметрией. ....	69
2.3.3 Коэффициенты, характеризующие форму несинусоидальных кривых. .	71
2.3.4 Действующее и среднее значения несинусоидальных величин. ....	72
2.3.5 Особенности расчета линейной электрической цепи с	

несинусоидальными источниками. . . . .	74
2.3.6 Мощность при несинусоидальных напряжениях и токах. . . . .	75
2.3.7 Пример решения задачи 3. . . . .	77
2.3.8 Разложение функции в ряд Фурье в Mathcad. . . . .	85
2.4 Переходные процессы. . . . .	90
2.4.1 Основные определения. Законы коммутации. . . . .	91
2.4.2 Классический метод расчета переходных процессов. . . . .	92
2.4.2.1 Определение принужденных составляющих . . . . .	93
2.4.2.2 Составление характеристического уравнения. . . . .	95
2.4.2.3 Характер свободного процесса. . . . .	96
2.4.2.4. Определение постоянных интегрирования. . . . .	97
2.4.2.5 Начальные условия . . . . .	100
2.4.2.6 Алгоритм расчета переходного процесса классическим методом. . . . .	103
2.4.2.7 Примеры расчета переходного процесса классическим методом в Mathcad. . . . .	104
2.4.3 Операторный метод расчета переходных процессов. . . . .	109
2.4.3.1 Математические основы метода. Алгоритм расчета переходного процесса операторным методом. . . . .	119
2.4.3.2 Операторная схема замещения. . . . .	110
2.4.3.3 Переход от изображения к оригиналу. . . . .	113
2.4.3.4 Переход от изображения к оригиналу в Mathcad. . . . .	115
2.4.3.5 Пример расчета переходного процесса операторным методом в Mathcad. . . . .	116
3 Примерные задания к вариативной части курсовой работы. . . . .	118
4 Вопросы и задачи для самоконтроля . . . . .	120
4.1 Трехфазные цепи. Метод симметричных составляющих. . . . .	120
4.2 Цепи несинусоидального тока. . . . .	125
4.3 Переходные процессы. . . . .	127
Список использованных источников . . . . .	133

## Введение

Успешное изучение дисциплины «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ), являющейся теоретической базой для изучения комплекса специальных электротехнических дисциплин, возможно только при активной самостоятельной работе студентов. Курсовая работа является важнейшим элементом самостоятельной работы по ТОЭ. Основной целью курсовой работы является создание и развитие навыков исследовательской работы, умения работать с научной литературой, делать на основе ее изучения выводы и обобщения, умения эффективно использовать вычислительную технику и современное программное обеспечение.

Курсовая работа направлена на формирование у студента следующих профессиональных компетенций:

- способность использовать методы анализа линейных электрических цепей;

- способность привлечь для решения профессиональных задач соответствующий физико-математический аппарат;

- способность и готовность использовать информационные технологии в своей предметной области; понимать существо задач анализа объектов в технической среде.

Курсовая работа содержит базовую и вариативную части. Цель базовой части – освоить методы анализа типовых электрических цепей в стационарных и переходных режимах. Задание к базовой части включает задачи по наиболее важным для студентов направления «Электроэнергетика и электротехника» разделам ТОЭ: трехфазные цепи, метод симметричных составляющих, цепи несинусоидального тока, переходные процессы. По каждой теме приводятся краткие теоретические сведения, примеры решения, в том числе в системе Mathcad, вопросы для самоконтроля. Вторая часть курсовой работы направлена на развитие навыков исследовательской деятельности, умения применять изученные законы и методы для решения нестандартных задач, необходимых для изучения специальных электротехнических дисциплин.

# 1 Задание к базовой части курсовой работы

## 1.1 Задача 1. «Анализ трехфазной цепи при различных схемах соединения нагрузки»

Обмотки трехфазного генератора с симметричной системой фазных напряжений  $U_{\phi\phi}$  соединены звездой. Даны три схемы соединения нагрузки (рисунок 1.1): звезда с нулевым проводом; звезда; треугольник.

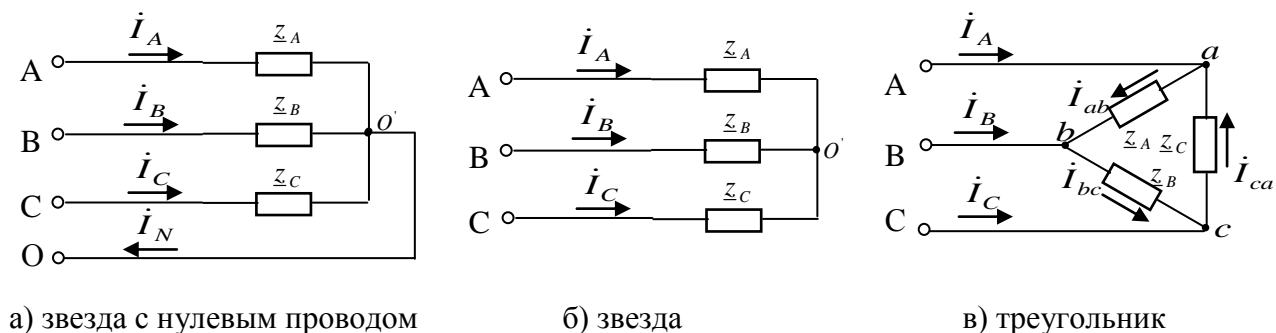


Рисунок 1.1

Для каждой схемы:

- 1) рассчитать все токи;
- 2) проверить баланс комплексной мощности;
- 3) построить векторную диаграмму напряжений и токов.

Параметры схемы выбираются из таблицы 1.1 по номеру варианта, задаваемому преподавателем.

Таблица 1.1- Таблица параметров к задаче 1

Номер варианта	Фазное напряжение генератора	Сопротивления фаз								
		Фаза А (ав)			Фаза В (вс)			Фаза С (са)		
		$R_A$	$x_{LA}$	$x_{CA}$	$R_B$	$x_{LB}$	$x_{CB}$	$R_C$	$x_{LC}$	$x_{CC}$
$U_{\phi\phi}$	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	
1	127	25	10	-	30	20	-	10	-	5
2	220	30	-	20	45	-	-		10	-
3	380	-	30	-	50	50	10	25	-	5
4	660	55	40	-	60	-	-	25	5	20
5	127	40	-	50	55	60	-	20	-	-
6	220	30	40	20	-	30	-	20	10	-
7	380	25	-	-	30	-	40	10	15	30

Продолжение таблицы 1.1

Номер варианта	Фазное напряжение генератора	Сопротивления фаз								
		Фаза А (ав)			Фаза В (вс)			Фаза С (са)		
	$U_{фz}$	$R_A$	$x_{LA}$	$x_{CA}$	$R_B$	$x_{LB}$	$x_{CB}$	$R_C$	$x_{LC}$	$x_{CC}$
	В	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
8	660	-	-	60	70	80	-	40		50
9	127	10	20	-	25	30		15	10	-
10	220	25	5	20	30	-	20	-	-	25
11	380	25	15	-	35	-	-	15		10
12	660	55	45	-	45	55	25	20		20
13	127	20	-	10	30	20		10	30	10
14	220	30	-	-	40	30	-	15	-	20
15	380	40	50	20	50	-	40	-	35	-
16	660	70	-	85	55	65	-	75	-	-
17	127	45	-	-	30	30	-	20	-	10
18	220	50	40	10	60	-	60	25	-	-
19	380	60	-	-	-	50	-	25	10	-
20	660	55	60	-	50	-	30	25	15	-
21	127	-	30	-	20	40	-	30	-	-
22	220	30	30	-	45	-	-	30	-	20
23	380	50	-	40	40	50	20	-	35	-
24	660	70	50	-	30	-	45	35	-	-
25	127	-	-	20	20	30	-	40	-	50
26	220	35	-	-	50	-	40	40	30	10
27	380	45	55	20	30	-	50	50	40	-
28	660	80	85	20	60	-	-	-	75	-
29	127	40	30	-	45	-	25	-	-	45
30	220	50	-	40	45	50	-	75	-	-
31	127	25	10	-	30	20	-	10	-	5
32	220	30	-	20	45	-	-		10	-
33	380	-	30	-	50	50	10	25	-	5
34	660	55	40	-	60	-	-	25	5	20
35	127	40	-	50	55	60	-	45	-	-

Продолжение таблицы 1.1

Номер варианта	Фазное напряжение генератора	Сопротивления фаз								
		Фаза А (ав)			Фаза В (вс)			Фаза С (са)		
	$U_{фz}$	$R_A$	$x_{LA}$	$x_{CA}$	$R_B$	$x_{LB}$	$x_{CB}$	$R_C$	$x_{LC}$	$x_{CC}$
	В	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
36	220	30	40	20	-	30	-	45	10	-
37	380	25	-	-	30	-	40	30	15	20
38	660	-	-	60	70	80	-	45		20
39	127	10	20	-	25	30		50	10	-
31	220	25	5	50	30	-	20	60	-	40
32	380	25	15	-	35	-	-	55		-
33	660	55	45	60	45	55	25	20		20
34	127	20	-	30	30	20		10	30	-
35	220	30	-	-	40	30	-	15	-	-
36	380	40	50	80	50	-	40	-	35	50
37	220	25	25	20	30	-	20	-	-	25
38	380	25	25	-	35	-	-	15		10
39	660	55	30	-	45	55	25	20		20
40	127	30	30	10	30	20	10	10	30	10
41	220	35	-	-	40	30	20	15	-	20
42	380	45	35	20	50	-	10	-	35	-
43	660	30	40	85	55	65	20	75	-	-
44	127	40	40	-	30	30	-	20	-	10
45	220	50	25	10	60	-	-	25	-	-
46	380	55	-	-	-	50	10	25	10	-
47	660	60	50	-	35	-	30	25	15	-
48	127	30	20	-	40	40	-	30	-	-
49	220	30	45	-	40	-	-	30	-	40
50	380	-	40	40	50	50	20	-	35	40
51	660	50	30	-	35	-	45	35	-	50
52	127	-	20	20	40	30	-	40	-	-
53	220	-	50	-	50	-	40	40	30	-
54	380	55	30	20	30	-	50	50	40	75
55	660	85	60	20	60	-	-	-	75	25
56	127	30	45	-	45	-	25	-	-	25
57	220	-	-	40	45	50	-	75	-	-
58	380	-	30	25	-	50	-	25	10	-
59	660	65	60	-	55	-	35	25	15	-
60	127	-	35	-	20	40	-	35	-	-



## 1.2 Задача 2 «Анализ аварийного режима в трехфазной цепи методом симметричных составляющих»

Симметричная трехфазная нагрузка, соединенная звездой с нулевым проводом питается от трехфазного генератора с симметричной системой ЭДС. В линии произошло короткое замыкание (рисунок 1.2).

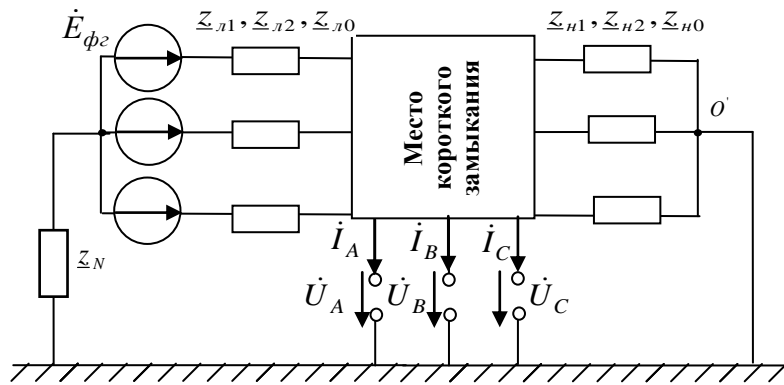


Рисунок 1.2

Методом симметричных составляющих определить фазные токи  $i_A, i_B, i_C$  и фазные напряжения  $U_A, U_B, U_C$  в месте короткого замыкания, построить векторные диаграммы найденных фазных токов и напряжений и их симметричных составляющих.

Вид короткого замыкания, фазная ЭДС генератора  $E_{\phi 2}$ , сопротивление нейтрального провода  $z_N$ , фазные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей для линии  $z_{\ell 1}, z_{\ell 2}, z_{\ell 0}$  и нагрузки  $z_{n1}, z_{n2}, z_{n0}$  выбираются из таблицы 1.2 по номеру варианта, задаваемому преподавателем.

Таблица 1.2 - Таблица параметров к задаче 2

Номер варианта	Вид повреждения линии	Фазная ЭДС генератора $E_{\phi 2}$ , В	$z_N$ , Ом	Линия			Нагрузка		
				$z_{\ell 1}$ , Ом	$z_{\ell 2}$ , Ом	$z_{\ell 0}$ , Ом	$z_{n1}$ , Ом	$z_{n2}$ , Ом	$z_{n0}$ , Ом
1	к.з. фазы В на землю	127	j10	j3	j2	j4	j20	j15	j5
2	к.з. фазы С на землю	220	j12	j3	j2	j4	j22	j17	j7
3	к.з. фаз А и В на землю	380	j14	5j5	j4	j6	j24	j19	j9
4	к.з. фаз В и С на землю	660	j16	j6	j4	j2	j26	j21	j11
5	к.з. фаз А и С на землю	127	j18	j6	j4	j2	j28	j23	j13
6	к.з. фаз А и В	220	j19	j8	j6	j3	j30	j25	j15

Продолжение таблицы 1.2

Номер варианта	Вид повреждения линии	Фазная ЭДС генера- тора $E \phi_{\Sigma},$ $B$	$z_N,$ Ом	Линия			Нагрузка		
				$z_{л1},$ Ом	$z_{л2},$ Ом	$z_{л0},$ Ом	$z_{н1},$ Ом	$z_{н2},$ Ом	$z_{н0},$ Ом
7	к.з. фаз В и С	380	j20	j3	j2	j2	j32	j27	j17
8	к.з. фаз А и С	660	j22	j3	j2	j2	j34	j29	j19
9	к.з. фазы В на землю	127	j24	j4	j3	j3	j36	j31	j21
10	к.з. фазы С на землю	220	j26	j3	j2	j2	j38	j33	j23
11	к.з. фаз А и В на землю	380	j28	j3	j2	j2	j40	j35	j25
12	к.з. фаз В и С на землю	660	j30	j4	j3	j3	j42	j37	j27
13	к.з. фаз А и С на землю	127	j10	j3	j2	j3	j44	j41	j31
14	к.з. фаз А и В	220	j12	j3	j2	j4	j46	j43	j33
15	к.з. фаз В и С	380	j14	j5	j3	j4	j48	j45	j35
16	к.з. фаз А и С	660	j16	j6	j3	j6	j50	j47	j37
17	к.з. фазы В на землю	127	j18	j6	j5	j2	j52	j49	j39
18	к.з. фазы С на землю	220	j19	j8	j6	j2	j54	j51	j41
19	к.з. фаз А и В на землю	380	j20	j3	j6	j3	j56	j53	j43
20	к.з. фаз В и С на землю	660	j22	j3	j8	j2	j58	j55	j45
21	к.з. фаз А и С на землю	127	j24	j4	j3	j2	j60	j57	j47
22	к.з. фаз А и В	220	j26	j3	j3	j3	j62	j59	j49
23	к.з. фаз В и С	380	j28	j3	j4	j2	j64	j61	j51
24	к.з. фаз А и С	660	j30	j4	j3	j2	j66	j63	j53
25	к.з. фазы В на землю	127	j20	j3	j3	j3	j68	j65	j55
26	к.з. фазы С на землю	220	j22	j3	j4	j3	j70	j67	j57
27	к.з. фаз А и В на землю	380	j24	j3	j3	j5	j72	j69	j59
28	к.з. фаз В и С	660	j26	j5	j3	j6	j74	j71	j61
29	к.з. фаз А и С	127	j28	j6	j5	j6	j76	j73	j63
30	к.з. фаз В и С на землю	220	j30	j6	j3	j8	j78	j75	j65
31	к.з. фазы В на землю	127	j15	j3	j3	j4	j20	j15	j2
32	к.з. фазы С на землю	220	j17	j3	j3	j4	j22	j17	j2
33	к.з. фаз А и В на землю	380	j19	j5	j5	j6	j24	j19	j4

Продолжение таблицы 1.2

Номер варианта	Вид повреждения линии	Фазная ЭДС генератора $E_{\phi 2}$ , В	$z_N$ , Ом	Линия			Нагрузка		
				$z_{л1}$ , Ом	$z_{л2}$ , Ом	$z_{л0}$ , Ом	$z_{н1}$ , Ом	$z_{н2}$ , Ом	$z_{н0}$ , Ом
34	к.з. фаз В и С на землю	660	j21	j6	j6	j2	j26	j21	j4
35	к.з. фаз А и С на землю	127	j23	j6	j6	j2	j28	j23	j4
36	к.з. фаз А и С на землю	127	j10	j3	j5	j3	j44	j41	j31
37	к.з. фаз А и В	220	j12	j3	j6	j4	j46	j43	j33
38	к.з. фаз А и В	220	j19	j8	j6	j3	j30	j25	j15
39	к.з. фаз В и С	380	j20	j3	j8	j2	j32	j27	j17
40	к.з. фаз А и С	660	j22	j3	j3	j2	j34	j29	j19
41	к.з. фазы В на землю	127	j24	j4	j3	j3	j36	j31	j21
42	к.з. фазы С на землю	220	j26	j3	j4	j2	j38	j33	j23
43	к.з. фаз А и В на землю	380	j28	j3	j3	j2	j40	j35	j25
44	к.з. фаз В и С на землю	660	j30	j4	j3	j3	j42	j37	j27
45	к.з. фаз В и С	380	j14	j5	j4	j4	j48	j45	j35
46	к.з. фаз А и С	660	j16	j6	j3	j6	j50	j47	j37
47	к.з. фазы В на землю	127	j18	j6	j5	j2	j52	j44	j39
48	к.з. фазы С на землю	220	j19	j8	j6	j2	j54	j46	j41
49	к.з. фаз А и В на землю	380	j6	j3	j6	j3	j56	j30	j43
50	к.з. фаз В и С на землю	660	j8	j3	j8	j2	j58	j32	j45
51	к.з. фаз А и С на землю	127	j3	j4	j3	j2	j60	j34	j47
52	к.з. фаз А и В	220	j3	j3	j3	j3	j62	j36	j49
53	к.з. фаз В и С	380	j4	j3	j4	j2	j64	j38	j51
54	к.з. фаз А и С	660	j3	j4	j3	j2	j66	j40	j53
55	к.з. фазы В на землю	127	j3	j3	j3	j3	j68	j42	j55
56	к.з. фазы С на землю	220	j3	j3	j4	j3	j70	j48	j57
57	к.з. фаз А и В на землю	380	j3	j3	j3	j5	j72	j50	j59
58	к.з. фаз В и С	660	j4	j5	j3	j6	j74	j52	j61
59	к.з. фаз А и С	127	j3	j6	j5	j6	j76	j44	j63
60	к.з. фаз В и С на землю	220	j3	j6	j3	j8	j78	j46	j65

### **1.3 Задача 3 «Анализ линейной электрической цепи с несинусоидальным источником»**

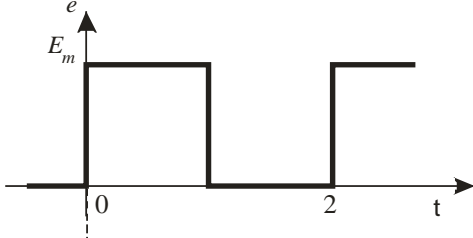
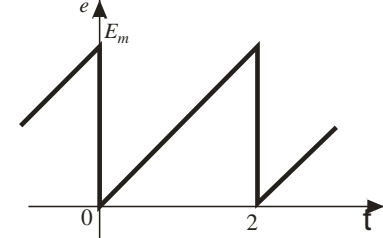
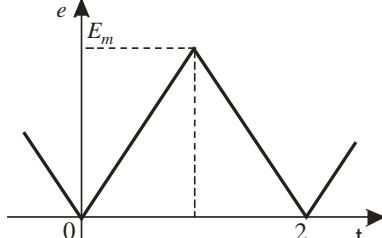
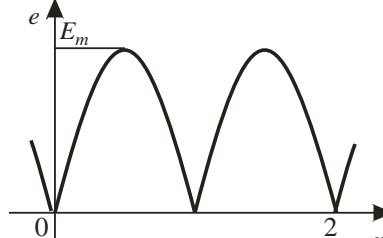
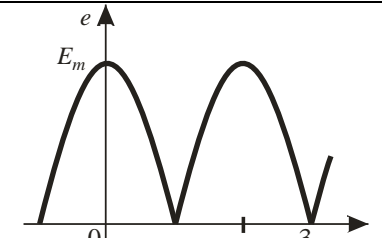
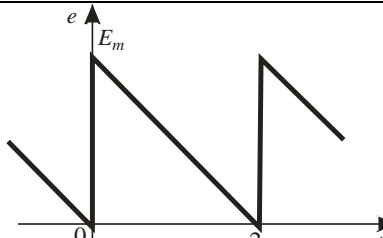
В линейной электрической цепи, схема и параметры которой приведены ниже, действует источник несинусоидального напряжения. Форма ЭДС задана.

Требуется:

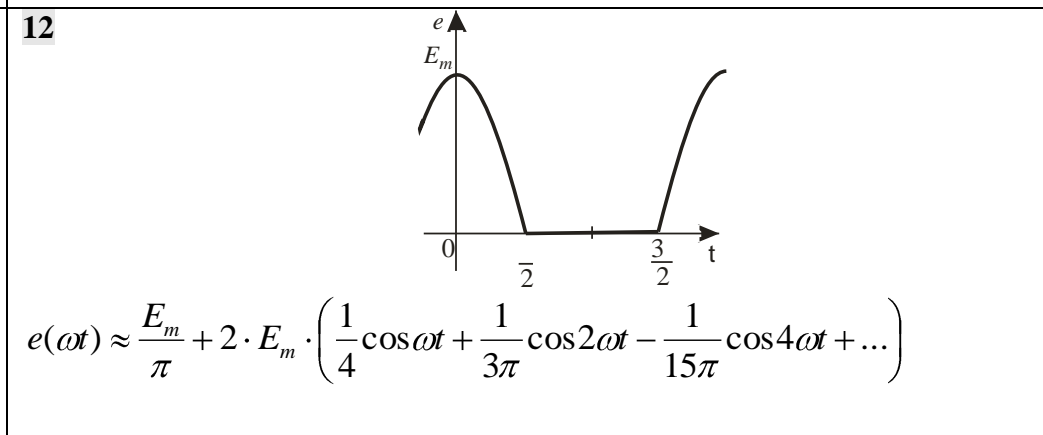
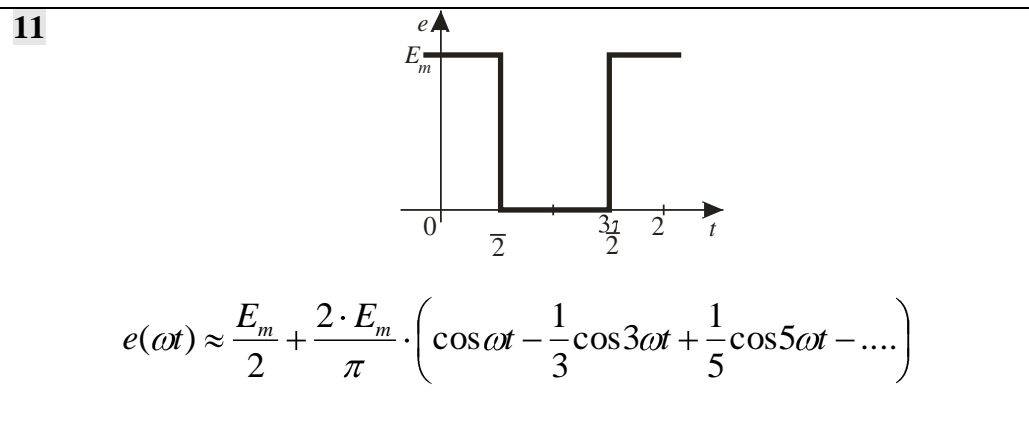
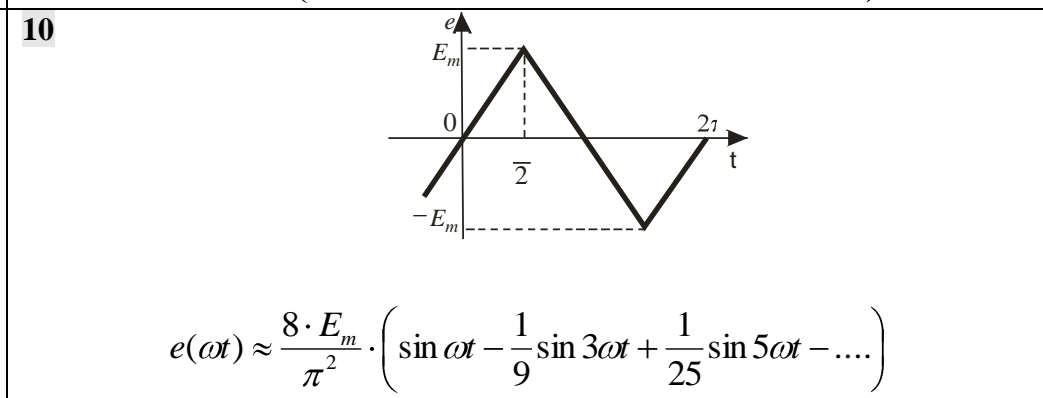
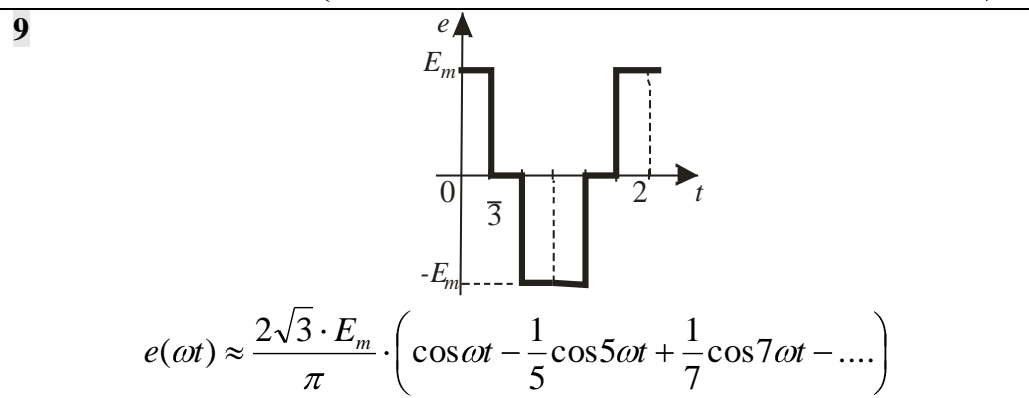
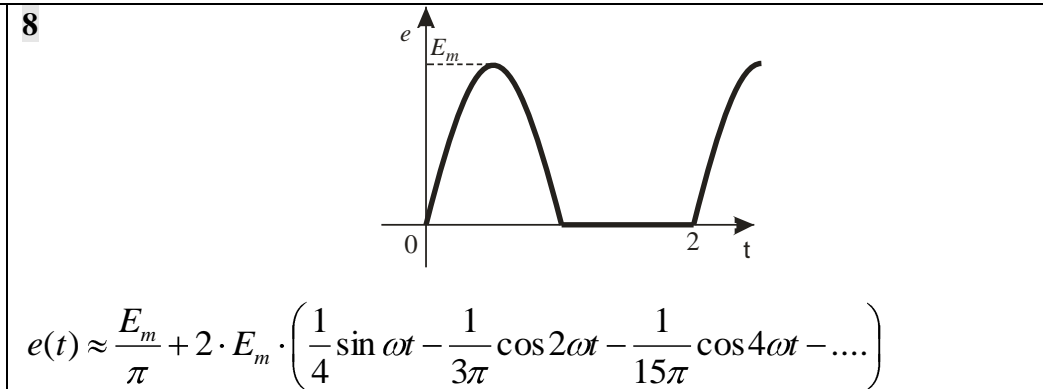
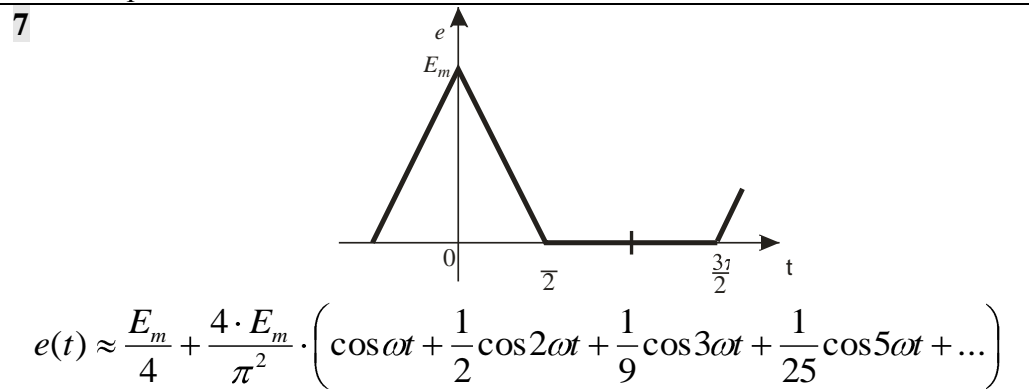
- 1) Представить ЭДС источника, заданную графически, рядом Фурье.
- 2) Для дальнейших расчетов ограничить число членов ряда постоянной составляющей и тремя – пятью гармониками.
- 3) Построить графики спектров амплитуд и начальных фаз ЭДС источника.
- 4) Определить погрешность в определении действующего значения ЭДС, возникающую за счет ограничения числа гармоник ряда.
- 5) На одном графике построить кривую исходной несинусоидальной ЭДС и кривую, полученную в результате сложения гармонических составляющих ограниченного ряда.
- 6) Для каждой гармоники, включая постоянную составляющую, рассчитать токи ветвей. При расчете каждой гармоники выполнить построение векторных диаграмм токов соответствующих гармоник и проверить правильность расчётов балансом мощности.
- 7) Записать мгновенные значения токов ветвей в виде ряда Фурье.
- 8) Определить действующие значения токов ветвей, активную, реактивную, полную мощности цепи, а также мощность искажения и коэффициент мощности.

График несинусоидальной ЭДС источника (таблица 1.3) и электрическая схема (таблица 1.4) выбираются по номеру в списке журнала группы. Параметры схемы выбираются из таблицы 1.5 по варианту, назначаемому преподавателем. Способ представления ЭДС источника рядом Фурье (с использованием готовых формул из таблицы 1.3 или разложение в ряд с помощью компьютерного пакета MathCad) задается преподавателем.

Таблица 1.3 – Варианты несинусоидальной ЭДС источника

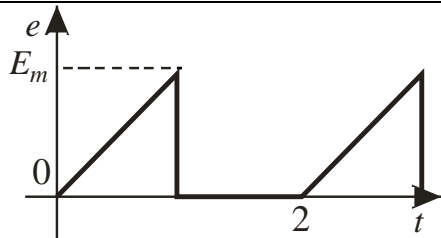
График несинусоидальной ЭДС, формула разложения функции в ряд Фурье	График несинусоидальной ЭДС, формула разложения функции в ряд Фурье
<p><b>1</b></p>  $e(\omega t) \approx \frac{E_m}{2} + \frac{2 \cdot E_m}{\pi} \cdot \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$	<p><b>2</b></p>  $e(\omega t) \approx \frac{E_m}{2} - \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$
<p><b>3</b></p>  $e(\omega t) \approx \frac{E_m}{2} - \frac{4 \cdot E_m}{\pi^2} \cdot \left( \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right)$	<p><b>4</b></p>  $e(\omega t) \approx \frac{2E_m}{\pi} - \frac{4 \cdot E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{3} \cos 2\omega t + \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \frac{1}{35} \cos 6\omega t + \dots \right)$
<p><b>5</b></p>  $e(\omega t) \approx \frac{2E_m}{\pi} + \frac{4 \cdot E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{3} \cos 2\omega t - \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \frac{1}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$	<p><b>6</b></p>  $e(\omega t) \approx \frac{E_m}{2} + \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$

Продолжение таблицы 1.3



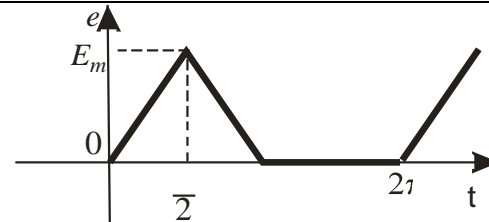
Продолжение таблицы 1.3

13



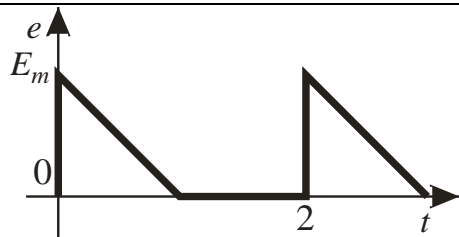
$$e(\omega t) \approx \frac{E_m}{4} + \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin(\omega t - 32,5^\circ)}{0,843} - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} - \frac{\sin(4\omega t)}{4} + \dots \right)$$

14



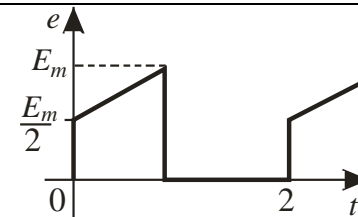
$$e(\omega t) \approx \frac{E_m}{4} + \frac{4 \cdot E_m}{\pi^2} \cdot \left( \sin \omega t - \frac{1}{2} \cos 2\omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t \dots \right)$$

15



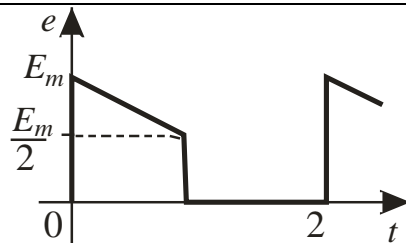
$$e(\omega t) \approx \frac{E_m}{4} + \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin(\omega t + 32,5^\circ)}{0,843} + \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(4\omega t)}{4} + \dots \right)$$

16



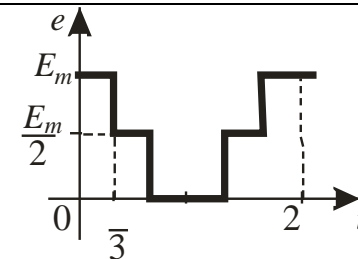
$$e(\omega t) \approx \frac{3E_m}{8} + \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin(\omega t - 12^\circ)}{0,653} - \frac{\sin(2\omega t)}{4} + \frac{\sin(3\omega t)}{2} - \frac{\sin(4\omega t)}{8} + \dots \right)$$

17



$$e(\omega t) \approx \frac{3E_m}{8} + \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin(\omega t + 12^\circ)}{0,653} + \frac{\sin(2\omega t)}{4} + \frac{\sin(3\omega t)}{2} + \frac{\sin(4\omega t)}{8} + \dots \right)$$

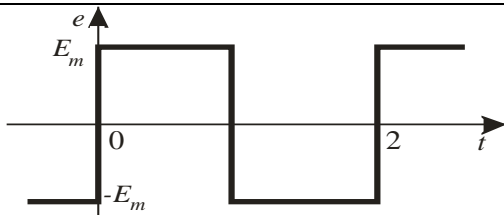
18



$$e(\omega t) \approx \frac{E_m}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot E_m}{\pi} \cdot \left( \cos \omega t - \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \frac{1}{7} \cos 7\omega t - \dots \right)$$

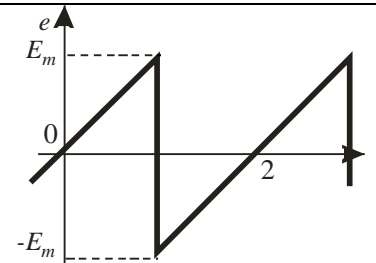
Продолжение таблицы 1.3

19



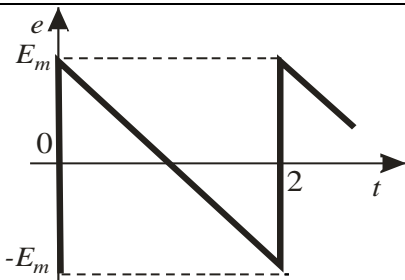
$$e(\omega t) \approx \frac{4 \cdot E_m}{\pi} \cdot \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

20



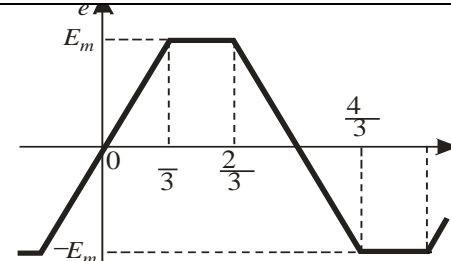
$$e(\omega t) \approx \frac{2 \cdot E_m}{\pi} \cdot \left( \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$

21



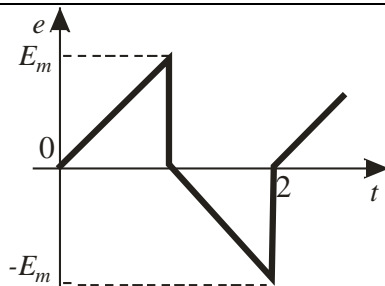
$$e(\omega t) \approx \frac{2 \cdot E_m}{\pi} \cdot \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$

22



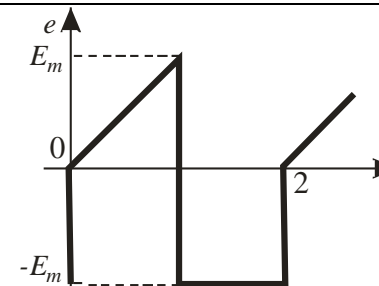
$$e(\omega t) \approx \frac{6\sqrt{3} \cdot E_m}{\pi^2} \cdot \left( \sin \omega t - \frac{1}{25} \sin 5\omega t + \frac{1}{49} \sin 7\omega t - \frac{1}{121} \sin 11\omega t + \dots \right)$$

23



$$e(t) \approx \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin(\omega t - 32,5^\circ)}{0,422} + \frac{\sin(3\omega t)}{1,5} + \frac{\sin(5\omega t)}{2,5} + \frac{\sin(7\omega t)}{3,5} + \dots \right)$$

24

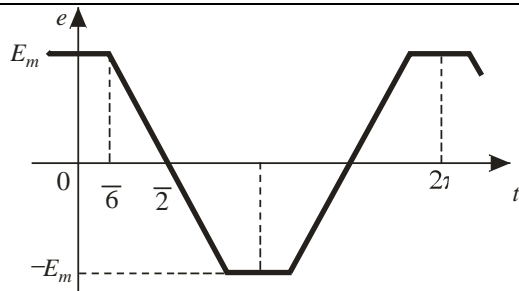


$$e(\omega t) \approx \frac{-E_m}{4} + \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin(\omega t - 12^\circ)}{0,326} - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{1} - \frac{\sin(4\omega t)}{4} + \dots \right)$$



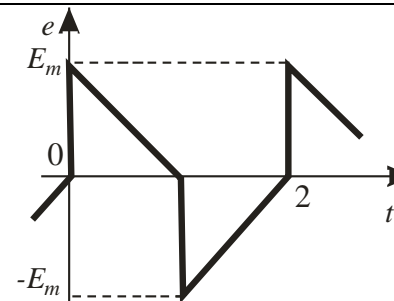
Продолжение таблицы 1.3

25



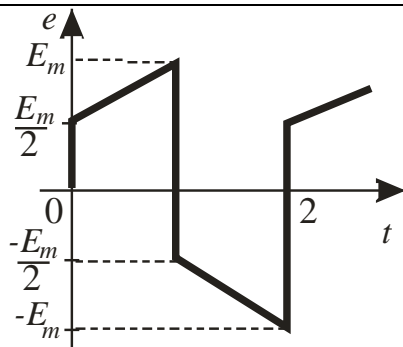
$$e(\omega t) \approx \frac{6\sqrt{3} \cdot E_m}{\pi^2} \cdot \left( \cos \omega t - \frac{1}{25} \cos 5\omega t - \frac{1}{49} \cos 7\omega t + \frac{1}{121} \cos 11\omega t \dots \right)$$

26



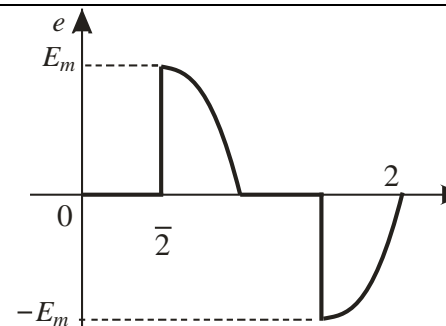
$$e(t) \approx \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin(\omega t + 32,5^\circ)}{0,422} + \frac{\sin(3\omega t)}{1,5} + \frac{\sin(5\omega t)}{2,5} + \frac{\sin(7\omega t)}{3,5} + \dots \right)$$

27



$$e(\omega t) \approx \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin(\omega t - 12^\circ)}{0,326} + \frac{\sin(3\omega t)}{1} + \frac{\sin(5\omega t)}{1,67} - \frac{\sin(7\omega t)}{2,33} + \dots \right)$$

28



$$e(\omega t) \approx \frac{E_m}{\pi} \cdot \left( \sqrt{\left( \frac{\pi^2}{4} + 1 \right)} + \sin(\omega t - 32,5^\circ) + \sin(3\omega t + 90^\circ) + \frac{1}{3} \cdot \sin(5\omega t - 90^\circ) + \frac{1}{3} \cdot \sin(7\omega t + 90^\circ) + \dots \right)$$

Таблица 1.4 – Схемы электрических цепей

Вариант	Схема	Вариант	Схема
1		7	
2		8	
3		9	
4		10	
5		11	
6		12	

Продолжение таблицы 1.4

Вариант	Схема	Вариант	Схема
13		19	
14		20	
15		21	
16		22	
17		23	
18		24	

Продолжение таблицы 1.4

Вариант	Схема	Вариант	Схема
25		27	
26		28	

Таблица 1.5 – Параметры схемы цепи

Вариант	$E_m, \text{В}$	$T \cdot 10^{-2}, \text{с}$	$R_1, \text{Ом}$	$R_2, \text{Ом}$	$R_3, \text{Ом}$	$L, \text{мГн}$	$C, \text{мкФ}$
1	200	0,4	10	10	20	30	30
2	250	0,5	12	12	10	40	25
3	300	0,6	15	10	15	20	30
4	200	0,7	10	14	12	15	44
5	350	0,8	14	8	10	25	60
6	200	0,9	9	13	9	10	55
7	300	1,0	20	15	4	26	60
8	400	1,1	10	14	8	40	70
9	250	1,2	12	15	15	20	50
10	350	1,3	8	25	20	30	40
11	200	1,4	15	10	20	28	55
12	300	1,5	14	18	6	24	70

Продолжение таблицы 1.5

Вариант	$E_m, В$	$T \cdot 10^{-2}, с$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$L, мГн$	$C, мкФ$
13	320	1,6	9	10	10	25	45
14	340	1,7	14	12	8	35	60
15	360	1,8	10	20	12	35	60
16	200	1,9	25	9	30	20	40
17	250	2,0	30	20	15	35	75
18	240	0,4	12	10	30	25	25
19	220	0,6	16	15	12	20	50
20	200	0,8	20	16	20	25	60
21	400	1,4	10	10	20	30	30
22	300	1,5	12	12	10	40	25
23	200	1,6	10	15	15	20	30
24	350	1,7	14	10	12	15	44
25	300	1,8	8	14	10	25	60
26	240	1,9	13	9	9	10	55
27	320	2,0	15	20	4	26	60
28	380	0,4	10	10	8	40	70
29	200	0,4	20	10	10	30	30
30	350	1,3	20	25	12	30	40
31	200	1,4	20	10	15	28	55
32	300	0,6	15	10	10	20	30
33	250	1,2	15	15	14	20	50
34	200	0,7	12	14	9	15	44
35	360	1,8	12	20	20	35	60

Продолжение таблицы 1.5

Вариант	$E_m, В$	$T \cdot 10^{-2}, с$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$L, мГн$	$C, мкФ$
36	250	0,5	10	12	10	40	25
37	350	0,8	10	8	12	25	60
38	320	1,6	10	10	8	25	45
39	200	0,9	9	13	15	10	55
40	400	1,1	8	14	14	40	70
41	340	1,7	8	12	9	35	60
42	300	1,5	6	18	14	24	70
43	300	1,0	10	15	10	26	30
44	240	0,4	30	10	10	25	25
45	300	1,5	10	12	12	40	30
46	250	0,5	10	12	15	40	44
47	300	0,6	15	10	10	20	60
48	400	1,4	20	10	14	30	55
49	200	1,6	15	15	9	20	60
50	200	0,4	20	10	20	30	70
51	200	1,9	30	9	10	20	50
52	350	1,7	12	10	12	15	40
53	200	0,7	12	14	8	15	55
54	220	0,6	12	15	15	20	70
55	240	1,9	9	9	14	10	30
56	200	0,8	20	16	10	25	25
57	320	2,0	4	20	12	26	60
58	300	1,8	10	14	15	25	60
59	380	0,4	8	10	10	40	70
60	250	2,0	15	20	14	35	75

## 1.4 Задача 4 «Переходные процессы в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами»

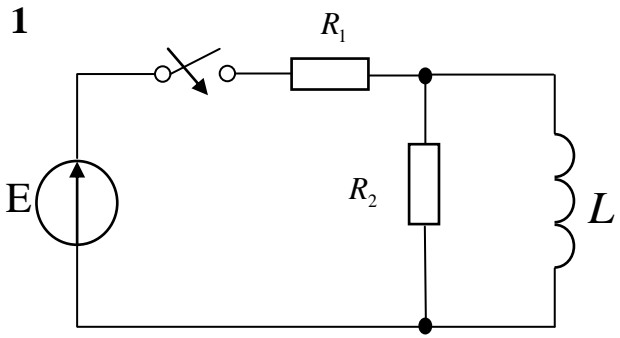
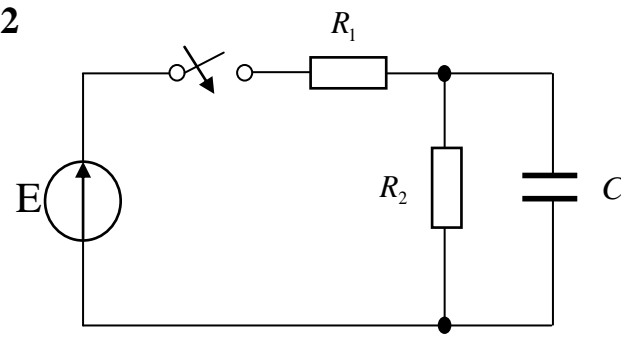
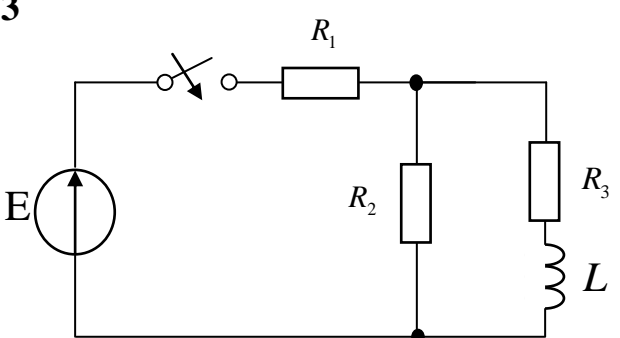
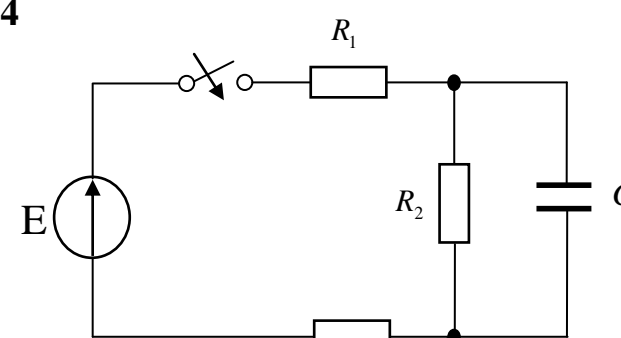
Для возникающего переходного процесса в электрической цепи требуется:

- классическим и операторным методом рассчитать переходные токи во всех ветвях и переходное напряжение на реактивном элементе;
- построить графики тока и напряжения на реактивном элементе в функции времени  $t$ .

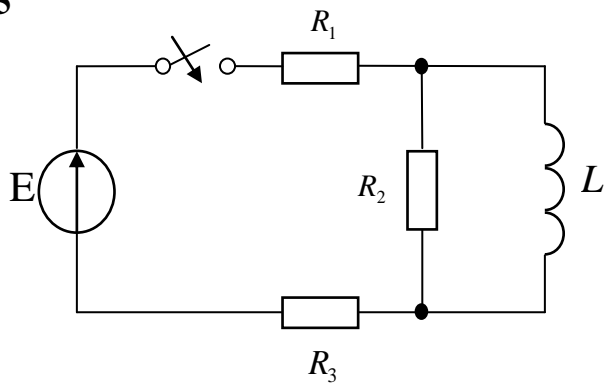
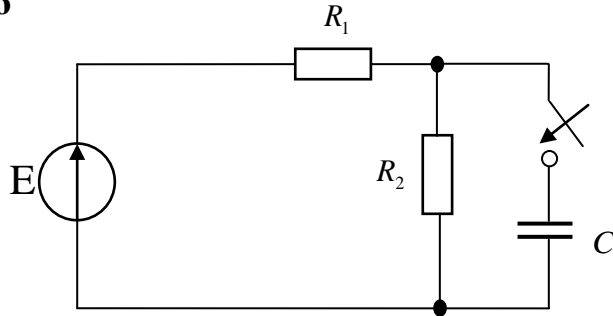
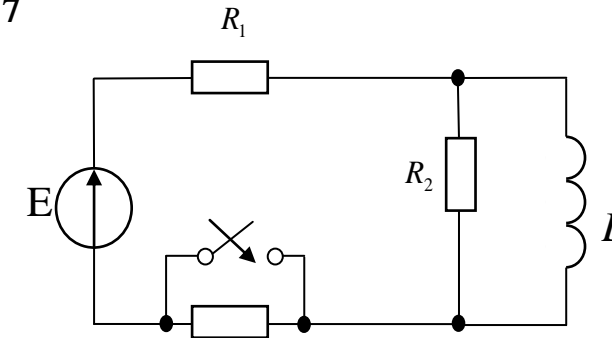
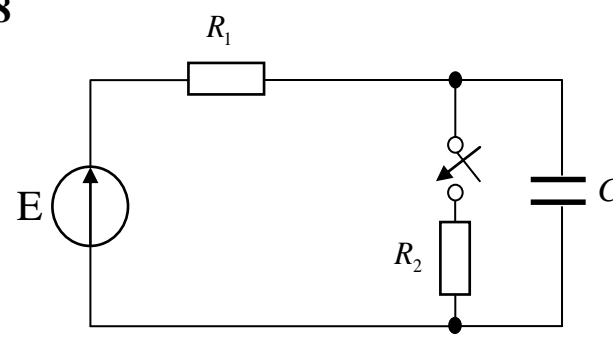
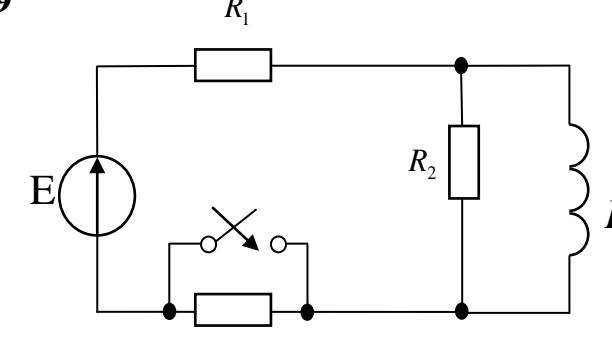
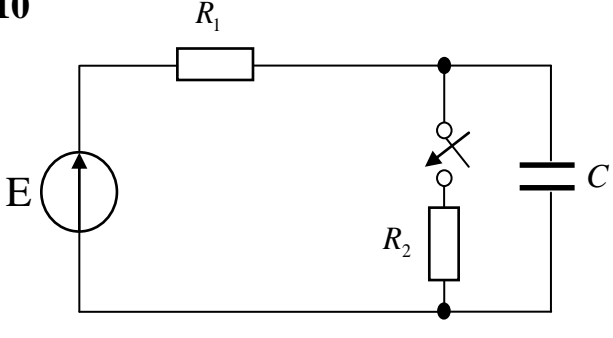
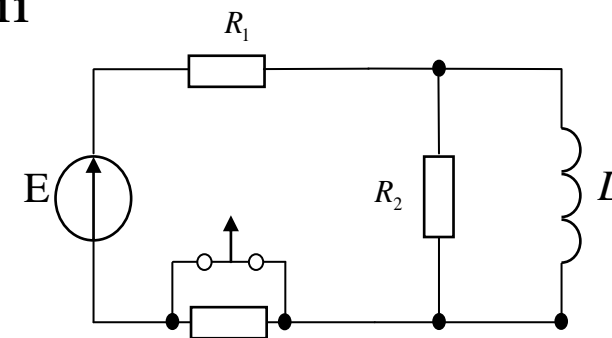
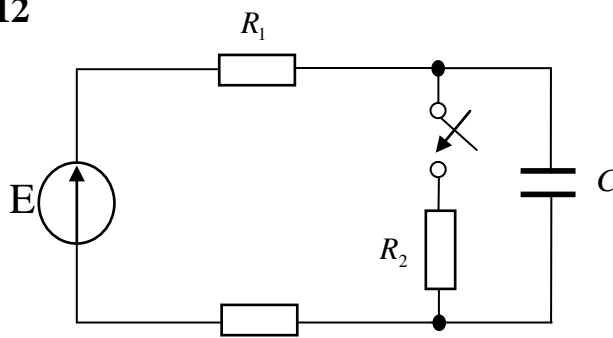
Схемы электрической цепи приведены в таблице 1.6, постоянное напряжение источника и параметры схемы заданы в таблице 1.7.

Номер схемы соответствует порядковому номеру, под которым фамилия студента записана в групповом журнале. Номер варианта параметров схемы из таблицы 1.7 назначается преподавателем.

Таблица 1.6

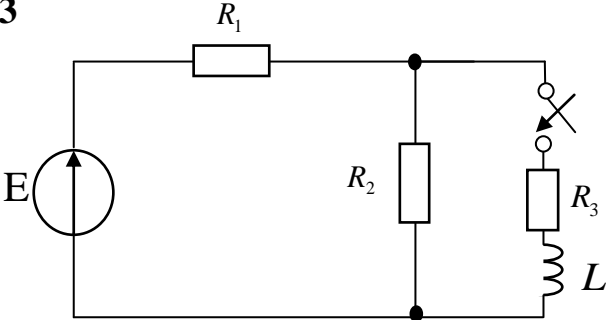
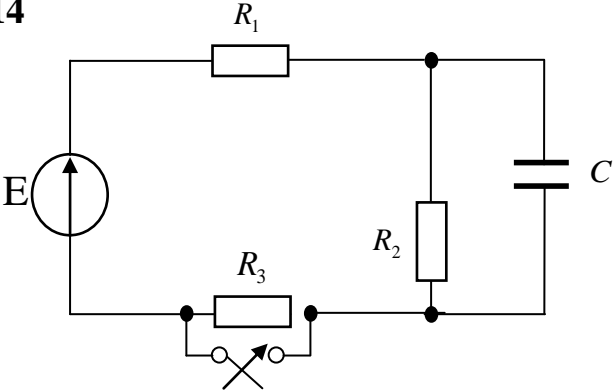
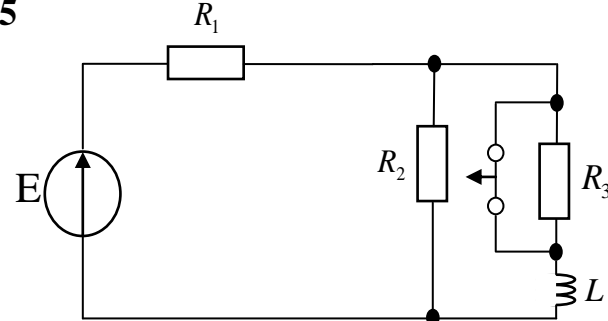
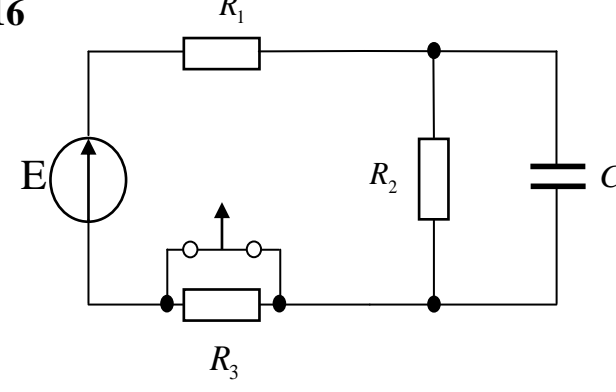
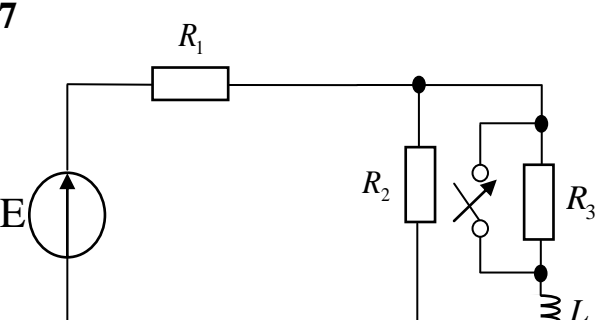
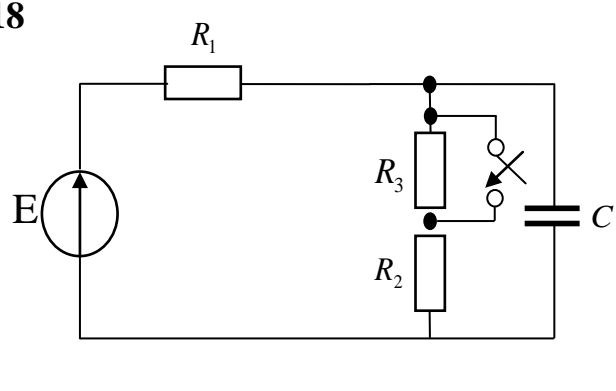
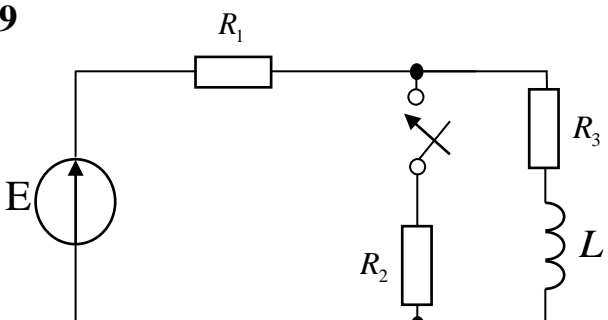
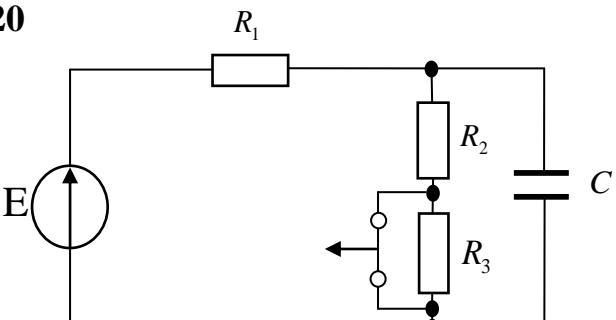
Вариант, схема	Вариант, схема
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 
<p><b>3</b></p> 	<p><b>4</b></p> 

Продолжение таблицы 1.6

Вариант, схема	Вариант, схема
<p><b>5</b></p> 	<p><b>6</b></p> 
<p><b>7</b></p> 	<p><b>8</b></p> 
<p><b>9</b></p> 	<p><b>10</b></p> 
<p><b>11</b></p> 	<p><b>12</b></p> 



Продолжение таблицы 1.6

Вариант, схема	Вариант, схема
<p><b>13</b></p> 	<p><b>14</b></p> 
<p><b>15</b></p> 	<p><b>16</b></p> 
<p><b>17</b></p> 	<p><b>18</b></p> 
<p><b>19</b></p> 	<p><b>20</b></p> 

Продолжение таблицы 1.6

Вариант, схема	Вариант, схема
<p><b>21</b></p> <p>Circuit diagram 21: A series circuit containing a voltage source <math>E</math>, resistors <math>R_1</math> and <math>R_4</math>, a switch, resistor <math>R_2</math>, resistor <math>R_3</math>, and inductor <math>L</math>.</p>	<p><b>22</b></p> <p>Circuit diagram 22: A series circuit containing a voltage source <math>E</math>, a capacitor <math>C</math>, and resistors <math>R_2</math> and <math>R_3</math>.</p>
<p><b>23</b></p> <p>Circuit diagram 23: A series circuit containing a voltage source <math>E</math>, resistor <math>R_1</math>, resistor <math>R_2</math>, resistor <math>R_3</math>, and inductor <math>L</math>. A switch is connected in parallel with resistor <math>R_2</math>.</p>	<p><b>24</b></p> <p>Circuit diagram 24: A series circuit containing a voltage source <math>E</math>, resistor <math>R_1</math>, resistor <math>R_2</math>, resistor <math>R_3</math>, and a capacitor <math>C</math>. A switch is connected in parallel with the capacitor <math>C</math>.</p>
<p><b>25</b></p> <p>Circuit diagram 25: A series circuit containing a voltage source <math>E</math>, resistor <math>R_1</math>, resistor <math>R_2</math>, resistor <math>R_3</math>, inductor <math>L</math>, and capacitor <math>C</math>. A switch is connected in parallel with resistor <math>R_2</math>.</p>	<p><b>26</b></p> <p>Circuit diagram 26: A series circuit containing a voltage source <math>E</math>, resistor <math>R_1</math>, resistor <math>R_3</math>, inductor <math>L</math>, and a switch.</p>
<p><b>27</b></p> <p>Circuit diagram 27: A series circuit containing a voltage source <math>E</math>, resistor <math>R_1</math>, resistor <math>R_3</math>, inductor <math>L</math>, and resistor <math>R_2</math>. A switch is connected in parallel with resistor <math>R_1</math>.</p>	<p><b>28</b></p> <p>Circuit diagram 28: A series circuit containing a voltage source <math>E</math>, resistor <math>R_1</math>, resistor <math>R_3</math>, inductor <math>L</math>, and capacitor <math>C</math>. A switch is connected in parallel with the capacitor <math>C</math>.</p>

Таблица 1.7 – Параметры схемы к задаче 4

№ варианта	E, В	R <sub>1</sub> , Ом	R <sub>2</sub> , Ом	R <sub>3</sub> , Ом	L, Гн в схемах с L	C, мкФ в схемах с C
1	100	100	100	200	0.2	50
2	200	150	200	100	0.8	40
3	300	80	100	200	0.4	60
4	400	100	150	120	0.6	100
5	500	80	200	120	0.3	80
6	150	120	100	200	0.5	50
7	250	50	100	100	0.9	90
8	120	120	200	150	0.7	80
9	220	150	120	200	0.4	40
10	180	50	120	100	0.5	60
11	220	150	120	200	0.4	40
12	150	120	100	200	0.5	50
13	300	80	100	200	0.4	60
14	100	100	100	200	0.2	50
15	120	120	200	150	0.7	80
16	500	80	200	120	0.3	80
17	400	100	150	120	0.6	100
18	180	50	120	100	0.5	60
19	250	50	100	100	0.9	90
20	200	150	200	100	0.8	40
21	100	200	100	100	0.2	50
22	100	100	100	150	0.2	50
23	120	200	200	80	0.7	80
24	120	120	200	100	0.7	80
25	150	120	100	80	0.5	50
26	150	200	100	120	0.5	50
27	180	100	120	50	0.5	60
28	180	150	120	120	0.5	60
29	200	200	200	150	0.8	40
30	200	100	200	50	0.8	40

Продолжение таблицы 1.7

№ варианта	Е, В	R <sub>1</sub> , Ом	R <sub>2</sub> , Ом	R <sub>3</sub> , Ом	L, Гн в схемах с L	C, мкФ в схемах с С
31	220	200	120	150	0.4	40
32	220	200	120	120	0.4	40
33	250	200	100	80	0.9	90
34	250	200	100	100	0.9	90
35	300	150	100	120	0.4	60
36	300	120	100	80	0.4	60
37	400	120	150	100	0.6	100
38	400	100	150	50	0.6	100
39	500	100	200	50	0.3	80
40	500	100	200	150	0.3	80
41	250	50	100	100	0.9	90
42	250	50	100	200	0.9	90
43	200	150	200	100	0.8	40
44	200	150	200	150	0.8	40
45	120	120	200	200	0.7	80
46	120	120	200	100	0.7	80
47	400	100	150	100	0.6	100
48	400	100	150	200	0.6	100
49	180	50	120	120	0.5	60
50	180	50	120	120	0.5	60
51	150	120	100	120	0.5	50
52	150	120	100	100	0.5	50
53	220	150	120	100	0.4	40
54	220	150	120	100	0.4	40
55	300	80	100	200	0.4	60
56	300	80	100	200	0.4	60
57	500	80	200	150	0.3	80
58	500	80	200	120	0.3	80
59	100	100	100	100	0.2	50
60	100	100	100	200	0.2	50

## 2 Краткие теоретические сведения и примеры решения

### 2.1 Трёхфазные цепи

#### 2.1.1 Основные сведения о трёхфазных цепях

**Трёхфазная цепь** является частным случаем многофазных электрических систем, представляющих собой совокупность электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга на определенный угол.

Каждую из частей многофазной системы, характеризующуюся одинаковым током, называют **фазой**, т.е. фаза – это участок цепи, относящийся к соответствующей обмотке генератора или трансформатора, линии и нагрузке.

Совокупности ЭДС (напряжений, токов) в трёхфазных цепях называют **трёхфазной системой ЭДС** (напряжений, токов).

Под **трёхфазной симметричной системой ЭДС** (напряжений, токов) понимают совокупность трёх синусоидальных ЭДС (напряжений, токов) одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутых по фазе на  $120^\circ$ .

Мгновенные значения симметричной системы трёхфазных ЭДС можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} e_A = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ e_B = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t - 120^\circ) \\ e_C = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t - 240) = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + 120). \end{cases} \quad (2.1)$$

График мгновенных значений  $e_A$ ,  $e_B$ ,  $e_C$  представлен на рисунке 2.1.

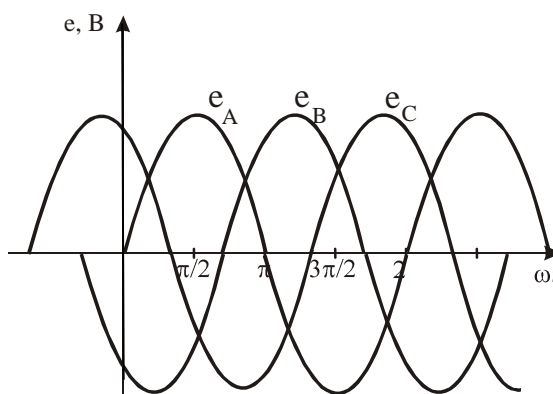


Рисунок 2.1

Комплексные действующие значения симметричной системы трёхфазных ЭДС

$$\dot{E}_A = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}, \quad \dot{E}_B = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}, \quad \dot{E}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 120^\circ}. \quad (2.2)$$

Векторная диаграмма ЭДС представлена на рисунке 2.2.

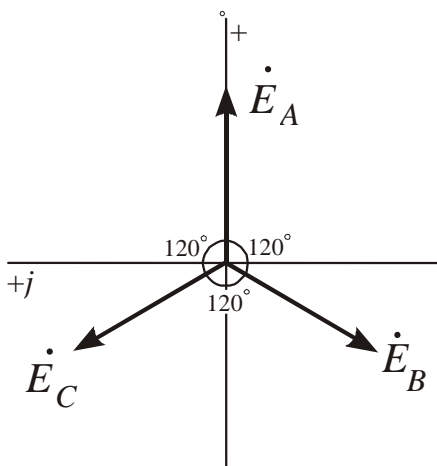


Рисунок 2.2

Для симметричной системы ЭДС (напряжений, токов) справедливо соотношение

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0. \quad (2.3)$$

Основные схемы соединения обмоток генераторов, обмоток трансформаторов, нагрузки в трехфазных цепях – звезда и треугольник [1].

Каждую обмотку генератора называют **фазой генератора**, напряжения на них – **фазными напряжениями генератора**, токи в них – **фазными токами генератора**.

Каждую нагрузку называют **фазой нагрузки**, напряжения на них – **фазными напряжениями нагрузки**, токи в них – **фазными токами нагрузки**.

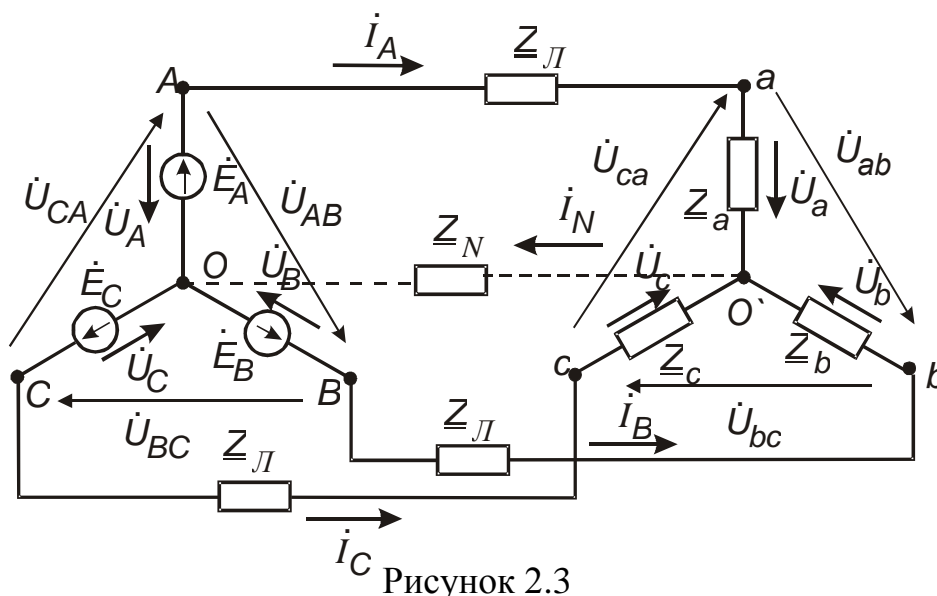
Провода, соединяющие генератор и нагрузку называются **линейными проводами**. Токи, текущие по линейным проводам называются **линейными**. **Линейное напряжение** – это напряжение между линейными проводами.

При соединении звездой точку, в которой объединены три обмотки генератора, называют **нулевой точкой генератора**, точку в которой объединены три конца трёхфазной нагрузки - **нулевой точкой нагрузки**. Провод, соединяющий нулевые точки генератора и нагрузки называется **нулевым или нейтральным проводом**, ток в нем – **током нулевого провода**. Напряжение между нулевыми точками называется **смещением нейтрали**.

Трёхфазная цепь и трёхфазная нагрузка называются **симметричными**, если комплексные сопротивления всех фаз одинаковы. В противном случае их называют несимметричными.

Если к симметричной трёхфазной цепи приложена симметричная трёхфазная система напряжений генератора, то в ней будет иметь место симметричная система токов. Режим работы трёхфазной цепи, при котором трёхфазные системы напряжений и токов симметричны, называется **симметричным режимом**.

На рисунке 2.3 приведена схема трёхфазной цепи при соединении фаз генератора и нагрузки звездой с нулевым проводом.



В схеме обозначены следующие **напряжения**, характеризующие работу трехфазной цепи при схемах соединения «звезда - звезда» и «звезда – звезда с нулевым проводом»:

- фазные напряжения генератора  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ ;
- фазные напряжения нагрузки  $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$ ;
- линейные напряжения генератора  $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ ;
- линейные напряжения нагрузки  $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}, \dot{U}_{ca}$ ;
- $\dot{U}_{o'o}$  - смещение нейтрали.

Между собой линейные и фазные напряжения генератора связаны соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B, \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C, \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A.\end{aligned}\tag{2.4}$$

При симметричной системе напряжений генератора **модули** линейного и фазного напряжений отличаются друг от друга в  $\sqrt{3}$  раз

$$U_l = \sqrt{3} \cdot U_\phi .\tag{2.5}$$

Таковыми же соотношениями связаны между собой линейные и фазные напряжения нагрузки.

**Токи**, обозначенные на рисунке 2.3:

- фазные (линейные) токи  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ ;
- ток нулевого провода  $\dot{I}_N$ .

При соединении фаз звездой фазные токи равны соответствующим линейным токам:

$$\dot{I}_\phi = \dot{I}_l .\tag{2.6}$$

На рисунке 2.4 приведена схема трехфазной цепи при соединении фаз генератора и нагрузки треугольником



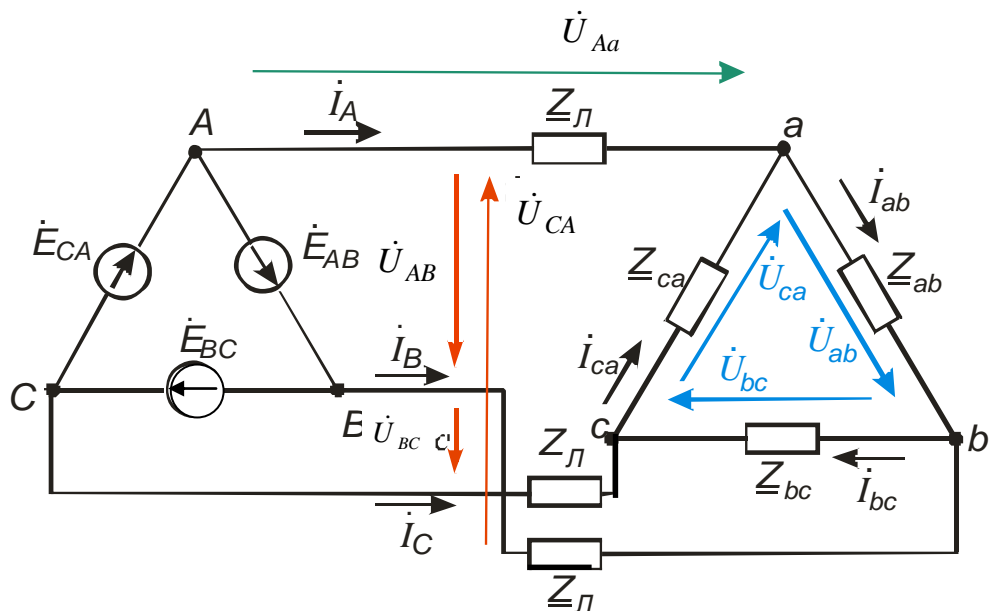


Рисунок 2.4

Работу трехфазной цепи в схеме соединения «треугольник – треугольник» характеризуют следующие **напряжения**, обозначенные на рисунке 2.4:

- фазные (линейные) напряжения генератора  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  ;
- фазные (линейные) напряжения нагрузки  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$ ,  $\dot{U}_{ca}$  ;
- падения напряжения в линейных проводах  $\dot{U}_{Aa}$ ,  $\dot{U}_{Bb}$ ,  $\dot{U}_{Cc}$  .

При соединении фаз треугольником соответствующие фазные и линейные напряжения равны:

$$\dot{U}_л = \dot{U}_ф . \quad (2.7)$$

Токи в схеме соединения «треугольник – треугольник», обозначенные на рисунке 2.4:

- фазные токи генератора  $\dot{I}_{AB}$ ,  $\dot{I}_{BC}$ ,  $\dot{I}_{CA}$  ;
- фазные токи нагрузки  $\dot{I}_{ab}$ ,  $\dot{I}_{bc}$ ,  $\dot{I}_{ca}$  ;
- линейные токи  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$  .

Между собой линейные и фазные токи связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}, \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}, \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для симметричного режима работы трехфазной цепи **модули** линейного и фазного токов отличаются друг от друга в  $\sqrt{3}$  раз

$$I_l = \sqrt{3} \cdot I_\phi. \quad (2.9)$$

**Активная мощность** трёхфазной цепи равна сумме активных мощностей фаз и активной мощности в сопротивлении, включенном в нулевой провод

$$P = P_A + P_B + P_C + P_0. \quad (2.10)$$

**Реактивная мощность** трёхфазной цепи представляет собой сумму реактивных мощностей фаз и реактивной мощности в сопротивлении, включенном в нулевой провод

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_0. \quad (2.11)$$

**Полная мощность**  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (2.12)$

Активная и реактивная мощности любой из фаз (например, фазы  $A$ ) определяются как

$$P_A = U_A I_A \cos \varphi_A. \quad (2.13)$$

$$Q_A = U_A I_A \sin \varphi_A. \quad (2.14)$$

Для симметричного режима работы

$$P_0 = Q_0 = 0, \quad P_A = P_B = P_C. \quad (2.15)$$

Следовательно

$$P = 3 \cdot P_\phi = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi_\phi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos \varphi_\phi. \quad (2.16)$$

Аналогично выражается и реактивная мощность

$$Q = 3 \cdot Q_\phi = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \sin \varphi_\phi = Q = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \sin \varphi_\phi. \quad (2.17)$$

Полная мощность при симметричном режиме работы

$$S = 3 \cdot U_{\phi} \cdot I_{\phi} = \sqrt{3} \cdot U_{л} \cdot I_{л}. \quad (2.18)$$

При проверке правильности расчета токов целесообразно составлять баланс комплексных мощностей источника и потребителя.

Для симметричного режима работы полная комплексная мощность источника будет рассчитываться как

$$\tilde{S}_{ист} = 3 \cdot \dot{U}_{\phi} \cdot I_{\phi}^*, \quad (2.19)$$

где  $I_{\phi}^*$  - сопряженный комплекс фазного тока.

Полная комплексная мощность потребителя

$$\tilde{S}_{потр} = 3 |\dot{I}_{\phi}|^2 \cdot \underline{z}_{\phi}. \quad (2.20)$$

Для несимметричного режима работы:

- полная комплексная мощность источника

$$\tilde{S}_{ист} = \dot{U}_A \cdot I_A^* + \dot{U}_B \cdot I_B^* + \dot{U}_C \cdot I_C^* \quad (2.21)$$

- в четырехпроводной сети полная комплексная мощность потребителя

$$S_{потр}^* = |\dot{I}_A|^2 \cdot \underline{z}_A + |\dot{I}_B|^2 \cdot \underline{z}_B + |\dot{I}_C|^2 \cdot \underline{z}_C + |\dot{I}_N|^2 \cdot \underline{z}_N; \quad (2.22)$$

- в трехпроводной сети полная комплексная мощность потребителя

$$S_{потр}^* = |\dot{I}_A|^2 \cdot \underline{z}_A + |\dot{I}_B|^2 \cdot \underline{z}_B + |\dot{I}_C|^2 \cdot \underline{z}_C. \quad (2.23)$$

## 2.1.2 Основные формулы и алгоритмы для трехфазных цепей

Таблица 2.1 - Расчетные соотношения для трехфазной цепи при соединении нагрузки звездой и звездой с нулевым проводом



Схема соединения нагрузки	Характеристика схемы	Режим работы схемы	Смещение нейтрали	Фазный и линейный токи	Ток нулевого провода
Звезда 	-	симметричный	$\dot{U}_{O'O} = 0$	$\dot{I}_\phi = \dot{I}_\lambda = \frac{\dot{U}_{\phi\phi_2}}{\underline{z}_\phi}$ , $\underline{z}_\phi = \underline{z}_{\phi_2} + \underline{z}_\lambda + \underline{z}_{\phi_H}$	-
	-	несимметричный	$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_B + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}$	$\dot{I}_\phi = \dot{I}_\lambda = \frac{\dot{U}_{\phi\phi_2} - \dot{U}_{O'O}}{\underline{z}_\phi}$	-
Звезда с нулевым проводом 	$\underline{z}_N = 0$	симметричный	$\dot{U}_{O'O} = 0$	$\dot{I}_\phi = \dot{I}_\lambda = \frac{\dot{U}_{\phi\phi_2}}{\underline{z}_\phi}$	$\dot{I}_N = 0$
		несимметричный			$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$
	$\underline{z}_N \neq 0$	симметричный	$\dot{U}_{O'O} = 0$	$\dot{I}_\phi = \dot{I}_\lambda = \frac{\dot{U}_{\phi\phi_2}}{\underline{z}_\phi}$	$\dot{I}_N = 0$
		несимметричный	$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_B + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}$	$\dot{I}_\phi = \dot{I}_\lambda = \frac{\dot{U}_{\phi\phi_2} - \dot{U}_{O'O}}{\underline{z}_\phi}$	$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$

Таблица 2.2 - Расчетные соотношения для трехфазной цепи при соединении нагрузки треугольником

Схема соединения нагрузки	Характеристика схемы	Фазный ток	Линейные токи
Треуголь- ник $\Delta$	$z_{\text{л}} = 0$	$\dot{I}_{\text{фн}} = \frac{\dot{U}_{\text{лг}}}{z_{\text{фн}}}$	$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$ <p>При симметричном режиме работы <math>I_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot I_{\text{ф}}</math></p>
	$z_{\text{л}} \neq 0$	<p>При наличии сопротивления линии традиционно применяют следующий алгоритм расчёта:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Преобразуют треугольник сопротивлений нагрузки в эквивалентную звезду <math display="block">z_a = \frac{z_{ab} z_{ca}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}}, \quad z_b = \frac{z_{bc} z_{ab}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}}, \quad z_c = \frac{z_{ca} z_{bc}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}}.</math> <p>Для симметричной нагрузки <math>z_Y = \frac{z_{\Delta}}{3}</math>.</p> </li> <li>В преобразованной схеме с нагрузкой, соединённой звездой, рассчитывают фазные (линейные) токи <math>\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C</math> (см. расчётные формулы в таблице 2.1);</li> <li>Определяют комплексные потенциалы <math>\dot{\phi}_a, \dot{\phi}_b, \dot{\phi}_c</math> точек <math>a, b, c</math>, к которым присоединен треугольник сопротивлений нагрузки <math display="block">\dot{\phi}_a = \dot{U}_A - \dot{I}_A z_{\text{л}}, \quad \dot{\phi}_b = \dot{U}_B - \dot{I}_B z_{\text{л}}, \quad \dot{\phi}_c = \dot{U}_C - \dot{I}_C z_{\text{л}}.</math> </li> <li>Рассчитывают фазные токи в нагрузке <math display="block">\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b}{z_{ab}}; \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_c}{z_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{\phi}_c - \dot{\phi}_a}{z_{ca}}.</math> <p>Для симметричной нагрузки <math>I_{\text{фн}} = \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}}</math></p> </li> </ol>	

### 2.1.3 Пример решения задачи 1

Исходные данные:  $U_{\phi z} = 1000 \text{ В};$

$$R_A = 100 \text{ Ом}; x_{LA} = 100 \text{ Ом};$$

$$R_B = 100 \text{ Ом}; x_{LB} = 100 \text{ Ом}; x_{CB} = 50 \text{ Ом};$$

$$R_C = 100 \text{ Ом}; x_{LC} = 100 \text{ Ом}; x_{CC} = 50 \text{ Ом}.$$

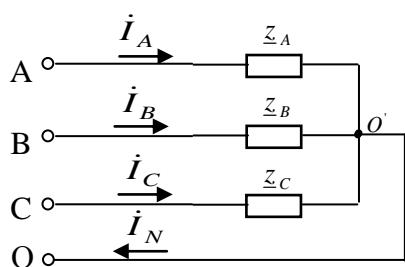
Сопротивления фаз

$$\underline{z}_A = R_A + j x_{LA} = 100 + 100j \text{ Ом};$$

$$\underline{z}_B = R_B + j x_{LB} - j x_{CB} = 100 + 100j - 50j = 100 + 50j \text{ Ом};$$

$$\underline{z}_C = R_C + j x_{LC} - j x_{CC} = 100 + 100j - 50j = 100 + 50j \text{ Ом}$$

#### 2.1.3.1 Схема нагрузки – звезда с нулевым проводом (рисунок 2.5)



Так как сопротивление нулевого провода равно нулю, в любом режиме работы цепи (симметричном или несимметричном) фазные токи равны линейным токам и определяются как

[2]

$$\dot{I}_{\phi} = \dot{I}_l = \frac{\dot{U}_{\phi z}}{\underline{z}_{\phi}} .$$

Рисунок 2.5

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{z}_A} = \frac{1000}{100 + 100j} = 7,0771e^{-j45^{\circ}} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{z}_B} = \frac{1000e^{-j120^{\circ}}}{100 + 50j} = 8,944e^{-j146,565^{\circ}} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{z}_A} = \frac{1000e^{j120^{\circ}}}{100 + 50j} = 8,944e^{j93,435^{\circ}} \text{ А} .$$

Ток нулевого провода равен сумме токов всех фаз

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 3,162e^{-j161,565^{\circ}} \text{ А} .$$

Баланс мощности:

- мощность источника

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ист} &= \dot{U}_A \cdot \bar{I}_A + \dot{U}_B \cdot \bar{I}_B + \dot{U}_C \cdot \bar{I}_C = 1000 \cdot 7,0771 e^{j45^\circ} + \\ &+ 1000 e^{-j120^\circ} \cdot 8,944 e^{j146,565^\circ} + 1000 e^{j120^\circ} \cdot 8,944 e^{-j93,435^\circ} = 21000 + 13000j \text{ ВА}; \end{aligned}$$

- мощность потребителей

$$\begin{aligned} \bar{S}_{потр} &= |\dot{I}_A|^2 \cdot \underline{z}_A + |\dot{I}_B|^2 \cdot \underline{z}_B + |\dot{I}_C|^2 \cdot \underline{z}_C = 7,0771^2 \cdot (100 + 100j) + \\ &+ 8,944^2 \cdot (100 + 50j) + 8,944^2 \cdot (100 + 50j) = 21000 + 13000j \text{ ВА}. \end{aligned}$$

$$\bar{S}_{ист} = \bar{S}_{потр}.$$

Порядок построения векторной диаграммы (рисунок 2.6):

- фазные напряжения генератора  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ ;

- фазные токи  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ ;

- ток нулевого провода (строится как сумма фазных токов)  $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ .

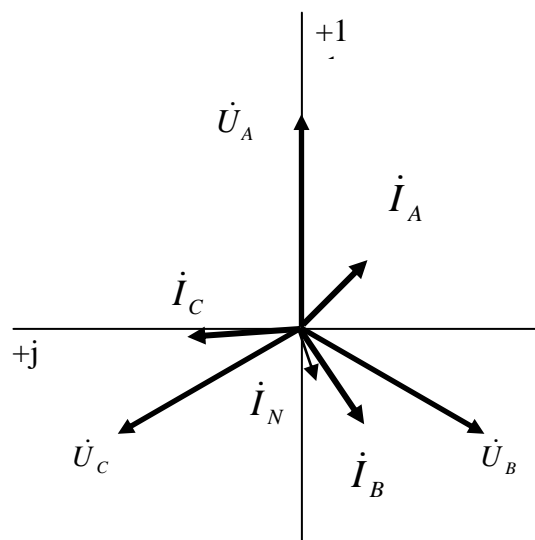


Рисунок 2.6

## Расчет схемы в Mathcad :

$$U := 100 \quad j := \sqrt{-1}$$

$$z_a := 100 + 100j \quad z_b := 100 + 50j \quad z_c := 100 + 50j$$

$$U_a := U \quad U_b := U \cdot e^{-j \cdot 120 \text{deg}} \quad U_c := U \cdot e^{j \cdot 120 \text{deg}}$$

$$I_a := \frac{U_a}{z_a} \quad I_a = 5 - 5i \quad |I_a| = 7.071 \quad \arg(I_a) = -45 \text{deg}$$

$$I_b := \frac{U_b}{z_b} \quad I_b = -7.464 - 4.928i \quad |I_b| = 8.944 \quad \arg(I_b) = -146.565 \text{deg}$$

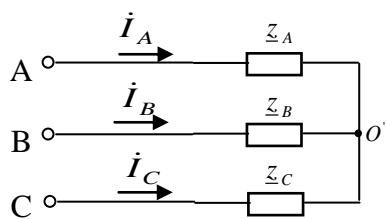
$$I_c := \frac{U_c}{z_c} \quad I_c = -0.536 + 8.928i \quad |I_c| = 8.944 \quad \arg(I_c) = 93.435 \text{deg}$$

$$I_n := I_a + I_b + I_c \quad I_n = -3 - i \quad |I_n| = 3.162 \quad \arg(I_n) = -161.565 \text{deg}$$

$$S_n := U_a \cdot \bar{I}_a + U_b \cdot \bar{I}_b + U_c \cdot \bar{I}_c \quad S_n = 2.1 \times 10^4 + 1.3i \times 10^4$$

$$S_p := |I_a|^2 \cdot z_a + |I_b|^2 \cdot z_b + |I_c|^2 \cdot z_c \quad S_p = 2.1 \times 10^4 + 1.3i \times 10^4$$

### 2.1.3.2 Схема нагрузки – звезда (рисунок 2.7)



При соединении нагрузки звездой без нулевого провода в несимметричном режиме работы возникает смещение нейтрали  $\dot{U}_{O'O}$ .

Рисунок 2.7

Для расчета  $\dot{U}_{O'O}$  найдем проводимости фаз

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{z_A} = 0,007071 e^{-j45^\circ} \text{ См} ;$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{z_B} = 0,008944 e^{-j26,565^\circ} \text{ См} ;$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{z_C} = 0,008944 e^{-j26,565^\circ} \text{ См} ;$$



## Смещение нейтрали

$$\begin{aligned}\dot{U}_{O'O} &= \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_B + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \\ &= \frac{1000 \cdot 0,0070 e^{-j45^\circ} + 1000 e^{-j120^\circ} \cdot 0,0089 e^{-j26,565^\circ} +}{0,0070 e^{-j45^\circ} + 0,0089 e^{-j26,565^\circ} + 0,0089 e^{-j26,565^\circ}} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{+ 1000 e^{j120^\circ} \cdot 0,0089 e^{-j26,565^\circ}}{0,0070 e^{-j45^\circ} + 0,0089 e^{-j26,565^\circ} + 0,0089 e^{-j26,565^\circ}} = 128,037 e^{-j129,806^\circ} \text{ В} .\end{aligned}$$

Фазные токи равны линейным токам и определяются как  $\dot{i}_\phi = \dot{i}_\lambda = \frac{\dot{U}_{\phi\lambda} - \dot{U}_{O'O}}{\underline{z}_\phi}$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{O'O}}{\underline{z}_A} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{O'O}}{R + jx_L} = \frac{1000 - 128,037 e^{-j129,806^\circ}}{100 + 100j} = 7,682 e^{-j39,806^\circ} \text{ А} ;$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{O'O}}{\underline{z}_B} = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{O'O}}{R + jx_L - jx_C} = \frac{1000 e^{-j120^\circ} - 128,037 e^{-j129,806^\circ}}{100 + 50j} = 7,818 e^{-j145,136^\circ} \text{ А} ;$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{O'O}}{\underline{z}_A} = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{O'O}}{R + jx_L - jx_C} = \frac{1000 e^{j120^\circ} - 128,037 e^{-j129,806^\circ}}{100 + 50j} = 9,401 e^{j86,87^\circ} \text{ А} .$$

Проверка  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$  .

Баланс мощности:

- мощность источника

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ист} &= \dot{U}_A \cdot \bar{I}_A + \dot{U}_B \cdot \bar{I}_B + \dot{U}_C \cdot \bar{I}_C = 1000 \cdot 7,682 e^{j39,806^\circ} + \\ &+ 1000 e^{-j120^\circ} \cdot 7,818 e^{j145,136^\circ} + 1000 e^{j120^\circ} \cdot 9,401 e^{-j86,87^\circ} = 20850 + 13380j \text{ ВА} ;\end{aligned}$$

- мощность потребителей

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ном} &= |\dot{I}_A|^2 \cdot \underline{z}_A + |\dot{I}_B|^2 \cdot \underline{z}_B + |\dot{I}_C|^2 \cdot \underline{z}_C = 7,682^2 \cdot (100 + 100j) + \\ &+ 7,818^2 \cdot (100 + 50j) + 9,401^2 \cdot (100 + 50j) = 20850 + 13380j \text{ ВА} .\end{aligned}$$

$$\bar{S}_{ист} = \bar{S}_{ном} .$$

Порядок построения векторной диаграммы (рисунок 2.8):

- фазные напряжения генератора  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ ;

- смещение нейтрали  $\dot{U}_{O'O}$ ;

- фазные напряжения нагрузки

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{O'O}; \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{O'O};$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{O'O}.$$

- фазные токи  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ ;

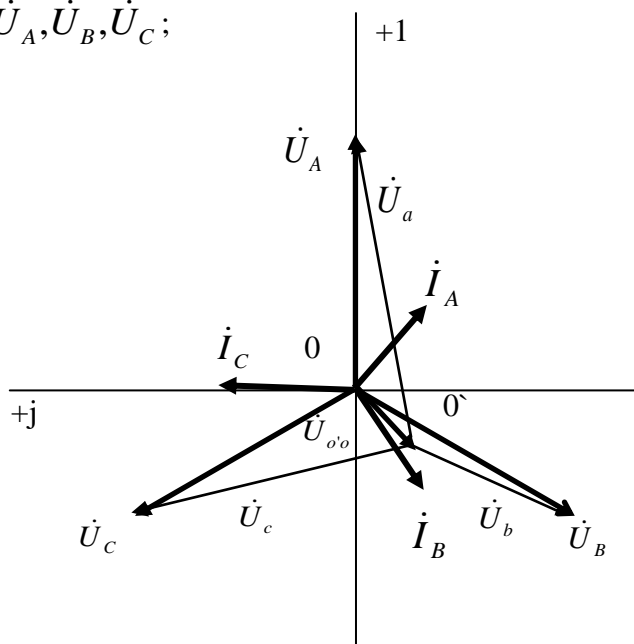


Рисунок 2.8

### Расчет схемы в Mathcad:

$$U := 100 \quad j := \sqrt{-1}$$

$$z_a := 100 + 100j \quad z_b := 100 + 50j \quad z_c := 100 + 50j$$

$$U_a := U \quad U_b := U \cdot e^{-j \cdot 120 \text{deg}} \quad U_c := U \cdot e^{j \cdot 120 \text{deg}}$$

$$Y_a := \frac{1}{z_a} \quad Y_b := \frac{1}{z_b} \quad Y_c := \frac{1}{z_c}$$

$$U_{oo} := \frac{U_a \cdot Y_a + U_b \cdot Y_b + U_c \cdot Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \quad U_{oo} = -81.967 - 98.361i$$

$$|U_{oo}| = 128.037 \quad \arg(U_{oo}) = -129.806 \text{deg}$$

$$I_a := \frac{U_a - U_{oo}}{z_a} \quad I_a = 5.902 - 4.918i \quad |I_a| = 7.682 \quad \arg(I_a) = -39.806 \text{deg}$$

$$I_b := \frac{U_b - U_{oo}}{z_b} \quad I_b = -6.415 - 4.469i \quad |I_b| = 7.818 \quad \arg(I_b) = -145.136 \text{deg}$$

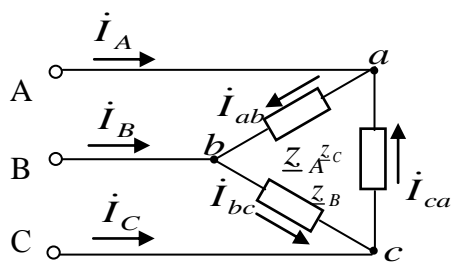
$$I_c := \frac{U_c - U_{oo}}{z_c} \quad I_c = 0.513 + 9.387i \quad |I_c| = 9.401 \quad \arg(I_c) = 86.87 \text{deg}$$

$$\text{Проверка} \quad I_a + I_b + I_c = 0$$

$$S_{\Pi} := U_a \cdot \bar{I}_a + U_b \cdot \bar{I}_b + U_c \cdot \bar{I}_c \quad S_{\Pi} = 2.085 \times 10^4 + 1.338i \times 10^4$$

$$S_p := (|I_a|^2 \cdot z_a + |I_b|^2 \cdot z_b + |I_c|^2 \cdot z_c) \quad S_p = 2.085 \times 10^4 + 1.338i \times 10^4$$

### 2.1.3.3 Схема нагрузки – треугольник (рисунок 2.9)



При соединении нагрузки треугольником (если сопротивления линейных проводов равны нулю) фазы нагрузки включены на линейное напряжение

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{фz}} = \sqrt{3} \cdot 1000 = 1732 \text{ В}.$$

Рисунок 2.9

Фазные токи нагрузки определяются как  $\dot{I}_{\text{фн}} = \frac{\dot{U}_{\text{лz}}}{Z_{\text{фн}}}$

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{ab}} = \frac{\dot{U}_{AB}}{R + jx_L} = \frac{1732}{100 + 100j} = 12,247e^{-j45^\circ} \text{ А} ;$$

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{bc}} = \frac{\dot{U}_{BC}}{R + jx_L - jx_c} = \frac{1732e^{-j120^\circ}}{100 + 50j} = 15,492e^{-j146,565^\circ} \text{ А} ;$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{ca}} = \frac{\dot{U}_{CA}}{R + jx_L - jx_c} = \frac{1732e^{j120^\circ}}{100 + 50j} = 15,492e^{j93,435^\circ} \text{ А} ;$$

Линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = 12,247e^{-j45^\circ} - 15,492e^{j93,435^\circ} = 25,96e^{-j68,324^\circ} \text{ А} ;$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} = 15,492e^{-j146,565^\circ} - 12,247e^{-j45^\circ} = 21,589e^{j179,67^\circ} \text{ А} ;$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = 15,492e^{j93,435^\circ} - 15,492e^{-j146,565^\circ} = 26,833e^{j63,435^\circ} \text{ А} .$$

Проверка  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$  .

Баланс мощности:

- мощность источника

$$\begin{aligned} \bar{S}_{уст} &= \dot{U}_{AB} \cdot \bar{I}_{ab} + \dot{U}_{BC} \cdot \bar{I}_{bc} + \dot{U}_{CA} \cdot \bar{I}_{ca} = 1732 \cdot 12,247 e^{j45^\circ} + \\ &+ 1732 e^{-j120^\circ} \cdot 15,492 e^{j146,565^\circ} + 1732 e^{j120^\circ} \cdot 15,492 e^{-j93,435^\circ} = 63000 + 39000j \text{ ВА}; \end{aligned}$$

- мощность потребителей

$$\begin{aligned} \bar{S}_{номп} &= |\dot{I}_{ab}|^2 \cdot \underline{z}_{ab} + |\dot{I}_{bc}|^2 \cdot \underline{z}_{bc} + |\dot{I}_{ca}|^2 \cdot \underline{z}_{ca} = 12,247^2 \cdot (100 + 100j) + \\ &+ 15,492^2 \cdot (100 + 50j) + 15,492^2 \cdot (100 + 50j) = 63000 + 39000j \text{ ВА}. \end{aligned}$$

$$\bar{S}_{уст} = \bar{S}_{номп} .$$

Порядок построения векторной диаграммы (рисунок 2.10):

- линейные напряжения генератора  $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ ;
- фазные токи нагрузки  $\dot{I}_{ab}, \dot{I}_{bc}, \dot{I}_{ca}$ ;
- линейные токи (как разность соответствующих фазных токов)

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$$

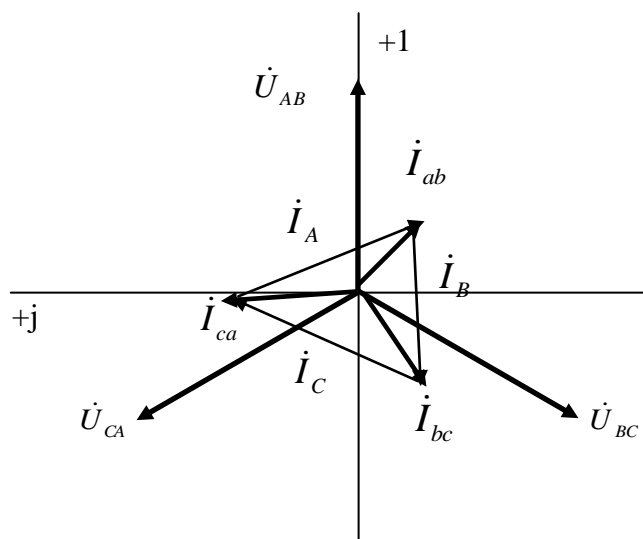


Рисунок 2.10

## Расчет схемы в Mathcad:

$$U := 100 \quad j := \sqrt{-1}$$

$$U_{\text{Л}} := U \cdot \sqrt{3} \quad U_{\text{Л}} = 1.732 \times 10^3$$

$$z_{\text{ab}} := 100 + 100 \cdot j \quad z_{\text{bc}} := 100 + 50 \cdot j \quad z_{\text{ca}} := 100 + 50 \cdot j$$

$$U_{\text{ab}} := U_{\text{Л}} \quad U_{\text{bc}} := U_{\text{Л}} e^{-j \cdot 120 \text{deg}} \quad U_{\text{ca}} := U_{\text{Л}} e^{j \cdot 120 \text{deg}}$$

$$I_{\text{ab}} := \frac{U_{\text{ab}}}{z_{\text{ab}}} \quad I_{\text{ab}} = 8.66 - 8.66i \quad |I_{\text{ab}}| = 12.247 \quad \arg(I_{\text{ab}}) = -45 \text{deg}$$

$$I_{\text{bc}} := \frac{U_{\text{bc}}}{z_{\text{bc}}} \quad I_{\text{bc}} = -12.928 - 8.536i \quad |I_{\text{bc}}| = 15.492 \quad \arg(I_{\text{bc}}) = -146.565 \text{deg}$$

$$I_{\text{ca}} := \frac{U_{\text{ca}}}{z_{\text{ca}}} \quad I_{\text{ca}} = -0.928 + 15.464i \quad |I_{\text{ca}}| = 15.492 \quad \arg(I_{\text{ca}}) = 93.435 \text{deg}$$

$$I_{\text{a}} := I_{\text{ab}} - I_{\text{ca}} \quad I_{\text{a}} = 9.588 - 24.124i \quad |I_{\text{a}}| = 25.96 \quad \arg(I_{\text{a}}) = -68.324 \text{deg}$$

$$I_{\text{b}} := I_{\text{bc}} - I_{\text{ab}} \quad I_{\text{b}} = -21.588 + 0.124i \quad |I_{\text{b}}| = 21.589 \quad \arg(I_{\text{b}}) = 179.67 \text{deg}$$

$$I_{\text{c}} := I_{\text{ca}} - I_{\text{bc}} \quad I_{\text{c}} = 12 + 24i \quad |I_{\text{c}}| = 26.833 \quad \arg(I_{\text{c}}) = 63.435 \text{deg}$$

$$S_{\text{И}} := U_{\text{ab}} \cdot \bar{I}_{\text{ab}} + U_{\text{bc}} \cdot \bar{I}_{\text{bc}} + U_{\text{ca}} \cdot \bar{I}_{\text{ca}} \quad S_{\text{И}} = 6.3 \times 10^4 + 3.9i \times 10^4$$

$$S_{\text{п}} := (|I_{\text{ab}}|^2 \cdot z_{\text{ab}} + |I_{\text{bc}}|^2 \cdot z_{\text{bc}} + |I_{\text{ca}}|^2 \cdot z_{\text{ca}}) \quad S_{\text{п}} = 6.3 \times 10^4 + 3.9i \times 10^4$$

## 2.2 Метод симметричных составляющих

### 2.2.1 Основы метода симметричных составляющих

Метод симметричных составляющих является одним из основных методов, применяемых для расчета несимметричных режимов в линейных электрических системах. В его основе лежит возможность представления несимметричной системы ЭДС, напряжений или токов суммой трех симметричных систем и замена по принципу наложения расчета несимметричного режима работы трехфазной цепи расчетом трех симметричных режимов. Метод широко используется в релейной защите для расчета токов коротких замыканий в электрических сетях.

В соответствии с методом симметричных составляющих любую несимметричную трехфазную систему ЭДС, напряжений или токов можно представить суммой трех симметричных трехфазных систем: прямой, обратной и нулевой последовательности. Эти системы называют *симметричными составляющими* данной несимметричной трехфазной системы.

Например, *несимметричную* трехфазную систему напряжений  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  (рисунок 2.11) можно заменить суммой трех *симметричных* систем:

1) **системы напряжений прямой последовательности**  $\dot{U}_{A1}, \dot{U}_{B1}, \dot{U}_{C1}$  (трехфазной системы, в которой напряжения равны по амплитуде, сдвинуты по фазе на 120 градусов, с прямым чередованием фаз А, В, С);

2) **системы напряжений обратной последовательности**  $\dot{U}_{A2}, \dot{U}_{B2}, \dot{U}_{C2}$  (трехфазной системы, в которой напряжения равны по амплитуде, сдвинуты по фазе на 120 градусов, с обратным чередованием фаз А, С, В);

3) **системы напряжений нулевой последовательности**  $\dot{U}_{A0}, \dot{U}_{B0}, \dot{U}_{C0}$  (трехфазной системы, в которой напряжения равны по амплитуде и совпадают по фазе).

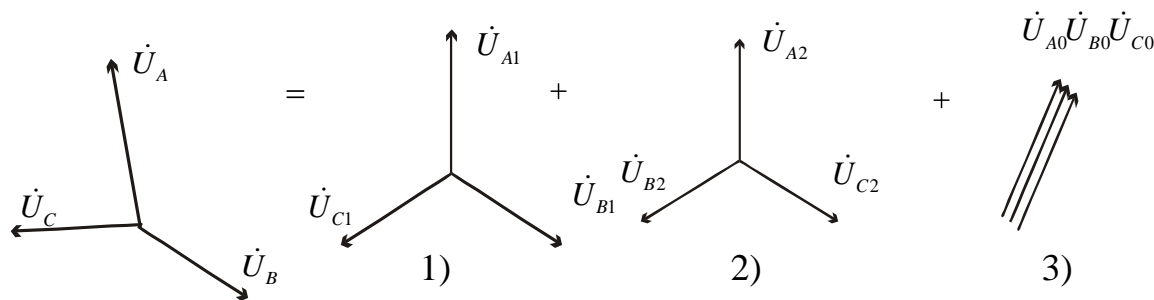
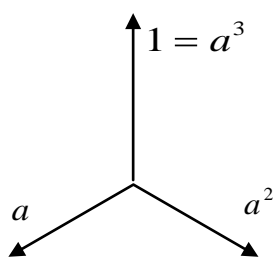


Рисунок 2.11

Системы прямой и обратной последовательности являются уравновешенными, то есть сумма векторов трех фаз равна нулю. Система нулевой последовательности – неуравновешенная, сумма векторов равна утроенному значению одного вектора. Напряжения исходной системы  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$  будут определяться как сумма соответствующих симметричных составляющих

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} \\ \dot{U}_B &= \dot{U}_{B1} + \dot{U}_{B2} + \dot{U}_{B0} \\ \dot{U}_C &= \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} + \dot{U}_{C0}\end{aligned}\quad (2.24)$$

Для более компактной записи (2.24) используют оператор фазы (или фазный множитель)  $a = e^{j \cdot 120^\circ}$ .



Это такой вектор, скалярная величина которого равна 1 и который в комплексной плоскости образует с положительной осью вещественных чисел угол  $120^\circ$ . Умножить вектор на оператор фазы – значит повернуть его на  $120^\circ$  против часовой стрелки, не изменив величины (рисунок 2.12).

Рисунок 2.12 При этом, как и для любой симметричной системы векторов, справедливо равенство:  $1 + a + a^2 = 0$ .

Используя оператор фазы, напряжения систем прямой и обратной последовательностей для фаз В и С можно выразить через напряжения фазы А (индекс фазы А в дальнейшем опустим для упрощения записи)

$$\begin{aligned}\dot{U}_{B1} &= a^2\dot{U}_{A1} = a^2\dot{U}_1; \quad \dot{U}_{C1} = a\dot{U}_{A1} = a\dot{U}_1 \\ \dot{U}_{B2} &= a\dot{U}_{A2} = a\dot{U}_2; \quad \dot{U}_{C2} = a^2\dot{U}_{A2} = a^2\dot{U}_2\end{aligned}$$

В системе нулевой последовательности все напряжения имеют одинаковую фазу, поэтому  $\dot{U}_{A0} = \dot{U}_{B0} = \dot{U}_{C0} = \dot{U}_0$ .

С учетом этого выражения (2.24) переписутся следующим образом

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_B &= a^2\dot{U}_1 + a\dot{U}_2 + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_C &= a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0\end{aligned} \quad (2.25)$$

Это и будут основные выражения, которые мы будем дальше использовать для расчета несимметричных напряжений (токов, ЭДС), если известны их симметричные составляющие.

Если же предположить, что наоборот известны  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ , а нужно найти симметричные составляющие  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$ , то, решая систему (2.25) относительно них, получим выражения для расчета симметричных составляющих:

$$\begin{aligned}\dot{U}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) \\ \dot{U}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) \\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C)\end{aligned} \quad (2.26)$$

Аналогичные выражения получаются и для расчета симметричных составляющих токов и ЭДС.

Для более компактной записи преобразований метода симметричных составляющих удобно применять так называемую матрицу Фортескью (Фортескью – основоположник метода симметричных составляющих)

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$



Например, с помощью матрицы Фортескью уравнения (2.25) для расчета  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  через симметричные составляющие  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$  запишутся следующим образом

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_A \\ \dot{U}_B \\ \dot{U}_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_0 \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

или в матричной форме:  $\|\dot{U}\| = \|F\| \cdot \|\dot{U}_s\|$ .

При разложении заданной системы несимметричных векторов  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  на симметричные составляющие  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$  (уравнения (2.26)) используют обращенную матрицу Фортескью  $F^{-1}$ , то есть  $\|\dot{U}_s\| = \|F^{-1}\| \cdot \|\dot{U}\|$ .

Преобразование векторов с использованием матрицы Фортескью целесообразно при расчетах в системе MathCad, так как это позволяет не расписывать отдельные формулы для расчета токов и напряжений.

### 2.2.2 Виды несимметрии в трехфазных цепях

Большинство электроустановок работает в симметричных режимах. Резкая несимметрия в таких цепях носит аварийный характер и возникает, как правило, в каком либо одном сечении. Различают два вида несимметрии: поперечную и продольную.

*Поперечная несимметрия* возникает в тех случаях, когда между фазами и нейтралью (землей), или между отдельными фазами включаются неравные сопротивления. Наиболее распространенные случаи поперечной несимметрии в электроустановках – это несимметрия, обусловленная коротким замыканием одной или двух фаз на землю или фаз между собой. Междофазные к.з. (двухфазные и трехфазные) возникают в сетях, как с заземленной, так и с изолированной нейтралью. Однофазные к.з. могут происходить только в сетях с заземленной нейтралью.

*Продольная несимметрия* возникает в том случае, когда в рассечку фаз линии включаются неравные сопротивления. К продольной несимметрии относится обрыв одного или двух проводов.

В расчетах несимметричный пассивный участок цепи, как правило, по теореме компенсации заменяется генератором, вырабатывающим в месте несимметрии несимметричную систему напряжений. Напряжения и токи в месте несимметрии связаны между собой определенными соотношениями.

Эти соотношения можно назвать граничными условиями в месте несимметрии. Рассмотрим их для обоих видов несимметрии.

*Уравнения при поперечной несимметрии* записываются для напряжений  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  и токов  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$  фаз в месте несимметрии относительно земли. Если между фазой и землей включено сопротивление, то напряжение и ток на нем связаны между собой по закону Ома ( $\dot{U} = \underline{z} \cdot \dot{I}$ ). При коротком замыкании фазы на землю напряжение между фазой и землей равно нулю ( $\dot{U} = 0$ ). Если фаза не имеет соединения с землей, то нулю будет равен ток между фазой и землей ( $\dot{I} = 0$ ).

В таблице 2.3 приведены граничные условия в месте поперечной несимметрии для различных видов короткого замыкания.

*Уравнения для продольной несимметрии* записываются для напряжений  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  и токов  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$  фаз в месте несимметрии. Если в рассечку фазы включено сопротивление, то напряжение и ток на нем связаны между собой по закону Ома ( $\dot{U} = \underline{z} \cdot \dot{I}$ ). При обрыве фазы ток этой фазы будет равен нулю ( $\dot{I} = 0$ ), при отсутствии обрыва равно нулю напряжение в месте несимметрии ( $\dot{U} = 0$ ).

В таблице 2.4 приведены граничные условия в месте продольной несимметрии для различных видов обрывов фаз.

Таблица 2.3 – Дополнительные уравнения в месте несимметрии при поперечной несимметрии (коротких замыканиях)

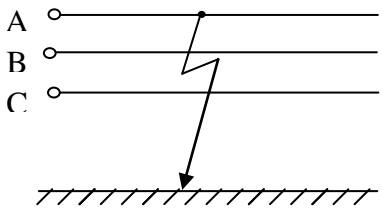
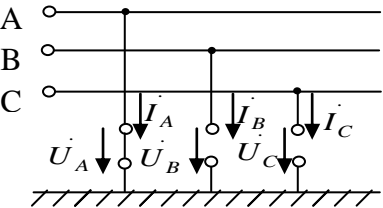
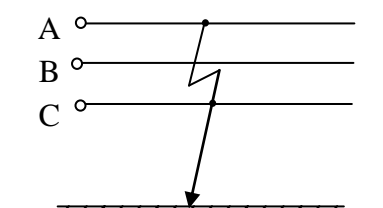
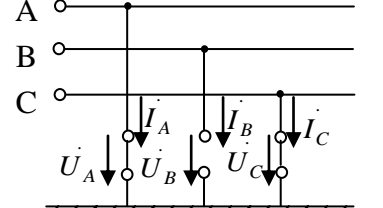
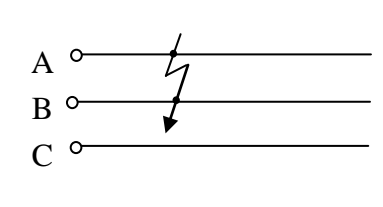
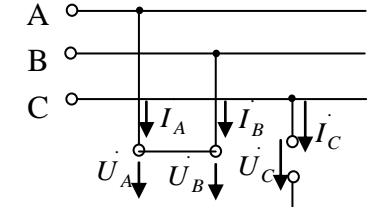
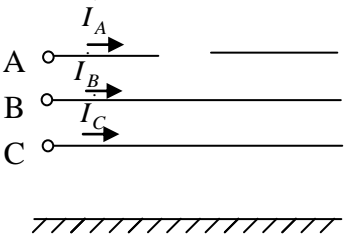
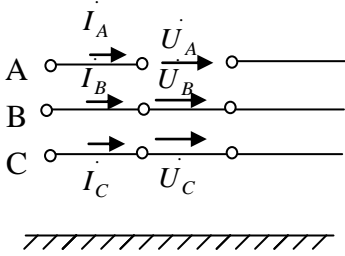
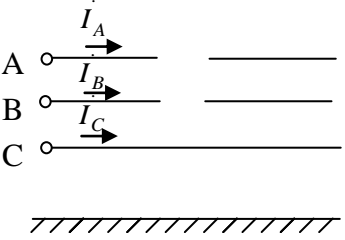
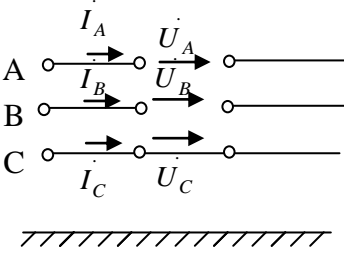
Вид несимметрии	Расчетная схема в месте несимметрии	Дополнительные уравнения к уравнениям Кирхгофа	Запись дополнительных уравнений через симметричные составляющие
<b>Однофазное короткое замыкание на землю (к.з. фазы А)</b>			
		$\dot{U}_A = 0$ $\dot{I}_B = 0$ $\dot{I}_C = 0$	$\dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0$ $\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0$ $\dot{I}_C = a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0$
<b>Двухфазное короткое замыкание на землю (к.з. на землю фаз А и С)</b>			
		$\dot{U}_A = 0$ $\dot{I}_B = 0$ $\dot{U}_C = 0$	$\dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0$ $\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0$ $\dot{U}_C = a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0$
<b>Двухфазное короткое замыкание (междуфазное к.з. фаз А и В)</b>			
		$\dot{U}_A = \dot{U}_B$ $\dot{I}_C = 0$ $\dot{I}_A = -\dot{I}_B$	$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0$ $a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0$ $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = -a^2 \dot{I}_1 - a \dot{I}_2 - \dot{I}_0$

Таблица 2.4 – Дополнительные уравнения в месте несимметрии при продольной несимметрии (обрывах фаз)

Вид несимметрии	Расчетная схема в месте несимметрии	Дополнительные уравнения к уравнениям Кирхгофа	Запись дополнительных уравнений через симметричные составляющие
<b>Обрыв одной фазы (фазы А)</b>			
		$\dot{I}_A = 0$ $\dot{U}_B = 0$ $\dot{U}_C = 0$	$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0$ $\dot{U}_B = a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0$ $\dot{U}_C = a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0$
<b>Обрыв двух фаз (А и В)</b>			
		$\dot{I}_A = 0$ $\dot{I}_B = 0$ $\dot{U}_C = 0$	$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0$ $\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0$ $\dot{U}_C = a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0$

### 2.2.3 Общий алгоритм расчета методом симметричных составляющих цепи с несимметричным участком в линии

Рассмотрим трехфазную цепь с симметричным генератором, симметричной нагрузкой, в линии которой возникла несимметрия (например, обрыв или короткое замыкание) (рисунок 2.13).

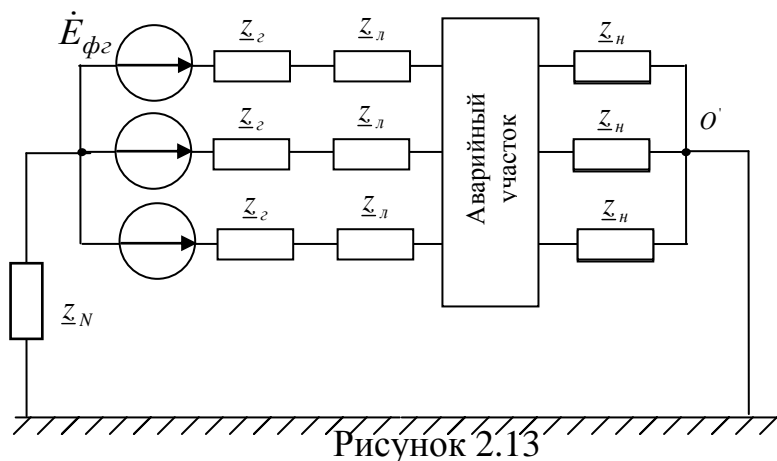


Рисунок 2.13

Алгоритм расчета фазных токов  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$  и фазных напряжений  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  несимметричного участка при расчете методом симметричных составляющих будет одинаков для любого вида несимметрии [3].

1) Составляют расчетную схему, в которой несимметричный участок в линии по принципу компенсации заменяют эквивалентным источником с несимметричной системой напряжений  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  в месте несимметрии. При поперечной несимметрии этот источник включен между фазами и землей, при продольной несимметрии – в рассечку фаз.

2) Трехфазные несимметричные системы напряжений, токов, ЭДС, действующие в цепи, представляют как сумму составляющих прямой, обратной и нулевой последовательности.

3) Исходную цепь заменяют тремя схемами, в каждой из которых стоят сопротивления и действуют ЭДС, напряжения и токи соответствующей последовательности. Так как эти схемы будут симметричными, расчет каждой из них достаточно проводить для одной фазы (фазы А). Поэтому, для расчета

составляют три однофазные схемы замещения: прямой, обратной и нулевой последовательности.

4) Однофазные схемы замещения преобразуют к простейшему виду. Составляют для них уравнения по второму закону Кирхгофа.

5) Дополнительно записывают граничные условия в месте несимметрии, выразив напряжения и токи в них через симметричные составляющие.

6) Решая систему уравнений, рассчитывают симметричные составляющие токов и напряжений.

7) После расчета симметричных составляющих по формулам (2.25) определяют искомые токи и напряжения.

При построении схем замещения нужно учитывать следующие моменты:

- если нагрузка соединена треугольником, то ее предварительно нужно преобразовать в звезду и найти соответствующие сопротивления всех последовательностей для звезды;

- если система ЭДС генератора симметрична, то присутствовать фазное напряжение генератора будет только в схеме прямой последовательности. Несимметричная система входных ЭДС по (6) раскладывается на симметричные составляющие и включается в схему замещения каждой последовательности;

- схемы прямой и обратной последовательности не будут содержать сопротивления нейтрального провода, так как токи этих последовательностей по нулевому проводу протекать не будут (для прямой и обратной последовательности  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ );

- схема нулевой последовательности составляется при несимметричных коротких замыканиях на землю (одно и двухфазных), а также при обрыве одной или двух фаз. Составление схемы замещения нулевой последовательности следует начинать от точки, где возникла несимметрия. Чтобы получилась замкнутая цепь для прохождения токов нулевой последовательности, в схеме должна быть хотя бы одна заземленная нейтраль;

- сопротивление нейтрального провода в схему нулевой последовательности вводится утроенной величиной. Это связано с тем, что по нулевому проводу текут токи  $\dot{I}_0$  всех трех фаз, т.е.  $\dot{I}_N = 3 \cdot \dot{I}_0$ , уравнение по второму закону Кирхгофа по контуру фазы А для нулевой последовательности запишется как  $\dot{I}_0 \underline{z}_0 + 3\dot{I}_0 \underline{z}_N = \dot{U}_0$ . Отсюда и получается формула для комплексного эквивалентного сопротивления нулевой последовательности

$$\underline{z}_{0Э} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = \underline{z}_0 + 3 \cdot \underline{z}_N.$$

### 2.2.4 Пример расчета цепи с поперечной несимметрией

Рассмотрим трехфазную цепь с симметричным генератором и симметричной нагрузкой, в которой произошло короткое замыкание фазы А на землю (рисунок 2.14).

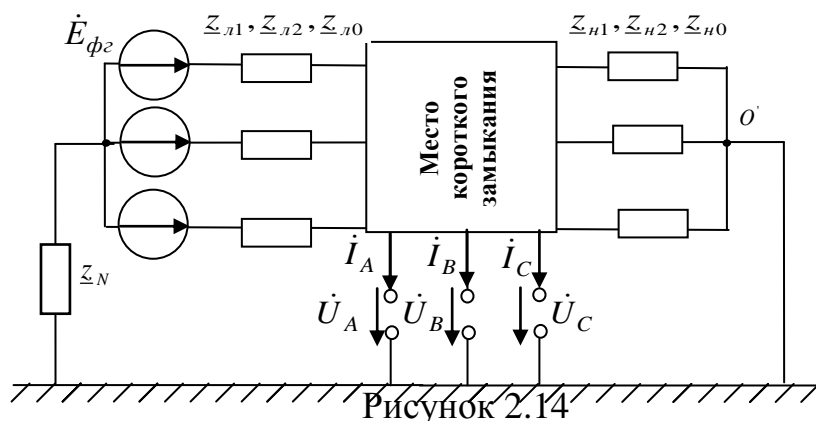


Рисунок 2.14

Известны фазная ЭДС генератора  $\dot{E}_{\phi g}$ , фазные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательности для линии  $\underline{z}_{l1}$ ,  $\underline{z}_{l2}$ ,  $\underline{z}_{l0}$  и нагрузки  $\underline{z}_{n1}$ ,  $\underline{z}_{n2}$ ,  $\underline{z}_{n0}$ , сопротивление нейтрального провода  $\underline{z}_N$ . Требуется методом симметричных составляющих рассчитать токи и напряжения в месте короткого замыкания.

В соответствии с алгоритмом несимметричный участок в линии заменим эквивалентным источником с несимметричной системой напряжений  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$  (рисунок 2.15).

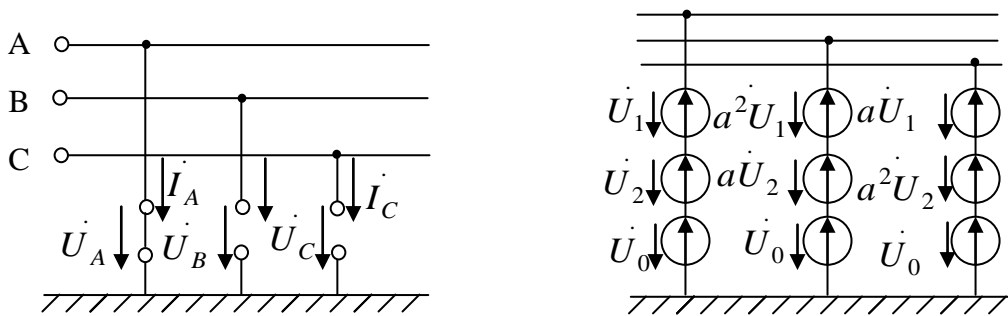


Рисунок 2.15

Системы трех несимметричных напряжений  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  и трех несимметричных токов  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$  в месте несимметрии представим в виде суммы трех симметричных систем: прямой обратной и нулевой последовательности, симметричные составляющие которых  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$  и  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0$  нужно определить.

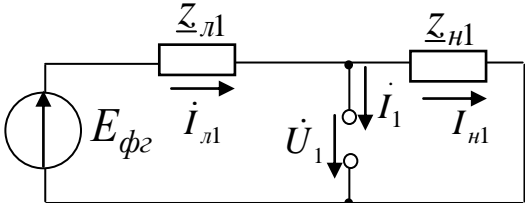
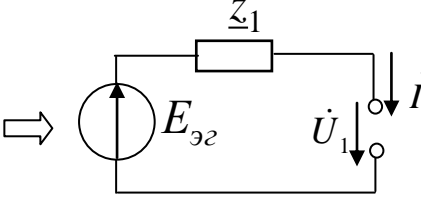
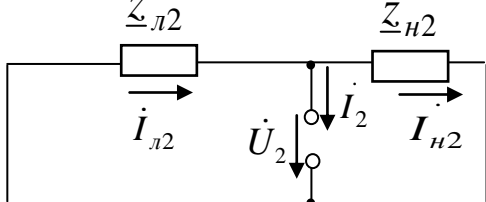
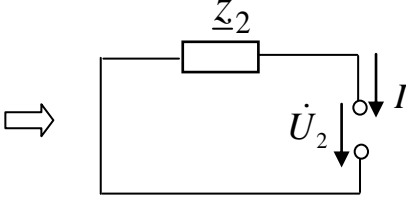
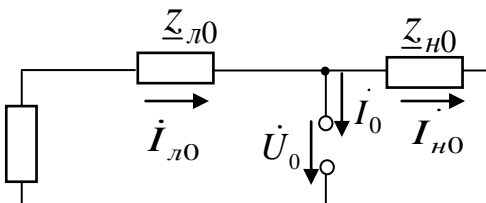
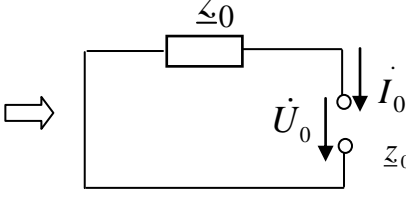
По методу симметричных составляющих вместо исходной схемы нужно рассчитать три трехфазные схемы: прямой, обратной и нулевой последовательностей. Но так как режимы в каждой из этих схем будут симметричны, расчет проводится только для одной фазы. Обычно для расчета в качестве основной фазы выбирают фазу А, для сокращения записи индекс «А» у симметричных составляющих токов и напряжений для этой фазы не ставят.

Учитывая это, сразу составим три однофазные схемы замещения, которые и будем использовать для расчета, они показаны в первом столбце таблицы 2.4.

В схему прямой последовательности будут включены фазная ЭДС генератора и сопротивления всех элементов цепи прямой последовательности. Здесь  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  - симметричные составляющие напряжения и тока прямой последовательности в месте короткого замыкания.



Таблица 2.4

Однофазные схемы замещения	Однофазные схемы замещения после преобразования до одного контура
Схема прямой последовательности	Схема прямой последовательности
	 $\dot{E}_{\phi 2} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{\lambda 1}} + \frac{1}{Z_{H1}}} \cdot \dot{E}_{\phi 2}$ $Z_1 = \frac{Z_{\lambda 1} \cdot Z_{H1}}{Z_{\lambda 1} + Z_{H1}}$
Схема обратной последовательности	Схема обратной последовательности
	 $Z_2 = \frac{Z_{\lambda 2} \cdot Z_{H2}}{Z_{\lambda 2} + Z_{H2}}$
Схема нулевой последовательности	Схема нулевой последовательности
	 $Z_0 = \frac{(Z_{\lambda 0} + 3Z_N) \cdot Z_{H0}}{Z_{\lambda 0} + 3Z_N + Z_{H0}}$

Конфигурация схемы обратной последовательности будет такая же, но схема не будет содержать ЭДС (так как мы имеем симметричную систему ЭДС на входе). В ней будут включены сопротивления всех элементов цепи обратной последовательности,  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  - симметричные составляющие напряжения и тока обратной последовательности в месте короткого замыкания.

Конфигурация схемы нулевой последовательности в рассматриваемом примере будет отличаться от схемы обратной последовательности только наличием утроенного сопротивления нейтрального провода. В ней будут

включены сопротивления всех элементов цепи нулевой последовательности,  $\dot{U}_0$  и  $\dot{I}_0$  - симметричные составляющие напряжения и тока нулевой последовательности в месте короткого замыкания.

Следует отметить, что в других случаях схема нулевой последовательности может существенно отличаться от схем прямой и обратной последовательностей. При ее составлении нужно учесть следующее:

1) если нагрузка не имеет нулевого провода (то есть соединена звездой без нулевого провода или треугольником), то ветви с сопротивлением нагрузки  $\underline{z}_{H0}$  в схеме не будет;

2) если в схеме произошло междуфазное короткое замыкание, то схему нулевой последовательности вообще не составляют, так как ток и напряжение нулевой последовательности будут равны нулю. Поэтому для случая междуфазного к.з. составляют всего две схемы замещения: прямой и обратной последовательности.

После составления схем замещения преобразуем их к простейшему виду (одному контуру), сложив параллельные ветви относительно места короткого замыкания. Эквивалентную ЭДС  $\dot{E}_{\Sigma 1}$  и эквивалентные сопротивления  $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_0$  найдем по известным формулам эквивалентных преобразований. Схемы после преобразования показаны в столбце 2 таблицы 2.4.

Для нахождения шести неизвестных симметричных составляющих  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$  и  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0$  составим систему из шести уравнений:

- первые три уравнения запишем для одноконтурных схем замещения (таблица 2.4) по второму закону Кирхгофа;

- остальные три уравнения запишем по условиям в месте несимметрии. (для рассматриваемого случая к.з. на землю фазы А граничные условия  $\dot{U}_A = 0; \dot{I}_B = 0; \dot{I}_C = 0$ , выразим их через симметричные составляющие).

$$\begin{cases} \underline{z}_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \dot{E}_{\text{э1}} \\ \underline{z}_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0 \\ \underline{z}_0 \dot{I}_0 + \dot{U}_0 = 0 \\ \dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0 \\ \dot{I}_B = a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 \\ \dot{I}_C = a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Полученную систему линейных алгебраических уравнений (2.29) можно решать как на ЭВМ, например, в системе MathCad, так и вручную.

Для решения в MathCad составляется матрица коэффициентов и матрица свободных членов.

$$A = \begin{vmatrix} \underline{z}_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{z}_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{z}_0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} \dot{E}_{\text{э1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Далее решение системы идет по любому известному алгоритму, например,  $IU = A^{-1} \cdot B$ . В результате решения получим матрицу искомым симметричных составляющих

$$IU_{\text{сим}} = \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_0 \\ \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_0 \end{vmatrix},$$

Зная симметричные составляющие, найдем токи и напряжения в месте короткого замыкания. Их можно найти, используя матрицу Фортескью (2.27) или выражения (2.25)

$$\begin{aligned}
\dot{I}_A &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 \\
\dot{I}_B &= a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 \text{ (проверка)} \\
\dot{I}_C &= a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0 \text{ (проверка)} \\
\dot{U}_A &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0 \text{ (проверка)} \\
\dot{U}_B &= a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0 \\
\dot{U}_C &= a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Систему (2.29) очень просто можно решить и вручную, приведя ее к одному уравнению с одним неизвестным. Для этого все неизвестные величины нужно выразить через одну величину, например, ток  $\dot{I}_1$ . Покажем, как это сделать наиболее просто.

Сначала, используя формулы (2.26) для расчета симметричных составляющих и граничные условия для токов  $\dot{I}_B = 0; \dot{I}_C = 0$ , установим зависимости между токами  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0$ :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + 0 + 0) = \frac{1}{3}\dot{I}_A \\
\dot{I}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C) = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + 0 + 0) = \frac{1}{3}\dot{I}_A \\
\dot{I}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{I}_A + a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C) = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + 0 + 0) = \frac{1}{3}\dot{I}_A
\end{aligned}$$

Отсюда сразу очевидно, что

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_0. \tag{2.31}$$

Далее сложим три первые уравнения системы (2.29), получим

$$\underline{z}_1 \dot{I}_1 + \underline{z}_2 \dot{I}_2 + \underline{z}_0 \dot{I}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = \dot{E}_{\text{э1}}.$$

С учетом (2.31) заменим токи  $\dot{I}_2, \dot{I}_0$  на  $\dot{I}_1$  и учтем, что  $\dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0$ . Получим  $\underline{z}_1 \dot{I}_1 + \underline{z}_2 \dot{I}_1 + \underline{z}_0 \dot{I}_1 = \dot{E}_{\text{э1}}$ , откуда ток прямой последовательности будет

находиться по формуле 
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_{\text{э1}}}{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 + \underline{z}_0}.$$

Остальные симметричные составляющие токов и напряжений найдутся по формулам  $\dot{I}_2 = \dot{I}_0 = \dot{I}_1$ ,  $\dot{U}_1 = \dot{E}_{\text{э1}} - \underline{z}_1 \dot{I}_1$ ,  $\dot{U}_2 = -\underline{z}_2 \dot{I}_2$ ,  $\dot{U}_0 = -\underline{z}_0 \dot{I}_0$ . Искомые токи и напряжения в месте короткого замыкания находятся по (2.30).

На рисунке 2,16 показаны примерные векторные диаграммы токов и напряжений прямой, обратной и нулевой последовательностей и векторные диаграммы результирующих токов и напряжений в месте короткого замыкания для рассмотренного случая однофазного короткого замыкания на землю.

Из векторных диаграмм видно, что ток фазы А в месте короткого замыкания  $\dot{I}_A$  равен сумме равных симметричных составляющих токов  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0$ , токи других фаз  $\dot{I}_B = 0; \dot{I}_C = 0$ . Напряжение между фазой А и землей  $\dot{U}_A = 0$ , напряжения между фазами В и С и землей находятся как сумма соответствующих симметричных составляющих.

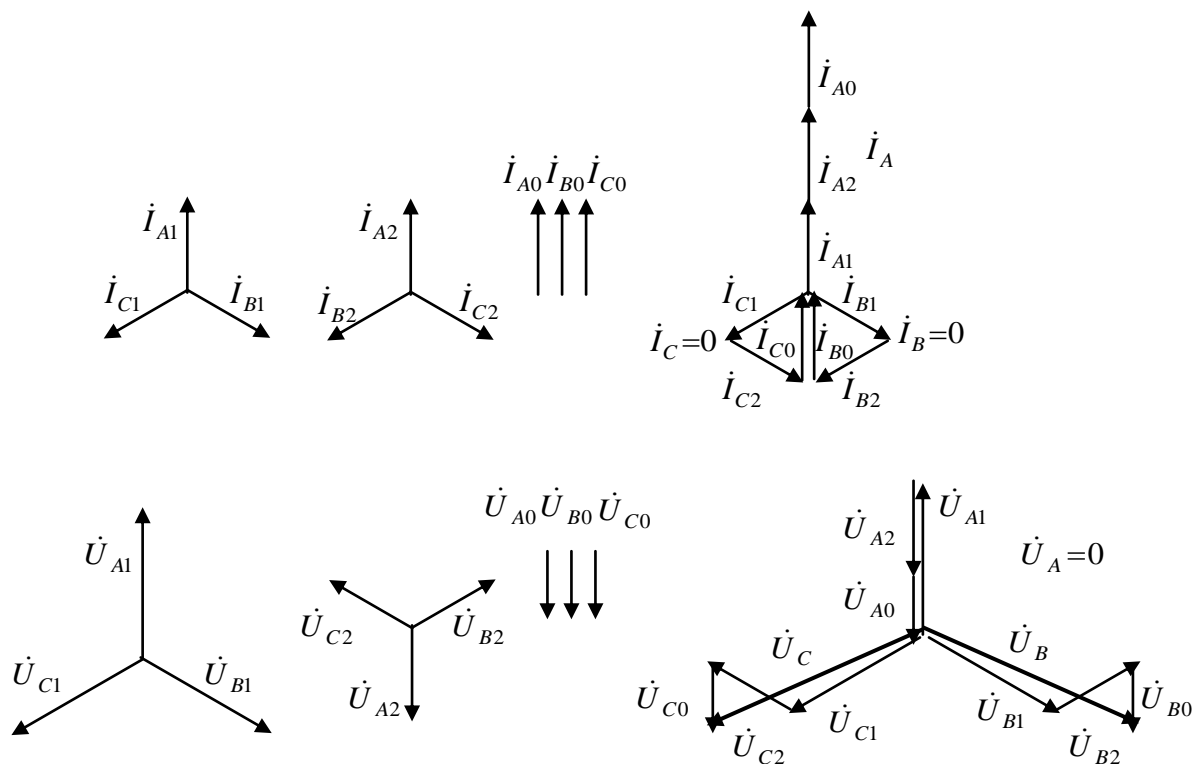


Рисунок 2.16

Если в задаче требуется найти еще токи в линии или нагрузке, то из схем замещения находятся сначала симметричные составляющие этих токов, а затем находятся сами токи.

При любых других видах поперечной несимметрии расчет будет аналогичным.

Для случая междуфазного короткого замыкания, при котором ток и напряжение нулевой последовательности  $\dot{I}_0$  и  $\dot{U}_0$  получаются равными нулю, с целью упрощения расчетов, как правило

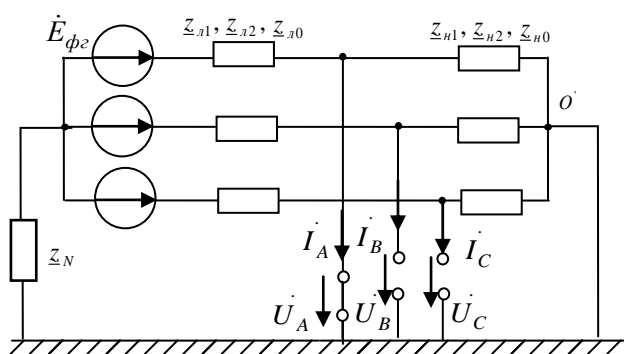
- составляют всего две схемы замещения (прямой и обратной последовательности);

- составляют не шесть, а четыре уравнения: два – по второму закону Кирхгофа, два – по условиям в месте несимметрии. Неизвестными в этих уравнениях будут симметричные составляющие напряжений и токов прямой и обратной последовательности  $\dot{U}_1, \dot{U}_2$  и  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ .

Однако, нужно отметить, что при расчетах в MathCad можно предельно формализовать задачу и при любых видах поперечной несимметрии (в том числе и при междуфазном к.з.) составлять три схемы и шесть уравнений. Для случая междуфазного к.з.  $\dot{I}_0$  и  $\dot{U}_0$  получатся равными нулю из решения этих шести уравнений.

### 2.2.5 Пример решения задачи 2 в системе Mathcad

Исходные данные: короткое замыкание на землю фазы А (рисунок 2.17).



$$E_{\phi z} = 120 \text{ В};$$

$$z_{n1} = j30 \text{ Ом}; \quad z_{n2} = j30 \text{ Ом};$$

$$z_{n0} = j20 \text{ Ом};$$

$$z_{n1} = j50 \text{ Ом}; \quad z_{n2} = j40 \text{ Ом};$$

$$z_{n0} = j20 \text{ Ом};$$

$$z_N = j10 \text{ Ом}$$

Рисунок 2.17

ORIGIN := 1

Исходные данные:

$$E_{\text{фг}} := 120 \text{ В} \quad j := \sqrt{-1} \quad a := e^{j \cdot 120 \cdot \text{deg}}$$

$$Z_{\text{л1}} := 30j \text{ Ом} \quad Z_{\text{л2}} := 30j \text{ Ом} \quad Z_{\text{л0}} := 20j \text{ Ом}$$

$$Z_{\text{н1}} := 50j \text{ Ом} \quad Z_{\text{н2}} := 40j \text{ Ом} \quad Z_{\text{н0}} := 20j \text{ Ом}$$

$$Z_{\text{н}} := 10j \text{ Ом}$$

Решение

Составим три однофазные схемы замещения и преобразуем их к простейшему виду.

Схема прямой последовательности

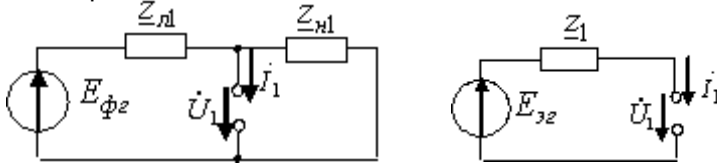


Схема обратной последовательности

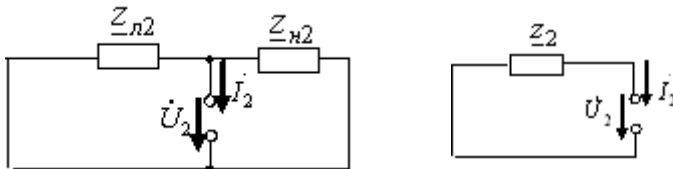
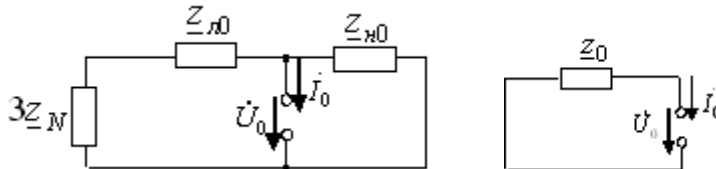


Схема нулевой последовательности



Рассчитаем эквивалентные ЭДС и сопротивления

$$\text{Эквивалентная ЭДС} \quad E_{\text{э1}} := \frac{E_{\text{фг}} \cdot \frac{1}{Z_{\text{л1}}}}{\frac{1}{Z_{\text{л1}}} + \frac{1}{Z_{\text{н1}}}} \quad E_{\text{э1}} = 75 \text{ В}$$

Эквивалентные сопротивления ветвей

$$Z_1 := \frac{Z_{\text{л1}} \cdot Z_{\text{н1}}}{Z_{\text{л1}} + Z_{\text{н1}}} \quad Z_1 = 18.75i \text{ Ом}$$

$$Z_2 := \frac{Z_{\text{л2}} \cdot Z_{\text{н2}}}{Z_{\text{л2}} + Z_{\text{н2}}} \quad Z_2 = 17.143i \text{ Ом}$$

$$Z_0 := \frac{(Z_{\text{л0}} + 3Z_{\text{н}}) \cdot Z_{\text{н0}}}{Z_{\text{л0}} + 3Z_{\text{н}} + Z_{\text{н0}}} \quad Z_0 = 14.286i \text{ Ом}$$

Составим систему шести уравнений: три - по законам Кирхгофа, три - по условиям в месте к.з. ( $U_A=0, I_B=0, I_C=0$ )

$$Z_1 \cdot I_1 + U_1 = E_{\Sigma 1}$$

$$Z_2 \cdot I_2 + U_2 = 0$$

$$Z_0 \cdot I_0 + U_0 = 0$$

$$U_0 + U_1 + U_2 = 0$$

$$a^2 \cdot I_1 + a \cdot I_2 + I_0 = 0$$

$$a \cdot I_1 + a^2 \cdot I_2 + I_0 = 0$$

Решим систему

Матрица коэффициентов

$$A := \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов

$$B := \begin{pmatrix} E_{\Sigma 1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$IU := A^{-1} \cdot B$$

$$IU = \begin{pmatrix} -1.495i \\ -1.495i \\ -1.495i \\ 46.975 \\ -25.623 \\ -21.352 \end{pmatrix}$$

Симметричные составляющие токов и напряжений в месте короткого замыкания

$$I_1 := IU_1$$

$$I_1 = -1.495i$$

$$|I_1| = 1.495$$

$$\arg(I_1) = -90\text{deg}$$

$$I_2 := IU_2$$

$$I_2 = -1.495i$$

$$|I_2| = 1.495$$

$$\arg(I_2) = -90\text{deg}$$

$$I_0 := IU_3$$

$$I_0 = -1.495i$$

$$|I_0| = 1.495$$

$$\arg(I_0) = -90\text{deg}$$

$$U_1 := IU_4$$

$$U_1 = 46.975$$

$$|U_1| = 46.975$$

$$\arg(U_1) = -3.42 \times 10^{-15} \text{deg}$$

$$U_2 := IU_5$$

$$U_2 = -25.623$$

$$|U_2| = 25.623$$

$$\arg(U_2) = -180\text{deg}$$

$$U_0 := IU_6$$

$$U_0 = -21.352$$

$$|U_0| = 21.352$$

$$\arg(U_0) = 180\text{deg}$$

Определим токи и напряжения в месте короткого замыкания с помощью матрицы Фортескью

$$F := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_s := \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

$$U_s := \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_0 \end{pmatrix}$$



Токи в месте короткого замыкания

$$I_{кз} := F \cdot I_s \quad I_{кз} = \begin{pmatrix} -4.484i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_A := I_{кз_1} \quad |I_A| = 4.484 \quad \arg(I_A) = -90\text{deg}$$

$$I_B := I_{кз_2} \quad |I_B| = 0$$

$$I_C := I_{кз_3} \quad |I_C| = 0$$

Напряжения в месте короткого замыкания

$$U_{кз} := F \cdot U_s \quad U_{кз} = \begin{pmatrix} 0 \\ -32.028 - 62.872i \\ -32.028 + 62.872i \end{pmatrix}$$

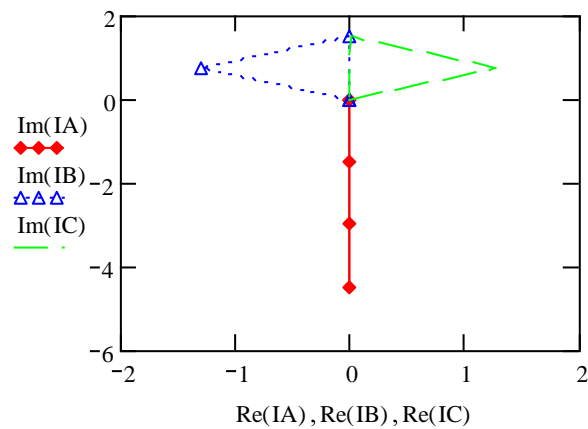
$$U_A := U_{кз_1} \quad |U_A| = 0$$

$$U_B := U_{кз_2} \quad |U_B| = 70.56 \quad \arg(U_B) = -116.996\text{deg}$$

$$U_C := U_{кз_3} \quad |U_C| = 70.56 \quad \arg(U_C) = 116.996\text{deg}$$

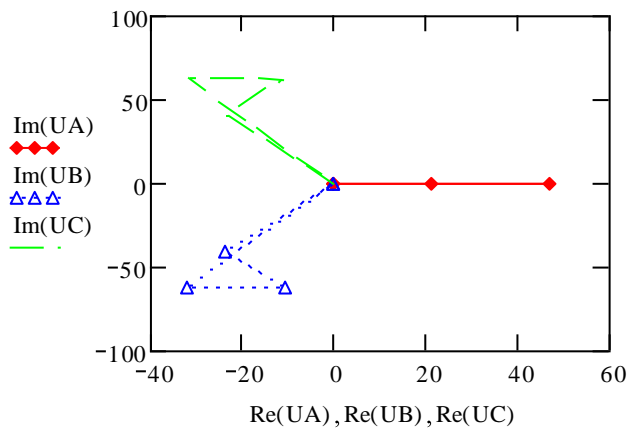
Векторная диаграмма токов в месте к.з.

$$\underline{I_A} := \begin{pmatrix} 0 \\ I_1 \\ I_1 + I_2 \\ I_1 + I_2 + I_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{I_B} := \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \cdot I_1 \\ a^2 \cdot I_1 + a \cdot I_2 \\ a^2 \cdot I_1 + a \cdot I_2 + I_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{I_C} := \begin{pmatrix} 0 \\ a \cdot I_1 \\ a \cdot I_1 + a^2 \cdot I_2 \\ a \cdot I_1 + a^2 \cdot I_2 + I_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Векторная диаграмма напряжений в месте к.з.

$$\underline{U}_A := \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_1 + U_2 \\ U_1 + U_2 + U_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{U}_B := \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \cdot U_1 \\ a^2 \cdot U_1 + a \cdot U_2 \\ a^2 \cdot U_1 + a \cdot U_2 + U_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{U}_C := \begin{pmatrix} 0 \\ a \cdot U_1 \\ a \cdot U_1 + a^2 \cdot U_2 \\ a \cdot U_1 + a^2 \cdot U_2 + U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## 2.3 Цепи несинусоидального тока

### 2.3.1 Гармонический анализ и разложение функций

На практике часто встречаются несинусоидальные периодические ЭДС и токи, которые изменяются во времени по не гармоническому закону, но значения которых регулярно повторяются через равные промежутки времени, называемые периодом -  $T$ , как это показано на рисунке 2.18.

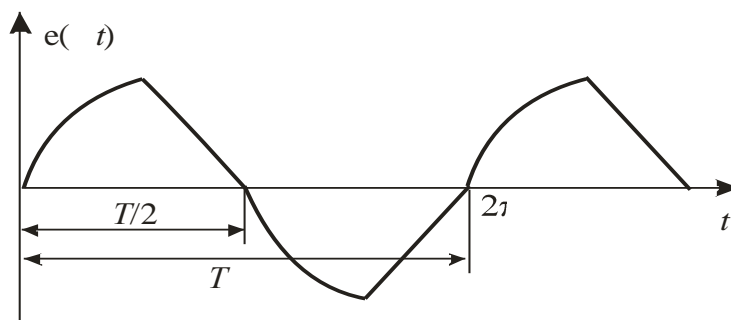


Рисунок 2.18

Несинусоидальные ЭДС и токи возникают в следующих случаях:

- а) при включении в цепь переменного тока элемента с насыщенным стальным (ферромагнитным) сердечником;
- б) при наличии нелинейных сопротивлений в цепи;
- в) если источник ЭДС или источник тока выдаёт несинусоидальное напряжение или ток.

Далее рассмотрим анализ линейных электрических цепей, на входе которых действуют периодические несинусоидальные ЭДС и токи.

Из курса высшей математики известно, что любая периодическая функция  $f(t)$  с периодом  $2 \cdot \pi$ , удовлетворяющая условиям Дирихле (то есть имеющая на конечном интервале  $f(t)$  конечное число максимумов, минимумов и разрывов первого рода), может быть разложена в ряд Фурье. Практически все периодические функции, используемые в электротехнике, условиям Дирихле удовлетворяют.

Периодическая несинусоидальная ЭДС в общем случае может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье:

$$\begin{aligned}
 e(t) &= E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = \\
 &= E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

где  $E_0$  - постоянная составляющая;

$E_1 \sin(\omega t + \psi_1)$  - первая (основная) гармоническая составляющая, имеющая частоту  $\omega = 2 \cdot \pi / T$ ;

$E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$  - при  $k \geq 2$  высшие гармонические составляющие (гармоники);

$E_{km}$  - амплитуда  $k$ -й гармоники;

$\psi_k$  - начальная фаза  $k$ -й гармоники.

$k$  - номер гармоники.

Совокупность постоянной составляющей, основной гармоники и высших гармонических составляющих называется **спектром несинусоидальной величины**.

Тригонометрический ряд Фурье, как правило, быстро сходится, поэтому для инженерных расчетов количество гармоник ограничивают и учитывают только первые 3 – 5 гармоник ряда.

Второй вид ряда Фурье может быть получен из первого путём тригонометрических преобразований:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta .$$

То есть

$$E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = E_{km} \cos(\psi_k) \cdot \sin(k\omega t) + E_{km} \sin(\psi_k) \cdot \cos(k\omega t) .$$

Следовательно, второй вид ряда Фурье будет иметь вид:

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos(k\omega t) , \tag{2.33}$$

где  $B_{(k)m} = E_{(k)m} \cdot \cos(\psi_{(k)})$  - синусная составляющая  $k$ -ой гармоники;

$C_{(k)m} = E_{(k)m} \cdot \sin(\psi_{(k)})$  - косинусная составляющая  $k$ -ой гармоники;

$B_{(k)m}$  и  $C_{(k)m}$  - коэффициенты разложения.

Для определения постоянной составляющей и коэффициентов разложения используют следующие формулы:

$$E_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t)$$

$$B_{(k)m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k\omega t) d(\omega t)$$

$$C_{(k)m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \cos(k\omega t) d(\omega t)$$

Зная значения  $B_{(k)m}$  и  $C_{(k)m}$ , определяем  $E_{(k)m}$  и  $\psi_{(k)}$ :

$$E_{(k)m} = \sqrt{B_{(k)m}^2 + C_{(k)m}^2}$$

$$\psi_{(k)} = \arctg \frac{C_{(k)m}}{B_{(k)m}}$$

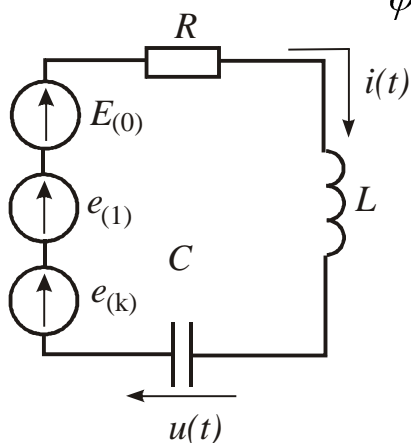


Рисунок 2.19

Таким образом, несинусоидальный источник напряжения можно представить упрощенно как схему, изображенную на рисунке 2.19.

### 2.3.2 Свойства периодических кривых, обладающих симметрией

Коэффициенты ряда Фурье для стандартных функций могут быть взяты из справочной литературы или в общем случае рассчитаны по приведенным выше формулам. Однако в случае кривых, обладающих симметрией, задача существенно упрощается, поскольку из их разложения выпадают целые спектры гармоник. Знание свойств таких кривых позволяет существенно сэкономить время и ресурсы при вычислениях.

а) Кривые, симметричные относительно оси абсцисс.

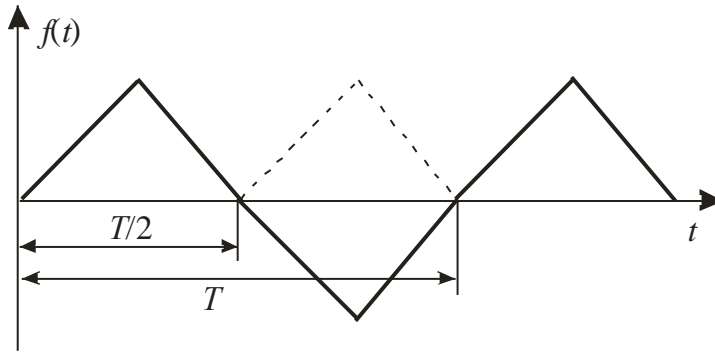


Рисунок 2.20

К данному типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству  $f(t) = -f(t + T/2)$  или  $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$  (рисунок 2.20). В их разложении отсутствует постоянная составляющая и четные гармоники, т.е.

$$e(t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + C_1 \cos \omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots$$

б) Кривые, симметричные относительно оси ординат.

К данному типу относятся кривые, для которых выполняется равенство  $f(t) = f(-t)$  или  $f(\omega t) = f(-\omega t)$  (рисунок 2.21). В их разложении отсутствуют синусные составляющие, т.е.

$$e(t) = E_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots$$

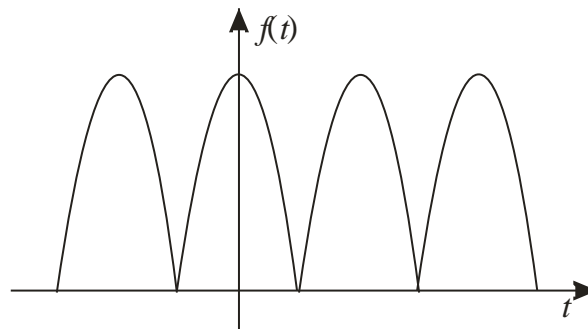


Рисунок 2.21

в) Кривые, симметричные относительно начала координат.

К этому типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству  $f(t) = -f(-t)$  или  $f(\omega t) = -f(-\omega t)$  (рисунок 2.22). При разложении таких кривых отсутствуют постоянная и косинусные составляющие, т.е.

$$e(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots$$

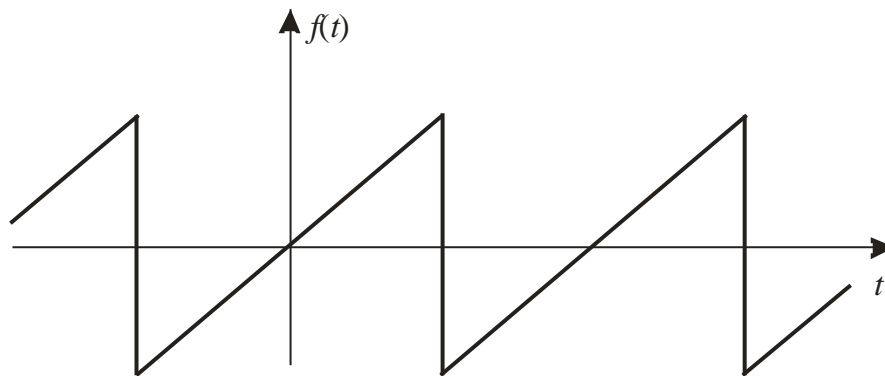


Рисунок 2.22

К этому типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству  $f(t) = -f(-t)$  или  $f(\omega t) = -f(-\omega t)$  (рисунок 2.22). При разложении таких кривых отсутствуют постоянная и косинусные составляющие, т.е.

$$e(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots$$

### 2.3.3 Коэффициенты, характеризующие форму несинусоидальных кривых

Существует несколько коэффициентов, по значениям которых можно судить о форме несинусоидальных кривых. Важнейшими из них являются коэффициенты **амплитуды, формы, искажений и гармоник**.

**Коэффициент амплитуды**  $K_a$  равен отношению максимального значения электрической величины (например, напряжения) к ее действующему значению:

$$K_a = \frac{U_{\max}}{U}$$

Для синусоидальных величин  $K_a = \sqrt{2} \approx 1.41$ . Заметим, что чем острее кривая, тем больше значение  $K_a$ .

**Коэффициенты формы**  $K_\phi$  равен отношению действующего значения электрической величины к ее среднему по модулю значению:

$$K_\phi = \frac{U}{U_{\text{ср.мод.}}}.$$

Для синусоидальных величин  $K_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$ .

**Коэффициент гармоник**  $K_\varepsilon$  равен отношению действующего значения высших гармонических составляющих к действующему значению первой гармоники:

$$K_\varepsilon = \frac{\sqrt{\sum_{k=2} U_k^2}}{U_1}.$$

**Коэффициент искажения**  $K_u$  определяется отношением действующего значения первой гармоники к действующему значению всей кривой:

$$K_u = \frac{U_{(1)}}{U}.$$

Для синусоидальной функции  $K_u = 1$ .

**Комплексным коэффициентом передачи** электрической цепи называют отношение выходной величины (на нагрузке) к входной в комплексной форме записи. Если это отношение напряжений или токов, то частотные характеристики называют комплексными коэффициентами передачи по напряжению и току:

$$\underline{K}_U(j\omega) = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}, \quad \underline{K}_I(j\omega) = \frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}}.$$

### 2.3.4 Действующее и среднее значения несинусоидальных величин

Периодическую несинусоидальную величину (например, ток) обычно характеризуют следующими значениями: максимальным  $I_{\text{max}}$ , действующим  $I$ , средним по модулю  $I_{\text{ср.мод.}}$  и постоянной составляющей  $I_0$ .



**Действующее значение** несинусоидального тока определяется его среднеквадратическим (эффективным) значением за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t)^2 dt} . \quad (2.34)$$

Если ряд Фурье для тока ограничить конечным числом членов

$$i = I_0 + I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \cdot \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + I_{km} \cdot \sin(k\omega t + \psi_k) ,$$
 то

выражение (2.34) после интегрирования принимает вид:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \dots + \frac{I_{km}^2}{2}} . \quad (2.35)$$

Так как действующее значение гармонической составляющей  $I = I_m / \sqrt{2}$ , то:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2} , \quad (2.36)$$

где  $I_0$  - постоянная составляющая,

$I_1, I_2, I_k$  - действующие значения гармоник тока.

Аналогичное выражение имеет действующее значение напряжения:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_k^2} . \quad (2.37)$$

Таким образом, действующее значение несинусоидальной электрической величины равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений всех гармоник. Оно не зависит от начальных фаз гармоник.

Наряду с действующим значением в электротехнике используют понятие **среднего по модулю значения** функции. Оно, например, для тока, выражается

интегралом вида:  $I_{ср.мод.} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |i(t)| dt$

**Постоянная составляющая** представляет собой среднее значение функции за период:

$$I_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) dt$$

### 2.3.5 Особенности расчета линейной электрической цепи с несинусоидальными источниками

Расчет цепей, в которых действует один или несколько несинусоидальных источников периодических ЭДС и токов, раскладывается на три этапа;

1) Разложение ЭДС и токов источников на постоянную и синусоидальные составляющие (при этом ограничиваемся *некоторым числом гармоник*);

2) Применение принципа наложения и расчет токов и напряжений в цепи для каждой из составляющих в отдельности при этом, учитываем что структура цепи сохраняется, а *сопротивления и проводимости реактивных элементов изменяются* с изменением частоты гармоник;

3) Совместное рассмотрение решений, полученных для каждой из составляющих.

Рассмотрим каждый из этих этапов подробнее.

1) Если ЭДС изменяется по закону

$$e = E_0 + E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2), \quad (2.38)$$

то действие источника такой ЭДС аналогично действию трёх последовательно соединённых источников ЭДС:

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= E_0 \\ e_1 &= E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) \\ e_2 &= E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \end{aligned} \right\}. \quad (2.39)$$

Если задача поставлена иначе: заданы не ЭДС, а токи несинусоидальных источников тока, то принцип решения задачи остаётся тем же. Источник несинусоидального тока всегда можно представить в виде параллельного соединения ряда источников тока. Если к узлам ветви или выходам двухполюсника подводится несинусоидальный ток

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + I_{2m} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (2.40)$$

то источник такого тока действует подобно параллельному соединению трёх источников:

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= I_0 \\ i_1 &= I_{1m} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ i_2 &= I_{2m} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

2) Применяв принцип наложения, и, рассмотрев действие каждой составляющей ЭДС в отдельности, можно найти составляющие токов на всех участках цепи.

При рассмотрении каждой составляющей спектра необходимо учитывать, что для различных частот индуктивные и ёмкостные сопротивления неодинаковы:

$$x_{L_k} = k \cdot \omega \cdot L = k \cdot x_{L_1}; \quad (2.42)$$

$$x_{C_k} = \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C} = \frac{x_{C_1}}{k}. \quad (2.43)$$

3) Мгновенные значения тока в любой ветви электрической цепи можем определить на основании принципа наложения:

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + I_{2m} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (2.44)$$

Зная мгновенное значение тока, можем определить действующее:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2}}. \quad (2.45)$$

### 2.3.6 Мощность при несинусоидальных напряжениях и токах

Под **активной мощностью** ( $P$ , Вт) несинусоидального тока понимают среднее значение мгновенной мощности за период первой гармоники:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \, dt. \quad (2.46)$$

Если представить напряжение  $u$  и ток  $i$  рядами Фурье

$$\begin{aligned} u &= U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ &+ U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \quad ; \end{aligned}$$

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \phi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \phi_2) + \\ + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \phi_3) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \phi_k)$$

и подставить эти ряды в выражение (22), то можно получить:

$$P = I_0 \cdot U_0 + U_1 \cdot I_1 \sin \phi_1 + U_2 \cdot I_2 \sin \phi_2 + U_3 \cdot I_3 \sin \phi_3 + \\ + \dots + U_K \cdot I_K \sin \phi_K, \quad (2.47)$$

где  $\phi_K$  - угол между  $U_K$  и  $I_K$ .

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник.

Аналогично выводится понятие **реактивной мощности**(Q, ВАр):

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot I_k \cdot \sin \phi_k. \quad (2.48)$$

**Полная мощность** (S, ВА) равна произведению действующего значения несинусоидального напряжения на действующее значение несинусоидального тока:

$$S = U \cdot I, \quad (2.49)$$

где  $U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_k^2}$ ;  $I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_k^2}$ .

В цепях с несинусоидальными токами в отличие от синусоидальных цепей

$$S^2 > P^2 + Q^2; \quad S^2 = P^2 + Q^2 + T^2,$$

(2.50)

так как в них действует **мощность искажения** (T, ВАр), обусловленная наличием высших гармоник ;

$$T^2 = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}. \quad (2.51)$$

Отношение активной мощности к полной называется **коэффициентом мощности**.

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{U \cdot I}. \quad (2.52)$$

Для синусоидальных цепей  $\lambda = \cos \phi$ , но в несинусоидальных цепях

появляется **коэффициент искажения**  $K_u$   $\lambda = \frac{I_1}{I} \cos \phi = K_u \cos \phi$

### 2.3.7 Пример решения задачи 3

Проведем расчет линейной электрической цепи. Схема и кривая несинусоидальной ЭДС приложенной к цепи показаны на рисунке 2.23.

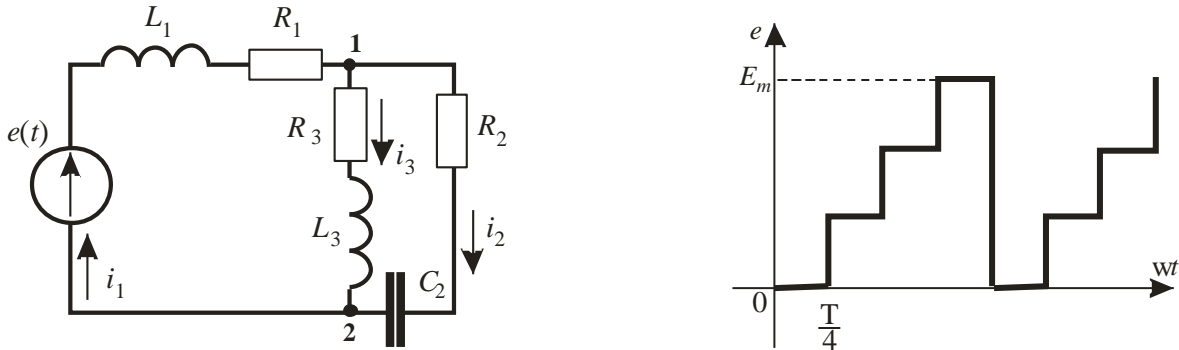


Рисунок 2.23

Значения параметров:

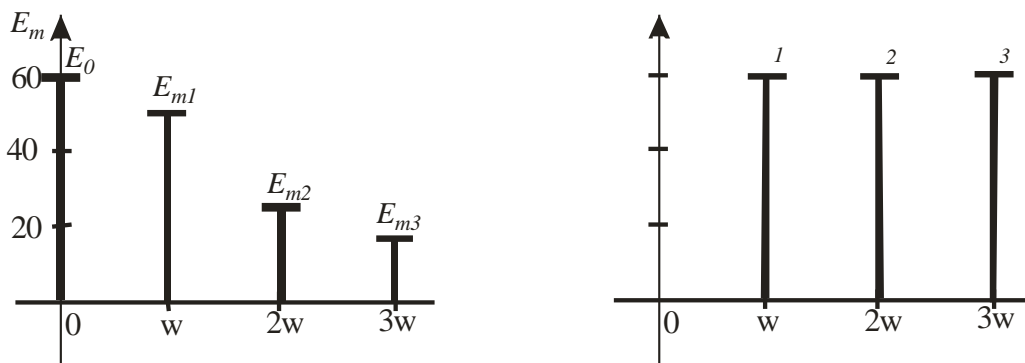
$$R_1 = 180 \text{ Ом}; R_2 = 170 \text{ Ом}; R_3 = 40 \text{ Ом}; T = 0.2 \cdot 10^{-2} \text{ с};$$

$$L_1 = 90 \text{ мГн}; L_3 = 70 \text{ мГн}; C_2 = 1 \text{ мкФ}; E_m = 120 \text{ В};$$

Представим ЭДС источника, заданную графически, рядом Фурье, ограничив число членов ряда постоянной составляющей и тремя первыми значимыми гармоническими составляющими:

$$e(t) = 60 + 50.93 \cdot \sin(3142t + \pi) + 25.465 \cdot \sin(6282t + \pi) + 16.977 \cdot \sin(9423t + \pi), \text{ В.}$$

Построим графики спектров амплитуд и начальных фаз ЭДС источника, рисунок 2.24.



а) АЧХ (амплитудно-частотная характеристика

б) ФЧХ (фазо-частотная характеристика)

Рисунок 2.24

Приближенное действующее значение ЭДС:

$$E \approx \sqrt{E_0^2 + \frac{E_{m1}^2 + E_{m2}^2 + E_{m3}^2}{2}} = \sqrt{60^2 + \frac{50.93^2 + 25.465^2 + 16.977^2}{2}} = 73.248 \text{ В.}$$

На рисунке 2.25 показана заданная кривая несинусоидальной ЭДС и кривая, полученная в результате сложения постоянной составляющей и первых трёх гармонических составляющих ряда. Построение осуществлено в среде MathCad.

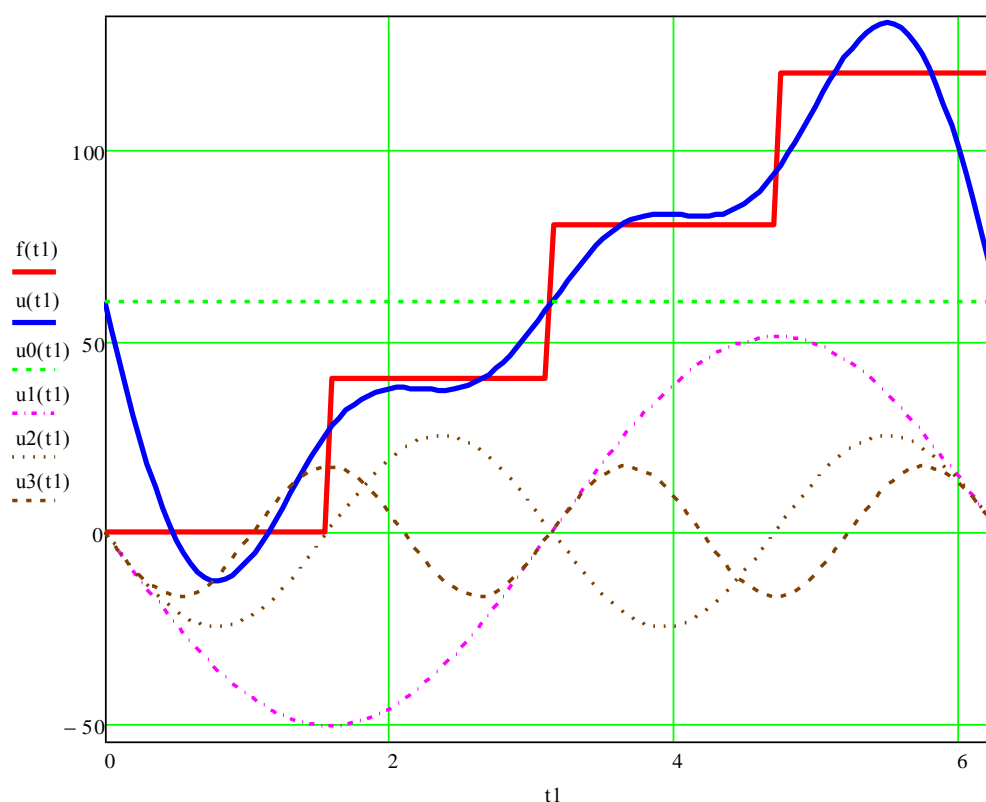


Рисунок 2.25

На рисунке 2.25

$$t1 := 0, 0.05.. 2 \cdot \pi$$

$$u(t1) := 60 + 50.93 \sin(t1 + \pi) + 25 \cdot \sin(2t1 + \pi) + 16.977 \sin(3 \cdot t1 + \pi)$$

$$u0(t1) := 60 \qquad u1(t1) := 50.93 \sin(t1 + \pi)$$

$$u2(t1) := 25 \cdot \sin(2t1 + \pi) \qquad u3(t1) := 16.977 \sin(3 \cdot t1 + \pi)$$

Расчёт токов в ветвях проводим для каждой составляющей спектра по отдельности:

а) постоянная составляющая (учтём, что для постоянного тока идеальный индуктивный элемент – это короткозамкнутая перемычка, а идеальный емкостной элемент – разрыв цепи):

$$e(t) = E_0 = 60 \text{ В},$$

$$I_{10} = I_{30} = \frac{E_0}{R_1 + R_3} = \frac{60}{180 + 40} = 0.273 \text{ А},$$

$$I_{20} = 0,$$

$$P_{\text{исп}} = E_0 \cdot I_{10} = 60 \cdot 0.273 = 16.38 \text{ Вт},$$

$$P_{\text{ном}} = R_1 \cdot I_{10}^2 + R_3 \cdot I_{30}^2 = (180 + 40) \cdot 0.273^2 = 16.39 \text{ Вт}.$$

б) первая (основная) гармоническая составляющая:

$$e_1(t) = 50.93 \cdot \sin(\omega t + \pi), \text{ В},$$

перейдем к комплексному амплитудному значению ЭДС:

$$\dot{E}_{m1} = 50.93 \cdot e^{j\pi}, \text{ В}.$$

Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega \cdot L_1 = 180 + j282.743 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2} = 170 - j318.31 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega \cdot L_3 = 40 + j219.911 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 254.772 + j236.77 \text{ Ом}.$$

Комплексные амплитуды токов ветвей на первой гармонике:

$$\dot{I}_{m11} = \frac{\dot{E}_{m1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23}} = \frac{50.93 \cdot e^{j\pi}}{180 + j282.743 + 254.772 + j236.77} = -0.048 + j0.058 = 0.075 \cdot e^{j129.93^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{12m} = \underline{Z}_{23} \cdot \dot{I}_{m11} = -25.943 + j3.265 \text{ В},$$

$$\dot{I}_{m12} = \frac{\dot{U}_{12m}}{\underline{Z}_2} = \frac{-25.943 + j3.265}{170 - j318.31} = -0.042 - j0.059 = 0.072 \cdot e^{-j125.28^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{m13} = \frac{\dot{U}_{12m}}{\underline{Z}_3} = \frac{-25.943 + j3.265}{40 + j219.911} = -0.0064 + j0.117 = 0.117 \cdot e^{j93.14^\circ} \text{ A.}$$

Мгновенные значения токов в ветвях на первой гармонике:

$$i_{11}(t) = 0.075 \cdot \sin(3142t + 129.93^\circ) \text{ A,}$$

$$i_{12}(t) = 0.072 \cdot \sin(3142t - 125.28^\circ) \text{ A,}$$

$$i_{13}(t) = 0.117 \cdot \sin(3142t + 93.14^\circ) \text{ A.}$$

Баланс мощностей:

$$\tilde{S}_{\text{исм1}} = \frac{\dot{E}_{m1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\bar{I}_{m11}}{\sqrt{2}} = \frac{50.93 \cdot e^{j180^\circ} \cdot 0.075 \cdot e^{-j129.93^\circ}}{2} = 1.229 + j1.468 \text{ ВА,}$$

$$P_{\text{номп1}} = R_1 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m11}|}{\sqrt{2}} \right)^2 + R_2 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m12}|}{\sqrt{2}} \right)^2 + R_3 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m13}|}{\sqrt{2}} \right)^2 = 180 \cdot \frac{0.075^2}{2} +$$

$$+ 170 \cdot \frac{0.072^2}{2} + 40 \cdot \frac{0.117^2}{2} = 1.229 \text{ Вт,}$$

$$Q_{\text{номп1}} = X_1 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m11}|}{\sqrt{2}} \right)^2 - X_2 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m12}|}{\sqrt{2}} \right)^2 + X_3 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m13}|}{\sqrt{2}} \right)^2 = 282.743 \cdot \frac{0.075^2}{2} -$$

$$- 318.31 \cdot \frac{0.072^2}{2} + 236.77 \cdot \frac{0.117^2}{2} = 1.468 \text{ вар.}$$

Векторная диаграмма токов на первой гармонике:

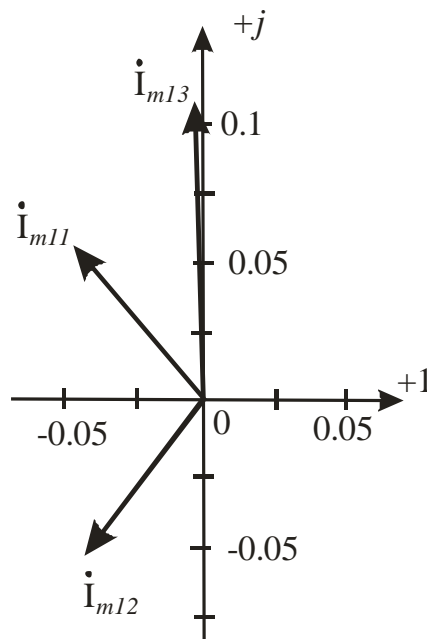


Рисунок 2.26



в) вторая гармоническая составляющая:

$$e_2(t) = 25.465 \cdot \sin(2\omega t + \pi), \text{ В,}$$

перейдем к комплексному амплитудному значению ЭДС:

$$\dot{E}_{m2} = 25.465 \cdot e^{j\pi}, \text{ В.}$$

Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j2\omega \cdot L_1 = 180 + j565.487 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \cdot \frac{1}{2\omega \cdot C_2} = 170 - j159.155 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j2\omega \cdot L_3 = 40 + j439.823 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 287.502 - j58.519 \text{ Ом.}$$

Комплексные амплитуды токов ветвей на второй гармонике:

$$\dot{I}_{m21} = \frac{\dot{E}_{m2}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23}} = \frac{25.465 \cdot e^{j\pi}}{180 + j565.487 + 287.502 - j58.519} = -0.025 + j0.027 = 0.037 \cdot e^{j132.68^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{U}_{12m} = \underline{Z}_{23} \cdot \dot{I}_{m21} = -5.608 + j9.269 \text{ В,}$$

$$\dot{I}_{m22} = \frac{\dot{U}_{12m}}{\underline{Z}_2} = \frac{-5.608 + j9.269}{170 - j159.155} = -0.045 + j0.013 = 0.047 \cdot e^{j164.29^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_{m23} = \frac{\dot{U}_{12m}}{\underline{Z}_3} = \frac{-5.608 + j9.269}{40 + j439.823} = 0.02 + j0.015 = 0.025 \cdot e^{j36.37^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенные значения токов в ветвях на второй гармонике:

$$i_{21}(t) = 0.037 \cdot \sin(6284t + 132.68^\circ) \text{ А,}$$

$$i_{22}(t) = 0.047 \cdot \sin(6284t + 164.29^\circ) \text{ А,}$$

$$i_{23}(t) = 0.025 \cdot \sin(6284t + 36.37^\circ) \text{ А.}$$

Баланс мощностей

$$\tilde{S}_{\text{учм}2} = \frac{\dot{E}_{m2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\bar{I}_{m21}}{\sqrt{2}} = \frac{25.465 \cdot e^{j180^\circ} \cdot 0.037 \cdot e^{-j132.68^\circ}}{2} = 0.319 + j0.346 \text{ ВА,}$$

$$P_{номр2} = R_1 \cdot \left( \frac{|i_{m21}|}{\sqrt{2}} \right)^2 + R_2 \cdot \left( \frac{|i_{m22}|}{\sqrt{2}} \right)^2 + R_3 \cdot \left( \frac{|i_{m23}|}{\sqrt{2}} \right)^2 = 180 \cdot \frac{0.037^2}{2} +$$

$$+ 170 \cdot \frac{0.047^2}{2} + 40 \cdot \frac{0.025^2}{2} = 0.319 \text{ Вт},$$

$$Q_{номр2} = X_1 \cdot \left( \frac{|i_{m21}|}{\sqrt{2}} \right)^2 - X_2 \cdot \left( \frac{|i_{m22}|}{\sqrt{2}} \right)^2 + X_3 \cdot \left( \frac{|i_{m23}|}{\sqrt{2}} \right)^2 = 565.487 \cdot \frac{0.037^2}{2} -$$

$$- 159.155 \cdot \frac{0.047^2}{2} + 439.823 \cdot \frac{0.025^2}{2} = 0.346 \text{ вар.}$$

Векторная диаграмма токов на второй гармонике:

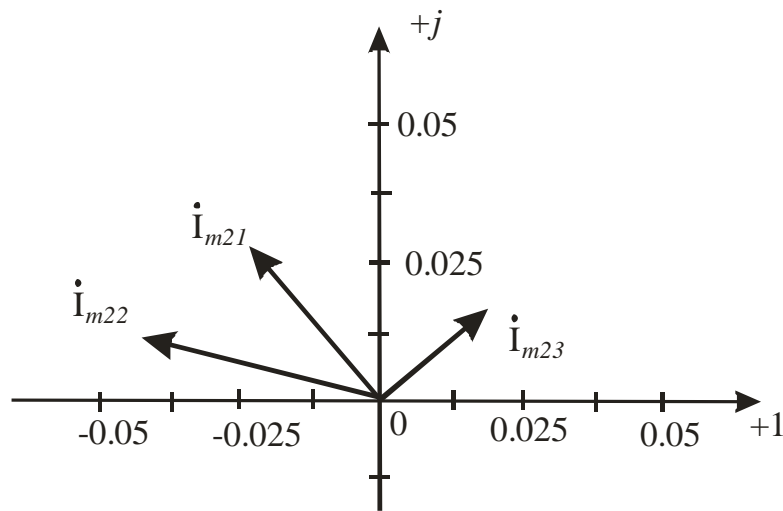


Рисунок 2.27

г) третья гармоническая составляющая:

$$e_3(t) = 16.977 \cdot \sin(3\omega t + \pi), \text{ В},$$

перейдем к комплексному амплитудному значению ЭДС:

$$\dot{E}_{m3} = 16.977 \cdot e^{j\pi}, \text{ В.}$$

Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j3\omega \cdot L_1 = 180 + j848.23 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_2 = R_2 - j \cdot \frac{1}{3\omega \cdot C_2} = 170 - j106.103 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j3\omega \cdot L_3 = 40 + j659.734 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 216.398 - j56.638 \text{ Ом.}$$

Комплексные амплитуды токов ветвей на третьей гармонике:

$$i_{m31} = \frac{\dot{E}_{m3}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23}} = \frac{16.977 \cdot e^{j\pi}}{180 + j848.23 + 216.398 - j56.638} = -0.0085 + j0.017 = 0.019 \cdot e^{j116.6^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{12m} = \underline{Z}_{23} \cdot \dot{I}_{m31} = -0.887 + j4.197 \text{ В},$$

$$\dot{I}_{m32} = \frac{\dot{U}_{12m}}{\underline{Z}_2} = \frac{-0.887 + j4.197}{170 - j106.103} = -0.015 + j0.015 = 0.021 \cdot e^{j133.9^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{m33} = \frac{\dot{U}_{12m}}{\underline{Z}_3} = \frac{-0.887 + j4.197}{40 + j659.734} = 0.0062 + j0.0017 = 0.0064 \cdot e^{j15.4^\circ} \text{ А}.$$

Мгновенные значения токов в ветвях на третьей гармонике:

$$i_{31}(t) = 0.019 \cdot \sin(9426t + 116.6^\circ) \text{ А}, \quad i_{32}(t) = 0.021 \cdot \sin(9426t + 133.9^\circ) \text{ А},$$

$$i_{33}(t) = 0.0064 \cdot \sin(9426t + 15.4^\circ) \text{ А}.$$

Баланс мощностей

$$\tilde{S}_{\text{исп}3} = \frac{\dot{E}_{m3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\bar{I}_{m31}}{\sqrt{2}} = \frac{16.93 \cdot e^{j180^\circ} \cdot 0.019 \cdot e^{-j116.6^\circ}}{2} = 0.073 + j0.146 \text{ ВА},$$

$$P_{\text{ном}3} = R_1 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m31}|}{\sqrt{2}} \right)^2 + R_2 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m32}|}{\sqrt{2}} \right)^2 + R_3 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m33}|}{\sqrt{2}} \right)^2 = 180 \cdot \frac{0.019^2}{2} +$$

$$+ 170 \cdot \frac{0.021^2}{2} + 40 \cdot \frac{0.0064^2}{2} = 0.073 \text{ Вт},$$

$$Q_{\text{ном}3} = X_1 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m31}|}{\sqrt{2}} \right)^2 - X_2 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m32}|}{\sqrt{2}} \right)^2 + X_3 \cdot \left( \frac{|\dot{I}_{m33}|}{\sqrt{2}} \right)^2 = 848.23 \cdot \frac{0.019^2}{2} -$$

$$- 106.103 \cdot \frac{0.021^2}{2} + 659.734 \cdot \frac{0.0064^2}{2} = 0.146 \text{ вар}.$$

Векторная диаграмма токов на третьей гармонике:

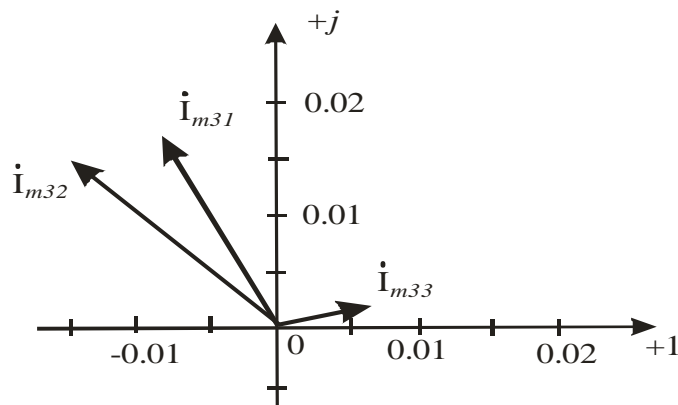


Рисунок 2.28

Используя метод наложения, запишем мгновенные токи ветвей:

$$i_1(t) = I_{10} + i_{11}(t) + i_{12}(t) + i_{13}(t) = 0.273 + 0.075 \sin(3142t + 129.93^0) + 0.037 \sin(6284t + 132.68^0) + 0.019 \sin(9426t + 116.6^0), \text{ A}$$

$$i_2(t) = I_{20} + i_{21}(t) + i_{22}(t) + i_{23}(t) = 0.072 \sin(3142t - 125.28^0) + 0.047 \sin(6284t + 164.29^0) + 0.021 \sin(9426t + 133.9^0), \text{ A}$$

$$i_3(t) = I_{30} + i_{31}(t) + i_{32}(t) + i_{33}(t) = 0.273 + 0.117 \sin(3142t + 93.14^0) + 0.025 \sin(6284t + 36.37^0) + 0.0064 \sin(9426t + 15.4^0), \text{ A}$$

Действующие значения токов ветвей:

$$I_1 \approx \sqrt{I_{10}^2 + \frac{I_{m11}^2 + I_{m12}^2 + I_{m13}^2}{2}} = \sqrt{0.273^2 + \frac{0.075^2 + 0.037^2 + 0.019^2}{2}} = 0.279 \text{ A},$$

$$I_2 \approx \sqrt{I_{20}^2 + \frac{I_{m21}^2 + I_{m22}^2 + I_{m23}^2}{2}} = \sqrt{\frac{0.072^2 + 0.047^2 + 0.021^2}{2}} = 0.063 \text{ A},$$

$$I_3 \approx \sqrt{I_{30}^2 + \frac{I_{m31}^2 + I_{m32}^2 + I_{m33}^2}{2}} = \sqrt{0.273^2 + \frac{0.117^2 + 0.025^2 + 0.0064^2}{2}} = 0.286 \text{ A}.$$

Для определения мощности искажения определим полную мощность, активную и реактивную мощности всей цепи.

Полная мощность

$$S = E \cdot I_1 = 73.248 \cdot 0.279 = 20.466 \text{ ВА};$$

Активная мощность

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 17.984 \text{ Вт};$$

Реактивная мощность

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1.959 \text{ вар};$$

Мощность искажения

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 9.572 \text{ вар};$$

Коэффициент мощности

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{17.984}{20.466} = 0.879$$

### 2.3.8 Разложение функции в ряд Фурье в Mathcad

Для разложения несинусоидальной функции ЭДС в тригонометрический ряд Фурье необходимо [4]:

- описать исходную функцию  $e(\omega t)$ , заданную на графике;
- рассчитать коэффициенты ряда (постоянную составляющую  $A_0$ , квадратурные составляющие  $B_{km}$  и  $C_{km}$ ) по общеизвестным формулам высшей математики (это можно сделать как аналитически, так и в MathCAD).

В среде MathCAD описание любого графика может быть выполнено несколькими способами [3]:

1) с помощью логической функции *if*(логическое условие, *значение*, если истина, *значение*, если ложь). Этот способ целесообразно использовать, если несинусоидальную функцию достаточно просто описать аналитическими выражениями на определенных отрезках, пример приведен на рисунке 2.29.

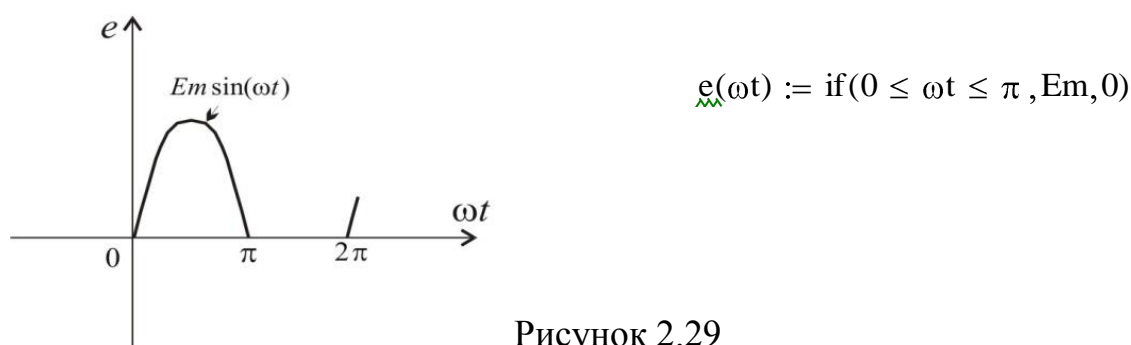


Рисунок 2.29

2) с помощью функции линейной интерполяции *linterp*( $X, Y, x$ ). Этот способ наиболее удобно использовать для формализации графиков, заданных отрезками прямых (рисунок 2.30). Однако необходимо учитывать особенность этой функции – координаты массива  $X$ , который стоит на первом месте в *linterp*, должны монотонно убывать или возрастать. То есть, недопустимы одинаковые координаты, моделирующие вертикальный скачок значения моделируемой функции. При необходимости же моделирования скачка можно изменить значение одной или нескольких координат на такую малую величину, что это не отразится на дальнейших вычислениях. В примере на рисунке 2.30,б это делается за счет уменьшения соответствующих координат на ничтожно малую величину  $dp$ .

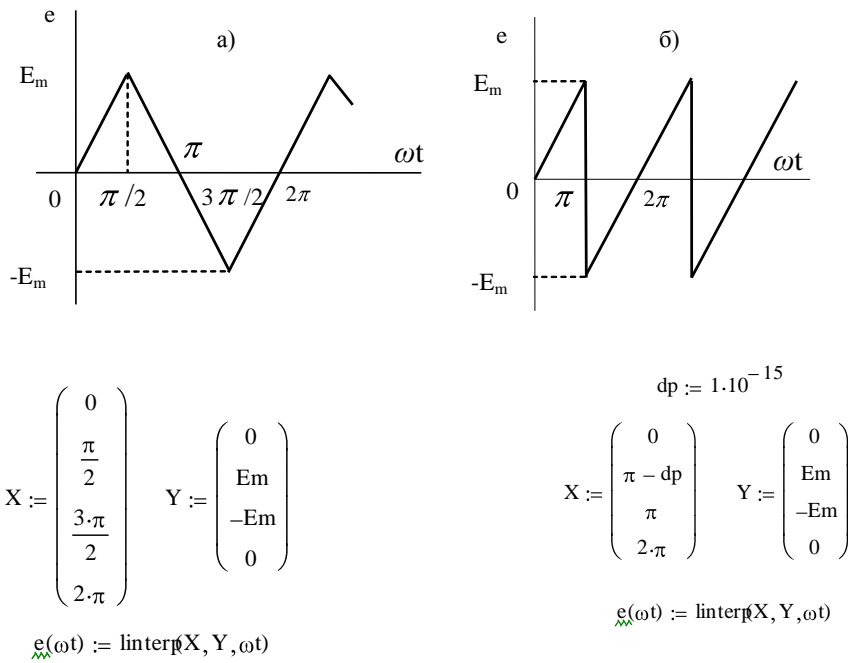


Рисунок 2.30

Пример разложения в MathCAD функции рисунка 2.30, а.

ORIGIN := 1

$E_m := 200 \text{ В}$

$T := 2 \cdot \pi$

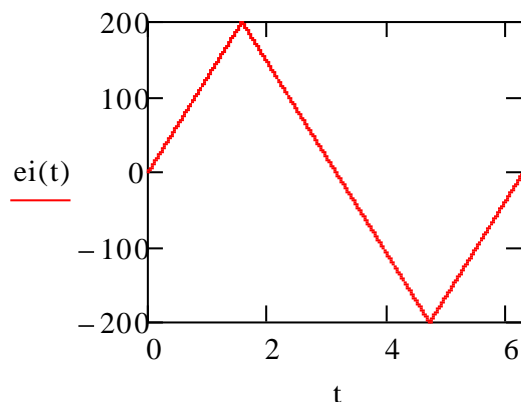
Зададим координаты исходной функции (рисунок 2.30, а)

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T}{4} \\ \frac{T}{2} \\ \frac{3 \cdot T}{4} \\ T \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 0 \\ E_m \\ 0 \\ -E_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

Интерполируем функцию

$ei(t) := \text{linterp}(X, E, t)$

$t := 0, 0.001..T$



Найдем коэффициенты ряда Фурье

Постоянная составляющая

$$A_0 := \left( \frac{1}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} e_i(t) dt \quad A_0 = 0 \quad B$$

Зададим число гармоник

$$k := 1..5$$

Синусные составляющие

$$B_k := \left( \frac{1}{\pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (e_i(t) \cdot \sin(k \cdot t)) dt$$

$B_k =$

162.114
-5.397·10 <sup>-15</sup>
-18.013
-6.949·10 <sup>-15</sup>
6.485

Косинусные составляющие

$$D_k := \left( \frac{1}{\pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (e_i(t) \cdot \cos(k \cdot t)) dt$$

$D_k =$

1.397·10 <sup>-14</sup>
0
-4.643·10 <sup>-14</sup>
-1.456·10 <sup>-14</sup>
3.104·10 <sup>-14</sup>

Приведем ряд к общепринятому в ТОЭ виду

$$A_k := \sqrt{|B_k|^2 + |D_k|^2}$$

$$\psi_k := \text{angle}(B_k, D_k)$$

$A_k =$

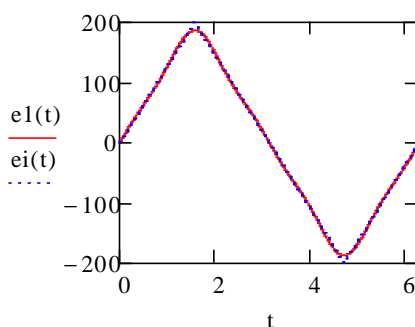
162.114
5.439·10 <sup>-15</sup>
18.013
1.613·10 <sup>-14</sup>
6.485

$\psi_k =$

4.939·10 <sup>-15</sup>	·deg
172.921	
180	
244.484	
2.743·10 <sup>-13</sup>	

$$e_1(t) := A_0 + \sum_k |A_k \cdot \sin(k \cdot t + \psi_k)|$$

Изобразим на одном графике исходную и разложенную функции  $e_i(t)$  и  $e_1(t)$



Запишем разложение функции

$$e_1(t) = 162.114 \sin(t) + 18.013 \sin(3t + 180) + 6.485 \sin(5t)$$

## Пример разложения функции в MathCAD функции рисунка 2.29

Найдем коэффициенты ряда Фурье

Постоянная составляющая

$$A_0 := \left( \frac{1}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} ei(t) dt \quad A_0 = 63.662 \text{ В}$$

Зададим число гармоник

$$k := 1..5$$

Синусные и косинусные составляющие

$$B_k := \left( \frac{1}{\pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (ei(t) \cdot \sin(k \cdot t)) dt \quad D_k := \left( \frac{1}{\pi} \right) \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (ei(t) \cdot \cos(k \cdot t)) dt$$

$B_k =$

100
$6.479 \cdot 10^{-15}$
0
$-9.746 \cdot 10^{-15}$
0

$D_k =$

$5.824 \cdot 10^{-15}$
-42.441
$-2.297 \cdot 10^{-15}$
-8.488
$7.906 \cdot 10^{-15}$

Приведем ряд к общепринятому в ТОЭ виду

$$A_k := \sqrt{|B_k|^2 + |D_k|^2} \quad \psi_k := \text{angle } |B_k, D_k|$$

$A_k =$

100
42.441
$2.463 \cdot 10^{-15}$
8.488
$7.906 \cdot 10^{-15}$

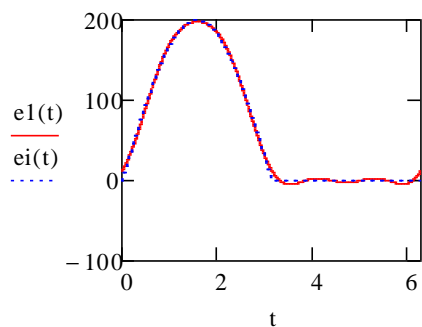
$\psi_k =$

$3.337 \cdot 10^{-15}$ .deg
270
248.862
270
90

$$ei(t) := A_0 + \sum_k |A_k \cdot \sin(k \cdot t + \psi_k)|$$



Изобразим на одном графике функции  $e_i(t)$  и  $e_1(t)$



Запишем разложение функции

$$e_1(t) = 63.662 + 100 \sin(t) + 42.441 \sin(2t + 270) + 8.488 \sin(4t + 270)$$

Действующее значение заданной функции ЭДС

$$E_i := \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} (e_i(t))^2 dt}$$

$$E_i = 100 \text{ В}$$

Действующее значение ЭДС, ограниченной пятью гармониками

$$E_1 := \sqrt{\sum_{k=1}^5 \left( \frac{A_k}{\sqrt{2}} \right)^2 + (A_0)^2}$$

$$E_1 = 99.948 \text{ В}$$

Погрешность

$$\delta := \frac{E_i - E_1}{E_i} \cdot 100 \% \quad \delta = 0.052 \%$$

## 2.4 Переходные процессы

### 2.4.1 Основные определения. Законы коммутации

Переходный процесс - процесс перехода цепи от одного установившегося режима работы к другому, возникающий при включении, отключении, переключении цепи или ее элементов, а также при аварийных изменениях ее параметров. Все указанные изменения называют *коммутацией*.

*Переходные процессы возникают в цепях, содержащих накопители энергии: индуктивные катушки и конденсаторы. Эти элементы обладают способностью накапливать и отдавать энергию соответственно магнитного и электрического полей. Каждому установившемуся режиму соответствует определённый запас магнитной и электрической энергии. При переходе к новому установившемуся режиму энергетическое состояние должно измениться. Так как индуктивные катушки и конденсаторы являются инерционными элементами, изменение энергии электрического или магнитного поля в них не может произойти мгновенно. Поэтому возникает переходной процесс, длительность которого определяется конфигурацией и параметрами электрической цепи (рисунок 2.31).*

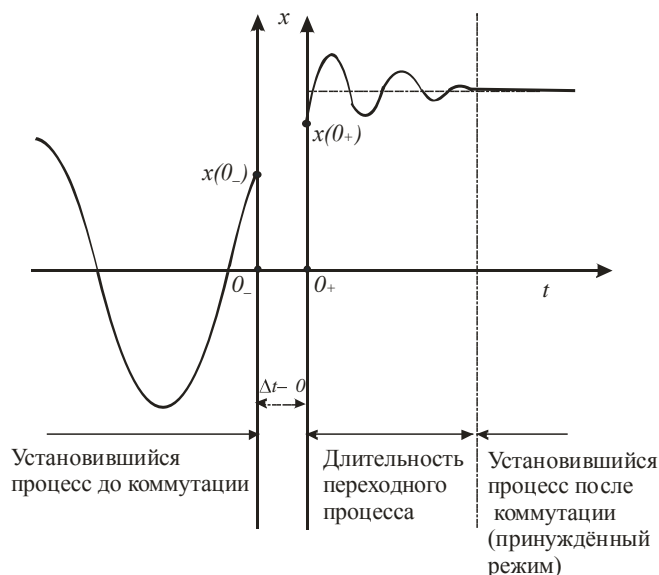


Рисунок 2.31

Момент коммутации определяет начало переходного процесса, при этом различают время непосредственно перед коммутацией  $t(0_-)$  и сразу после коммутации  $t(0_+)$ ,  $\Delta t$  - длительность коммутации. На рисунке 2.31  $\Delta t \neq 0$ , в

действительности  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е коммутация в расчетном отношении считается мгновенной.

В цепях без накопителей энергии переходный процесс отсутствует: после срабатывания коммутатора ( $t = 0_+$ ) в цепи сразу же возникает установившийся (принужденный) режим.

Переходный процесс может возникать и без коммутации, если на цепь воздействуют импульсные сигналы.

Для упрощения записи в формулах момент времени сразу после коммутации будем обозначать просто  $t = 0$ .

Переходные процессы подчиняются **двум законам коммутации**.

**Первый закон коммутации:** ток через индуктивность до коммутации равен току через ту же индуктивность после коммутации

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0). \quad (2.53)$$

**Второй закон коммутации:** напряжение на емкости до коммутации равно напряжению на емкости после коммутации

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0). \quad (2.54)$$

Таким образом, токи в индуктивностях и напряжения на емкостях в начальный момент  $t = 0_+$  после коммутации имеют те же значения, что и непосредственно перед коммутацией при  $t = 0_-$  и затем плавно изменяются. Заметим, что токи и напряжения на резисторах, а также токи через емкости и напряжения на индуктивностях могут изменяться скачкообразно, так как с ними непосредственно не связана запасаемая в цепи энергия.

Для анализа переходных процессов для схемы после коммутации составляются уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений.

Учитывая, что  $u_R = R \cdot i$ ,  $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$ ,  $i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ , эти уравнения

представляют собой линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Решение дифференциальных уравнений, как известно, может осуществляться различными методами. Наиболее распространенными методами являются классический и операторный методы.

## 2.4.2 Классический метод расчета переходных процессов

Название метода «классический» отражает использование в нем методов классической математики для решений дифференциальных уравнений с постоянными параметрами.

Классический метод анализа переходных процессов основан на непосредственном интегрировании системы неоднородных интегро-дифференциальных уравнений, описывающих эту цепь в послекоммутационном режиме. Уравнения составляются для мгновенных значений токов и напряжений на основании законов Кирхгофа, методов контурных токов или узловых потенциалов и разрешаются относительно одной из переменных (тока, напряжения).

Решение полученного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, где  $n$  равно числу необъединяемых накопителей энергии, представляется суммой частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего решения однородного дифференциального уравнения.

Составляющие токов и напряжений, определяемые частным решением, обусловлены принужденным воздействием источников, поэтому их называют **принужденными**  $i_{np}(t)$ ,  $u_{np}(t)$ . Эти составляющие отсутствуют, когда нет внешнего воздействия.

Составляющие токов и напряжений, определяемые общим решением, обусловлены энергией, связанной с накопителями. Эти составляющие называют **свободными**  $i_{св}(t)$ ,  $u_{св}(t)$ .

Таким образом, в классическом методе решение для каждого переходного тока или напряжения определяется суммой принужденных и свободных составляющих:

$$i(t) = i_{np}(t) + i_{св}(t); \quad u(t) = u_{np}(t) + u_{св}(t) \quad . \quad (2.55)$$

Принужденная составляющая находится из расчета установившегося режима цепи после коммутации и повторяет закон изменения источника, действующего в цепи.

Свободная составляющая описывает процесс в цепи без источников и именно поэтому называется свободной. Свободная составляющая обусловлена тем, что энергия в  $L$  и  $C$  в момент коммутации не может измениться скачком, и ее постепенное изменение и вызывает переходной процесс.

В расчете переходных процессов классическим методом можно выделить следующие основные этапы:

- 1) Определение принужденных составляющих для искомым величин.
- 2) Составление характеристического уравнения, нахождение его корней, определение вида свободных составляющих.
- 3) Нахождение начальных условий с целью определения постоянных интегрирования.
- 4) Определение постоянных интегрирования.

Рассмотрим эти этапы подробнее.

#### 2.4.2.1 Определение принужденных составляющих

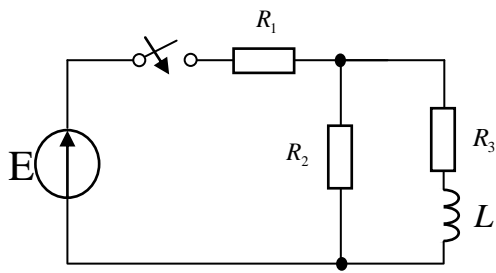
Принужденные составляющие (т.е. токи и напряжения после окончания переходного процесса) определяются видом источника. В случае постоянного источника цепь после окончания переходного процесса (в принужденном режиме) рассчитывается как цепь постоянного тока, при этом учитывается, что при постоянном токе  $x_L = 0$ ,  $x_C = \infty$ .

Если источник синусоидальный то сначала находятся комплексные значения искомым токов и напряжений  $\dot{I}_{np} = I_{np} \cdot e^{j\varphi}$ ,  $\dot{U}_{np} = U_{np} \cdot e^{j\psi}$ , которые потом записывают в мгновенной форме  $i_{np}(t) = \dot{I}_{mnp} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $u_{np}(t) = \dot{U}_{mnp} \cdot \sin(\omega t + \psi)$ .

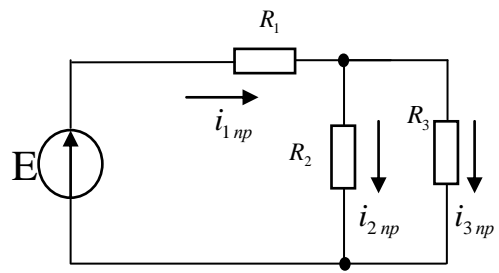
#### Пример 1 (рисунок 2.32).

$E = 180 \text{ В}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$

Найти  $i_{1np}(t)$ ,  $i_{2np}(t)$ ,  $i_{3np}(t)$ ,  $u_{Lnp}(t)$



а) исходная схема



б) схема после окончания переходного процесса (принужденный режим)

Рисунок 2.32

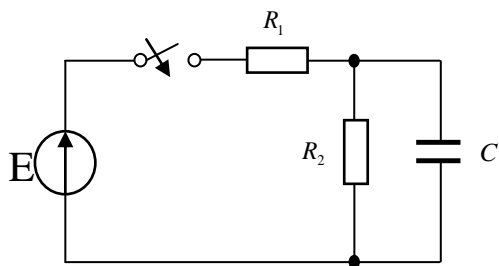
Так как источник ЭДС постоянный, то после окончания переходного процесса цепь рассчитывается как цепь постоянного тока, при этом  $x_L = 0$ . Расчет принужденных токов выполним с помощью эквивалентных преобразований цепи

$$i_{1np}(t) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{180}{18} = 10 \text{ A} ; \quad i_{2np}(t) = i_{1np}(t) \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{80}{40} = 2 \text{ A} ;$$

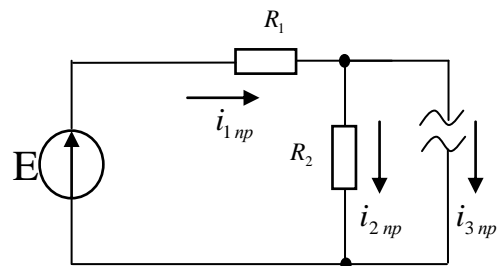
$$i_{3np}(t) = i_{1np}(t) \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{80}{10} = 8 \text{ A} . \quad u_{Lnp}(t) = 0 .$$

**Пример 2** (рисунок 2.33)

$E = 100 \text{ В}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $C = 0,0001 \text{ Ф}$ ; Найти  $i_{1np}(t)$ ,  $i_{2np}(t)$ ,  $i_{3np}(t)$ ,  $u_{Cnp}(t)$



а) исходная схема



б) схема после окончания переходного процесса (принужденный режим)

Рисунок 2.33

Так как источник ЭДС постоянный, то после окончания переходного процесса цепь рассчитывается как цепь постоянного тока, при этом  $x_C = \infty$ , т.е. в третьей ветви ток будет равен нулю.

$$i_{1np}(t) = i_{2np}(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{20} = 5 \text{ A}; \quad i_{3np}(t) = 0; \quad u_{Cnp}(t) = i_{2np}(t) \cdot R_2 = 50 \text{ B}.$$

Как правило, в дальнейших расчетах нужны и значения принужденных составляющих в момент времени  $t = 0$ . В цепях постоянного тока принужденные токи и напряжения от времени не зависят, поэтому  $i_{np}(0) = i_{np}(t)$ ;  $u_{np}(0) = u_{np}(t)$ .

В цепях синусоидального тока  $i_{np}(t) = I_{mnp} \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $i_{np}(0) = I_{mnp} \sin \varphi$ .

### 2.4.2.2 Составление характеристического уравнения

Характеристическое уравнение можно составить различными способами, например, оно может быть получено из системы уравнений, составленной на основании законов Кирхгофа или метода контурных токов /1/.

Но наиболее простым является способ, суть которого состоит в следующем:

- записывают выражение входного сопротивления на переменном токе относительно точек разрыва любой ветви в послекоммутационной схеме  $Z_{\alpha}(j\omega)$  (при этом индуктивное сопротивление учитывают как  $j\omega L$ , а емкостное – как  $\frac{1}{j\omega C}$ );
- заменяют в нём  $j\omega$  на  $p$  и получают  $Z_{\alpha}(p)$ ;
- полученное выражение приравнивают к нулю и определяют корни характеристического уравнения  $p$ .

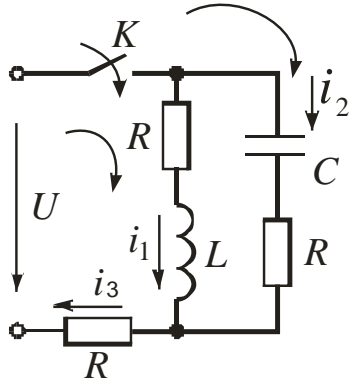


Рисунок 2.34

Например, для схемы на рисунке 2.34

$$\underline{Z}_{\text{ex}}(j\omega) = R + \frac{(R + j\omega L) \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{(R + j\omega L) + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}$$

Заменяем  $j\omega$  на  $p$

$$\begin{aligned} Z_{\text{ex}}(p) &= R + \frac{(R + pL) \cdot \left(R + \frac{1}{pC}\right)}{(R + pL) + \left(R + \frac{1}{pC}\right)} = R + \frac{R^2 + pLR + \frac{R}{pC} + \frac{pL}{pC}}{2R + pL + \frac{1}{pC}} = \\ &= R + \frac{pR^2C + p^2LRC + R + pL}{p2RC + p^2LC + 1} = \frac{(p2R^2C + p^2LRC + R) + pR^2C + p^2LRC + R + pL}{p2RC + p^2LC + 1} = \\ &= \frac{p \cdot 3R^2C + p^2 2LRC + 2R + pL}{p2RC + p^2LC + 1} = 0 \end{aligned}$$

Отсюда характеристическое уравнение:

$$p^2 2LRC + p(3R^2C + L) + 2R = 0.$$

Для ускорения записи характеристического уравнения обычно сразу в послекоммутационной схеме заменяют  $L$  на  $Lp$ ,  $C$  на  $\frac{1}{Cp}$  и записывают  $Z_{\text{ex}}(p)$  как для резистивной цепи.

### 2.4.2.3 Характер свободного процесса

Характер свободной составляющей переходного тока или напряжения определяется количества и вида корней характеристического уравнения. Запись выражений свободных составляющих в зависимости от вида корней



характеристического уравнения представлена в таблице 2.5, в этих выражениях  $A_1, A_2, A, \gamma$  - неизвестные постоянные интегрирования.

Таблица 2.5 – Характер свободной составляющей

Количество и вид корней характеристического уравнения	Выражения для свободных составляющих	Характер переходного процесса
один действительный корень $p < 0$	$x_{св}(t) = A \cdot e^{p \cdot t}$	апериодический
два разных действительных корня $p_1 < 0; p_2 < 0$	$x_{св}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$	апериодический
два равных действительных корня $p_1 = p_2 = p; p < 0$	$x_{св}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{p t}$	предельный апериодический (критический)
$n$ разных действительных корней	$x_{св}(t) = \sum_{i=1}^n A \cdot e^{p_i \cdot t}$	апериодический
два комплексно-сопряженных корня $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$	$x_{св}(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \gamma)$	затухающий колебательный

#### 2.4.2.4 Определение постоянных интегрирования

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для свободных составляющих, вычисляются, подставляя известные начальные условия в выражения для искомой функции и ее  $(n - 1)$  производных для момента времени  $t = 0_+$  ( $n$  – количество корней характеристического уравнения).

В самом общем случае, когда характеристическое уравнение имеет  $n$  корней и решение для переходного тока или напряжения записывается в виде

$$x(t) = x_{пр}(t) + x_{св}(t) = x_{пр}(t) + \sum_{i=1}^n A \cdot e^{p_i \cdot t}, \quad \text{для нахождения постоянных}$$

интегрирования  $A_1, A_2, \dots, A_n$  нужно составить систему  $n$  уравнений следующего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 = x(0) - x_{\text{пр}}(0) \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{dx_{\text{пр}}(t)}{dt} \right|_{t=0} \\ \dots\dots\dots \\ A_1 p^{n-1}_1 + A_2 p^{n-1}_2 = \left. \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0} - \left. \frac{d^{n-1}x_{\text{пр}}(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0} \end{array} \right. \quad (2.56)$$

В этих уравнениях  $x_{\text{пр}}(0)$  - значения принужденных составляющих для

$t = 0_+$ ,  $\left. \frac{dx_{\text{пр}}(t)}{dt} \right|_{t=0}$ ,  $\dots\dots$ ,  $\left. \frac{d^{n-1}x_{\text{пр}}(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0}$  - значения производных принужденных составляющих для момента времени  $t = 0_+$ . Они легко определяются по полученным выражениям для принужденных составляющих.

Если в задаче рассматривается переходной процесс в цепи постоянного

тока, то  $x_{\text{пр}}(0) = x_{\text{пр}}(t)$ , а все производные равны нулю:  $\left. \frac{dx_{\text{пр}}(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$ ;  $\dots$   
 $\left. \frac{d^{n-1}x_{\text{пр}}(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0} = 0$ .

В цепи синусоидального тока принужденные составляющие изменяются

тоже по синусоидальному закону  $x_{\text{пр}}(t) = X_{\text{пр}} \sin(\omega t + \varphi)$ , первая производная для них определяется выражением  $\frac{dx_{\text{пр}}(t)}{dt} = \omega X_{\text{пр}} \cos(\omega t + \varphi)$ .

Для момента времени  $t = 0$   $x_{\text{пр}}(0) = X_{\text{пр}} \sin \varphi$ ,  $\left. \frac{dx_{\text{пр}}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \omega X_{\text{пр}} \cos \varphi$ .

В таблице 2.6 приведены выражения для переходных токов или напряжений и их первых производных для случая переходного процесса в цепи постоянного тока.

Уравнения для расчета постоянных интегрирования приведены в последнем столбце таблицы, они получаются, если в выражения переходной величины и первой производной подставить  $t = 0$ .

Таблица 2.6 - Уравнения для расчета постоянных интегрирования

Выражения для переходных токов и напряжений	Необходимые начальные условия	Выражения первых производных для переходных токов и напряжений, используемые для расчета постоянных интегрирования	Уравнения для расчета постоянных интегрирования (при переходном процессе в цепи постоянного тока)
$x(t) = x_{\text{ип}}(t) + x_{\text{св}}(t) =$ $= x_{\text{ип}}(t) + A \cdot e^{p \cdot t}$	$x(0)$	-	$A = x(0) - x_{\text{ип}}(0)$
$x(t) = x_{\text{ип}}(t) + x_{\text{св}}(t) =$ $= x_{\text{ип}}(t) + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$	$x(0);$ $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0}$	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_{\text{ип}}(t)}{dt} + p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$	$\begin{cases} A_1 + A_2 = x(0) - x_{\text{ип}}(0) \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0} \end{cases}$
$x(t) = x_{\text{ип}}(t) + x_{\text{св}}(t) =$ $= x_{\text{ип}}(t) + (A_1 + A_2 t) e^{p t}$	$x(0);$ $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0}$	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_{\text{ип}}(t)}{dt} + A_2 e^{p t} + (A_1 + A_2 t) p e^{p t}$	$\begin{cases} A_1 = x(0) - x_{\text{ип}}(0) \\ A_2 + A_1 p = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0} \end{cases}$
$x(t) = x_{\text{ип}}(t) + x_{\text{св}}(t) =$ $= x_{\text{ип}}(t) + A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \gamma)$	$x(0);$ $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0}$	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_{\text{ип}}(t)}{dt} + A e^{-\delta t} [\omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma) - \delta \sin(\omega_0 t + \gamma)]$	$\begin{cases} A \sin \gamma = x(0) - x_{\text{ип}}(0) \\ A \omega_0 \cos \gamma - \delta A \sin \gamma = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right _{t=0} \end{cases}$

### 2.4.2.5 Начальные условия

Для определения постоянных интегрирования по формулам таблицы 2.6 необходимо предварительно рассчитать начальные условия.

**Начальными условиями** называются значения токов, напряжений и их производных в начальный момент переходного процесса, при  $t = 0_+$ .

Начальные условия делятся на независимые и зависимые.

**Независимые начальные условия** – это значения токов индуктивных элементов  $i_L(0)$  и напряжений емкостных элементов  $u_C(0)$  для времени  $t = 0_+$

Независимые начальные условия определяются из законов коммутации.

$$i_L(0) = i_L(0_-); \quad u_C(0) = u_C(0_-).$$

Они могут быть нулевыми и ненулевыми.

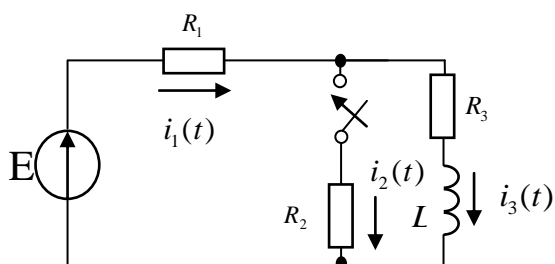
**Зависимые начальные условия** – это значения всех остальных токов, напряжений и производных по времени токов и напряжений для времени  $t = 0_+$ .

Зависимые начальные условия определяются:

- после того, как рассчитаны независимые начальные условия;
- из уравнений по законам Кирхгофа для послекоммутационной схемы, записанных для времени  $t = 0_+$ .

Количество начальных условий, которые нужно рассчитать равно количеству постоянных интегрирования в выражении переходной величины. Как следует из таблицы 2.6, если характеристическое уравнение имеет один корень и в выражение свободного тока или напряжения входит одна неизвестная постоянная интегрирования, для ее определения необходимо предварительно рассчитать только одно начальное условие: значение самой функции  $x(0)$ . Если неизвестных постоянных интегрирования – две, то для их определения предварительно рассчитывают два начальных условия: значение самой функции  $x(0)$  и ее первой производной  $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0}$  для момента времени  $t = 0_+$ . Примеры расчета начальных условий приведены ниже.

**Пример 1** (рисунок 2.35).



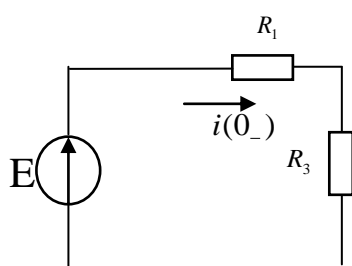
$$E = 100 \text{ В}, R_1 = 10 \text{ Ом}, R_2 = 10 \text{ Ом}, \\ R_3 = 10 \text{ Ом}, L = 0,1 \text{ Гн}$$

Найти  $i_1(0), i_2(0), i_3(0), u_L(0)$

Рисунок 2.35

Сначала найдем *независимое начальное условие*: для данной схемы – это ток  $i_3(0)$ , так как это ток через индуктивность. По первому закону коммутации он будет равен току через эту же индуктивность в последний момент перед коммутацией.

До коммутации в цепи (рисунок 2.36) протекал один постоянный ток



$$i(t) = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{100}{20} = 5 \text{ А}$$

Этот ток постоянный и от времени не зависит, поэтому для времени  $t = 0_-$

$$i(0) = i(t) = 5 \text{ А}$$

Рисунок 2.36

По первому закону коммутации  $i_3(0) = i(0_-) = 5 \text{ А}$

Остальные искомые начальные значения токов токи и напряжения на индуктивности являются зависимыми начальными условиями.

Для их определения систему уравнений по законам Кирхгофа для схемы после коммутации запишем для момента времени  $t = 0_+$ .

$$i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0$$

$$R_1 i_1(0) + R_2 i_2(0) = E$$

$$-R_2 i_2(0) + R_3 i_3(0) + u_L(0) = 0$$

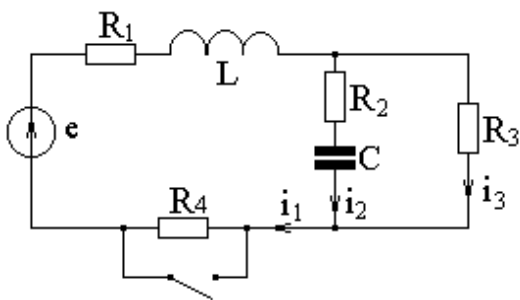
Неизвестными в этих уравнениях являются  $i_1(0), i_2(0), u_L(0)$ . Их можно найти, решив составленную систему уравнений любым методом в Mathcad или вручную, например, с помощью подстановки.

Из первого уравнения выразим  $i_1(0) = i_2(0) + i_3(0)$  и подставим его во второе уравнение, получим  $R_1 i_2(0) + R_1 i_3(0) + R_2 i_2(0) = E$ .

$$\text{Отсюда } i_2(0) = \frac{E - R_1 i_3(0)}{R_1 + R_2} = \frac{100 - 50}{20} = 2,5 \text{ A};$$

$$\text{С учетом этого } i_1(0) = 2,5 + 5 = 7,5 \text{ A}; \quad u_L(0) = R_2 i_2(0) - R_3 i_3(0) = -25 \text{ В}$$

### Пример 2 (рисунок 2.37)



$$E = 100 \text{ В}; \quad R_1 = R_4 = 10 \text{ Ом}; \\ R_2 = R_3 = 20 \text{ Ом}; \quad L = 0,05 \text{ Гн}; \quad C = 250 \text{ мкФ}.$$

Найти  $i_1(0), i_2(0), i_3(0), u_L(0), u_C(0)$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_0, \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_0$$

Рисунок 2.37

Из схемы до коммутации найдем независимые начальные условия (ток индуктивного и напряжение емкостного элементов для момента времени  $t = 0_-$ ). Поскольку в ветви с емкостным элементом при  $E = \text{const}$  ток отсутствует, то:  $i_1(0) = i_3(0_-) = E/(R_1 + R_3 + R_4)$  или  $i_1(0) = 100/(10 + 10 + 20) = 2,5 \text{ А}$ ,

$$u_C(0) = i_3(0_-) \cdot R_3 = 2,5 \cdot 20 = 50 \text{ В}.$$

Для определения зависимых начальных условий записываем уравнения по законам Кирхгофа для схемы после коммутации для момента времени  $t = 0_+$ :

$$i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0$$

$$i_1(0)R_1 + u_L(0) + i_3(0)R_3 = E$$

$$i_2(0)R_2 + u_C(0) - i_3(0)R_3 = 0.$$

Подставляя в эти уравнения найденные выше независимые начальные условия  $i_1(0)$  и  $u_C(0)$ , находим:  $i_2(0) = 0 \text{ А}$ ;  $i_3(0) = 2,5 \text{ А}$ ;  $u_L(0) = 25 \text{ В}$ .

Производная тока через индуктивность находится из формулы

$$u_L(0) = L \left. \frac{di_1}{dt} \right|_0, \quad \text{производная напряжения на емкости - из формулы } i_C(0) = C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_0.$$

### 2.4.2.6 Алгоритм расчета переходного процесса классическим методом

С учетом рассмотренных выше рекомендаций расчет переходного процесса рекомендуется проводить в следующей последовательности.

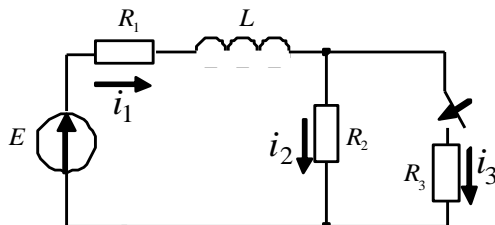
- 1) Составить для цепи после коммутации систему уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений.
- 2) Найти принужденную составляющую искомой величины\* путем расчета установившегося режима в послекоммутационной схеме.
- 3) Для нахождения свободной составляющей искомой величины:
  - а) составить характеристическое уравнение;
  - б) найти его корни;
  - в) записать выражение для свободной составляющей (таблица 2.5).
- 4) Записать полное решение для искомой величины как сумму принужденной и свободной составляющей.
- 5) Определить постоянные интегрирования. Для этого:
  - а) из схемы до коммутации найти **независимые начальные условия**;
  - б) из уравнений по законам Кирхгофа (пункт 1), записанных для времени  $t = 0$  найти зависимые начальные условия;
  - в) рассчитать постоянные интегрирования, подставив найденные начальные условия в выражения для искомой величины и ее  $(n-1)$  производной (где  $n$  – порядок характеристического уравнения) при  $t = 0$  (таблица 2.6).
- б) Суммируя рассчитанные принужденную и свободную составляющую записать решение для искомой величины.

*\*С целью упрощения расчетов наиболее целесообразно в качестве первой искомой величины выбирать ток через индуктивность или напряжение на емкости. Все остальные неизвестные переходные токи и напряжения достаточно легко определяются потом из уравнений Кирхгофа и уравнений связи между напряжениями и токами.*

## 2.4.2.7 Примеры расчета переходного процесса классическим методом в Mathcad

### Пример 1

ORIGIN := 1



Классическим методом рассчитать переходные токи в ветвях и напряжение на индуктивности, если известны постоянная ЭДС источника и параметры цепи. Построить графики тока  $i_1$  и напряжения  $u_L$ .

$E := 120 \text{ В}$   $R_1 := 10 \text{ Ом}$   $R_2 := 30 \text{ Ом}$   $R_3 := 60 \text{ Ом}$   $L := 0.3 \text{ Гн}$

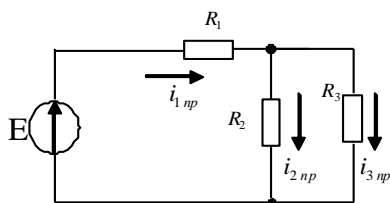
#### Решение

**1 Составим систему уравнений по законам Кирхгофа**  
для цепи после коммутации

$$\begin{aligned} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) &= 0 & (1) \\ R_1 \cdot i_1(t) + u_L(t) + R_2 \cdot i_2(t) &= E & (2) \\ R_2 \cdot i_2(t) - R_3 \cdot i_3(t) &= 0 & (3) \end{aligned}$$

В качестве первой искомой величины выберем ток через индуктивность  $i_1(t)$ . Будем искать его как сумму принужденной и свободной составляющей  $i_1(t) = i_{1pr} + i_{1sv}$ .

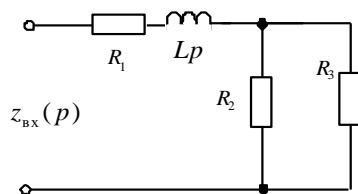
**2 Принужденную составляющую** тока  $i_{1pr}$  найдем из расчета установившегося режима после коммутации с помощью эквивалентных преобразований.



$$i_{1pr} := \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = 4 \text{ А}$$

**3 Для расчета свободной составляющей  $i_{1sv}$ :**

а) составим характеристическое уравнение, записав входное сопротивление относительно ветви с источником



$$z(p) := R_1 + L \cdot p + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \quad \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 0.3 \cdot p + 30.0$$

б) любым методом найдем корень характеристического уравнения, т.е решим уравнение  $z(p)=0$

$$p := z(p) \text{ solve}, p \rightarrow -100.0$$



в) запишем в общем виде решение для свободной составляющей.  
 Так как уравнение имеет один действительный корень

$$i_{1sv}(t) := A \cdot e^{p \cdot t}$$

**4** Запишем полное решение для искомого тока  $i_1(t)$  как сумму принужденной и свободной составляющей

$$i_1(t) = i_{1pr} + i_{1sv}(t) \rightarrow i_1(t) = A \cdot e^{-100.0 \cdot t} + 4$$

для времени  $t=0$  выражение запишется в следующем виде

$$i_1(0) = i_{1pr} + i_{1sv}(0) \rightarrow i_1(0) = A + 4 \quad (5)$$

**5** Для расчета постоянной интегрирования  $A$  из уравнения (5) нужно найти значение  $i_1(0)$ , которое является независимым начальным условием.

Из схемы до коммутации рассчитаем ток через индуктивность

$$i_0 := \frac{E}{R_1 + R_2} = 3 \text{ A}$$

Е

По первому закону коммутации ток после коммутации  $i_1(0)$  будет равен току через эту же индуктивность докоммутации

$$i_1(0) = i_0$$

С учетом этого из уравнения (5) найдем постоянную интегрирования  $A$

$$A := i_0 - i_{1pr} = -1$$

Подставим  $A$  в выражение для свободной составляющей тока

$$i_{1sv}(t) := A \cdot e^{p \cdot t} \rightarrow -e^{t \cdot -100.0}$$

**6** Запишем полное решение для переходного тока  $i_1(t)$

$$i_1(t) := i_{1pr} + i_{1sv}(t) \rightarrow 4 - e^{t \cdot -100.0}$$

**7** Найдем переходные токи  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  и переходное напряжение на индуктивности  $u_L(t)$

Переходное напряжение на индуктивности

$$u_L(t) := L \cdot \left( \frac{d}{dt} i_1(t) \right) \rightarrow 30.0 \cdot e^{-100.0 \cdot t} \text{ В}$$

Токи  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  найдем из уравнений по законам Кирхгофа из п.1

Ток  $i_2(t)$  найдем из уравнения (2)

$$(R_1 \cdot i_1(t) + u_L(t) + R_2 \cdot i_2(t)) = E \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } i_2(t) \\ \text{float, 4} \end{array} \right. \rightarrow -0.6667 \cdot e^{-100.0 \cdot t} + 2.667 \text{ A}$$

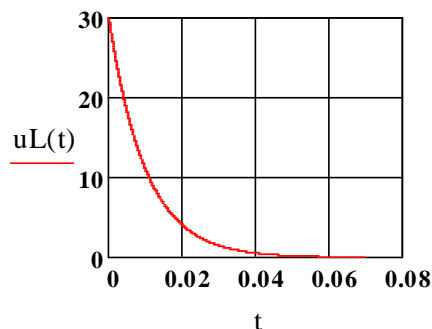
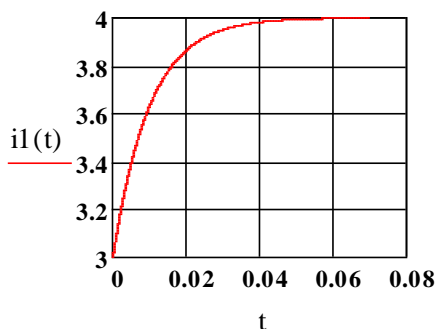
$$i_2(t) := -0.6667 \cdot e^{-100.0 \cdot t} + 2.667$$

Ток  $i_3(t)$  найдем из уравнения (1)

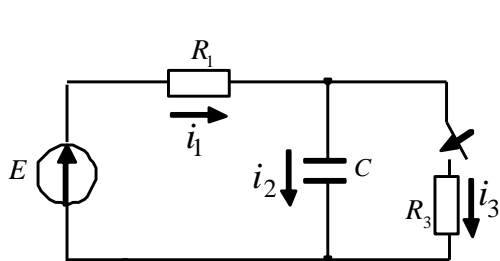
$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \quad \text{solve, } i_3(t) \rightarrow 1.333 - 0.3333 \cdot e^{-100.0 \cdot t} \text{ A}$$

### 8 Построим графики тока $i_1(t)$ и напряжения на индуктивности $u_L(t)$

Постоянная времени  $\tau := \frac{1}{p} = 0.01 \text{ с}$   $t := 0, 0.00001 .. 7 \cdot \tau$



### Пример 2



ORIGIN := 1

Классическим методом рассчитать переходные токи в ветвях и напряжение на конденсаторе, если известны постоянная ЭДС источника и параметры цепи. Построить графики тока  $i_2$  и напряжения  $u_C$ .

$E := 120 \text{ В}$   $R_1 := 10 \text{ Ом}$   $R_2 := 30 \text{ Ом}$   $R_3 := 50 \text{ Ом}$   $C := 0.00001 \text{ Ф}$

Решение

#### 1 Составим систему уравнений по законам Кирхгофа

для цепи после коммутации

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \quad (1)$$

$$R_1 \cdot i_1(t) + u_C(t) = E \quad (2)$$

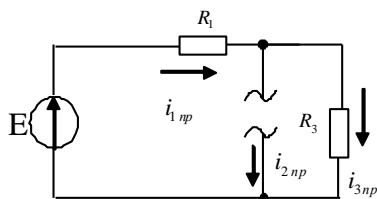
$$u_C(t) - R_3 \cdot i_3(t) = 0 \quad (3)$$

Уравнение связи

$$i_2(t) = C \cdot \left( \frac{d}{dt} u_C(t) \right) \quad (4)$$

В качестве первой искомой величины выберем напряжение на емкости  $u_C(t)$ . Будем искать его как сумму принужденной и свободной составляющей  $u_C(t) = u_{Cpr} + u_{Csv}$ .

2 Принужденную составляющую напряжения  $u_{Cpr}$  найдем из расчета установившегося режима после коммутации



Принужденные составляющие токов

$$i_{pr1} := \frac{E}{R_1 + R_3} = 2 \text{ А}$$

$$i_{pr2} := 0$$

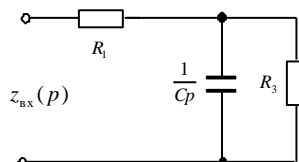
$$i_{pr3} := i_{pr1} = 2 \text{ А}$$

Принужденное напряжение на конденсаторе

$$u_{Cpr} := i_{pr3} \cdot R_3 = 100 \text{ В}$$

### 3 Для расчета свободной составляющей $u_{Csv}(t)$ :

а) составим характеристическое уравнение, записав входное сопротивление относительно ветви с источником



$$z(p) := R_1 + \frac{\frac{1}{C \cdot p} \cdot R_3}{\frac{1}{C \cdot p} + R_3} \left| \begin{array}{l} \text{collect} \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \rightarrow \frac{10.0 \cdot p + 120000.0}{p + 2000.0}$$

б) любым методом найдем корни характеристического уравнения, т.е. решим уравнение  $z(p)=0$

$$p := z(p) \text{ solve } p \rightarrow -12000.0$$

в) запишем в общем виде решение для свободной составляющей. Так как уравнение имеет один действительный корень

$$u_{Csv}(t) := A \cdot e^{P \cdot t}$$

### 4 Запишем полное решение для искомого напряжения как сумму принужденной и свободной составляющей

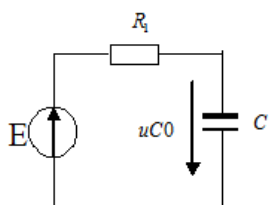
$$u_C(t) = u_{Cpr} + u_{Csv}(t) \rightarrow u_C(t) = A \cdot e^{-12000.0 \cdot t} + 100$$

для времени  $t=0$  выражение запишется в следующем виде

$$u_C(0) = u_{Cpr} + u_{Csv}(0) \rightarrow u_C(0) = A + 100 \quad (5)$$

### 5 Для расчета постоянной интегрирования $A$ из уравнения (5) нужно найти значение $u_C(0)$ , которое является независимым начальным условием.

Из схемы до коммутации рассчитаем напряжение на конденсаторе. До коммутации тока в цепи не было, так как постоянный ток через конденсатор не проходит, но конденсатор был заряжен до напряжения источника



$$u_{C0} := E = 120 \text{ В}$$

По второму закону коммутации напряжение после коммутации  $u_C(0)$  будет равно напряжению до коммутации

$$u_C(0) = u_{C0} \text{ В}$$

С учетом этого из уравнения (5) найдем постоянную интегрирования  $A$

$$A := u_{C0} - u_{Cpr} = 20$$

Подставим  $A$  в выражение для свободной составляющей напряжения

$$u_{Csv}(t) := A \cdot e^{p \cdot t} \rightarrow 20 \cdot e^{-12000.0 \cdot t}$$

### 6 Запишем полное решение для переходного напряжения на конденсаторе

$$u_C(t) := u_{Cpr} + A \cdot e^{p \cdot t} \rightarrow 20 \cdot e^{-12000.0 \cdot t} + 100 \quad \text{В}$$

### 7 Остальные искомые величины найдем по уравнениям (1) - (4).

По уравнению (4) рассчитаем ток через конденсатор

$$i_2(t) := C \cdot \left( \frac{d}{dt} u_C(t) \right) \rightarrow -2.4 \cdot e^{-12000.0 \cdot t} \quad \text{А}$$

Найдем остальные токи из уравнений по законам Кирхгофа из п.1

Ток  $i_3(t)$  найдем из уравнения (3)

$$u_C(t) - R_3 \cdot i_3(t) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } i_3(t) \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow 0.4 \cdot e^{-12000.0 \cdot t} + 2.0$$

$$i_3(t) := 0.4 \cdot e^{-12000.0 \cdot t} + 2.0$$

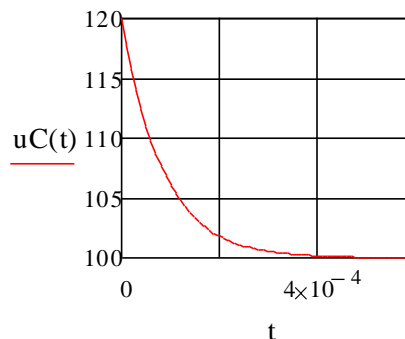
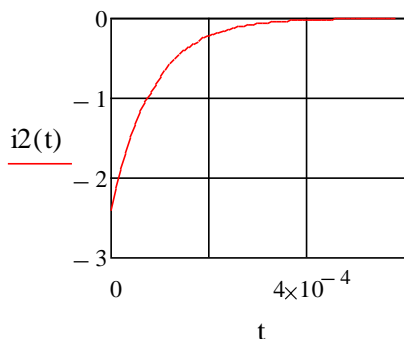
Ток  $i_1(t)$  найдем из уравнения (1)

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \quad \text{solve, } i_1(t) \rightarrow 2.0 - 2.0 \cdot e^{-12000.0 \cdot t} \quad \text{А}$$

$$i_1(t) := 2.0 - 2.0 \cdot e^{-12000.0 \cdot t}$$

### 8 Построим графики тока $i_2(t)$ и напряжения на конденсаторе $u_C(t)$

Постоянная времени  $\tau := \frac{1}{p} = 0.00008 \quad \text{с} \quad t := 0, 0.00001 \dots 7 \cdot \tau$



## 2.4.3 Операторный метод расчета переходных процессов

### 2.4.3.1 Математические основы метода. Алгоритм расчета переходного процесса операторным методом

Сущность операторного метода анализа переходных процессов заключается в том, что при расчётах действительные функции времени  $f(t)$ , описывающие процессы в электрических цепях и называемые оригиналами, заменяют их операторными изображениями  $F(p)$  с помощью преобразования (интеграла) Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} \cdot dt, \quad (2.57)$$

где  $p = \delta + j\omega$  - комплексное число.

Взаимное соответствие между оригиналом и операторным изображением сокращенно записывается с помощью знака  $\overset{\circ}{\rightleftharpoons}$ . То есть выражение  $f(t) \overset{\circ}{\rightleftharpoons} F(p)$  означает, что оригиналу  $f(t)$  соответствует операторное изображение  $F(p)$ .

Для тока напряжения и ЭДС будем иметь:

- оригиналу  $u(t)$  соответствует изображение  $U(p)$ ;
- оригиналу  $i(t)$  соответствует изображение  $I(p)$ .
- оригиналу  $e(t)$  соответствует изображение  $E(p)$ .

Использование преобразования Лапласа приводит к замене операций дифференцирования и интегрирования оригиналов в дифференциальных уравнениях на алгебраические операции умножения и деления изображений. В результате такой замены дифференциальные уравнения, составленные для электрической схемы по любому известному методу, превращаются в алгебраические. Это сильно упрощает расчет, так как вместо дифференциальных уравнений для временных функций, решаются алгебраические уравнения для изображений.

Найденные из решения алгебраических уравнений изображения искомых величин затем любым способом преобразуются в оригиналы (функции времени). Переход от изображений к оригиналам можно осуществить по формуле обратного преобразования Лапласа, по справочным таблицам, по теореме разложения, а также, используя функции обратного преобразования в различных математических пакетах, например, в Mathcad.

Алгоритм расчета переходного процесса операторным методом следующий:

1) Из расчета установившегося режима цепи до коммутации определяют независимые начальные условия  $i_L(0), u_C(0)$ .

2) Составляют операторную схему замещения цепи, учитывая найденные в п. 1 начальные условия.

3) Из расчета операторной схемы любым методом находят изображения искомых токов и напряжений  $I(p), U(p)$ .

4) Любым способом переходят от изображений искомых токов и напряжений к их оригиналам  $i(t), u(t)$ .

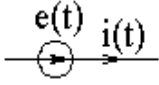
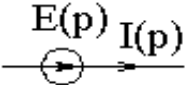
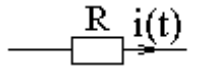
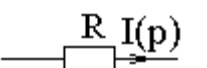
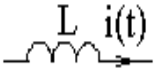
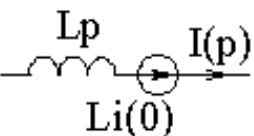
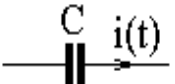
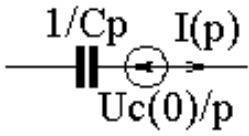
Рассмотрим отдельные пункты алгоритма подробнее.

### **2.4.3.2 Операторная схема замещения**

Операторная схема замещения строится для цепи после коммутации, все токи, напряжения и ЭДС в ней заменяются их операторными изображениями, она учитывает независимые начальные условия – токи через катушки индуктивности и напряжения на емкостях в момент коммутации.

При составлении операторной схемы замещения следует руководствоваться следующими соответствиями между оригиналами и изображениями (таблица 2.7).

Таблица 2.7 – Операторные схемы замещения элементов цепи

Элемент	Операторное изображение элемента
	
Источник постоянного напряжения $E$	$\frac{E}{p}$
Источник постоянного тока $J$	$\frac{J}{p}$
Источник синусоидального напряжения $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$	$E(p) = E_m \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
 $u_R(t) = R \cdot i(t)$	 $U_R(p) = R \cdot I(p)$
 $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$	 $L \cdot i(0)$ - дополнительная ЭДС $i(0)$ - ток через индуктивность до коммутации $U_L(p) = Lp \cdot I(p) - L \cdot i(0)$
 $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + u_C(0)$	 $\frac{u_C(0)}{p}$ - дополнительная ЭДС $u_C(0)$ - напряжение на емкости до коммутации $U_C(p) = I(p) \frac{1}{C \cdot p} + \frac{u_C(0)}{p}$

Пример: составить операторную схему замещения участка цепи (рисунок 2.38). Записать операторное сопротивление и напряжение на участке цепи в операторной форме записи

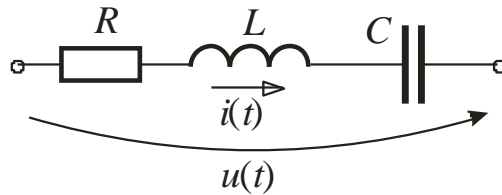


Рисунок 2.38

В соответствии с таблицей 2.7 операторная схема замещения будет иметь вид:

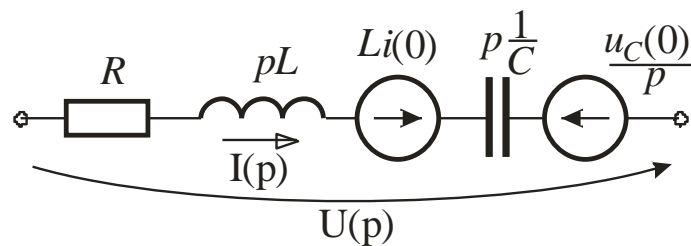


Рисунок 2.39

Операторное сопротивление рассматриваемого участка цепи:

$$z(p) = R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C}.$$

Приложенное напряжение складывается из суммы напряжений на каждом элементе схемы  $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$ . Для операторной схемы замещения

$$\begin{aligned} U(p) &= U_R(p) + U_L(p) + U_C(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) - L \cdot i(0) + \frac{1}{C \cdot p} \cdot I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = \\ &= I(p) \cdot \left( R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C} \right) - L \cdot i(0) + \frac{u_C(0)}{p}. \end{aligned}$$

Где  $i(0)$  и  $u_C(0)$  - начальные условия. Если, начальные условия равны нулю, то:  $U(p) = I(p) \cdot z(p)$  – закон Ома в операторной форме записи.

**Законы Кирхгофа в операторной форме записи:**

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0 \text{ – первый закон Кирхгофа.}$$

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) \cdot z(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p) \text{ - второй закон Кирхгофа.}$$



### 2.4.3.3 Переход от изображения к оригиналу

Для перехода от изображения к оригиналу можно воспользоваться формулой обратного преобразования Лапласа  $f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{\sigma_0 - j \cdot \infty}^{\sigma_0 + j \cdot \infty} F(p) \cdot e^{p \cdot t} dp$ , таблицами соответствия, приведенными в справочниках по высшей математике. Однако наиболее используемым способом является переход от изображений к оригиналам по формулам теоремы разложения.

Как правило, решение для изображения тока или напряжения имеет вид правильной рациональной дроби:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}, \quad (2.58)$$

где  $m < n$ , причем дробь  $\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$  несократимая, а коэффициенты  $a_k, b_k$  - действительные числа.

Алгоритм перехода от изображению к оригиналу по формулам теоремы разложения следующий.

1) Знаменатель дроби (2.58) приравнивают к нулю и находят корни  $p_k$  уравнения  $F_2(p) = 0$ .

3) В общем виде находят производную знаменателя  $F_2'(p)$

4) В зависимости от характера корней записывают решение для оригинала:

- если корни вещественные и разные, вид оригинала

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}.$$

- если корни комплексно – сопряженные  $p_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega$ , то

$$f(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t} \right\}.$$

В зависимости от вида корней оригинал может быть определен и по другим выражениям теоремы разложения.

**Пример 1.** Найти закон изменения тока во времени по его операторному

$$\text{изображению } I(p) = \frac{100}{p \cdot (10 + 0,1p)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} .$$

1) Приравняем к нулю знаменатель и найдем корни  $p \cdot (10 + 0,1p) = 0$  .

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -100$$

2) Запишем производную знаменателя  $F_2'(p) = 10 + 0,2p$

3) Так как корни получились вещественные разные решение для оригинала

$$\text{запишется в виде } i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} .$$

После подстановки численных значений получим оригинал тока

$$i(t) = 10 - 10 \cdot e^{-100t} \text{ А} .$$

**Пример 2.** Определить закон изменения напряжения во времени по его

$$\text{операторному изображению } U(p) = \frac{8p + 100}{p^2 + 20p + 200} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} .$$

1) Приравняв знаменатель дроби к нулю, находим корни:

$$p_1 = -10 + j10 = 10\sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ} ;$$

$$p_2 = -10 - j10 = 10\sqrt{2} \cdot e^{j225^\circ} .$$

2) Производная знаменателя  $F_2'(p) = 2p + 20$

3) Для комплексно-сопряженных корней решение для оригинала

$$u(t) = 2\text{Re} \left\{ \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right\} ,$$

вычисляем оригинал искомого напряжения

$$\begin{aligned} u(t) &= 2\text{Re} \left\{ \frac{-80 + j80 + 100}{2(-10 + j10) + 20} \cdot e^{-10t} \cdot e^{j10t} \right\} = 2\text{Re}(8,25 \cdot e^{-j14^\circ} \cdot e^{-10t} \cdot e^{j10t}) = \\ &= 8,25 \cdot e^{-10t} \cos(10t - 14^\circ) = 8,25 \cdot e^{-10t} \sin(10t + 76^\circ) \text{ В} \end{aligned}$$

#### 2.4.3.4 Переход от изображения к оригиналу в Mathcad

Для перехода от изображения к оригиналу в Mathcad существует специальная команда обратного преобразования Лапласа *invlaplace* с панели *Symbolic*. Однако эта команда замечательно работает в версиях Mathcad 13 и ниже, а в Mathcad 14 и 15 дает неверные результаты. Это связано с тем, что начиная с Mathcad 14 символьные вычисления сделаны на основе другой математической платформы.

В связи с этим для разных версий Mathcad можно предложить разные алгоритмы перехода от изображения к оригиналу.

Для Mathcad 13 и ниже: - применить к изображению команду *invlaplace*, например:

$$\frac{24000.}{(12000.+ p) \cdot p} \text{ invlaplace} \rightarrow 2 - 2 \cdot e^{-12000t}$$

Для Mathcad 14 и 15, в которых прямое использование *invlaplace* приводит к неверным результатам, можно предложить перейти от изображения к оригиналу двумя способами.

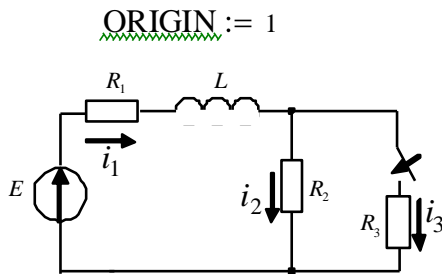
**Способ 1:** с помощью команды *parfac* разложить изображение искомой величины на элементарные дроби, а затем применить команду *invlaplace* к каждой дроби в отдельности. Оригинал искомой величины будет в этом случае равен сумме полученных оригиналов.

**Способ 2:** использовать для перехода формулы теоремы разложения, приведенные в предыдущем подразделе.

В приведенном ниже примере показан расчет, который получается в любой версии Mathcad и переход от полученных изображений к оригиналу в разных версиях.

## 2.4.3.5 Пример расчета переходного процесса операторным методом

### в Mathcad



Операторным методом рассчитать переходные токи в ветвях и напряжение на индуктивности, если известны постоянная ЭДС источника и параметры цепи.

$$E := 12\text{В} \quad R_1 := 10\text{Ом} \quad R_2 := 30\text{ Ом} \quad R_3 := 60\text{ Ом} \quad L := 0.3\text{ Гн}$$

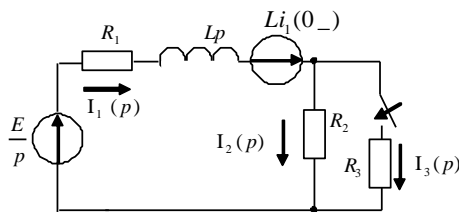
Решение

1. В схеме до коммутации рассчитаем ток через индуктивность

$$i_{10} := \frac{E}{R_1 + R_2} = 3 \text{ А}$$

Так как ток  $i_1$  не зависит от времени в момент времени  $t=0$ - его значение будет таким же, т.е.  $i_1(0^-) = i_{10}$

2. Составим операторную схему замещения. Дополнительная ЭДС в схеме равна  $L i_1(0^-)$



3. Расчет операторных токов проведем по законам Кирхгофа.

Уравнения по законам Кирхгофа для операторной схемы замещения:

$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0$$

$$R_1 I_1(p) + Lp I_1(p) + R_2 I_2(p) = E/p + L i_1(0^-)$$

$$R_2 I_2(p) - R_3 I_3(p) = 0$$

Решим систему и найдем изображения токов  $I_1(p)$ ,  $I_2(p)$ ,  $I_3(p)$ .

$$A(p) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 + L \cdot p & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \quad B(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{p} + L \cdot i_{10} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I(p) := A(p)^{-1} \cdot B(p)$$

$$I(p) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1200.0}{p} + 9.0 \\ \frac{3.0 \cdot p + 300.0}{p} + 18.0 \\ \frac{1200.0}{9.0 \cdot p + 900.0} + 9.0 \end{pmatrix}$$

Переход от изображений искомых величин к оригиналам показан для Mathcad 14 или 15 по способу 1.

$$I(p)_1 \rightarrow \frac{\frac{1200.0}{p} + 9.0}{3.0 \cdot p + 300.0} \text{ parfrac} \rightarrow \frac{4.0}{p} - \frac{1.0}{p + 100.0}$$

$$\frac{4.0}{p} \text{ invlaplace} p \rightarrow 4.0 \quad \frac{1.0}{p + 100.0} \text{ invlaplace} p \rightarrow e^{-100.0t}$$

$$i1(t) := 4 - e^{-100.0t}$$

$$I(p)_2 \rightarrow \frac{\frac{2400.0}{p} + 18.0}{9.0 \cdot p + 900.0} \left| \begin{array}{l} \text{parfrac} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow \frac{2.67}{p} - \frac{0.667}{p + 100.0}$$

$$\frac{2.67}{p} \text{ invlaplace} p \rightarrow 2.67 \quad \frac{0.667}{p + 100.0} \text{ invlaplace} p \rightarrow 0.667 \cdot e^{-100.0t}$$

$$i2(t) := 2.67 - 0.667 \cdot e^{-100.0t}$$

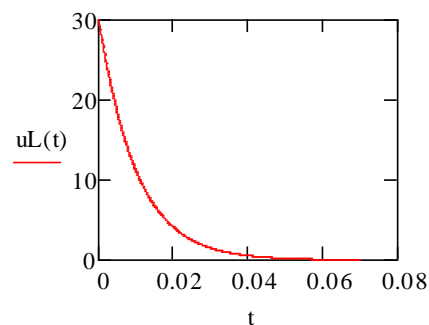
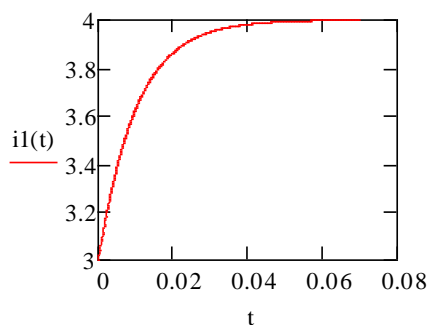
$$I(p)_3 \rightarrow \frac{\frac{1200.0}{p} + 9.0}{9.0 \cdot p + 900.0} \left| \begin{array}{l} \text{parfrac} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1.33}{p} - \frac{0.333}{p + 100.0}$$

$$\frac{1.33}{p} \text{ invlaplace} p \rightarrow 1.33 \quad \frac{0.333}{p + 100.0} \text{ invlaplace} p \rightarrow 0.333 \cdot e^{-100.0t}$$

$$i3(t) := 1.33 - 0.333 \cdot e^{-100.0t}$$

$$uL(t) := L \left( \frac{d}{dt} i1(t) \right) \rightarrow 30.0 \cdot e^{-100.0t}$$

$$t := 0, 0.0001 .. 0.07$$



### 3 Примерные задания к вариативной части курсовой работы

При выполнении вариативной части курсовой работы студент должен продемонстрировать способность к применению освоенных при выполнении базовой части законов и методов к более сложным или нетиповым задачам. Задания к вариативной части курсовой работы выдаются преподавателем индивидуально каждому студенту и могут охватывать как одну, так и несколько тем. Примерная тематика заданий к вариативной части показана ниже.

- 1) Исследование зависимости от параметров отдельной фазы ( $z = 0 \dots \infty$ ) напряжения смещения нейтрали при соединении приемника звездой, тока в нейтральном проводе при соединении приемника звездой с нулевым проводом.
- 2) Анализ трехфазной цепи с двумя приемниками с разными схемами соединения.
- 3) Расчет емкости конденсатора для повышения коэффициента мощности до заданного значения.
- 4) Исследование резонансного режима в трехфазной цепи.
- 5) Анализ векторных диаграмм при различном характере нагрузки в методе симметричных составляющих.
- 6) Анализ трехфазной цепи при индуктивной связи между фазами.
- 7) Сравнительный анализ расхода провода однофазной и трехфазной линий электропередач.
- 8) Исследование зависимости формы несинусоидальных токов от параметров цепи.
- 9) Анализ резонансных режимов на высших гармониках.

- 10) Анализ зависимости реактивной проводимости цепи от частоты  $b(f)$ , реактивного сопротивления цепи от частоты  $x(f)$  в цепи с несинусоидальным источником питания.
- 11) Исследование влияния параметров электрической цепи на длительность переходного процесса.
- 12) Анализ переходного процесса классическим методом в цепи синусоидального тока.
- 13) Анализ переходного процесса операторным методом в цепи синусоидального тока.

## 4 Вопросы и задачи для самоконтроля

### 4.1 Трехфазные цепи. Метод симметричных составляющих

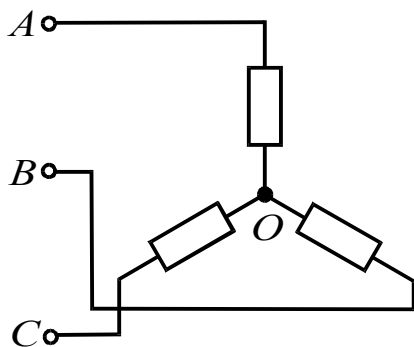
**4.1.1** Симметричная нагрузка соединена звездой. Линейное напряжение 380 В. Чему равно фазное напряжение?

- 1) 380 В;                                      2) 220 В                                      3) 127 В;                                      4) 190 В.

**4.1.2** В симметричной трехфазной цепи линейный ток равен 2,2 А. Чему равен фазный ток, если нагрузка соединена треугольником?

- 1) 2,2 А;                                      2) 1,27 А;                                      3) 3,8 А.

**4.1.3** Между какими точками надо включить вольтметр для измерения фазного напряжения?



- 1) AB;                                      2) BC;  
3) AC;                                      4) AO.

**4.1.4** Может ли нулевой провод в четырехпроводной цепи обеспечивать симметрию фазных напряжений при несимметричной нагрузке?

- 1) может, если обладает пренебрежительно малым сопротивлением;  
2) может, если обладает достаточно большим сопротивлением;  
3) может, если нагрузка чисто активная;  
4) не может.

**4.1.5** Линейное напряжение 220 В. Определить фазное напряжение, если нагрузка соединена треугольником

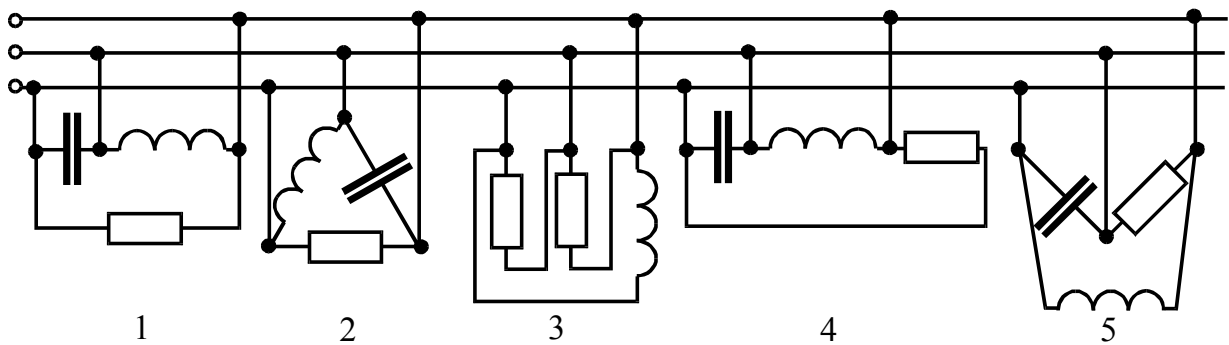
- 1) 220 В;                                      2) 127 В;                                      3) 380 В;



**4.1.6** В каком из приведенных выражений для трехфазной цепи допущена ошибка, если  $u_A = U_m \sin \omega t$ ?

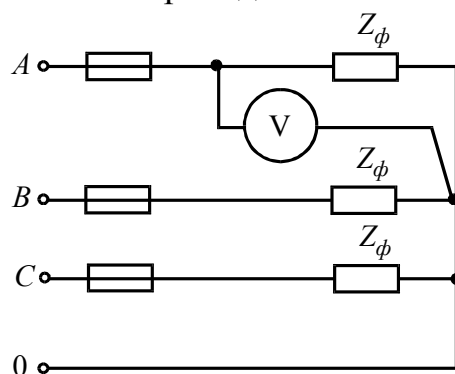
- 1)  $u_B = U_m \sin(\omega t - 120^\circ)$ ;
- 2)  $u_C = U_m \sin(\omega t - 240^\circ)$ ;
- 3)  $u_{BC} = \sqrt{3}U_m \sin(\omega t - 90^\circ)$ ;
- 4)  $u_{CA} = \sqrt{3}U_m \sin(\omega t - 150^\circ)$

**4.1.7** Какие из схем, изображенных на рисунке, представляют соединение потребителей треугольником?



- 1) схема 1, 2, 4;    2) схемы 2, 4 и 5;    3) схемы 2, 3 и 5;    4) все схемы

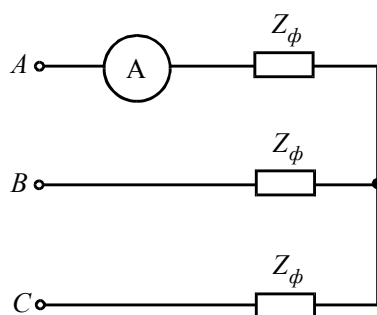
**4.1.8** Трехфазная сеть, питающая несимметричный потребитель, имеет линейное напряжение  $U_{\text{л}}$ . Что покажет вольтметр, после перегорания предохранителя в проводе  $C$ .



- 1)  $U = U_{\text{л}}$ ;
- 2)  $U = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}}$ ;
- 3)  $U = \frac{U_{\text{л}}}{3}$ ;
- 4)  $U = 2U_{\text{л}}$ ;

4.1.9 Определить показание амперметра, если известно, что,  $U_{\text{л}}=220 \text{ В}$ ,

$Z_{\phi}=22 \text{ Ом}$ .

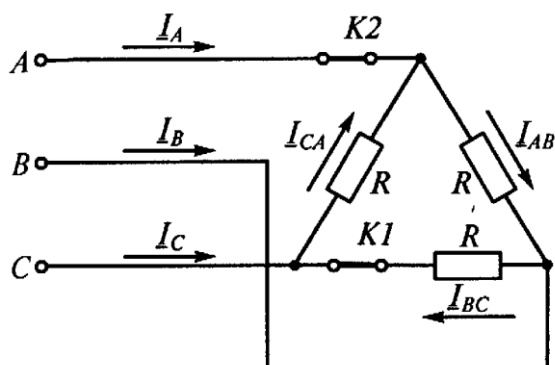


- 1)  $10 \text{ А}$ ;
- 2)  $10\sqrt{3} \text{ А}$ ;
- 3)  $5\sqrt{2} \text{ А}$ ;
- 4)  $\frac{10}{\sqrt{3}} \text{ А}$ .

4.1.10 Трехфазный приемник симметричен, если его сопротивления, выраженные в комплексной форме равны:

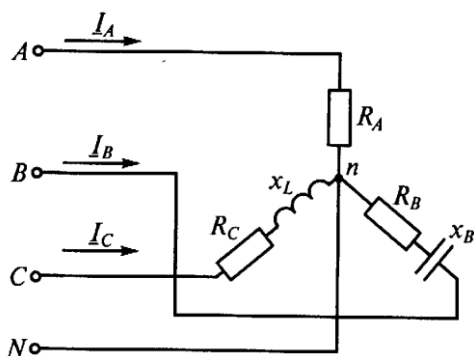
- 1)  $\underline{Z}_a=5 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_b=3+j4 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_c=3-j4 \text{ Ом}$ ;
- 2)  $\underline{Z}_a=5 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_b=5 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ ,  $\underline{Z}_c=5 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}$ ;
- 3)  $\underline{Z}_a=5 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_b=-j5 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_c=j5 \text{ Ом}$ ;
- 4)  $\underline{Z}_a=5-j2 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_b=5-j2 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_c=5-j2 \text{ Ом}$ .

4.1.11 Как изменяться токи при размыкании ключа К1. Укажите неправильный ответ.



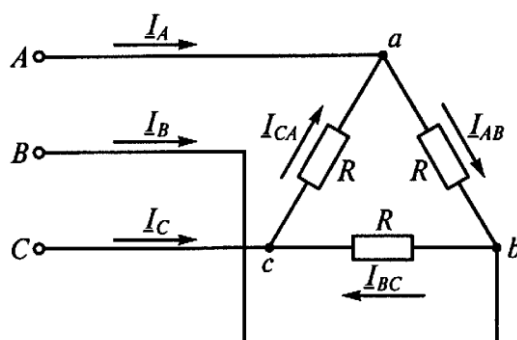
- 1)  $I_A$  - уменьшится;
- 2)  $I_B$  - уменьшится;
- 3)  $I_{AB}$  - не изменится;
- 4)  $I_{BC}$  - станет равным нулю.

4.1.12 Включая вольтметр между различными точками схемы измерить напряжения и определить, какое из них линейное, а какое – фазное? Укажите правильный ответ.



- 1)  $U_{AN}$  - линейное,  $U_{BN}$  - фазное;
- 2)  $U_{AB}$  - линейное,  $U_{BC}$  - фазное;
- 3)  $U_{CA}$  - линейное,  $U_{CN}$  - фазное;
- 4)  $U_{BC}$  - линейное,  $U_{CA}$  - фазное.

**4.1.13** Каковы уравнения, связывающие векторы линейных и фазных токов? Укажите правильный ответ.



- 1)  $\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}$ ;  $\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}$ ;  $\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}$ ;
- 2)  $\dot{I}_A = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{AB}$ ;  $\dot{I}_{AB} = \dot{I}_{BC}$ ;  $\dot{I}_C = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{CA}$ ;
- 3)  $\dot{I}_A = \dot{I}_{CA} + \dot{I}_{AB}$ ;  $\dot{I}_B = \dot{I}_{AB} + \dot{I}_{BC}$ ;  $\dot{I}_C = \dot{I}_{BC} + \dot{I}_{CA}$ .

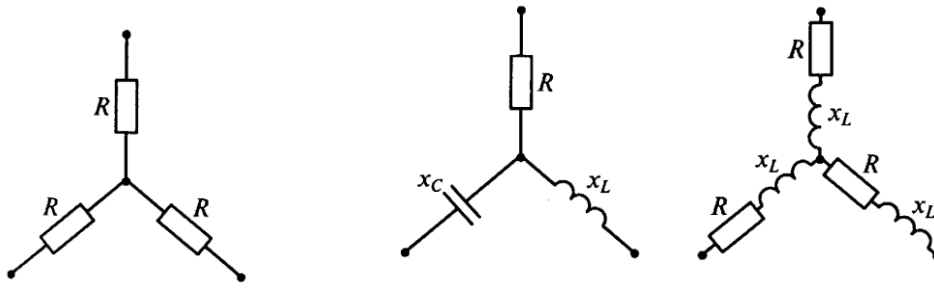
**4.1.14** Трехфазный двигатель с напряжением 127 В включают в трехфазную сеть с линейным напряжением 380 В. Как следует соединить обмотки двигателя?

- 1) звездой;    2) треугольником;    3) звездой с нейтралью;
- 4) двигатель нельзя включать в эту сеть.

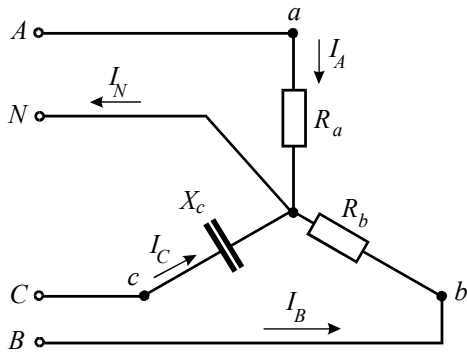
**4.1.15** Чему равен линейный ток в случае симметричной нагрузки при соединении фаз треугольником?

- 1)  $I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}$ ;    2)  $I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}$ ;    3)  $I_{\text{л}} = \frac{I_{\text{ф}}}{\sqrt{3}}$ ;    4)  $I_{\text{л}} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3} \cdot Z_{\text{ф}}}$ .

**4.1.16** В какой из схем нагрузка является несимметричной, если  $X_L = X_C = R$ ?



**4.1.17** Как следует выразить комплексы токов  $I_A$  и  $I_C$ , если комплекс тока  $\dot{I}_B = I_B \cdot e^{-j120^\circ}$  ?



- 1)  $\dot{I}_A = I_A \cdot e^{j0}$ ;
- 2)  $\dot{I}_C = I_C \cdot e^{j120^\circ}$ ;
- 3)  $\dot{I}_A = I_A \cdot e^{j120^\circ}$ ;
- 4)  $\dot{I}_C = I_C \cdot e^{j0}$ .

**4.1.18** Выберите правильную группу формул для расчета фазных напряжений через их симметричные составляющие.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| $\dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0$            | $\dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0$            | $\dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0$       |
| 1) $\dot{U}_B = a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0$ ; | 2) $\dot{U}_B = a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0$ ; | 3) $\dot{U}_B = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0$ .  |
| $\dot{U}_C = a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0$      | $\dot{U}_C = a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0$      | $\dot{U}_C = a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0$ |

**4.1.19** Выберите правильную группу формул для расчета симметричных составляющих, если даны несимметричные фазные напряжения.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| $\dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)$          | $\dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)$          | $\dot{U}_0 = \frac{1}{3}(a\dot{U}_A + \dot{U}_B + a^2\dot{U}_C)$      |
| 1) $\dot{U}_1 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C)$ ; | 2) $\dot{U}_1 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C)$ ; | 3) $\dot{U}_1 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C)$ . |
| $\dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a \dot{U}_B + a\dot{U}_C)$       | $\dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C)$      | $\dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C)$      |

**4.1.20** Укажите правильные граничные условия для к.з. на землю фазы А.

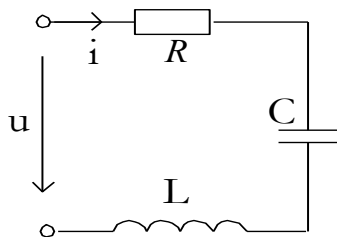
- |                      |                          |                      |
|----------------------|--------------------------|----------------------|
| $\dot{U}_A = 0$      | $\dot{U}_A = \dot{U}_B$  | $\dot{I}_A = 0$      |
| 1) $\dot{I}_B = 0$ ; | 2) $\dot{I}_C = 0$ ;     | 3) $\dot{U}_B = 0$ . |
| $\dot{I}_C = 0$      | $\dot{I}_A = -\dot{I}_B$ | $\dot{U}_C = 0$      |

**4.1.21** Укажите правильные граничные условия для междуфазного к.з. фаз А и В.

$$\begin{array}{lll}
 \dot{U}_A = 0 & \dot{U}_A = \dot{U}_B & \dot{I}_A = 0 \\
 1) \quad \dot{I}_B = 0 ; & 2) \quad \dot{I}_C = 0 ; & 3) \quad \dot{U}_B = 0 . \\
 \dot{I}_C = 0 & \dot{I}_A = -\dot{I}_B & \dot{U}_C = 0
 \end{array}$$

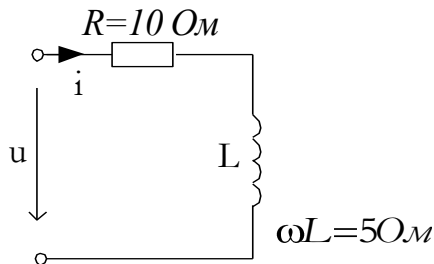
## 4.2 Цепи несинусоидального тока

**4.2.1**  $R = 16 \text{ Ом}$ ;  $\omega L = 6 \text{ Ом}$ ;  $\frac{1}{\omega C} = 6 \text{ Ом}$ ;  $u = 160 \sin \omega t + 80 \sin 3\omega t, \text{ В}$ .

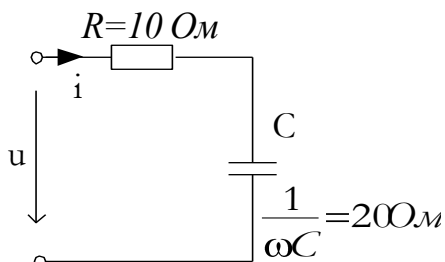


Найти  $i(t), I$ .

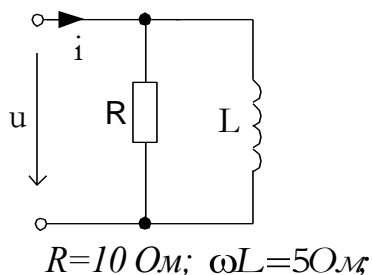
**4.2.2**  $u = 44,8 \sin \omega t + 30\sqrt{2} \sin 2\omega t \text{ В}$ . Найти  $i(t), I$ .



**4.2.3**  $u = 20 \sin \omega t + 14,1 \sin \omega t \text{ В}$ . Найти  $i(t), I$ .



**4.2.4**  $u = 20 \sin \omega t + 10 \sin 2\omega t \text{ В}$ . Найти  $i(t), I$ .



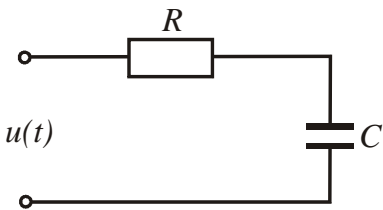
**4.2.5** Мгновенное значение напряжения на участке электрической цепи равно  $u(t) = 40 + 30\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 30^\circ), B$ . Определить показание вольтметра электродинамической системы, подключенного к этому участку цепи.

- 1) 40 В    2) 70 В    3)  $\sqrt{\left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2 + 30^2}$   
 4) 50 В    5)  $\sqrt{\left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right)^2}$

**4.2.6** Найти активную мощность, выделяемую в цепи, если

$$u(t) = 100\sqrt{2} \sin \omega t + 20\sqrt{2} \sin 3\omega t, B ; r = 10 \text{ Ом} ;$$

$$\frac{1}{\omega C} = 30 \text{ Ом} .$$



- 1) 100 Вт    2) 120 Вт    3) 150 Вт  
 4) 140 Вт    5)  $80\sqrt{2}$  Вт

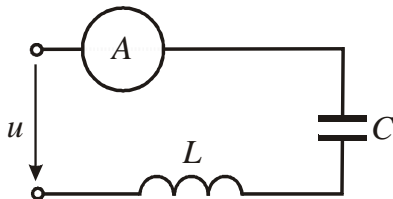
**4.2.7** Определить действующее значение напряжения  $U$ , если  $i = 5 + 5\sqrt{2} \sin \omega t + 5\sqrt{2} \sin(2\omega t + 45^\circ), A$   
 $r = 10 \text{ Ом} ; \omega L = 10 \text{ Ом} .$

- 1)  $100\sqrt{2}$  В    2) 100 В    3) 120 В  
 4) 125 В    5)  $120\sqrt{2}$  В

**4.2.8** Найти показание амперметра электромагнитной системы если

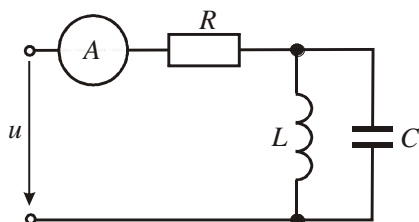
$$u = 100\sqrt{2} \sin \omega t + 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) B;$$

$$\omega L = 10 \text{ Ом}; \frac{1}{\omega C} = 30 \text{ Ом}.$$



- 1) 5 А    2) 10 А    3)  $10\sqrt{2}$  А    4)  $5\sqrt{2}$  А    5) 8 А

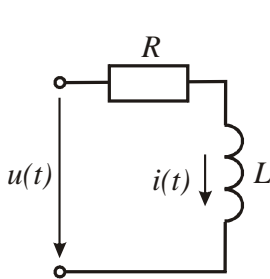
**4.2.9**  $u = 20 + 10\sqrt{2} \sin \omega t, B ; R = 10 \text{ Ом}; \omega L = \frac{1}{\omega C} = 5 \text{ Ом}.$



Определить показания амперметра электродинамической системы.

- 1) 1 А                      2) 0                      3)  $\sqrt{5}$  А                      4) 2 А                      5) 3 А

**4.2.10** Найти активную мощность, выделяемую в цепи, если



$$u = 100\sqrt{2} \sin \omega t + 40\sqrt{2} \sin(2\omega t), B$$

$$r = 20 \text{ Ом}; \omega L = 10 \text{ Ом}.$$

- 1) 440 Вт                      2) 400 Вт                      3) 380 Вт  
4) 500 Вт                      5) 420 Вт

### 4.3 Переходные процессы

**4.3.1** В каких электрических цепях возникают переходные процессы?

- 1) В любых электрических цепях;
- 2) В цепях только с резистивными элементами;
- 3) В цепях, в которых есть накопители энергии (L и C).

**4.3.2** Что является причиной возникновения переходного процесса?

- 1) Конечное время замыкания или размыкания ключа;
- 2) Невозможность в момент коммутации мгновенного изменения; энергии, накопленной в L и C.
- 3) Инерция резистора

**4.3.3** В соответствии с законами коммутации в момент коммутации мгновенно (скачком) не могут измениться:

- 1) напряжение на последовательном участке, включающем индуктивность;
- 2) ток через конденсатор;
- 3) ток через индуктивность;
- 4) напряжение на емкости;
- 5) ток и напряжение на резисторе

#### 4.3.4 Какие начальные условия называются независимыми?

- 1) Напряжения и токи на всех элементах в момент времени  $t=0$ ;
- 2) Ток через индуктивность и напряжение на емкости в момент времени  $t=0$ ;
- 3) Напряжение на индуктивности и ток через емкость в момент времени  $t=0$ .

#### 4.3.5 Какие начальные условия называются зависимыми?

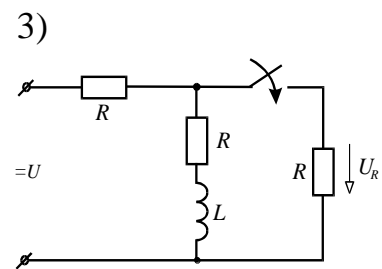
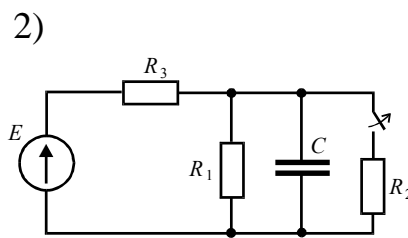
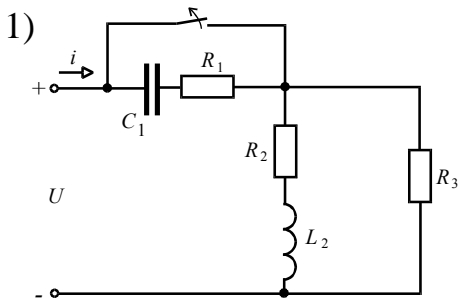
- 1) Начальные значения токов в ветвях без катушек индуктивности или напряжений на элементах, не являющихся конденсаторами;
- 2) Ток через индуктивность и напряжение на емкости в момент времени  $t=0$ ;
- 3) Напряжения и токи на всех элементах в момент времени  $t=0$ .

#### 4.3.6 Чему равно число корней характеристического уравнения?

- 1) числу накопителей энергии в схеме;
- 2) числу накопителей энергии в схеме после сложения последовательно соединенных  $L$  и параллельно соединенных  $C$ .
- 3) числу активных сопротивлений в схеме.

#### 4.3.7 Для какой из цепей переходные токи могут изменяться по законам

$$i_{св} = Ae^{pt}, \quad i_{св} = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}, \quad i_{св} = Ae^{-\alpha} \sin(\omega_0t + \gamma) ?$$



#### 4.3.8 Постоянная времени в цепи с последовательно соединенными элементами $R$ и $L$ при увеличении сопротивления $R$ :

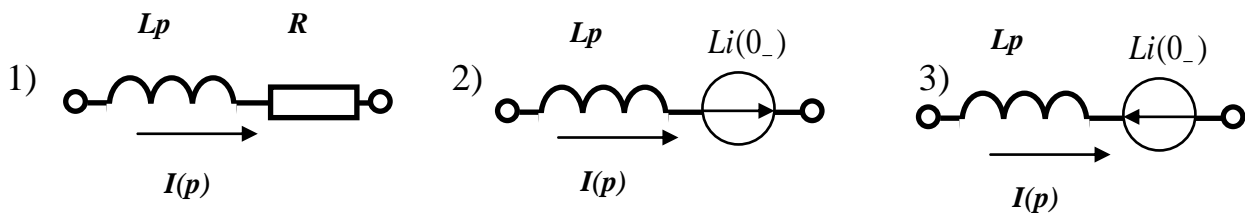
- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается неизменной;
- 4) ответ зависит от характера приложенного к цепи напряжения;
- 5) ответ зависит от начального значения тока на индуктивности  $i_L(0)$ .



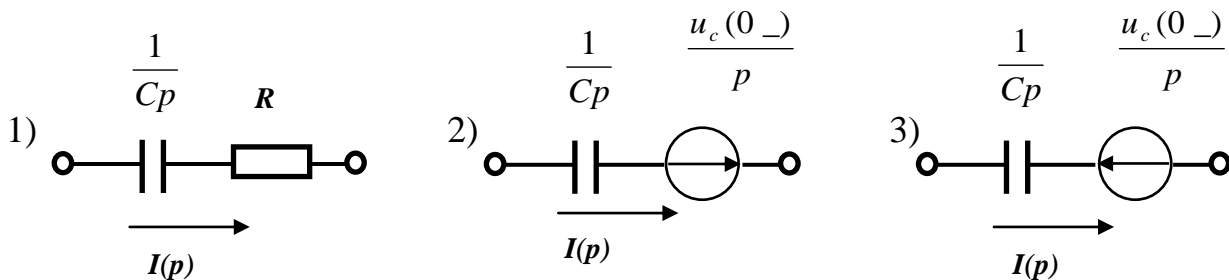
**4.3.9** При переходном процессе в разветвленной цепи с произвольно соединенными элементами  $R$ , одним конденсатором и постоянными во времени источниками ЭДС и тока:

- 1) напряжение на конденсаторе  $u_C$  изменяется монотонно;
- 2) ток в конденсаторе  $i_C$  может изменять знак;
- 3) напряжение на конденсаторе  $u_C$  может достигать максимума в некоторый конечный момент времени  $t_M > 0$ ;
- 4) ток в конденсаторе  $i_C$  может достигать максимума в некоторый конечный момент времени  $t_M > 0$ ;
- 5) напряжение на конденсаторе  $u_C$  в момент коммутации изменяется скачком.

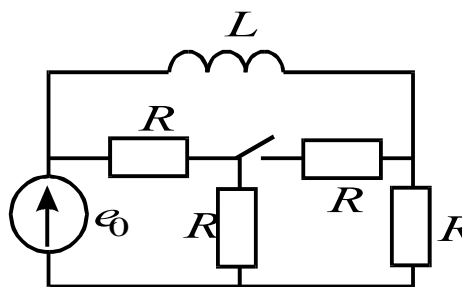
**4.3.10** Укажите операторную схему замещения для индуктивности.



**4.3.11** Укажите операторную схему замещения для емкости.

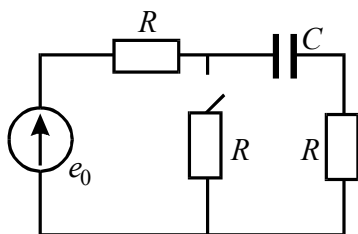


**4.3.12** Если в результате коммутации ключ оказался разомкнутым, то установившееся значение тока на индуктивности  $i_L$  (при  $t \rightarrow \infty$ ) равно:



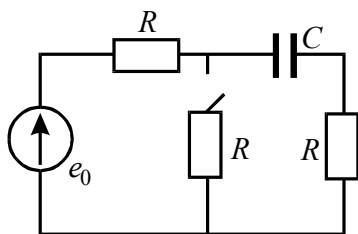
- 1)  $e_0/0,5R$ ;
- 2)  $e_0/2R$ ;
- 3)  $3e_0/2R$ ;
- 4)  $e_0/R$ ;
- 5)  $e_0/3R$ .

**4.3.13** Если в результате коммутации ключ оказался разомкнутым, то напряжение на емкости в начальный момент времени  $u(0)$ , равно:



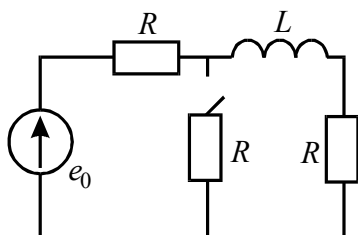
- 1)  $e_0/4$ ;
- 2)  $e_0/3$ ;
- 3)  $2e_0/3$ ;
- 4)  $e_0/2$
- 5)  $e_0/3$

**4.3.14** Если в результате коммутации ключ оказался разомкнутым, то установившееся значение напряжения на емкости  $u_C$  (при  $t \rightarrow \infty$ ) равно:



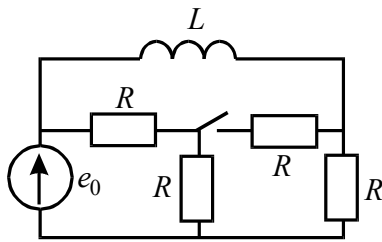
- 1)  $e_0/2$ ;
- 2)  $e_0/3$ ;
- 3)  $e_0$ ;
- 4)  $2e_0/3$ ;
- 5)  $3e_0/2$ .

**4.3.15** Если в результате коммутации оказался разомкнутым, то постоянная времени  $\tau$  равна:



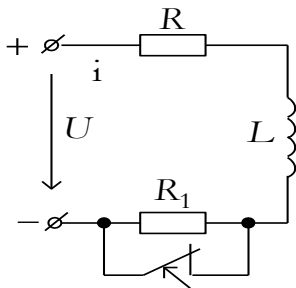
- 1)  $L/3R$ ;
- 2)  $2L/3R$ ;
- 3)  $L/2R$ ;
- 4)  $3L/R$ ;
- 5)  $4L/3R$ .

**4.3.16** Если в результате коммутации ключ оказался замкнутым, то ток на индуктивности в начальный момент времени  $i(0)$  равен:

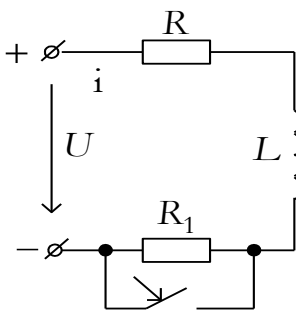


- 1)  $e_0/0,5R$ ;
- 2)  $e_0/R$ ;
- 3)  $3e_0/2R$ ;
- 4)  $e_0/2R$ ;
- 5)  $e_0/3R$ .

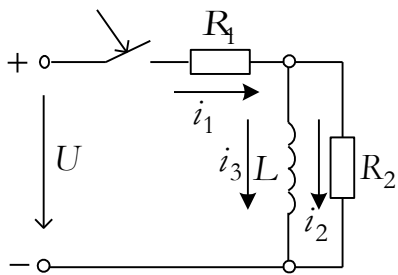
**4.3.17** В цепи контакт замкнут. Найти выражение тока после внезапного размыкания контакта, вводящего в цепь добавочное сопротивление  $R_1$ . Даны:  $U = 120 В$ ,  $R = 10 Ом$ ,  $R_1 = 30 Ом$ ,  $L = 0,1 Гн$ .



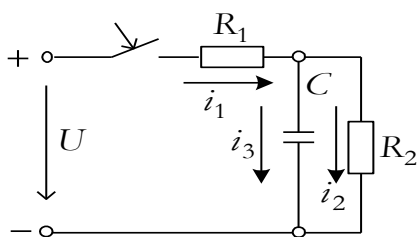
**4.3.18** Цепь постоянного тока состоит из катушки, индуктивность которой  $L = 0,1 Гн$ , и двух резисторов с сопротивлениями  $R = 10 Ом$  и  $R_1 = 30 Ом$ . Приложенное напряжение  $U = 120 В$ . Резистор  $R_1$  внезапно замыкается накоротку. Найти напряжение и ток в катушке после замыкания контакта, построить график его изменения во времени.



**4.3.19** Цепь включается на постоянное напряжение  $U = 120 В$ . Найти выражения токов  $i_1, i_2$  и  $i_3$  и изобразить их графически.  $R_1 = 20 Ом$ ,  $R_2 = 30 Ом$ ,  $L = 0,3 Гн$ . Задачу решить операторным методом.



**4.3.20** Цепь включается на постоянное напряжение. Найти токи и начертить кривые изменения их во времени. Данные цепи:  $U = 10 \text{ В}$ ,  $R_1 = 40 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $C = 25 \text{ нФ}$ . Задачу решить операторным методом.



## Список использованных источников

1 Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учеб. для бакалавров / Л. А. Бессонов.- 11-е изд., испр. и доп. - М. : Юрайт, 2011. - 704 с.

2 Ушакова, Н. Ю. Трехфазные цепи со статической нагрузкой: методические указания и консультации к самостоятельному изучению раздела курса ТОЭ и к выполнению расчетно-графического задания / Н. Ю. Ушакова, Л. В. Быковская; Оренбургский гос. ун-т. - Оренбург : ГОУ ОГУ, 2007. - 48 с.

3 Ушакова, Н.Ю. Метод симметричных составляющих: методические указания к самостоятельному изучению раздела курса ТОЭ и к выполнению расчетно-графического задания / Н.Ю.Ушакова, Л.В.Быковская; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2010. – 59 с.

4 Ушакова, Н.Ю. Цепи несинусоидального тока: методические указания к выполнению расчетно-графического задания / Н.Ю.Ушакова, Ж.Г.Пискунова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 43 с.