Министерство просвещения Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный педагогический университет»

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Великороднова К.А.
Прояева И.В.

Оренбург, 2026 г.

УДК 514.1(075)
ББК 22.151я73
В 27

Рецензенты
А.Д. Сафарова – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики ОГПУ

Н.А. Мунасыпов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики ОГПУ

К.А. Великороднова, И.В.Прояева,

Координация индивидуальной деятельности обучающихся по курсу «Элементы теории пространственных фигур и их применение к решению задач»: учебное пособие / К.А. Великороднова, И.В.Прояева; Мин-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВО «Оренб. гос. пед. ун-т». — Оренбург : Типография «Цифра», 2026. — 68 с.

Основная цель пособия — координация индивидуальной аудиторной и внеаудиторной деятельности обучающихся по теме: «Стереометрия. Решение стереометрических задач» от самых основ до задач повышенного уровня сложности, которые встречаются в ЕГЭ и олимпиадах по математике для старших классов.

УДК 514.1 (075)
ББК 22.151я73

Оглавление

Введение

Основная цель пособия — координация индивидуальной аудиторной и внеаудиторной деятельности обучающихся по теме: «Стереометрия. Решение стереометрических задач» от самых основ до задач повышенного уровня сложности, которые встречаются в ЕГЭ и олимпиадах по математике для старших классов.

Целью курса является целенаправленное формирование математического мышления как инструмента для правильной постановки задачи, для оценки ее данных, для выделения существенных из них, и для выбора ее решения; математической интуиции, позволяющей предвидеть нужный результат, прежде, чем он будет получен, наметить путь исследования с помощью правдоподобных рассуждений, а также формирование строгих логических рассуждений и их применение к основным методам в математических исследованиях – математическим доказательствам. Этому способствуют как материал пособия, так и задания, носящие проблемно-поисковый характер. При работе над пособием учитывалось, что среди читателей книги могут быть лица с различным уровнем подготовки. Поэтому объяснение материала построено таким образом, чтобы обучающийся без посторонней помощи мог освоить основы стереометрии и научиться решать задачи.

Книга состоит из 5 частей.

Данное учебное пособие может быть полезно как для учеников 10-11-х классов, так и для учителей математики, студентов ВУЗов и для всех заинтересованных лиц.

Глава 1. Теоретические основы стереометрии.

Данная глава посвящена теории по стереометрии. Здесь будут рассмотрены основные понятия, аксиомы и теоремы, без знания которых невозможно успешно сдать ЕГЭ и подготовиться к олимпиадам. Знание теории – это «50 % решеной задачи». Ведь без теории невозможно решить ни одной задачи. Поэтому уделим пару глав данного пособия на рассмотрение основ стереометрии, которые необходимы для решения стереометрических задач. Заметим, что некоторым разделам, таким как: теоремы Чевы и Минелая, а также всем способам решения 14 задачи мы посвятили 3 главу.

Для начала, необходимо вспомнить о символике:

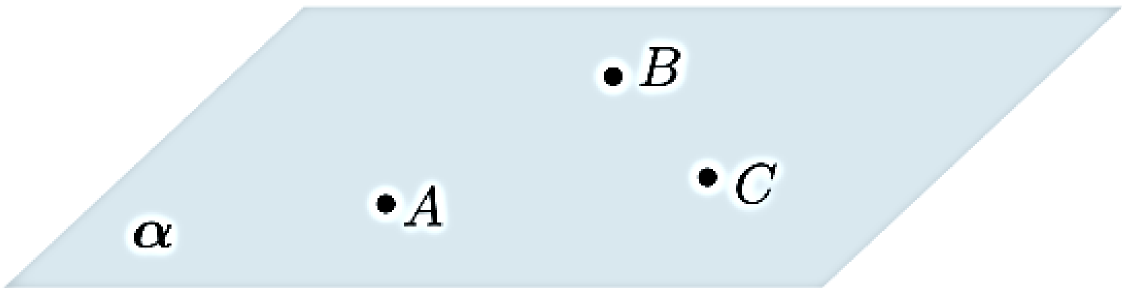
Символ	Значение	Пример символической записи
Δ	Треугольник	ΔABC — треугольник ABC
$\angle$	Угол	$\angle A$ — угол A
=	Равенство	$\|AB\| = \|CD\|$ — отрезок AB равен отрезку CD
$\neq$	Неравенство	$\|AB\| \neq \|CD\|$ — отрезки AB и CD не равны
$\equiv$	Тождество или совпадение	$A' \equiv B'$ — горизонтальные проекции точек A и B совпадают
$\approx$	Приблизительное равенство	$\pi \approx 3{,}14$ — число π приблизительно равно 3,14
$\parallel$	Параллельность	$\beta \parallel \gamma$ — плоскость β параллельна плоскости γ
$\nparallel$	Непараллельность	$b \nparallel \gamma$ — прямая b непараллельна плоскости γ
$\perp$	Перпендикулярность	$b \perp \gamma$ — прямая b перпендикулярна плоскости γ
$\not\perp$	Неперпендикулярность	$b \not\perp \gamma$ — прямая b неперпендикулярна плоскости γ
$\bar{\cap}$	Касательность	$b \ \bar{\cap} \ \gamma$ — прямая b касается поверхности
$\cap$	Пересечение	$b \cap c = K$ — линии b и c пересекаются в точке K
$\rightarrow$	Отображение	$A \rightarrow A'$ — точка A проецируется в точку A'
$\in$	Принадлежность элемента множеству	$A \in \gamma$ — точка A принадлежит поверхности γ

⊂	Принадлежность подмножества множеству	b ⊂ γ — линия b принадлежит поверхности γ
∅	Пустое множество, отсутствие элементов	b ∩ c = ∅ — линии b и c не пересекаются
⇒	Логическое следствие	Например, углы в треугольнике при основании равны => треугольник равнобедренный.
⇔	Эквивалентность	A ∈ γ ⇔ A ∈ b ⊂ γ — если точка A принадлежит поверхности γ, то она принадлежит линии b, принадлежащей этой поверхности, и, наоборот, если точка A принадлежит линии b, принадлежащей поверхности γ, то она принадлежит поверхности γ

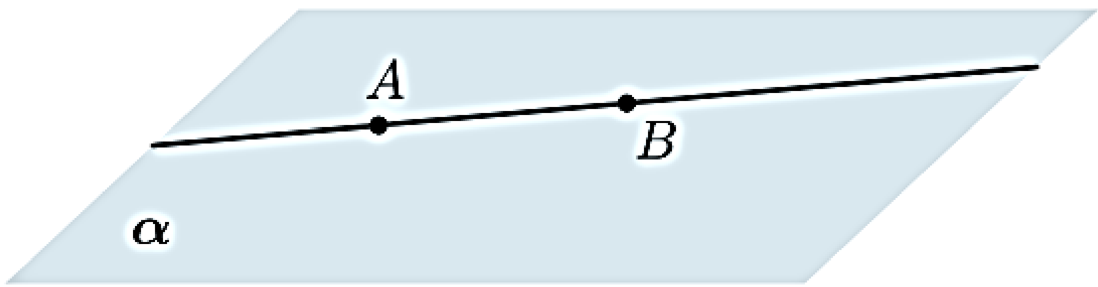
Аксиомы, способы задать плоскость

Аксиомы стереометрии:

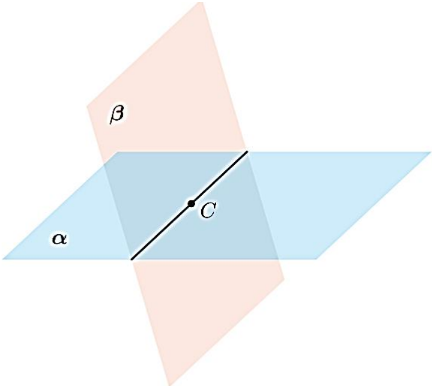
1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.



2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.



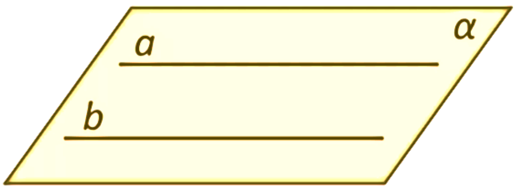
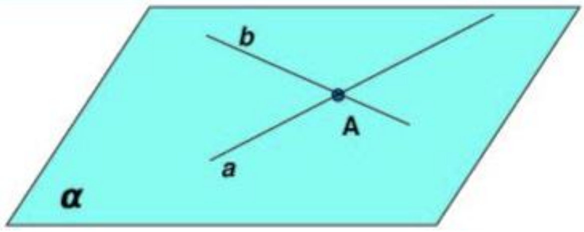
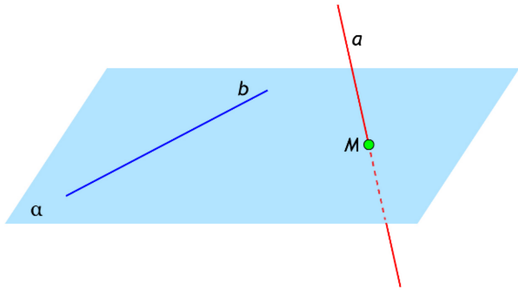
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

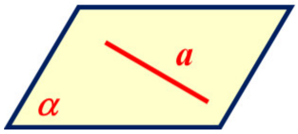
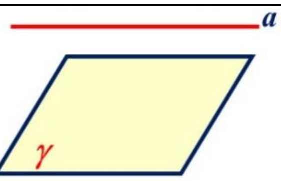
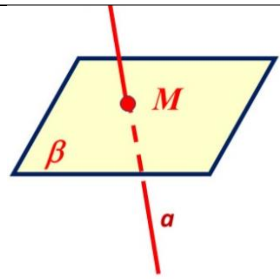
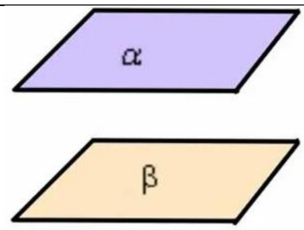
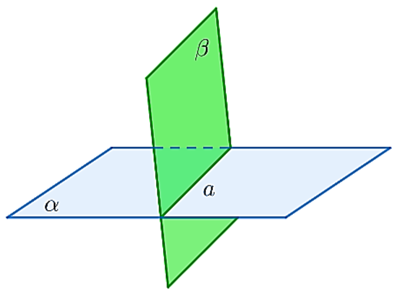


Следствия из аксиом стереометрии:

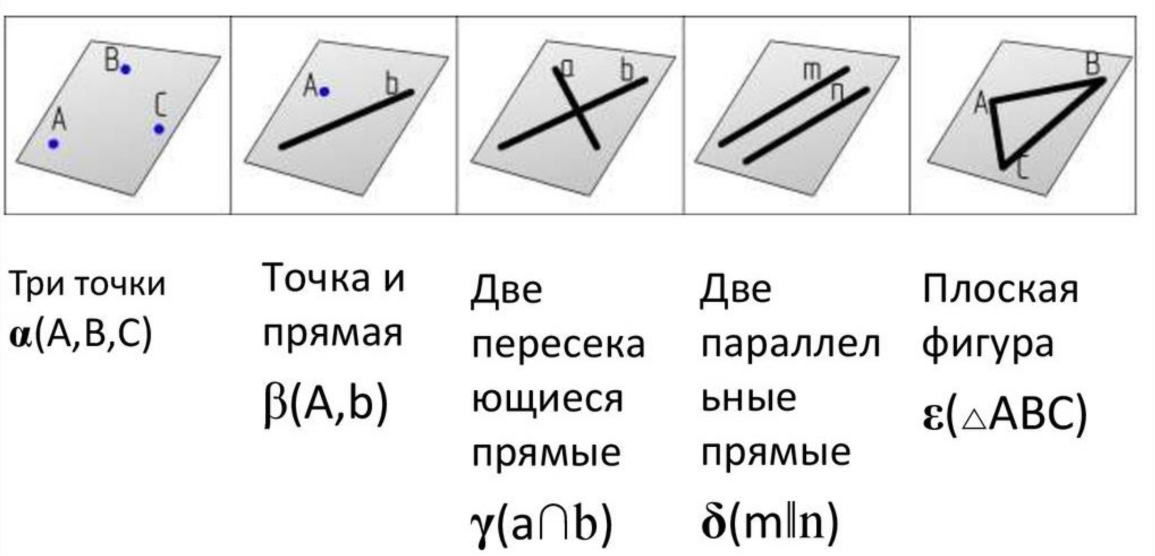
- Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.
- Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.
- Теорема 3. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

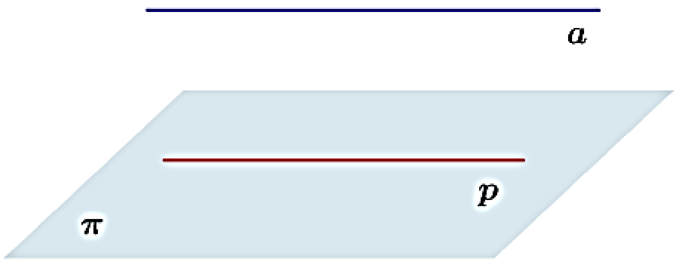
Параллельные прямые:	
Пересекающиеся прямые	
Скрещивающиеся прямые Две прямые называются скрещивающимися, если не существует плоскости, в которой они обе лежат	

Прямая лежит в плоскости	
Прямая параллельна плоскости	
Прямая и плоскость пересекаются	
Плоскости параллельны	
Плоскости пересекаются	

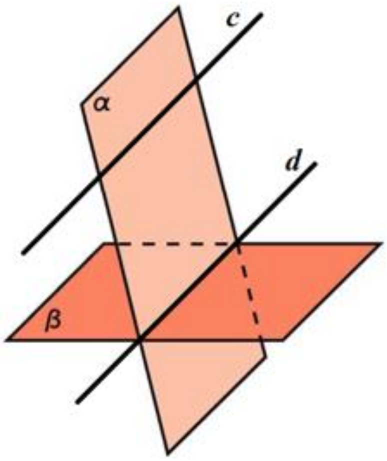
Способы задать плоскость



Теорема 1 (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.



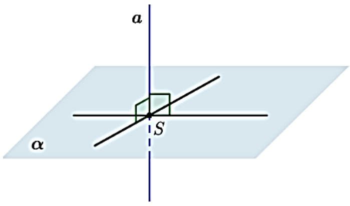
Теорема 2. Если плоскость (на рисунке – α) проходит через прямую (на рисунке – c), параллельную другой плоскости (на рисунке – β), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей (на рисунке – d) параллельна данной прямой: $d \parallel c$



Теоремы:

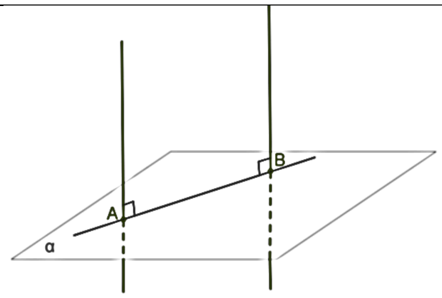
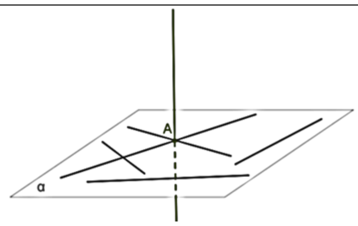
- Теорема 1 (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.
- Теорема 2. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

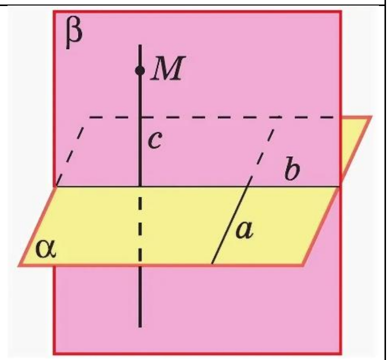
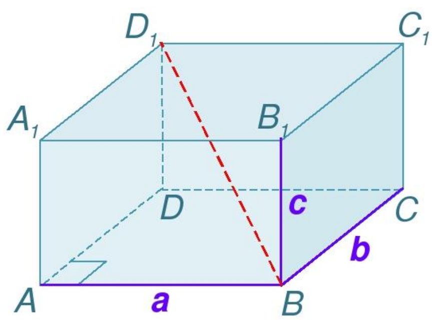
<u>Признак параллельности плоскостей.</u> Если две пересекающиеся прямые из одной плоскости соответственно параллельны двум другим пересекающимся прямым из другой плоскости, то такие плоскости параллельны

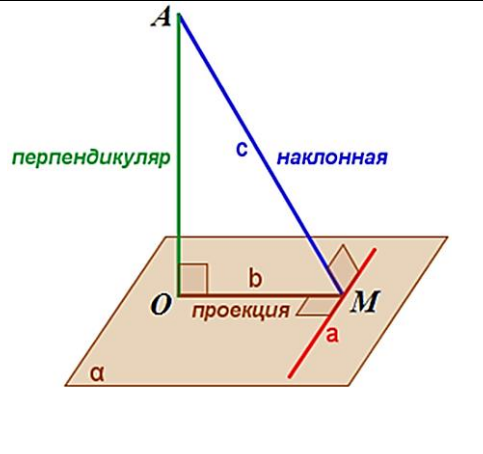


Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости. $a \perp \beta$

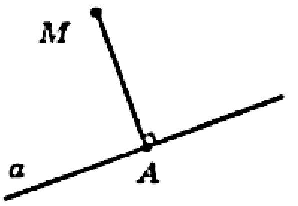
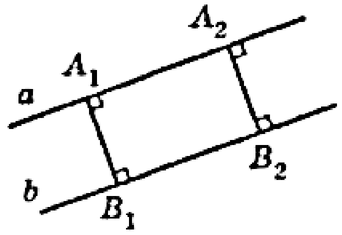
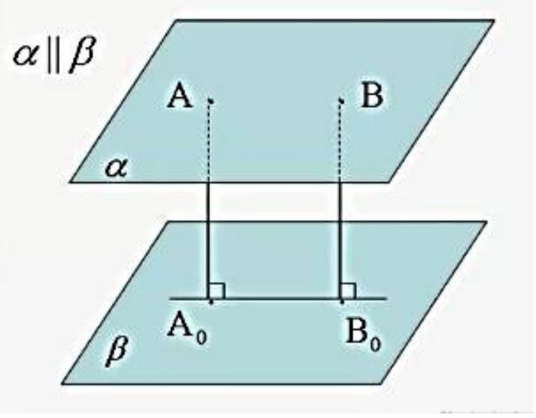
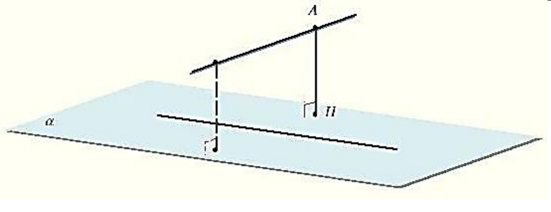
Теоремы:

<table>
<tr><td>Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.</td></tr>
<tr><td>(признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(о плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой). Через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

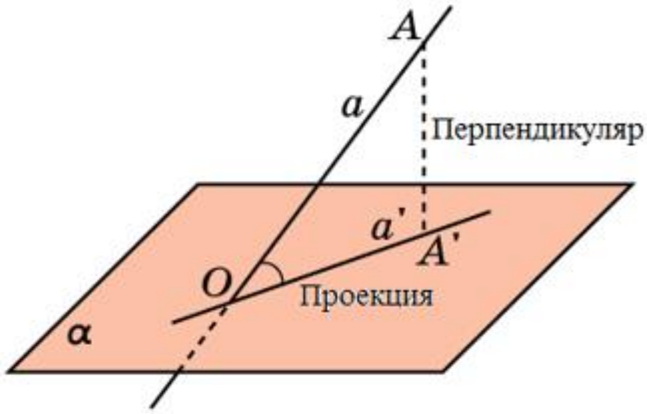
(о прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости). Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, имеющих общую вершину:
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
Следствие: Все четыре диагонали прямоугольного параллелепипеда равны между собой.</td><td>
</td></tr>
</table>

 	Теорема 2 (о трех перпендикулярах): Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и ее проекции на эту плоскость. Данные теоремы, для обозначений с чертежа выше можно кратко сформулировать так: $a\perp b \Rightarrow a\perp c$, $a\perp c \Rightarrow a\perp b$.

Расстояния в пространстве

Расстояние между точками А и В равно длине отрезка АВ.	
Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.	
Расстояние между двумя параллельными прямыми – длина отрезка их общего перпендикуляра.	
Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости. Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью называется расстояние от произвольной точки прямой до плоскости	
Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от одной из скрещивающихся прямых до плоскости, проходящей через другую прямую и параллельной первой прямой.	

В стереометрии **ортогональной проекцией** прямой a на плоскость α называется проекция этой прямой на плоскость α в случае, если прямая, определяющая направление проектирования, перпендикулярна плоскости α.



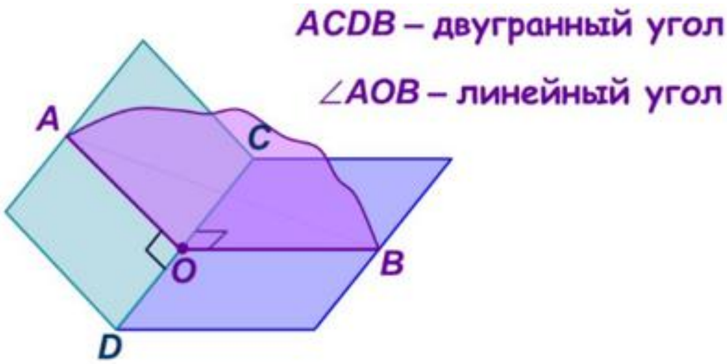
Определение: Углом между прямой, не перпендикулярной плоскости, и этой плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на данную плоскость ($\angle AOA'$ на чертеже выше).

Теорема: Угол между прямой и плоскостью является наименьшим из всех углов, которые данная прямая образует с прямыми, лежащими в данной плоскости и проходящими через точку пересечения прямой и плоскости.

Рассмотрим двугранный угол:

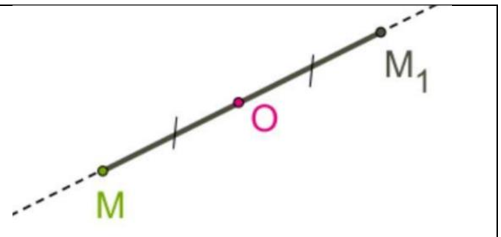
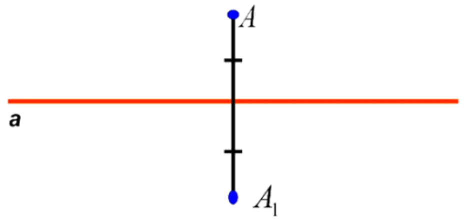
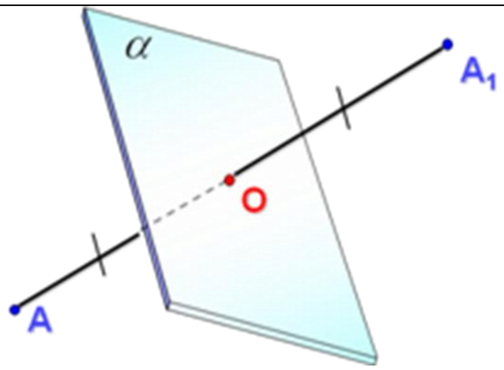
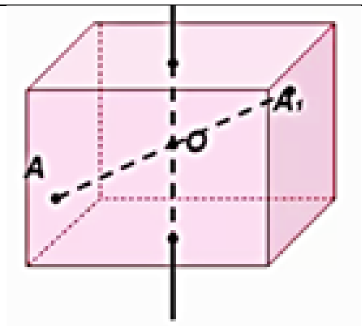
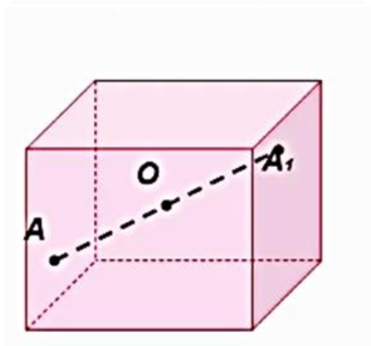
Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и частью пространства, для которой эти полуплоскости служат границей.

Линейным углом двугранного угла называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.



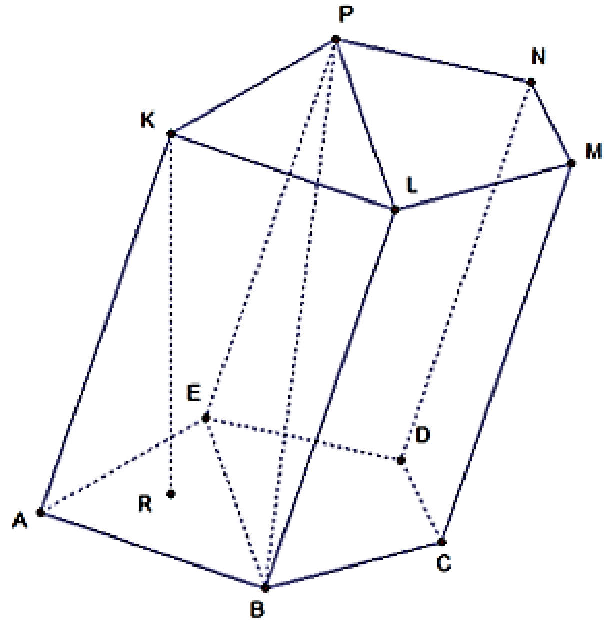
Все линейные углы двугранного угла равны между собой. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

Симметрия фигур

Точки M и M_1 называются симметричными относительно точки O, если O является серединой отрезка MM_1.	
Точки M и M_1 называются симметричными относительно прямой l, если прямая l проходит через середину отрезка MM_1 и перпендикулярна ему.	
Точки M и M_1 называются симметричными относительно плоскости α, если плоскость α проходит через середину отрезка MM_1 и перпендикулярна этому отрезку.	
Точка O (прямая l, плоскость α) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно точки O (прямой l, плоскости α) некоторой точке этой же фигуры. Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные между собой правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.	

Призма

Призма – многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани – параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.
Основания – это две грани, являющиеся равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях. На чертеже это: *ABCDE* и *KLMNP*.
Боковые грани – все грани, кроме оснований. Каждая боковая грань обязательно является параллелограммом. На чертеже это: *ABLK*, *BCML*, *CDNM*, *DEPN* и *EAKP*.
Боковая поверхность – объединение боковых граней.



Полная поверхность – объединение оснований и боковой поверхности

Боковые ребра – общие стороны боковых граней. На чертеже это: *AK*, *BL*, *CM*, *DN* и *EP*.

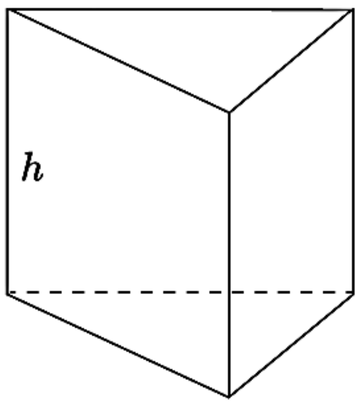
Высота – отрезок, соединяющий основания призмы и перпендикулярный им. На чертеже это, например, *KR*.

Диагональ – отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани. На чертеже это, например, *BP*.

Диагональная плоскость – плоскость, проходящая через боковое ребро призмы и диагональ основания. Другое определение: **диагональная плоскость** – плоскость, проходящая через два боковых ребра призмы, не принадлежащих одной грани.

Диагональное сечение – пересечение призмы и диагональной плоскости. В сечении образуется параллелограмм, в том числе, иногда, его частные случаи – ромб, прямоугольник, квадрат. На чертеже это, например, *EBLP*.

Перпендикулярное (ортогональное) сечение – пересечение призмы и плоскости, перпендикулярной ее боковому ребру.

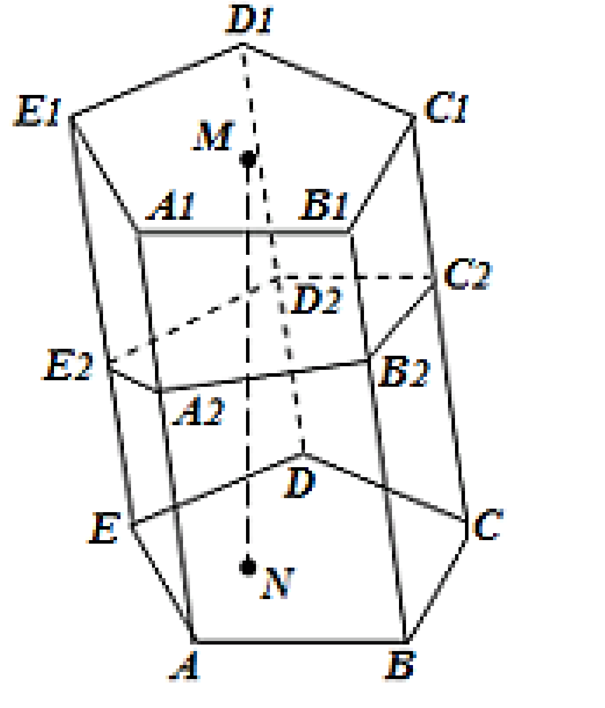


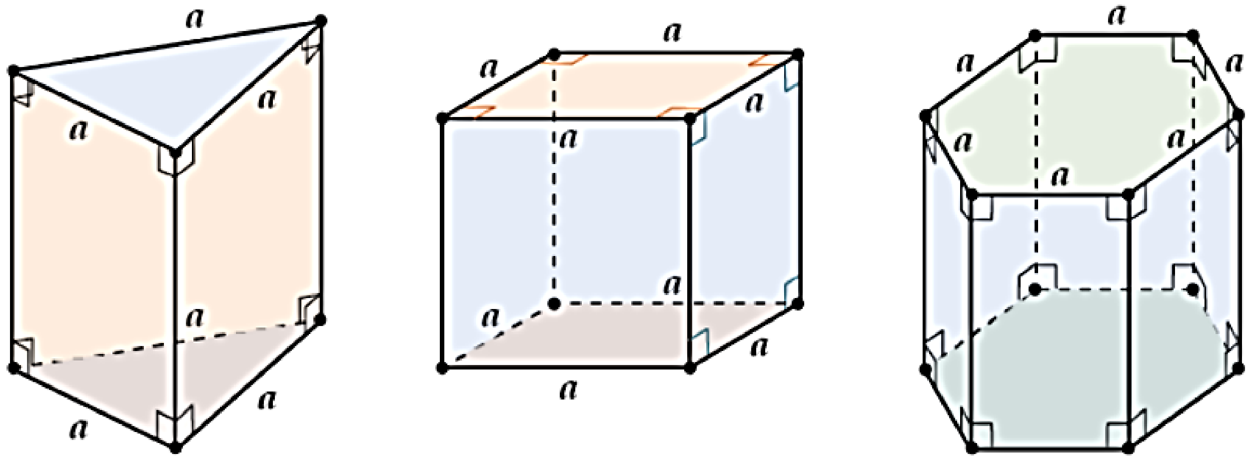
Призма. Основные формулы

Объем призмы:
$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$, где h- высота призмы.

Площадь боковой поверхности:
$S_{\text{бок. пов.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h.$

Площадь полной поверхности:
$S_{\text{пол. пов.}} = S_{\text{бок. пов.}} + 2 \cdot S_{\text{осн.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h + 2 \cdot S_{\text{осн.}}$

Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым рёбрам призмы (на чертеже ниже перпендикулярное сечение это $A_2B_2C_2D_2E_2$). **Объем наклонной призмы** равен произведению площади перпендикулярного сечения на длину бокового ребра: $V = S_{сеч} \cdot l$ $S_{сеч}$ – площадь перпендикулярного сечения, $\boldsymbol{l}$ – длина бокового ребра **Площадь боковой поверхности** произвольной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра: $S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$ где: Рсеч – периметр перпендикулярного сечения, l – длина бокового ребра.	



Свойства правильной призмы:

1. Основания правильной призмы являются правильными многоугольниками.
2. Боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.
3. Боковые ребра правильной призмы равны между собой.
4. Правильная призма является прямой.

Виды призм в стереометрии

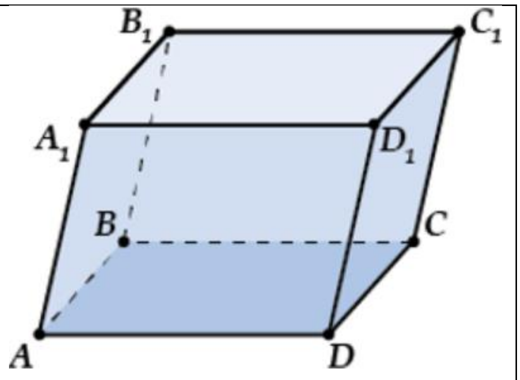
Если боковые ребра не перпендикулярны основанию, то такая призма называется **наклонной** (изображены выше).

Прямая призма – призма, у которой все боковые ребра перпендикулярны основанию. В прямой призме боковые ребра являются высотами. Боковые грани прямой призмы - прямоугольники.

Правильная призма – призма в основании которой лежит правильный многоугольник (т.е. такой, у которого все стороны и все углы равны между собой), а боковые ребра перпендикулярны плоскостям основания.

Параллелепипед

Параллелепипед – это призма, основания которой параллелограммы. Параллелепипед – частный случай призмы.
Две грани параллелепипеда, не имеющие общего ребра, называются противолежащими, а имеющие общее ребро – смежными.
Две вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, называются противолежащими.
Отрезок, соединяющий противолежащие вершины, называется диагональю параллелепипеда.



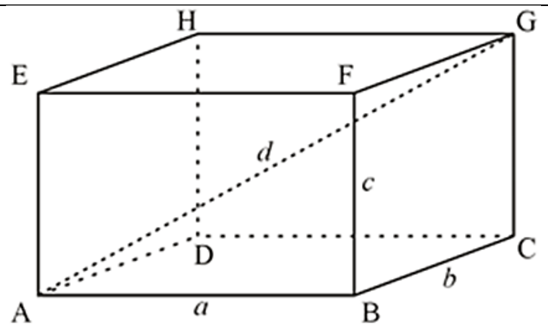
Параллелепипед имеет шесть граней и все они – параллелограммы.
Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.
У параллелепипеда четыре диагонали; они все пересекаются в одной точке, и каждая из них делится этой точкой пополам.

Диагональ прямоугольного параллелепипеда d и его рёбра a, b, c связаны соотношением:

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Из общей формулы для объема призмы можно получить следующую формулу для **объема прямоугольного параллелепипеда**:

$$V = S_{осн} \cdot h = abc$$



Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок. пов.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 2c \cdot (a + b).$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{пол. пов.}} = S_{\text{бок. пов.}} + 2 \cdot S_{\text{осн.}} = 2(ab + bc + ac).$$

Куб. Основные формулы

Объем куба:

$$V = a^3.$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{пол. пов.}} = 6 \cdot a^2.$$

Площадь боковой поверхности:

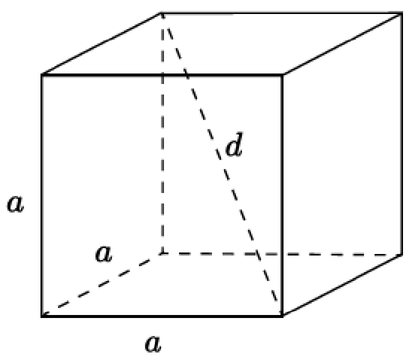
$$S_{\text{бок. пов.}} = 4 \cdot a^2.$$

Диагональ куба:

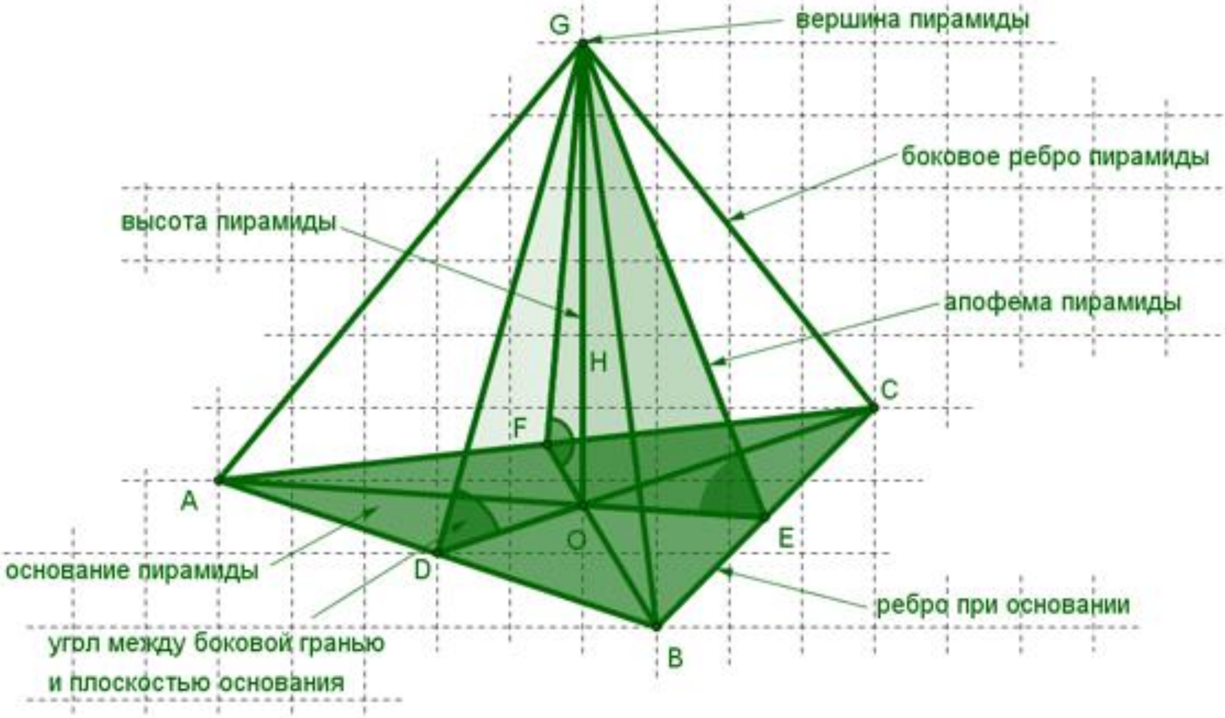
$$d = a\sqrt{3}.$$

Прямоугольный параллелепипед, все грани которого являются равными квадратами, называется кубом. Помимо прочего, куб является правильной четырехугольной призмой, и вообще правильным многогранником.

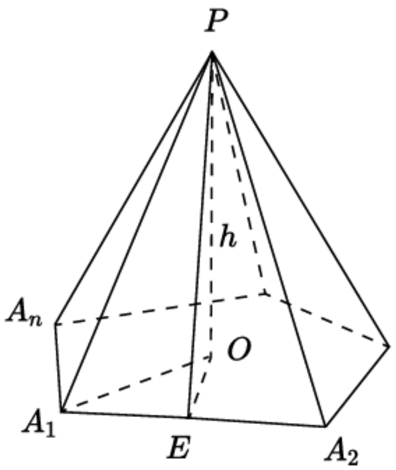
Абсолютно все рёбра куба равны между собой.



Пирамида



Пирамида. Основные формулы



Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h$$, где h– высота пирамиды.

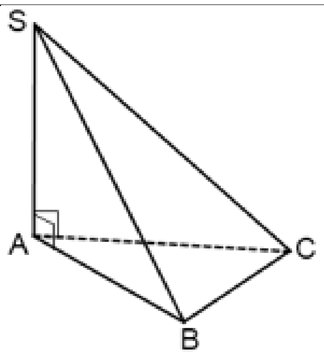
Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок. пов.}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн.}} \cdot l$$, где l– апофема.

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{пол. пов.}} = S_{\text{бок. пов.}} + S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн.}} \cdot l + S_{\text{ осн.}}$$

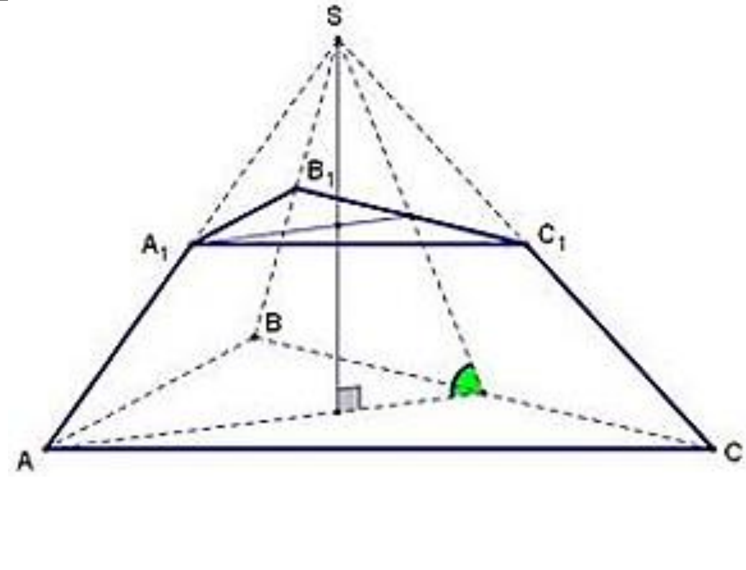
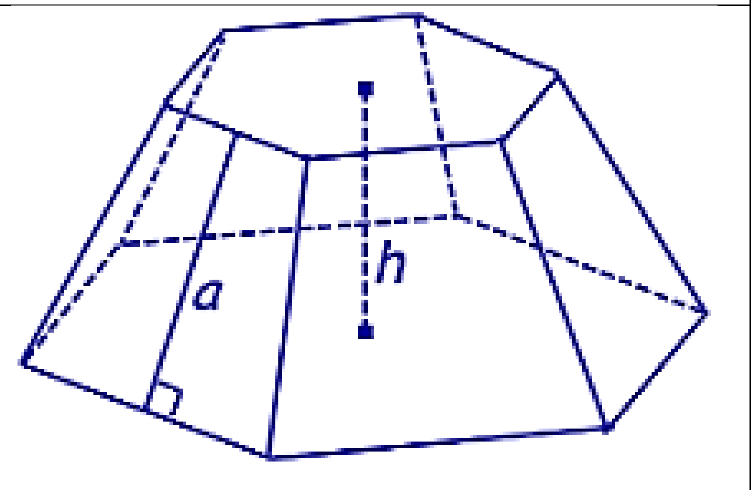
Эта формула работает в правильной пирамиде!



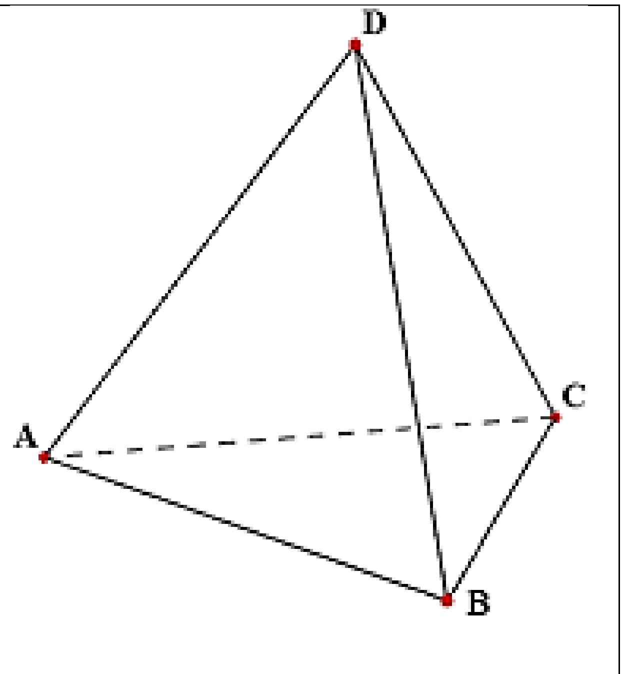
Определение: При решении задач по стереометрии, пирамида называется **прямоугольной**, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В таком случае, это ребро и является высотой пирамиды. Ниже примеры треугольной и пятиугольной прямоугольных пирамид. На рисунке слева *SA* – ребро, являющееся одновременно высотой.

При решении задач по стереометрии, **пирамида называется прямоугольной,** если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В таком случае, это ребро и является высотой пирамиды. Ниже примеры треугольной и пятиугольной прямоугольных пирамид. На рисунке слева SA – ребро, являющееся одновременно высотой.

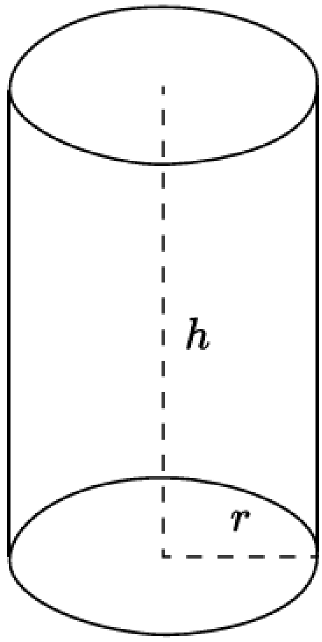
Усеченная пирамида

Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию. Фигура, полученная на пересечении секущей плоскости и исходной пирамиды, также называется основанием усеченной пирамиды. Итак, у усеченной пирамиды на чертеже два основания: ABC и $A_1B_1C_1$.	
Объём усечённой пирамиды равен: $V_{\text{усеч. пир}} = \frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(S_1+\sqrt{S_1\cdot S_2}+S_2\right)$ **Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды:** $S_{\text{бок. пр. усеч. пир}} = \frac{1}{2}\cdot\left(P_1+P_2\right)\cdot a$ **Площадь полной поверхности любой усеченной пирамиды:** $S_{\text{полн. усеч. пир}} = S_1+S_2+S_{\text{бок. усеч. пир}}$	

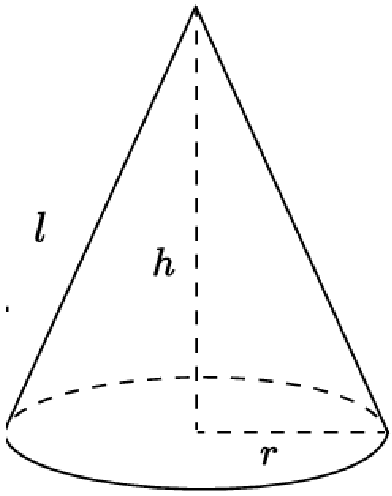
Тетраэдр

Тетраэдр – простейший многогранник, гранями которого являются четыре треугольника, иными словами, треугольная пирамида. Для тетраэдра любая из его граней может служить основанием. Всего у тетраэдра 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер. Формулы для **объема и площадей правильного тетраэдра** (*a* – длина ребра): $S_{\text{осн. пр. тетр}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $S_{\text{бок. пр. тетр}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ $h_{\text{пр. тетр}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ $V_{\text{пр. тетр}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ $S_{\text{полн. пр. тетр}} = a^2\sqrt{3}$	

Цилиндр

Цилиндрической поверхностью называется фигура, образованная этими прямыми, а сами прямые называются образующими цилиндрической поверхности. Все образующие цилиндрической поверхности параллельны друг другу, так как они перпендикулярны плоскости окружности. **Объем цилиндра:** $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$, где h– высота цилиндра. **Площадь боковой поверхности:** $S_{\text{бок.пов.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 2\pi rh.$ **Площадь полной поверхности:** $S_{\text{пол.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + 2S_{\text{осн.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r).$ **Прямым круговым цилиндром** или просто цилиндром называется геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, которые перпендикулярны образующим цилиндрической поверхности.	

Конус

Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга (называемого основанием конуса), точки, не лежащей в плоскости этого круга (называемой вершиной конуса) и всех возможных отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки (или их длины), соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются **образующими конуса.** **Радиусом конуса** называется радиус его основания.	

Высотой конуса называется перпендикуляр (или его длина), опущенный из его вершины на плоскость основания.

Высота (h), радиус (R) и длина образующей (l) прямого кругового конуса удовлетворяют очевидному соотношению: $l^2 = h^2 + R^2$

Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$, где h– высота конуса.

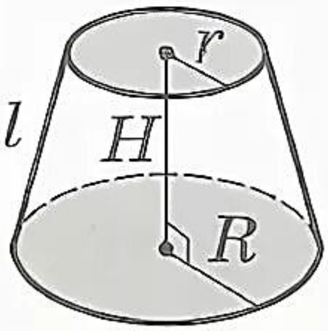
Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок.пов.}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн.}} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot l = \pi rl$$, где l– образующая конуса.

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{пол.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + S_{\text{осн.}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l+r).$$

Усеченный конус



$$l = \sqrt{(R-r)^2 + H^2}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi l (R + r)$$

$$S_{\text{полн}} = \pi \left[R^2 + r^2 + l(R + r) \right]$$

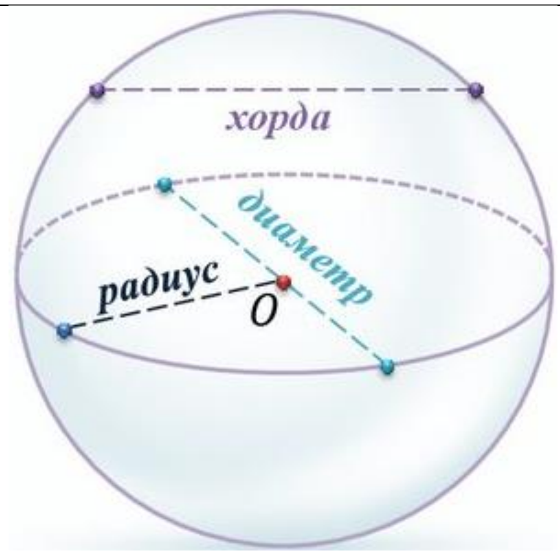
$$V = \frac{\pi}{3} H (R^2 + Rr + r^2)$$

Шар и Сфера

Шар – геометрическое тело; совокупность всех точек пространства, которые находятся на расстоянии не большем заданного от некоторого центра. Это расстояние называется радиусом шара.

Сфера – замкнутая поверхность, геометрическое место точек в пространстве, равноудалённых от данной точки, называемой центром сферы (поверхность шара).

Плоскость, проходящая через центр сферы (шара), называется **диаметральной плоскостью.**



Теорема 1 (признак касательной плоскости к сфере). Плоскость, перпендикулярная радиусу сферы и проходящая через его конец, лежащий на сфере, касается сферы.

Теорема 2 (о свойстве касательной плоскости к сфере). Касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Теорема 1 (о площади сферы). Площадь сферы равна:

$$S_{\text{сферы}} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

где: R – радиус сферы.

Теорема 2 (об объеме шара). Объем шара радиусом R вычисляется по формуле:

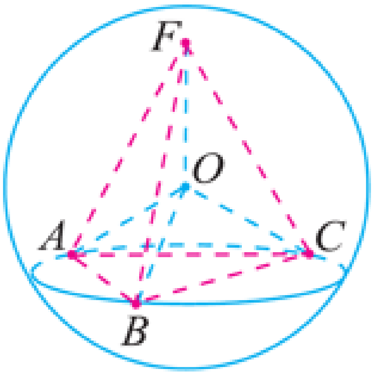
$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

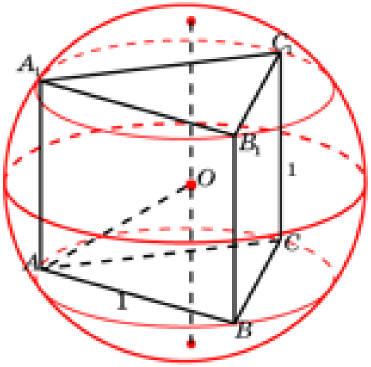
Вписанные и описанные фигуры

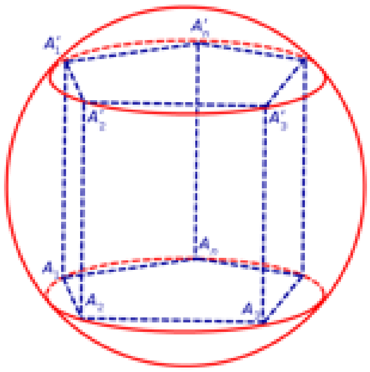
Вписанные и описанные сферы

В стереометрии многогранник (например, пирамида или призма) называется вписанным в сферу, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется описанной около многогранника (пирамиды, призмы).

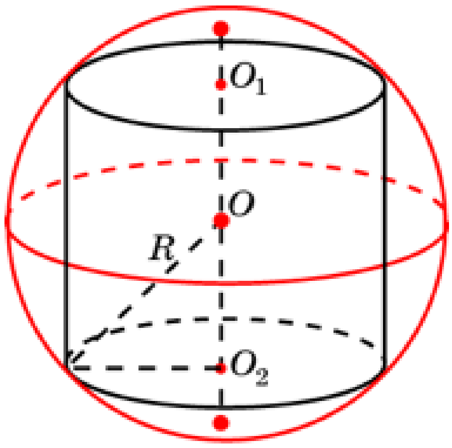
Важное свойство: Центр сферы, описанной около многогранника, находится на расстоянии, равном радиусу *R* сферы, от каждой вершины многогранника. Приведем примеры вписанных в сферу многогранников:





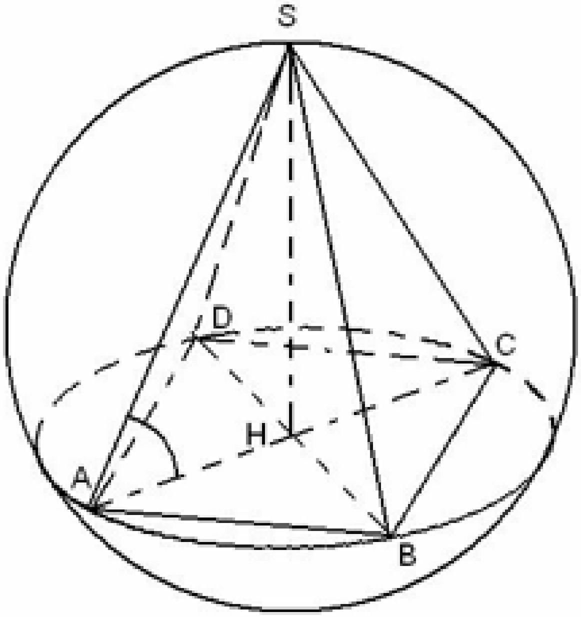


Цилиндр называется вписанным в сферу, если окружности оснований цилиндра являются сечениями сферы. Цилиндр называется вписанным в шар, если основания цилиндра являются сечениями шара. При этом шар (сфера) называется описанным около цилиндра. Вокруг любого цилиндра можно описать сферу. Центром описанной сферы также будет служить середина оси цилиндра. Пример:



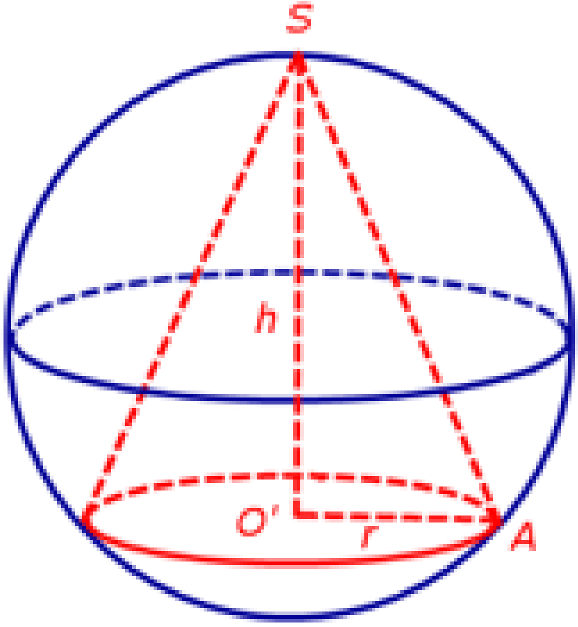
На основе теоремы Пифагора легко доказать следующую формулу, связывающую радиус описанной сферы (R), высоту цилиндра (h) и радиус цилиндра (r):

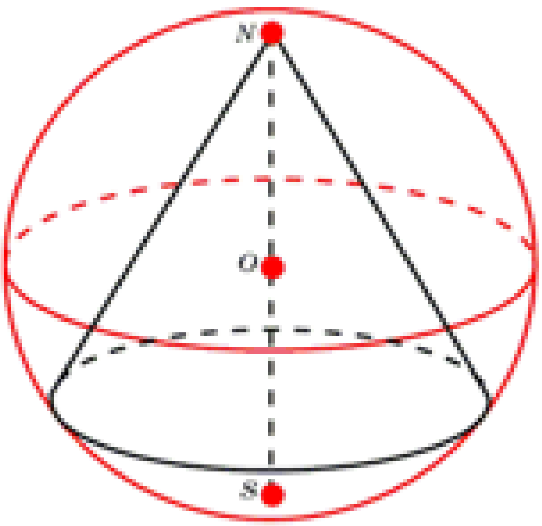
$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$$

Около пирамиды можно описать сферу тогда, когда в основании пирамиды лежит вписанный многоугольник (т.е. многоугольник около которого можно описать сферу). Данное условие является необходимым и достаточным. Центром сферы будет точка пересечения плоскостей, проходящих через середины рёбер пирамиды перпендикулярно им. Из этой теоремы следует, что как около любой треугольной, так и около любой правильной пирамиды можно описать сферу. Любая правильная пирамида является такой, в которую можно вписать сферу.	

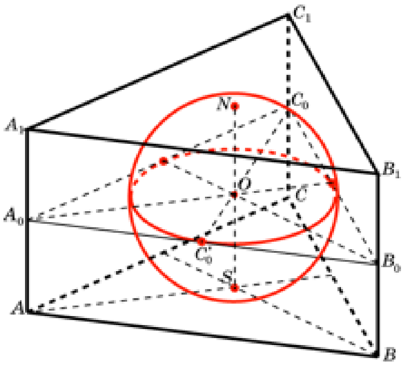
Конус называется вписанным в сферу (шар), если его вершина принадлежит сфере (границе шара), а окружность основания (само основание) является сечением сферы (шара). При этом сфера (шар) называется описанной около конуса. Вокруг прямого кругового конуса всегда можно описать сферу. Центр описанной сферы будет лежать на прямой содержащей высоту конуса, а радиус этой сферы будет равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса (это сечение является равнобедренным треугольником).

Примеры:





Определение: Многогранник называется **описанным около сферы (шара)**, если сфера (шар) касается **всех** граней многогранника. При этом сфера и шар называются вписанными в многогранник.

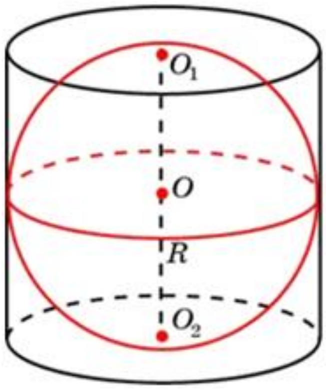


Важно: Центр сферы, вписанной в многогранник, находится на расстоянии, равном радиусу *r* сферы, от каждой из плоскостей, содержащих грани многогранника. Приведем примеры описанных около сферы многогранников:

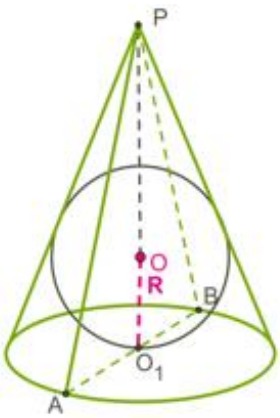
Теорема 3 (Архимеда): Объём шара в полтора раза меньше объёма, описанного вокруг него цилиндра, а площадь поверхности такого шара в полтора раза меньше площади полной поверхности того же цилиндра:

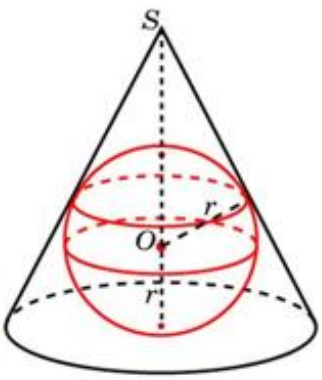
$$S_{\text{впис. сферы}} = \frac{2}{3} S_{\text{полн. опис. цилиндра}}$$

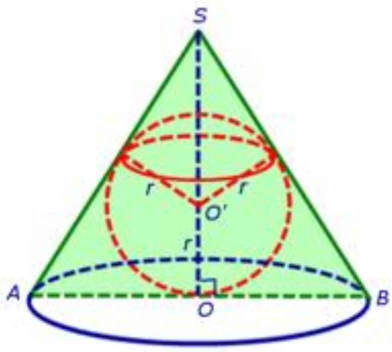
$$V_{\text{впис. шара}} = \frac{2}{3} V_{\text{опис. цилиндра}}$$



Сфера (шар) называется вписанной в конус, если сфера (шар) касается основания конуса и каждой его образующей. При этом конус называется описанным около сферы (шара). В прямой круговой конус всегда можно вписать сферу. Её центр будет лежать на высоте конуса, а радиус вписанной сферы будет равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса (это сечение является равнобедренным треугольником). Примеры:







Глава 2. Простейшие стереометрические задачи

2.1 Куб

1. Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ.

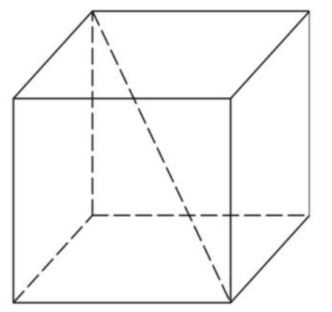
2. Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.

3. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?

4. Диагональ куба равна $\sqrt{12}$ Найдите его объем.

5. Площадь поверхности куба равна 128. Найдите длину его диагонали.

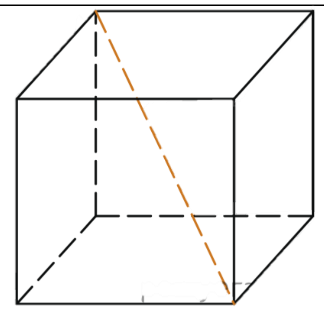
6. Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объем.



7. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.

8. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 19. Найдите ребро куба.

9. Объем первого куба в 8 раз больше объема второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?



10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра AA_1 точка L — середина ребра A_1D_1, точка M — середина ребра A_1B_1. Найдите угол MLK. Ответ дайте в градусах.

Ответы для самопроверки:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	**24**	**27**	**8**	**8**	**8**	**4**	**2**	**4**	**60**

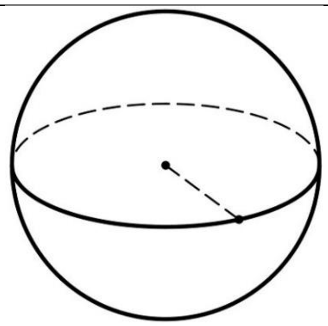
2.2 Шар

1. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

2. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

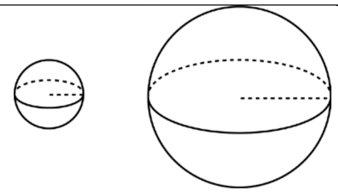
3. Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.

4. Объем шара равен 288 Найдите площадь его поверхности, деленную на



5. Даны два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

6. Объем первого шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



7. Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

Ответы для самопроверки:

1	2	3	4	5	6	7
12	27	6	144	4	9	12

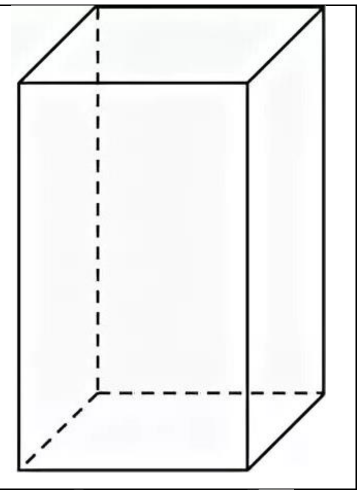
2.3 Прямоугольный параллелепипед

1. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

2. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

3. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.

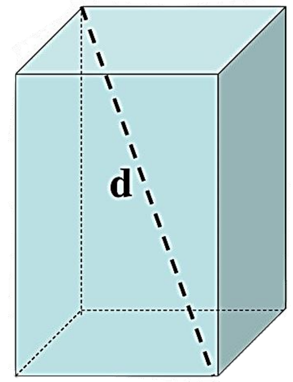
4. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.



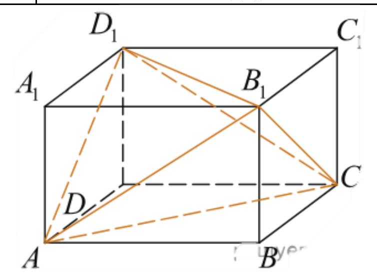
5. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.

6. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите объем параллелепипеда.

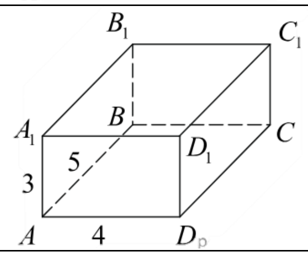
7. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.



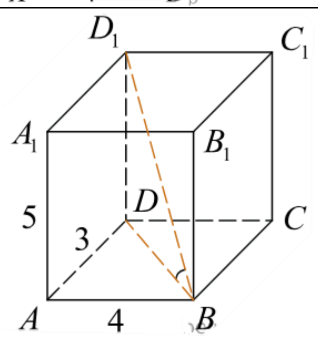
8. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.



9. Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого AB = 5, AD = 4, AA_1=3.



10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что AB = 4, AD = 3, AA_1 = 5. Найдите угол DBD_1. Ответ дайте в градусах.



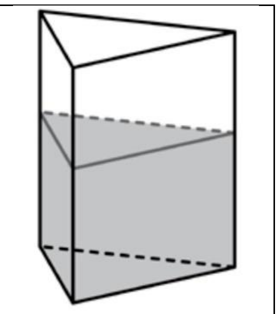
Ответы для самопроверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	48	5	6	3	32	4	1,5	5	45

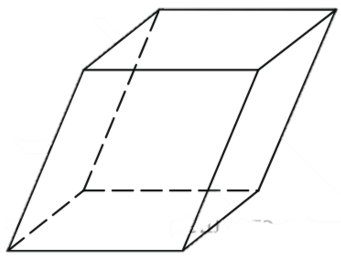
2.4 Призма

1. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3.

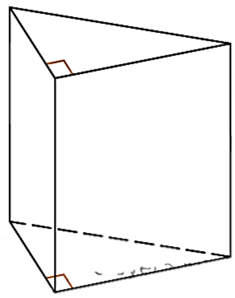
2. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.



3. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.

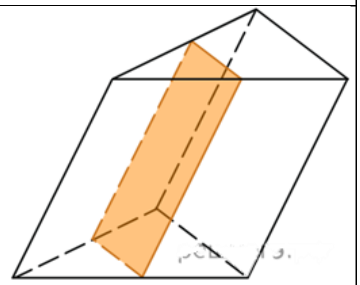


4. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объем призмы.



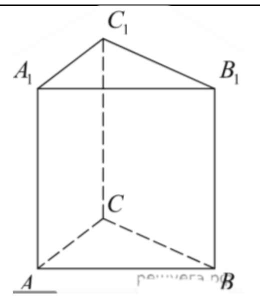
5. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

6. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсеченной треугольной призмы равен 5.



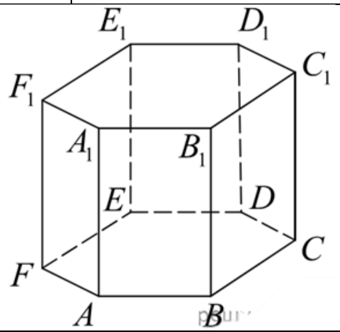
7. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.

8. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.



9. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, правильной шестиугольной призмы, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками B и E.



11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1.
A) Найдите тангенс угла AD_1D
B) Найдите угол AC_1C Ответ дайте в градусах.

Ответы для самопроверки:

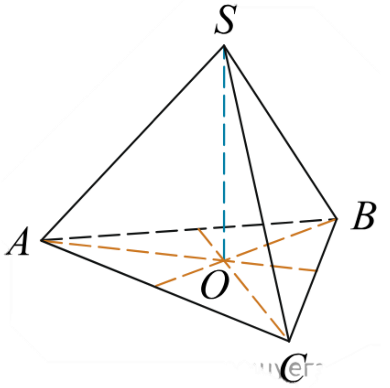
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11(A)	11(B)
184	5	1,5	120	8	20	2	4	4	2	2	60

2.5 Пирамида

1. В правильной треугольной пирамиде SABC с вершиной S биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.

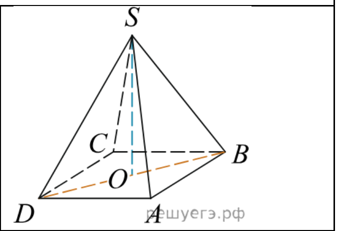
2. В правильной треугольной пирамиде *SABC* медианы основания *ABC* пересекаются в точке *O*. Площадь треугольника *ABC* равна 4; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка *OS*.

3. В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2, объем пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка OS.

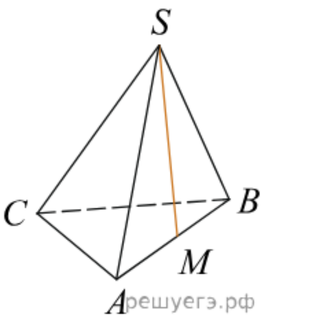


4. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 15$, $BD = 16$. Найдите боковое ребро SA.

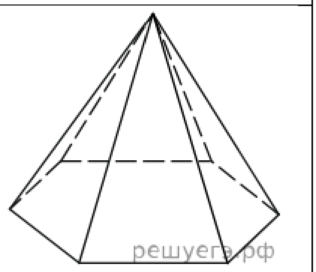
5. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O — центр основания, S — вершина, $SD = 10$, $SO = 6$. Найдите длину отрезка AC.



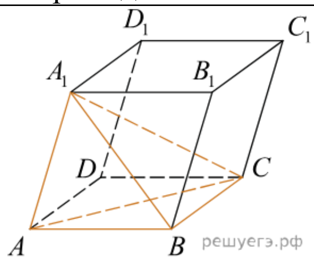
6. В правильной треугольной пирамиде SABC точка L — середина ребра AC, S — вершина. Известно, что BC = 6, а SL = 5. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



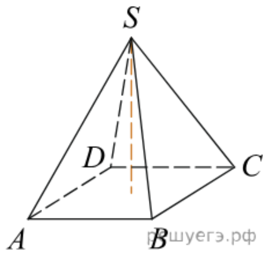
7. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



8. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCA_1$.



9. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.



10. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O — центр основания, S вершина, SO = 4, AC = 6. Найдите боковое ребро SC.

11. В правильной треугольной пирамиде *SABC* точка *R* — середина ребра *BC*, *S* — вершина. Известно, что *AB* = 1, а *SR* = 2. Найдите площадь боковой поверхности.

12. В правильной треугольной пирамиде *SABC* точка *L* — середина ребра *BC*, *S* — вершина. Известно, что *SL* = 2, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка *AB*.

13. В правильной треугольной пирамиде *SABC* медианы основания пересекаются в точке *P*. Объем пирамиды равен 1, *PS* = 1. Найдите площадь треугольника *ABC*.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

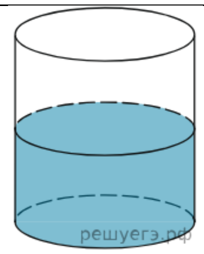
Ответы для самопроверки:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
9	4,5	6	17	16	45	360	1,5	4	5	3	1	3	0,25

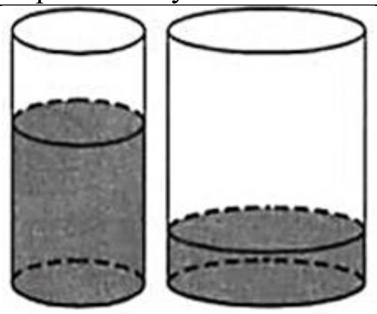
2.6 Цилиндр

1. В цилиндрический сосуд налили 2000 $см^3$ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в $см^3$.

2. В цилиндрический сосуд налили 6 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,5 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.

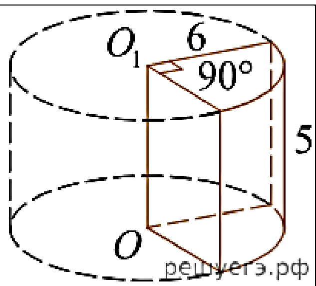


3. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ дайте в сантиметрах.

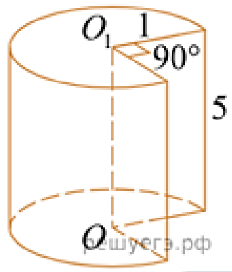


4. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π

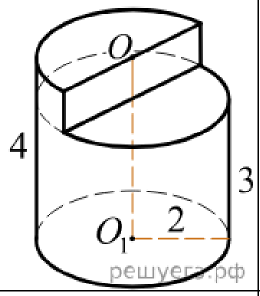
5. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



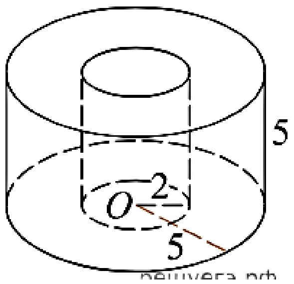
6. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



7. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



8. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



9. Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.

10. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а диаметр основания — 1. Найдите высоту цилиндра.

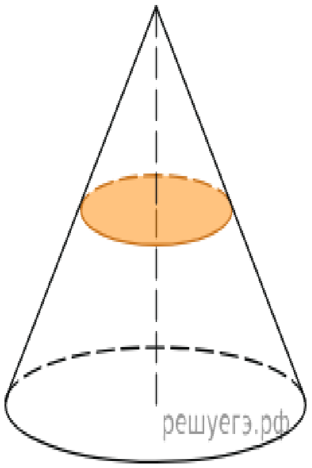
11. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а высота — 1. Найдите диаметр основания.

Ответы для самопроверки:

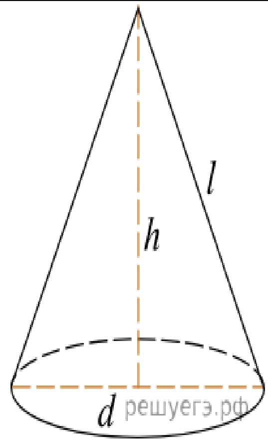
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1500	3	4	12	45	3,75	14	105	2	2	2

2.7 Конус

1. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



2. Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

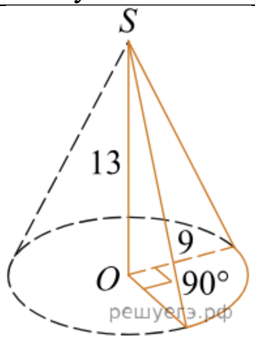


3. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?

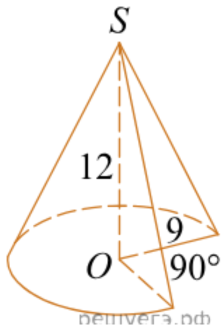
4. Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса, деленный на π.

5. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

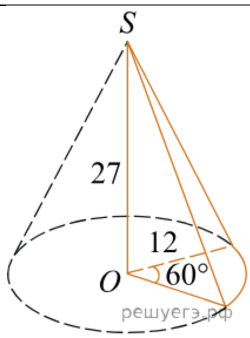
6. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



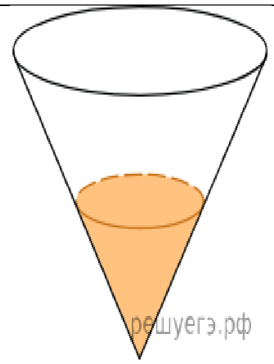
7. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



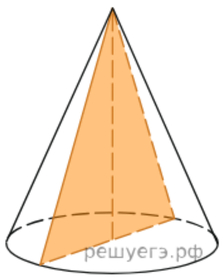
8. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



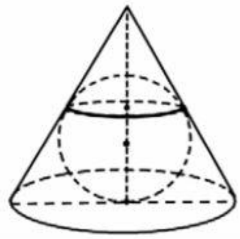
9. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



10. Высота конуса равна 8, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



11. Шар вписан в конус. Радиус основания конуса равен 3, а образующая равна 6. Найдите площадь поверхности шара, делённую на π.

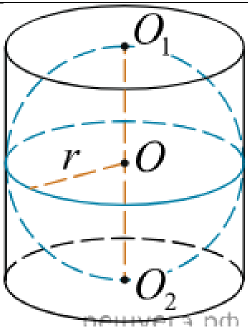


Ответы для самопроверки:

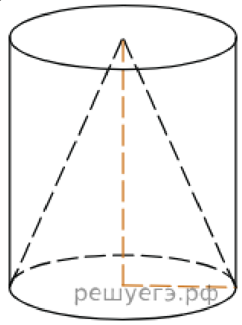
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	1	3	9	3	87,75	243	216	490	48	12

2.8 Комбинации тел

1. Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара.

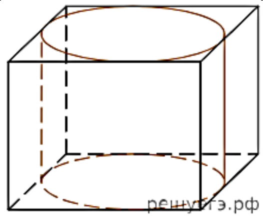


2. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.

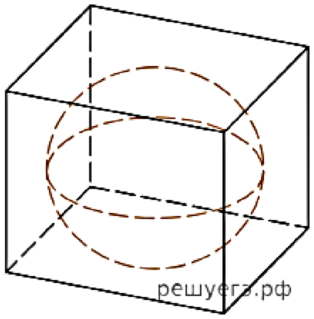


3. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.

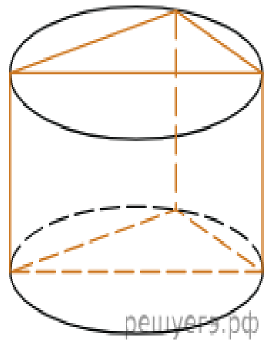
4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.



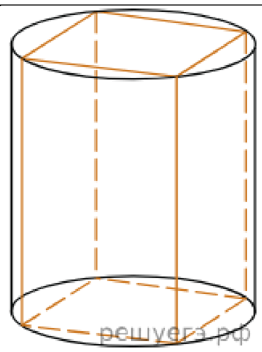
5. В куб вписан шар радиуса 1. Найдите объем куба.



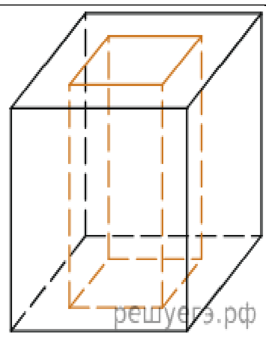
6. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\frac{5}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



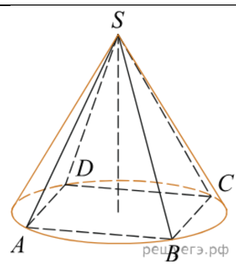
7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра равны $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



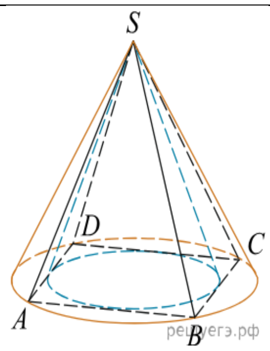
8. Из единичного куба вырезана правильная четырехугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.



9. Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на π.



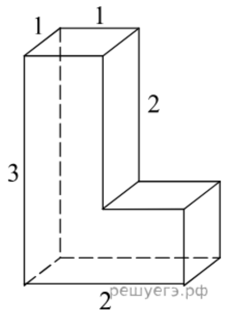
10. Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?



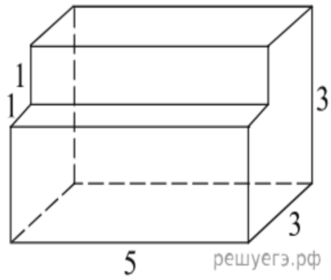
Ответы для самопроверки:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	50	4	0,25	8	125	4	7,5	16	2

2.9 Площадь поверхности составного многогранника

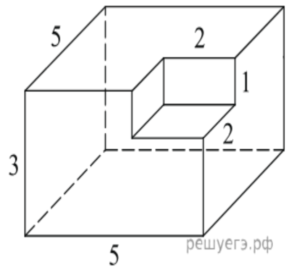


1. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

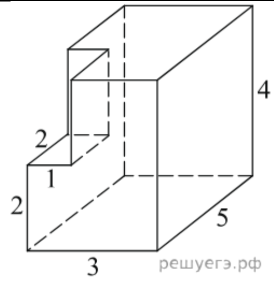


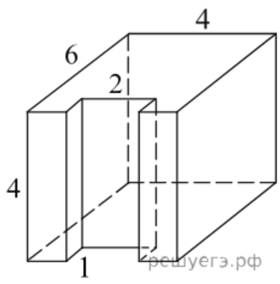
2. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

3. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

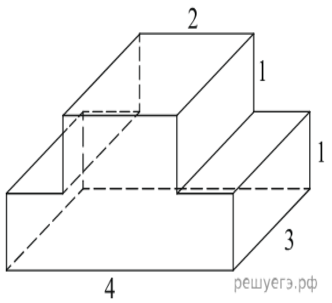


4. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



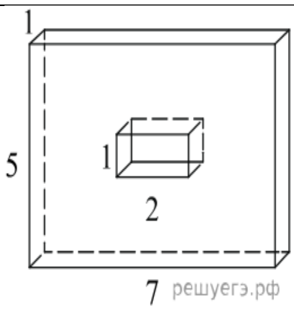


5. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

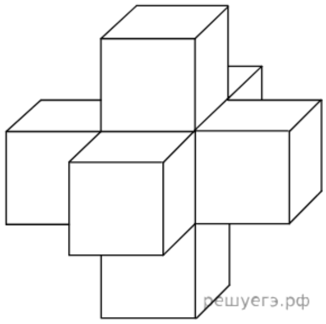


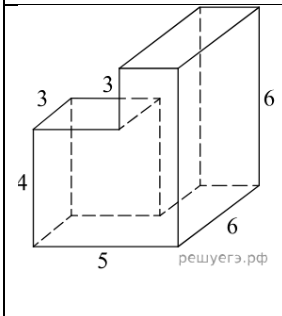
6. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

7.Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

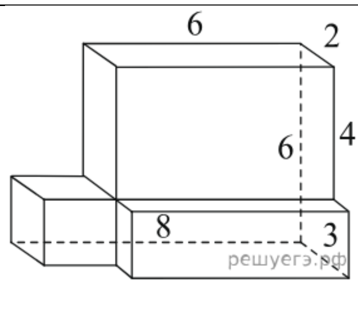


8. Найдите площадь поверхности пространственного креста, изображенного на рисунке и составленного из единичных кубов.





9. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

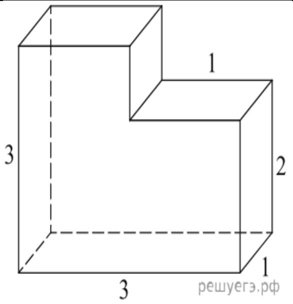


10. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

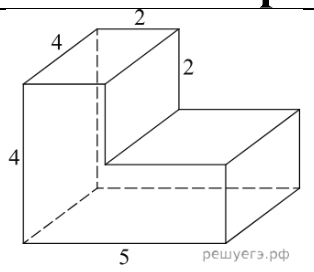
Ответы для самопроверки:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	76	110	94	132	48	96	30	162	152

2.10 Объем составного многогранника

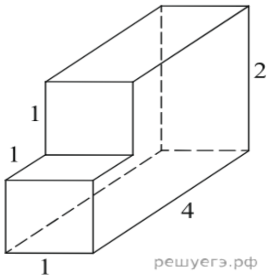


1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

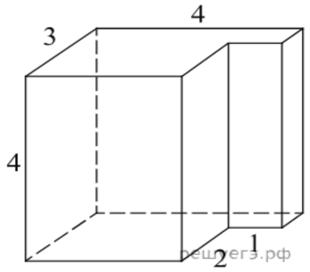


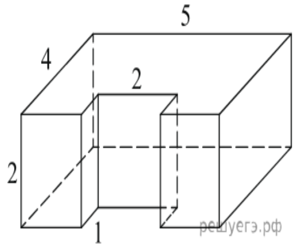
2. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

3. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

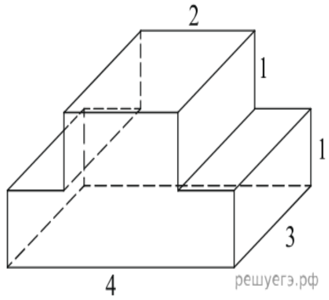


4. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



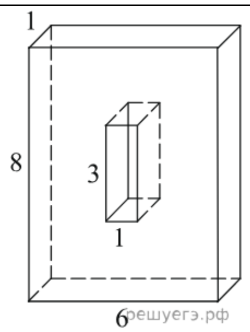


5. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

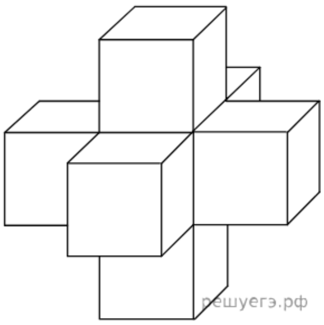


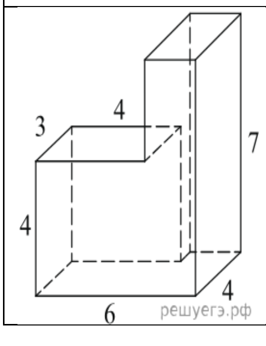
6. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

7. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

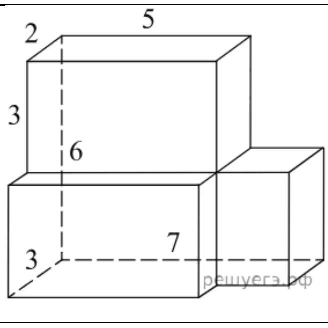


8. Найдите объем пространственного креста, изображенного на рисунке и составленного из единичных кубов.





9. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



10. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

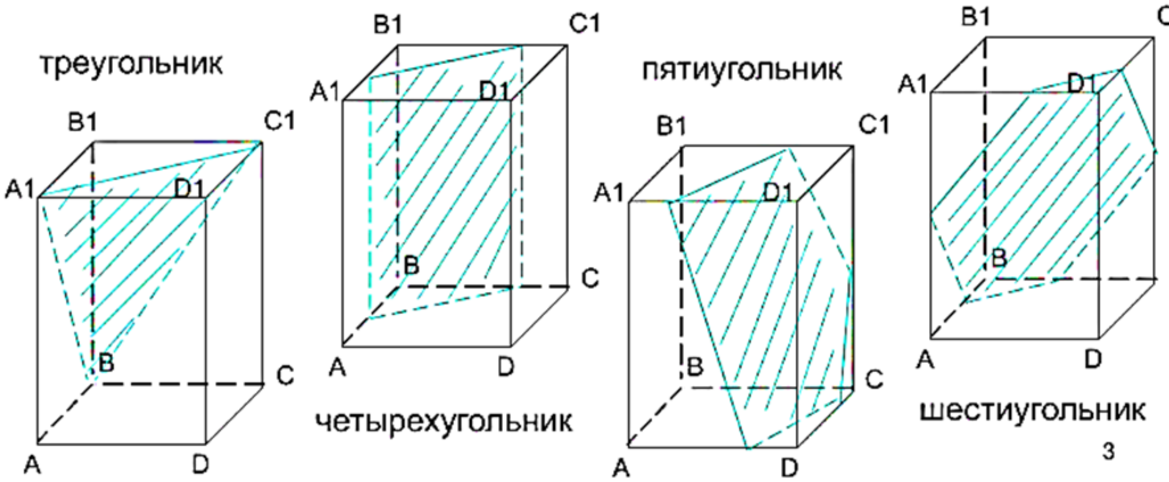
Ответы для самопроверки:

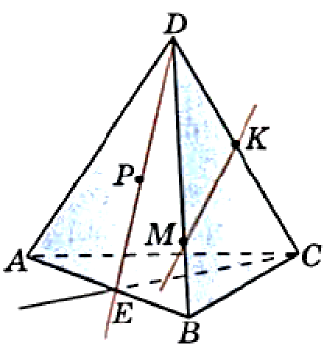
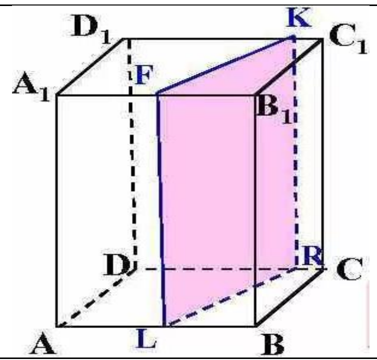
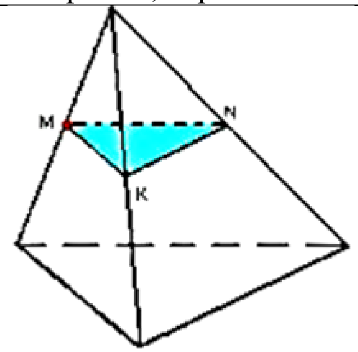
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	56	7	40	36	18	45	7	104	87

Глава 3. Построение сечений многогранников

3.1 Сечения многогранников. Методы построения сечений

Сечение — это изображение фигуры, получающееся при мысленном рассечении предмета секущей плоскостью.

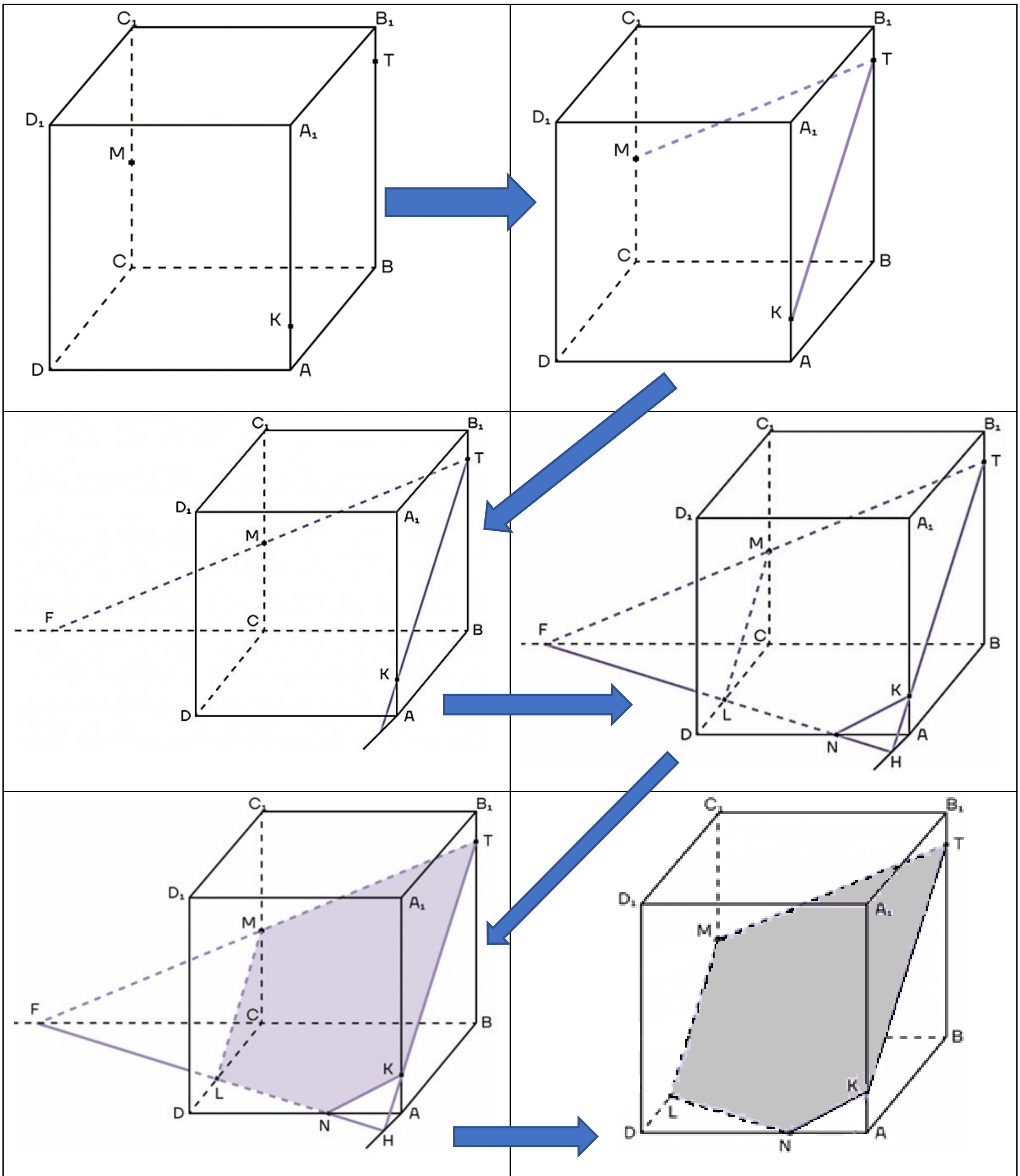


<table>
<tr><th colspan="3">3 принципа построения сечений</th></tr>
<tr><td>Если две точки A и B принадлежат плоскости сечения, то и вся прямая AB принадлежит плоскости сечения.</td><td>Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым.</td><td>Если плоскость сечения содержит прямую a, параллельную некоторой плоскости α, то она сечет α по прямой, параллельной a.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">Методы построения сечений</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Метод следов
Суть: последовательно строятся следы плоскости сечения на всех гранях, которые она пересекает.
След — прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость какой-либо грани многогранника.</td><td colspan="2">Метод внутреннего проектирования
Суть: точки искомого сечения строятся по их вторичным проекциям.</td><td rowspan="3">Комбинированный метод
Суть: на каких-то этапах применяются приёмы метода следов, а на других — теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве. Приёмы из каждого метода могут применяться вместе в одной и той же задаче.</td></tr>
<tr><td>Центральное</td><td>Параллельное</td></tr>
<tr><td>построении сечений пирамид, вершина пирамиды – служит центром проекции.</td><td>используется при построении сечений призм.</td></tr>
</table>

3.2 Метод следов

Задача: Построим сечение куба, которое проходит через точки К, М и Т.



Построение:

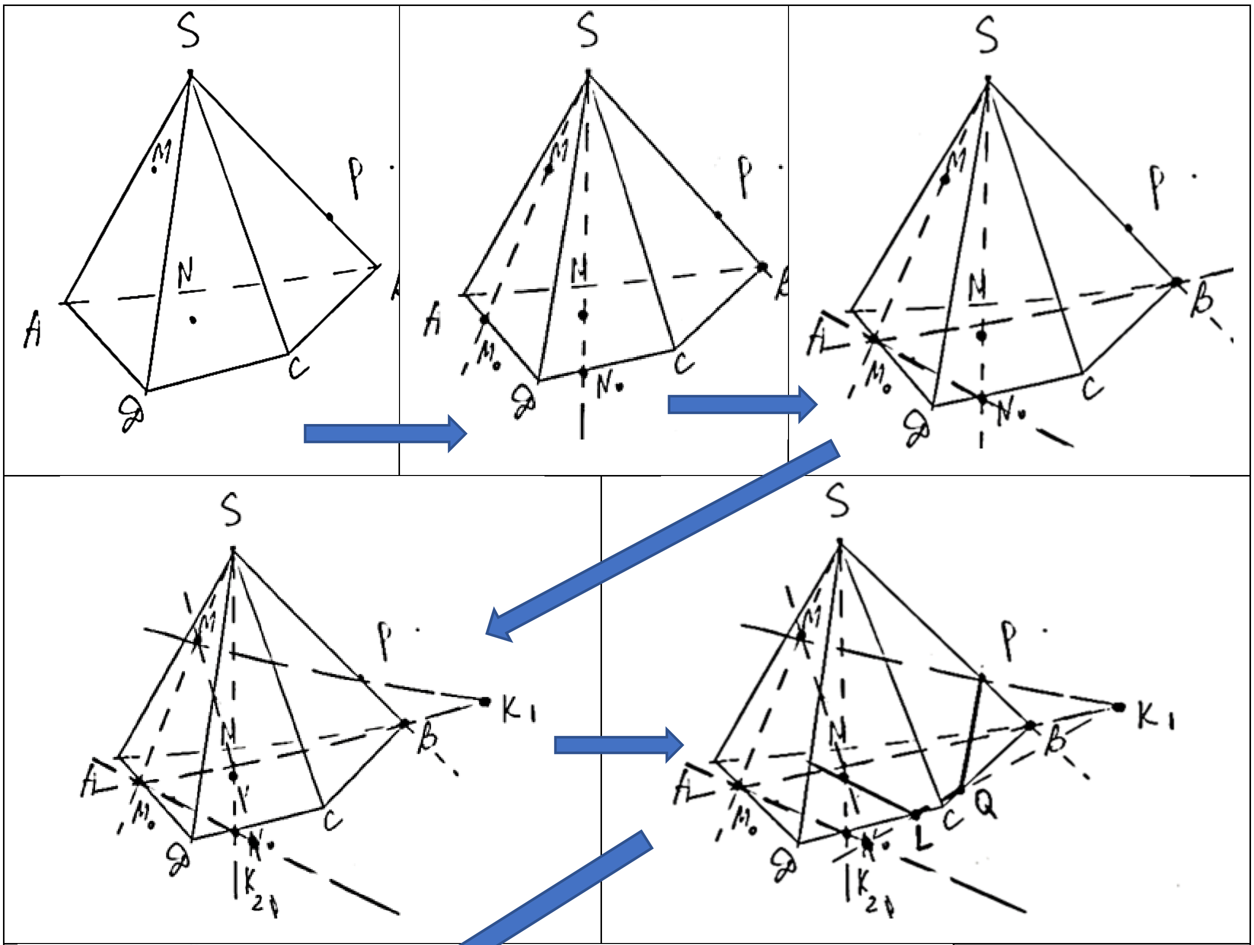
1. Соединить точки Т и К, затем точки Т и М, так как они лежат в одних плоскостях.
2. Продлить прямые CB и ТМ до точки пересечения F; ТК пересекает АВ в точке Н.
3. Точки Н и F лежат в плоскости ABCD, поэтому соединяем их прямой.
4. FH пересекает DC и AD в точках L и N соответственно.
5. Соединяем все оставшиеся точки. Получаем NKTML – искомая плоскость.

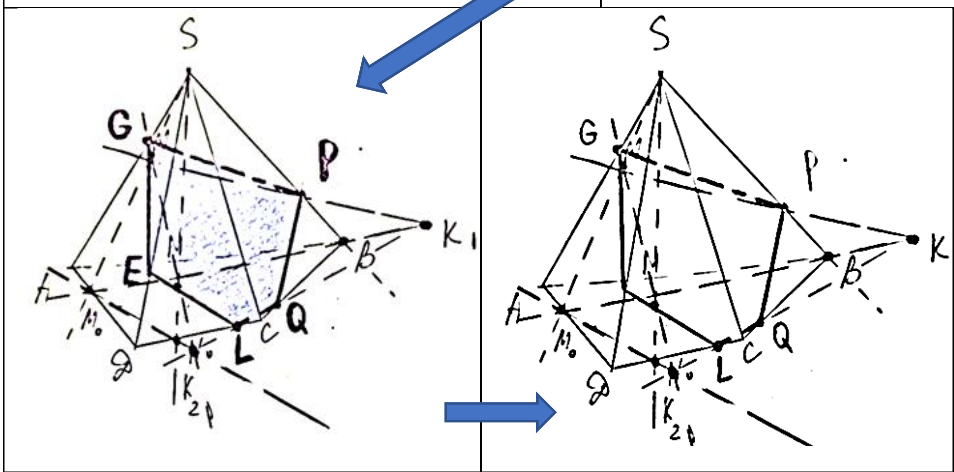
Метод заключается в продлении прямых до точек пересечения. Важно учитывать в каких плоскостях лежат прямые. Будьте внимательны, перед построением точек пересечения!

3.3 Метод внутреннего проектирования

3.3.1 Центральное проектирование.

Задача: Построить сечение пирамиды через точки $M \epsilon (SAD); N \epsilon (SCD); P \epsilon SB$.





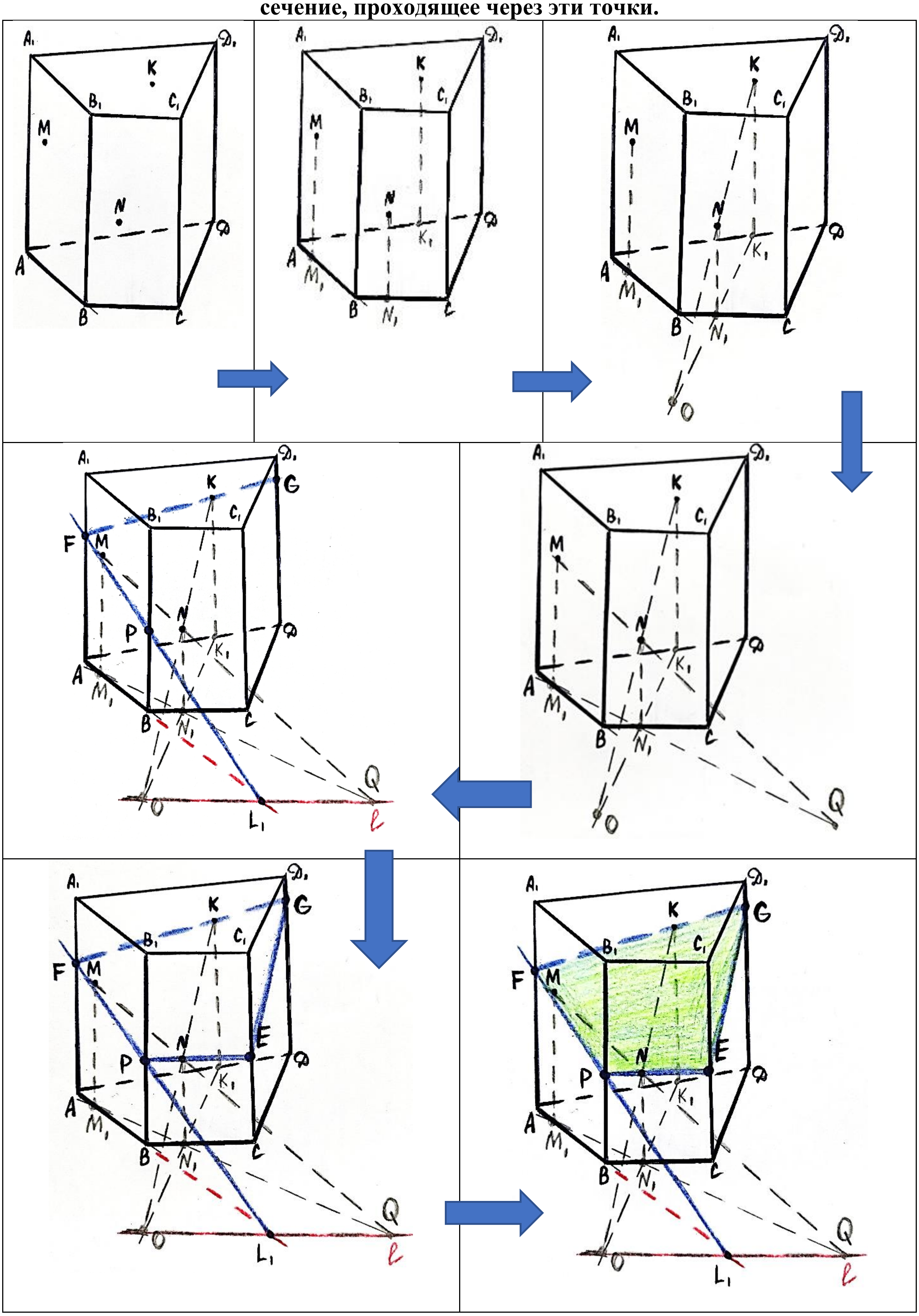
1. SN, SM и SP. Проекции точек M, N и P на ABC соответственно M_0, N_0 и B.
2. M_0B и M_0N_0.
3. $MP \cap M_0B = K_1$;
4. $MN \cap M_0 N_0 = K_2$.
5. $K_1K_2 \cap CB = Q$;
6. $K_1K_2 \cap CD = L$.

7. На гранях SD и SA отмечаем точки E и G.
8. GPQLE – искомая плоскость.

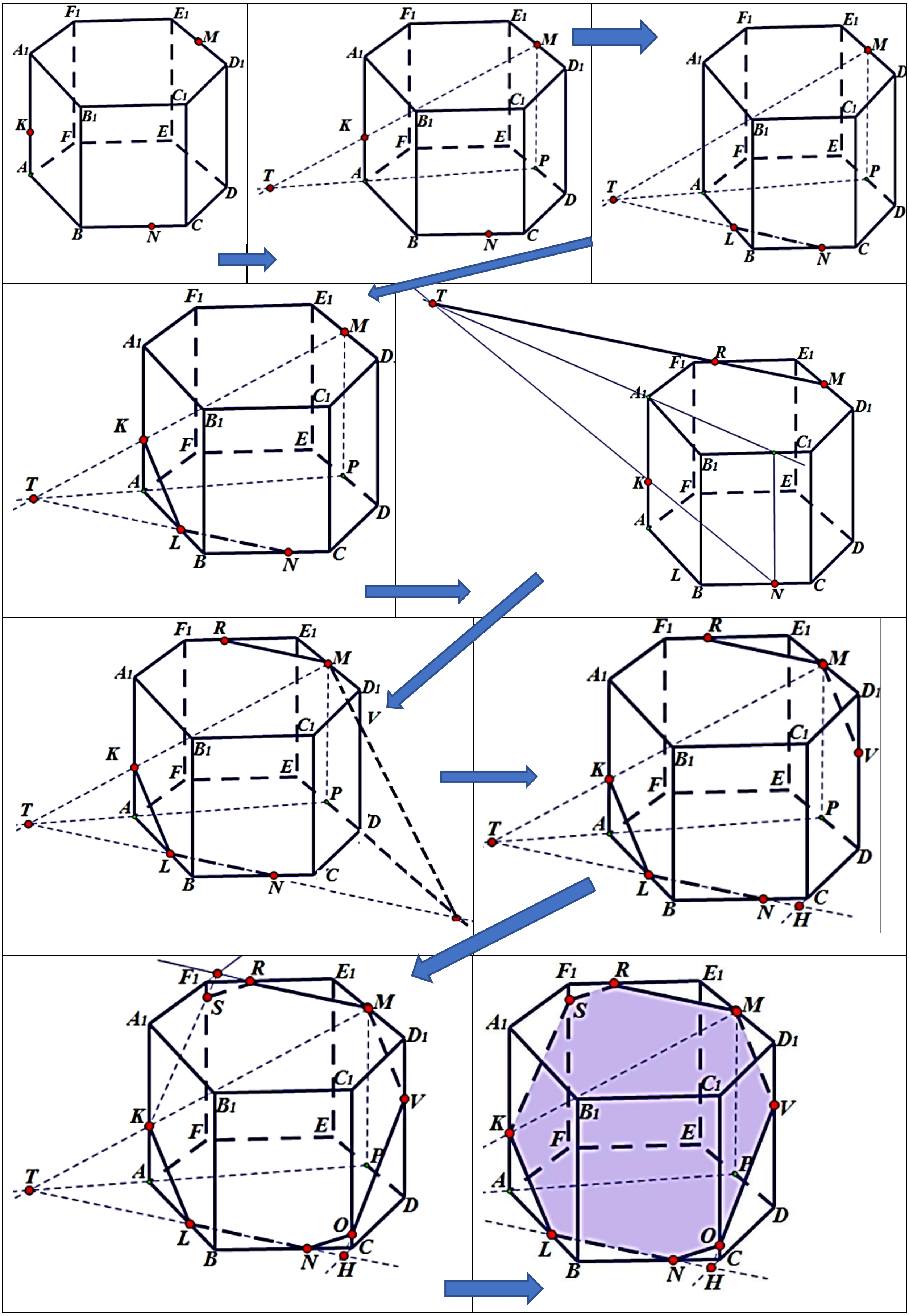
За центр берется точка S пирамиды, от нее проводим прямые к точкам, через которые пройдет сечение. Строим проекции этих точек на нижней грани. Соединяем их. Проводим через сами точки прямые и достраиваем их до точек пересечения с проекциями нижних граней.

3.3.2 Параллельное проектирование.

Дана четырехугольная призма. Точки К($AA_1Д_1Д$), N(BB_1C_1C), M(AA_1B_1B). Построить сечение, проходящее через эти точки.

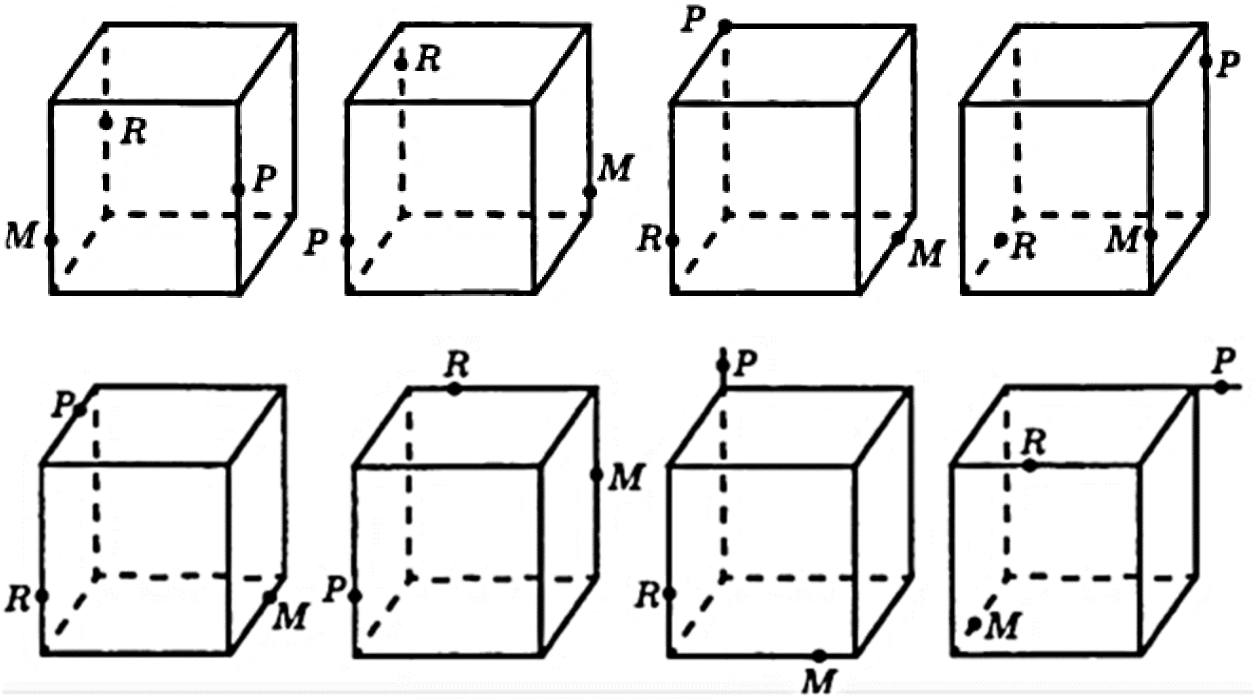


3.4 Комбинированный метод

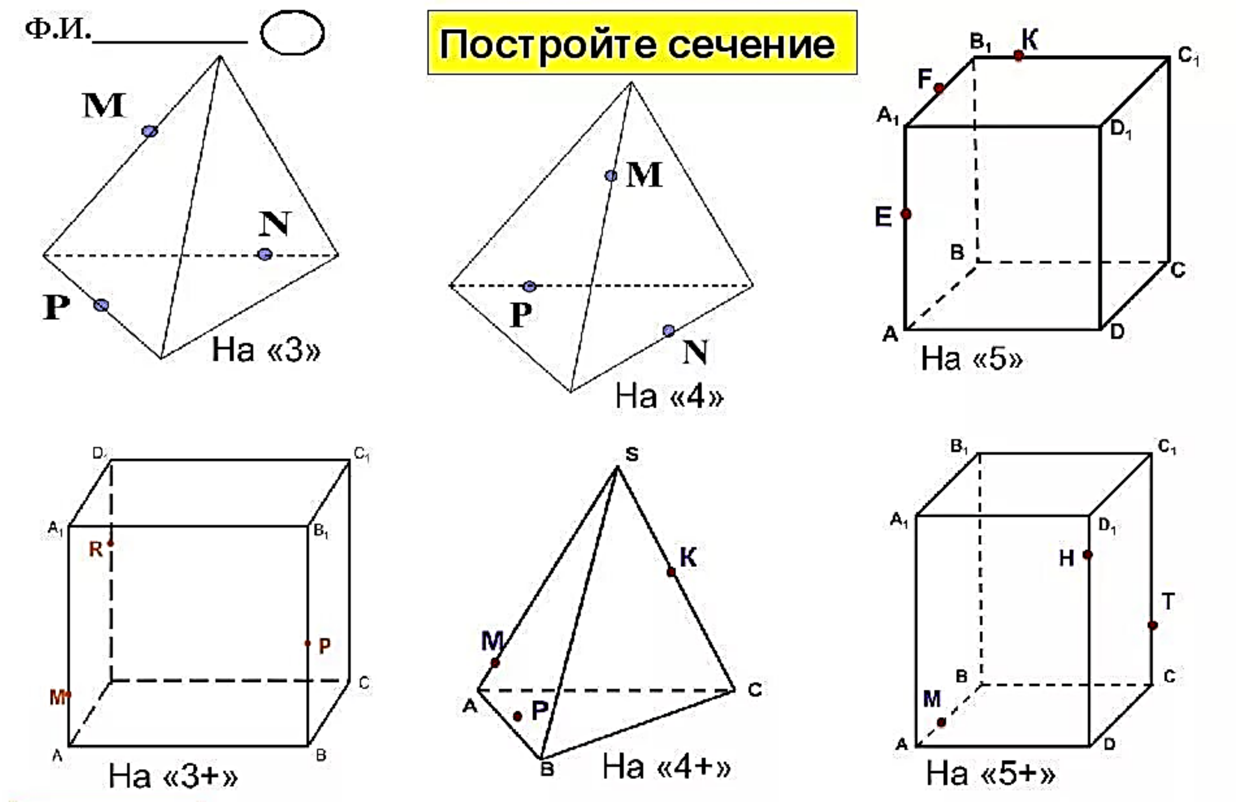


3.5 Задачи на построение сечений

№ 1. Построить сечения в кубе, проходящее через точки M, P, R.



№ 2. Постройте сечения, проходящие через точки N, M и P. (Проверка с учителем)

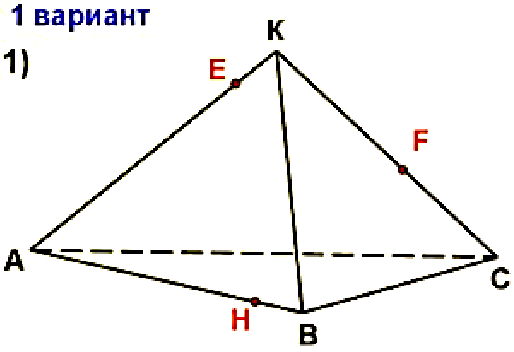


№ 3. Выполните практическое задание

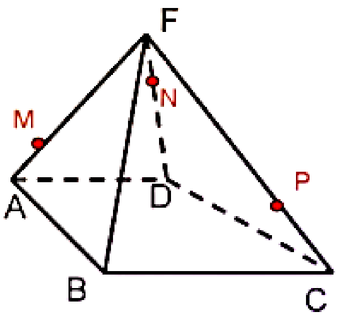
Практическая работа. **Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через указанные точки.**

1 вариант

1)

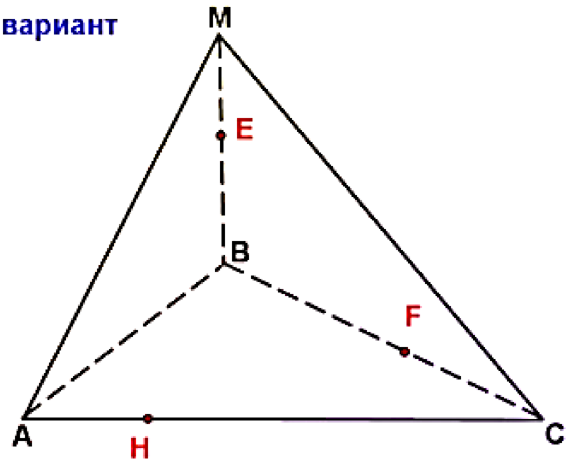


2)

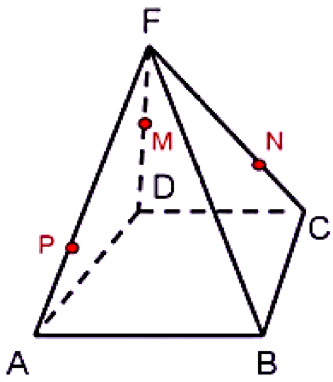


2 вариант

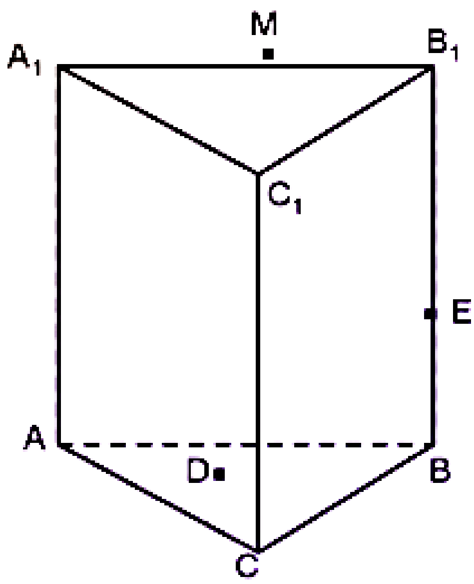
1)



2)

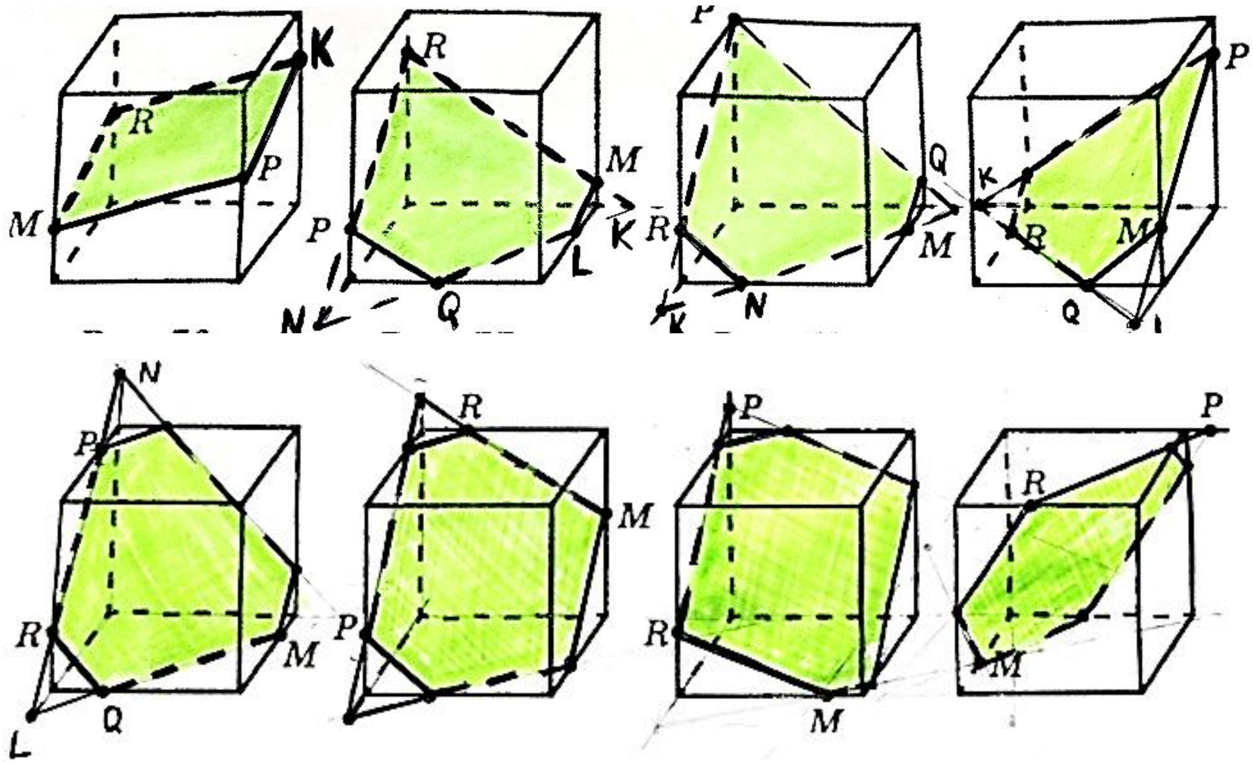


№ 4. Построить сечение призмы, проходящее через точки М, Д и Е.

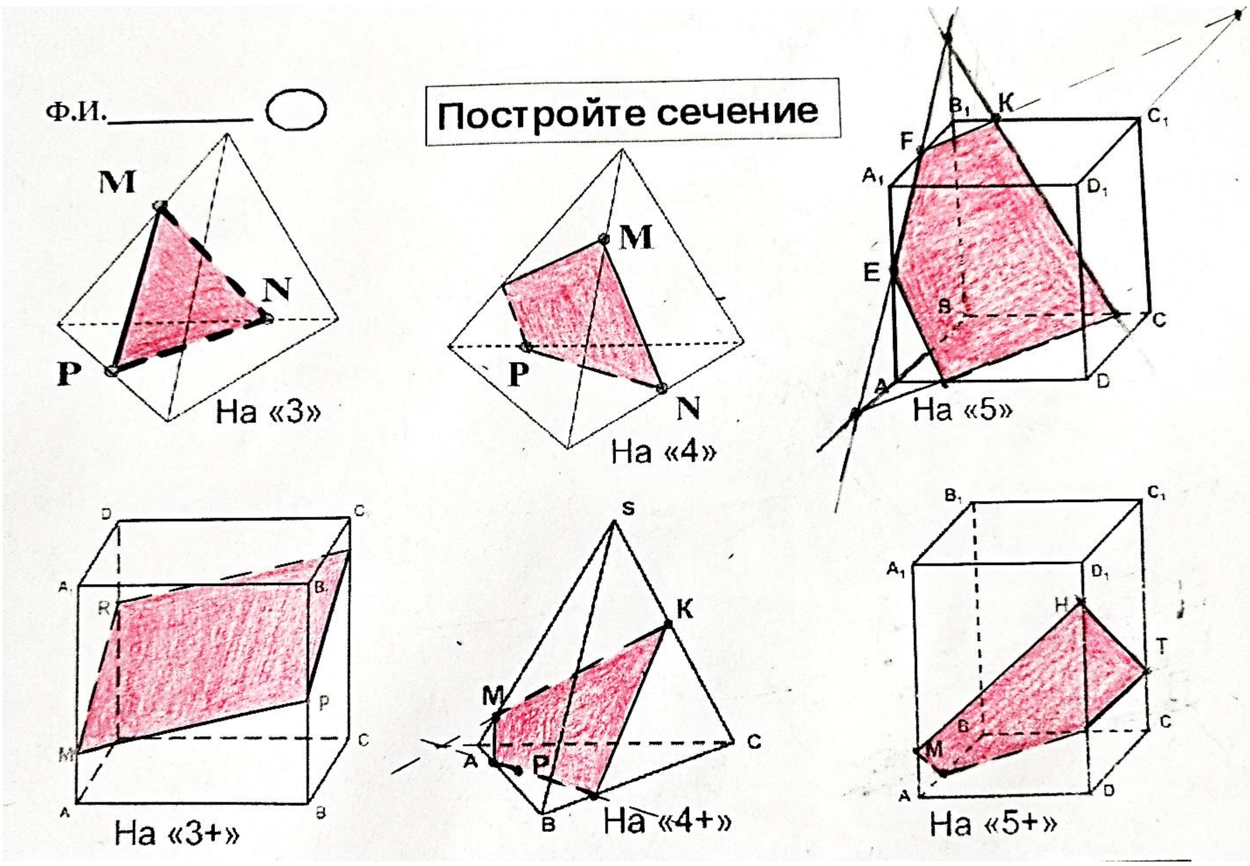


3.6 Проверка заданий на построение сечений

№1



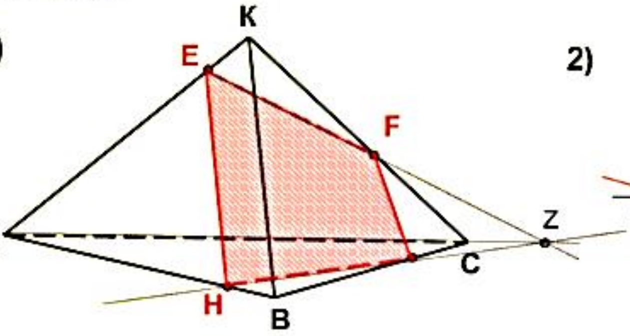
№ 2



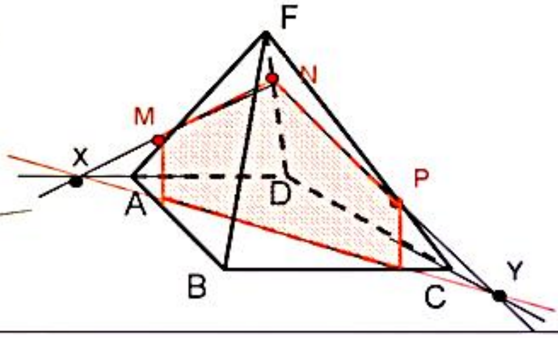
№ 3

1 вариант

1)

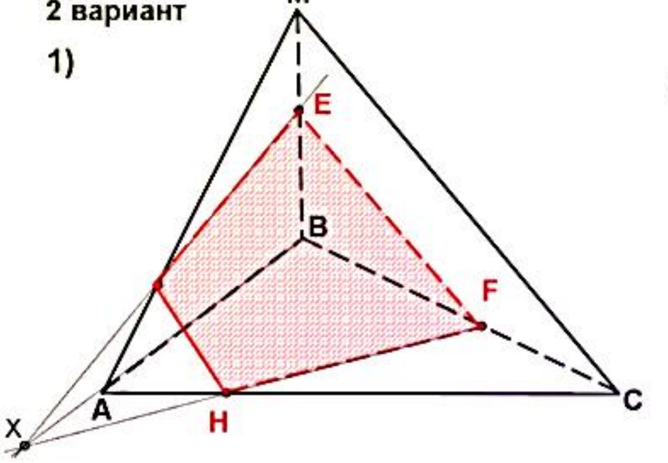


2)

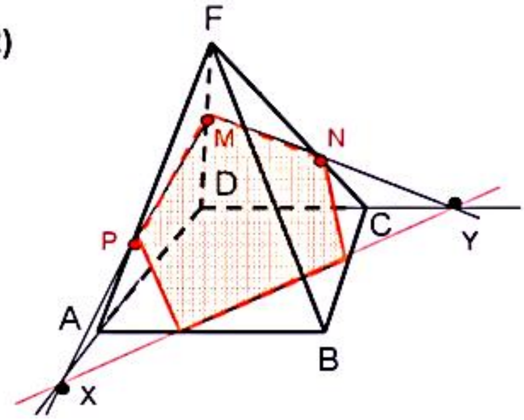


2 вариант

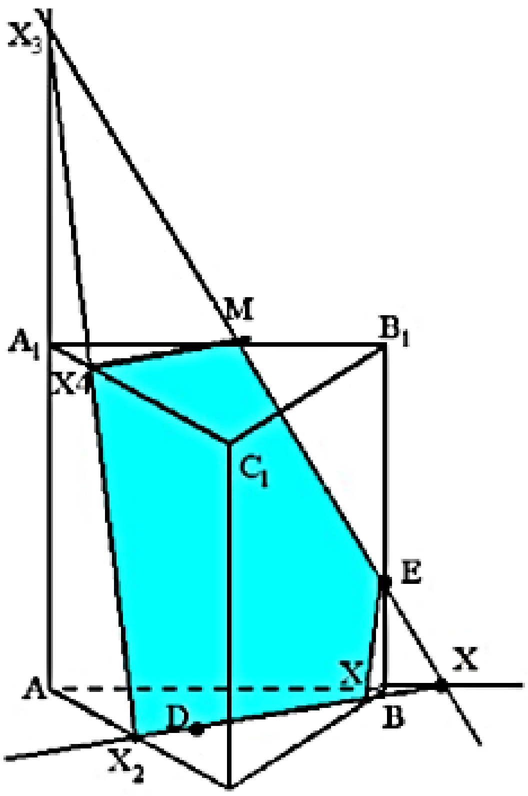
1)



2)



№ 4



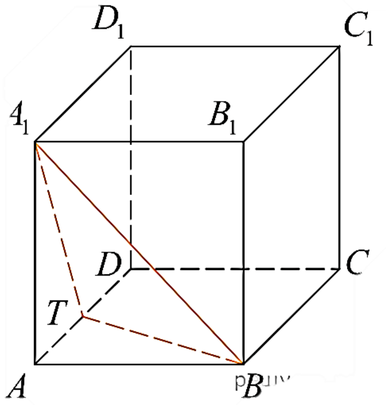
Глава 4. Методы решения задачи № 14 ЕГЭ профильной математики

4.1 Классический (основанный на определениях и признаках)

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка T — середина ребра AD.

а) Докажите, что плоскость A_1BT делит объем куба в отношении 1 : 11.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT.



Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$– куб,
$AB = 1$,
$AT = TD$.

ЗАМЕЧАНИЕ!

Приведем решение одной задачи, так как этот метод не подразумевает никаких особенностей в применении.

Решение:

Решим первую часть задачи, а)

1. Найдём объём пирамиды A_1ATB, это одна из частей, на которые куб делится плоскостью A_1BT. Он равен $\frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot S_{ATB} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

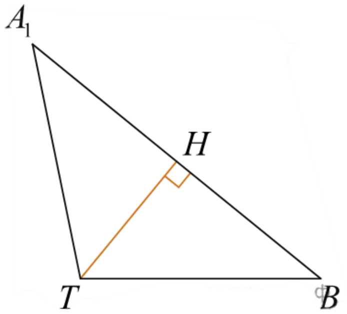
2. Объём второй части куба равен $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

3. Отсюда искомое отношение равно $\frac{1}{12} \div \frac{11}{12} = 1 \div 11$.

Приступаем ко второй части б)

1) Пусть h — искомое расстояние. Найдём двумя способами объём пирамиды A_1ATB. С одной стороны, из пункта а), он равен $\frac{1}{12}$. С другой стороны, он равен $\frac{1}{3} h \cdot S_{A_1TB}$ Треугольник A_1BT — равнобедренный, его основание A_1B равно $\sqrt{2}$, а боковые стороны равны $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2)



Если H — середина основания A_1B, то $TH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $S_{A_1BT} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.Следовательно, объём пирамиды A_1ATB равен $h \cdot \frac{\sqrt{6}}{12}$. Приравняем выражения для объёма:$h \cdot \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{12}$.

Откуда $h = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. **Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.**

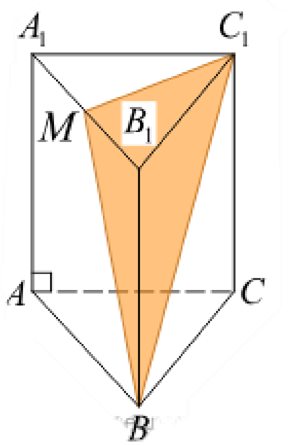
4.2 Метод проекций

Метод проекций — это способ построения изображения объекта на плоскости с помощью проецирующих лучей. Полученное изображение называется проекцией объекта. Больше используется при построении сечений.

Параллельное проектирование	Ортогональное проектирование
Принцип: через каждую точку объёмного тела проводят прямые, параллельные друг другу и пересекающие плоскость проекции под каким-либо углом. Каждая из этих прямых пересекает плоскость проекции в какой-либо точке, а все вместе эти точки образуют проекцию объёмного тела на плоскость.	Принцип: проектирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекции.

Данный метод заключается в том, чтобы находить неизвестные элементы в многогранниках через их проекции, проведенные к другим плоскостям.

Задача 2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между прямой C_1B и плоскостью ABB_1 если основанием призмы является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 5$ и катетом $BC = \sqrt{5}$, а высота призмы равна$\sqrt{3}$.



Дано:
$ABCA_1B_1C_1$– прямая треугольная призма,
$AB = 5$,
$\angle C = 90°$,
$BC = \sqrt{5}$,
$B1B = \sqrt{3}$.

Решение:

1. По методу проекций Прямая BM — проекция прямой C_1B на плоскость ABB_1. Значит, искомый угол равен углу C_1BM.

2. Основание призмы – прямоугольный треугольник (по условию), поэтому: $A_1C_1 = \sqrt{{A_1B_1}^2 - {B_1C_1}^2} = 2\sqrt{5}$.

3. $\Delta\ A_1B_1C_1$–прямоугольный треугольник, поэтому из соотношения элементов в прямоугольном треугольнике получаем: $C_1M = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{A_1B_1} = 2$.

$BC_1 = \sqrt{{BB_1}^2 + {B_1C_1}^2} = 2\sqrt{2}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник C_1BM:

$\angle C_1BM = arcsin\frac{C_1M}{BC_1} = 45°$. **Ответ: 45°**

4.3 Метод объемов

Метод объёмов в стереометрии — это способ решения задачи, при котором приравниваются два подходящих выражения для объёма фигуры, в результате чего удаётся вычислить искомую величину (расстояние или угол).

Метод можно использовать для вычисления:

- расстояния от точки до плоскости;
- угла между прямой и плоскостью;
- угла между плоскостями;
- расстояния между скрещивающимися прямыми.

В основном применяется для решения задач с пирамидами

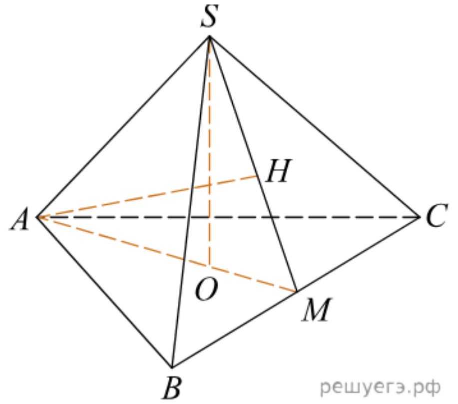
Суть метода — использование свойств объёма треугольной пирамиды: для вычисления её объёма за основание можно выбрать любую грань, что позволяет представить искомое расстояние как высоту подходящей пирамиды.

Алгоритм решения задач методом объёмов
1. Составить искомый многогранник.
2. Найти объём и площадь основания.
3. Приравнять правые части формул для объёма, полученных двумя способами.
4. Найти искомую величину.

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6.

а) Докажите, что $AS \perp BC$.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости *SBC*.



Дано:
SABC– правильная треугольная пирамида,
AB = 5,
$SB = SC = SA = 5,$
$BC = CA = AB = 6.$

а) Пусть отрезок SO — высота пирамиды. Тогда проекцией прямой AS на плоскость основания является прямая AO. Треугольник ABC равносторонний, поэтому прямая AO перпендикулярна прямой BC. Поэтому, по теореме о трех перпендикулярах, прямая AS перпендикулярна прямой BC.

б) В равностороннем треугольнике ABC найдем:
$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Так же $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{25-12} = \sqrt{13}$.

Объем пирамиды SABC равен: $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 3\sqrt{39}$.

С другой стороны, $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{SBC}$, где h – искомое расстояние. В треугольнике SBC высота SM равна $\sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{25-9} = 4$.

Площадь треугольника SBC равна $S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot BC = 12$. Таким образом, расстояние от вершины *A* до плоскости *SBC* равно: $h = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{39}}{12} = \frac{3\sqrt{39}}{4}$. **Ответ:** $\mathbf{\frac{3\sqrt{39}}{4}}$

4.4 Координатно-векторный метод

4.4.1 Понятие вектора. Действия с векторами

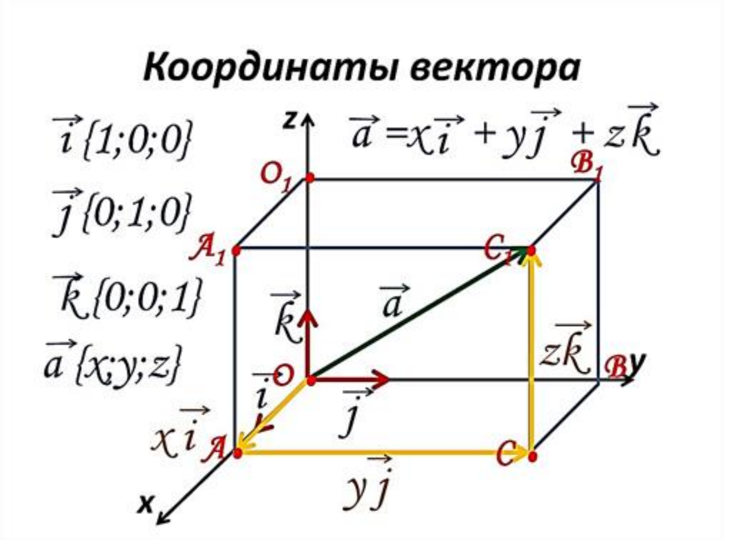
Вектор — это направленный отрезок, который характеризуется двумя параметрами: длиной (модулем) и направлением.

Длина вектора – это расстояние между началом и концом вектора.

$\overrightarrow{AB}$ – *обозначение вектора.* (Сверху стрелочка обязательно).

$|\overrightarrow{AB}| = 5$ - Читается как, длина вектора AB равна 5.

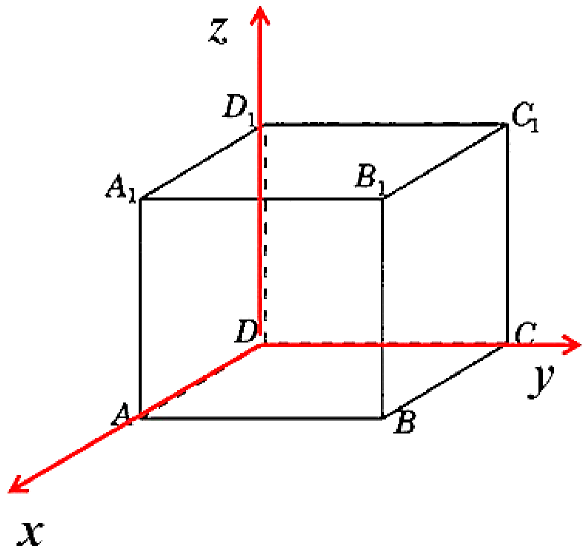
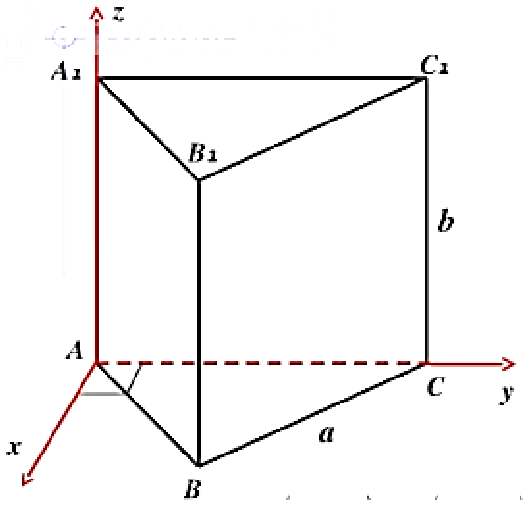
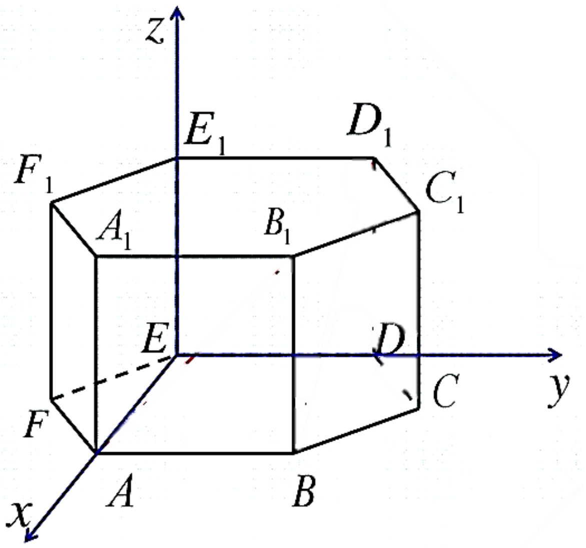
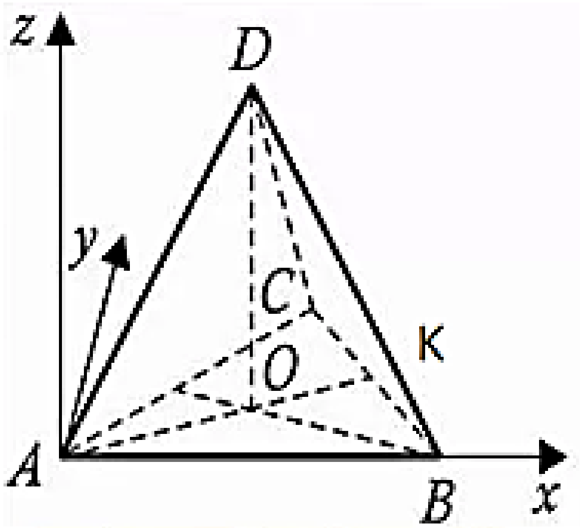
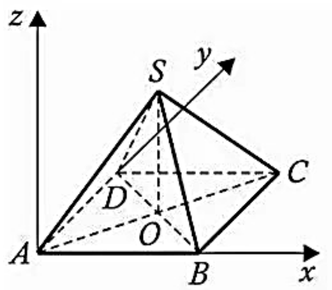
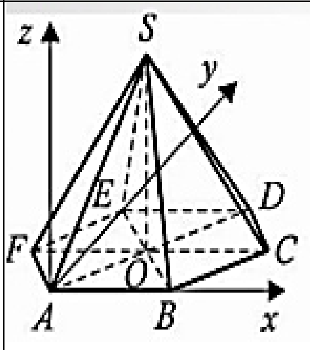
Координаты вектора



Ox – ось абсцисс;
Oy – ось ординат;
Oz – ось аппликат;
O – начало координат;
В <u>прямоугольной системе</u> координат пространственные векторы $\vec{i}(1;0;0)$; $\vec{j}(0;1;0)$; $\vec{k}(0;0;1)$ называются единичными координатными векторами (или ортами).

Координаты вектора	$A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.
Длина вектора	$\vec{a} = (x; y; z)$. $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Сложение и вычитание векторов	$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.
Умножение вектора на число	$\vec{a} = (x; y; z)$; $k \in R$. $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$.
Скалярное произведение векторов	$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.
Угол между векторами	$\cos(a; b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$.
Координаты середины отрезка	$A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$. $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.
Расстояние между точками	$A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

4.4.2 Задачи на определение координат

1. Дан единичный куб. Определить координаты каждой точки. 	2. Дана правильная призма, все ребра которой равны 1. Определить координаты каждой точки. 
3. Дана правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1. Найти все координаты вершин. 	4. Правильная треугольная пирамида (тетраэдр), все ребра которой равны 1. Найти координаты всех вершин. 
5. Правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Найти координаты всех вершин. 	 6. Правильная шестиугольная призма. Сторона основания – 1, ребра равны 2. Чему равны координаты всех вершин?

4.4.3 Ответы с решениями к задачам на нахождение координат

№1. Ответы: $D(0;0;0)$; $C(0;1;0)$; $A(1;0;0)$; $B(1;1;0)$; $D_1(0;0;1)$; $C_1(0;1;1)$; $A_1(1;0;1)$; $B_1(1;1;1)$.

№2.

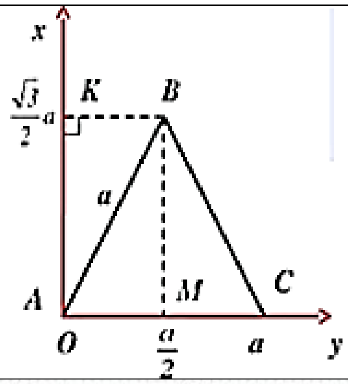
ΔAKB прямоугольный.

$AK^2 = AB^2 - BK^2$,

$AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$A(0;0;0)$; $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$; $A_1(0;0;1)$; $C(0;1;0)$;

$C_1(0;1;1)$; $B1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$.



№3. $E(0;0;0)$; $D(0;1;0)$;

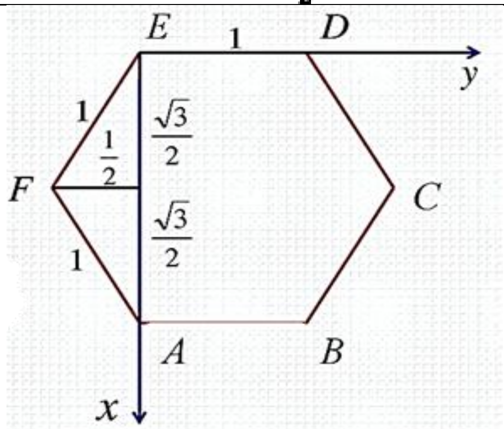
$C(\frac{\sqrt{3}}{2};1\frac{1}{2};0)$; $B(\sqrt{3};1;0)$;

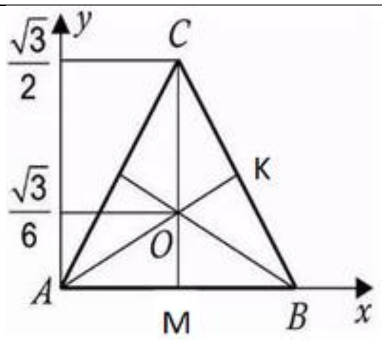
$A(\sqrt{3};0;0)$; $F(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$;

$E_1(0;0;1)$; $D_1(0;1;1)$;

$C_1(\frac{\sqrt{3}}{2};1\frac{1}{2};1)$; $B_1(\sqrt{3};1;1)$;

$A_1(\sqrt{3};0;1)$; $F_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$.



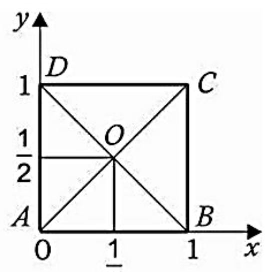


№4. (Приведена подсказка. Координаты запишите самостоятельно). $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0)$; CM – высота, медиана ΔABC.

$AM = \frac{1}{2}$; Точка O делит медиану в отношении 2:1 считая от вершины C. Поэтому $OM = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

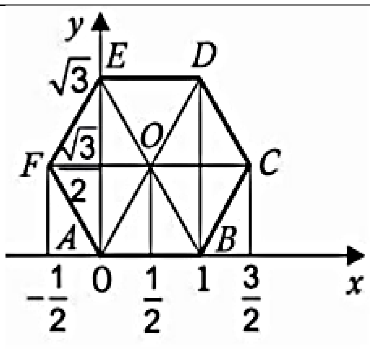
$OD = \sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

№5.



$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$,
$C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$

$S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



№4.

$A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$;

$C(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0)$;

$D(1;\sqrt{3};0)$;

$E(0;\sqrt{3};0)$;

$F(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0)$;

S –найдите самостоятельно.

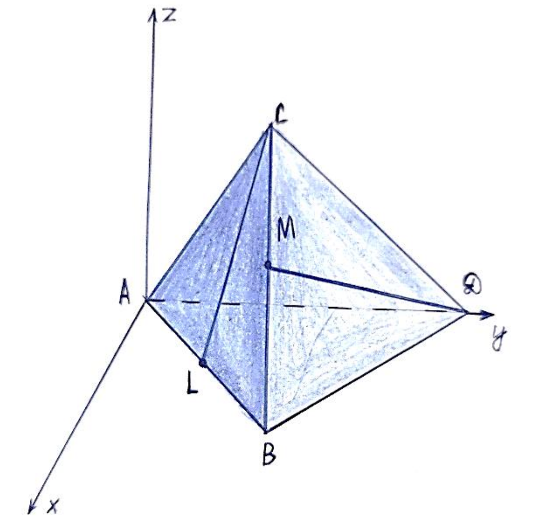
4.4.4 Нахождение угла между скрещивающимися прямыми

Алгоритм решения задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми
1. На рисунке изображаем указанные в задаче прямые, которым придаем направление, т.е. векторы.
2. Вписываем фигуру в систему координат.
3. Находим координаты концов векторов.
4. Находим координаты векторов.
5. Подставляем в формулу «косинус угла между векторами» НО! СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ БЕРЕТСЯ ПОД МОДУЛЬ!!!.
6. Зная косинус, находим значение угла.

Задача 4. Длина ребра правильного тетраэдра *ABCD* равна 1. *M* — середина ребра *BC, L* — середина ребра *AB.*

а) Докажите, что плоскость, параллельная прямой *CL* и содержащая прямую *DM*, делит ребро *AB* в отношении 3 : 1, считая от вершины *A*.

б) Найдите угол между прямыми *DM* и *CL*.



Дано:
ABCD – правильный тетраэдр;
AL=LB, CM=MB, Все ребра равны 1.
Решение:
а) Пусть *MF* прямая параллельная прямой *CL* и *F* точка ее пересечения с *AB.* Тогда плоскость *DMF* параллельна прямой *CL* по признаку параллельности прямой и плоскости. *MF* — средняя линия треугольника *BCL,* поэтому:
$BF = \frac{1}{2}BL = \frac{1}{4}$. Это и требовалось доказать.

б) Координаты точек: $C(\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{6}}{3})$; $L(\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{1}{4};0)$; D(0;1;0); $M(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{6}}{6})$.

Координаты векторов: $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 0;\frac{1}{2} - 1;\frac{\sqrt{6}}{6} - 0\right) = (\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{6}}{6})$.

$\overrightarrow{CL} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{4} - \frac{1}{2};0 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = (\frac{\sqrt{3}}{12};-\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

Скалярное произведение векторов: $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CL} = \frac{3}{36} + \frac{1}{8} - \frac{6}{18} = -\frac{1}{8}$.

Длина векторов: $\left|\overrightarrow{DM}\right| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{6}}{6})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\left|\overrightarrow{CL}\right| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{12})^2 + (-\frac{1}{4})^2 + (-\frac{\sqrt{6}}{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{CL}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CL}\right|}{\left|\overrightarrow{DM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CL}\right|} = \frac{1}{6}$. Искомый угол: $arc\cos\frac{1}{6}$. **Ответ:** $\boldsymbol{arccos\frac{1}{6}}$.

4.4.5 Задачи на нахождение угла между скрещивающимися прямыми

№1. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AB_1 и параллельная прямой CA_1 проходит через середину ребра BC. б) Найти угол между прямыми CA_1 и AB_1.
№2. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6. а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AC_1 и параллельная прямой CB_1 проходит через середину ребра A_1B_1. б) Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.
№3. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Докажите, что угол между прямыми BE и AD равен углу CBE. б) Найдите угол между прямыми BE и AD.
№4. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$. а) Пусть точка F делит ребро BB_1 в отношении 1 : 2, считая от вершины B_1. Докажите, что угол между прямыми BE и AC_1 равен углу AC_1F. б) Найдите угол между прямыми BE и AC_1.
№5. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$. а) Докажите, что угол между прямыми SB и CD равен углу SBE. б) Если стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD.
№6. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ проведена высота PH. N — середина отрезка AH, M — середина ребра AP. а) Докажите, что угол между прямыми PH и BM равен углу BMN. б) Длины всех ребер данной пирамиды равны между собой. Найдите угол между прямыми PH и BM.
№7. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра которой равны 1. а) Докажите, что $AC_1 \perp BE$. б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

Ответы для самопроверки.

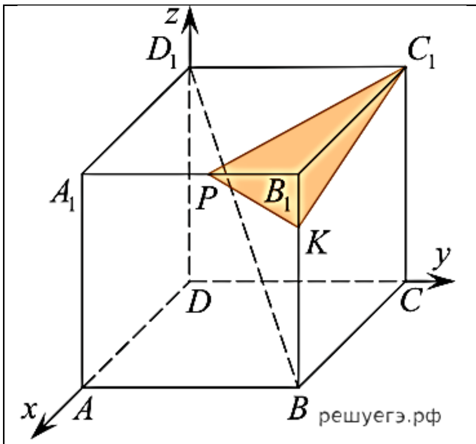
1	2	3	4	5	6	7
$arccos\frac{1}{25}$	$arccos\frac{9}{25}$	$arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}$	$60°$	$arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$	0,75

4.4.6 Нахождение угла между плоскостями

Угол между двумя плоскостями в пространстве равен модулю угла между **нормалями (прямые перпендикулярные плоскости)** к этим плоскостям.

Алгоритм решения задач на нахождение угла между плоскостями
1. Найти координаты каждой плоскости.
2. Рассчитать уравнение первой и второй плоскости, каждое уравнение имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$.
3. Записать координаты векторов нормалей каждой плоскости.
4. Подставить значения в уравнение косинуса: $\cos(\alpha;\beta) = \frac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Задача 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1. Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; AB =4; KB = 3.

Решение:

1) Находим координаты точек плоскостей.

Для α: $C_1(0;4;4)$; $K(4;4;3)$; Для нахождения координат точки P пользуемся теоремой Фалеса, получаем, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$ $P(4;\frac{8}{3};4)$.

Для (BB_1C_1): B(4;4;0); B1(4;4;4); $C_1(0;4;4)$.

2) Находим уравнения плоскостей. Замечание: нужно уметь составлять матрицы).

(C_1KP): Пусть фиксированной точкой будет $C1(x_1;y_1;z_1)$.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ получаем } \begin{vmatrix} x-0 & y-4 & z-4 \\ 4-0 & 4-4 & 3-4 \\ 4-0 & \frac{8}{3}-4 & 4-4 \end{vmatrix} = 0,$$

Уравнение (C_1KP): $x + 3y + 4z + 4 = 0$.

(BB_1C_1), где фиксированная точка B: $\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-0 \\ 4-4 & 4-4 & 4-0 \\ 0-4 & 4-4 & 4-4 \end{vmatrix} = 0.$ $y - 4 = 0.$

3) Векторы нормали. Для (C_1KP) будет вектор $\vec{n}$. Для его нахождения просто посмотри на значения A_1, B_1, C_1 в уравнении этой плоскости. Они и есть координаты x, y и z этого вектора. $\vec{n}(1;3;4)$. Аналогично для (BB_1C_1) $\vec{m}(0;1;0)$.

4) $\cos(\vec{n};\vec{m}) = \frac{\lvert 1\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 0\rvert}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$. **Ответ:** $\boldsymbol{arccos\frac{3}{\sqrt{26}}}$.

4.4.7 Задачи на нахождение угла между плоскостями

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ а) Докажите, что плоскость BA_1C_1 и прямая B_1D перпендикулярны. б) Найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ а) Докажите, что плоскости AB_1D_1 и A_1BC перпендикулярны. б) Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.
3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1. б) Найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C.
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. а) Докажите, что плоскость ADB_1 делит объем призмы пополам. б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.
5. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. а) Докажите, что линия пересечения плоскостей ABC_1 и A_1B_1C параллельна основаниям призмы. б) Найдите угол между плоскостями ABC_1 и A_1B_1C, если известно, что $AC = 1, BC = 2$, $AB = \sqrt{5}$ $CC_1 = 3$.
6. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12, AD = 5$. а) Докажите, что расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно расстоянию между прямыми A_1D_1 и BD. б) Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 13.
7. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб. а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат. б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6, AB = 4$.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5	6	7
$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$arccos\frac{1}{3}$	$60°$	$arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$	$arccos\frac{41}{49}$	$45°$	$arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$

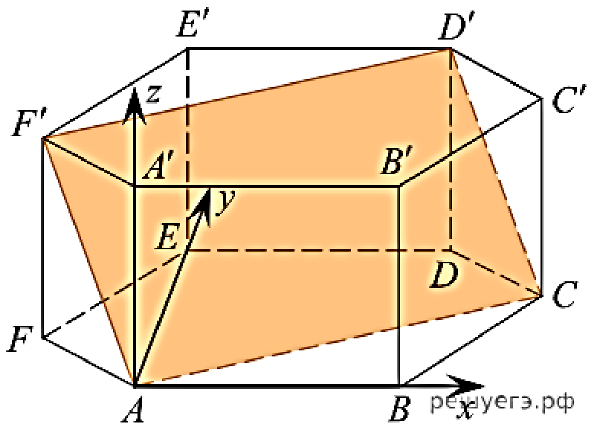
4.4.8 Нахождение угла между прямой и плоскостью

Алгоритм решения задач на нахождение угла между прямой и плоскостью
1. Найти координаты трех точек плоскости и координаты искомой прямой.
2. Рассчитать уравнение плоскости, вида: $Ax + By + Cz + D = 0$.
3. Подставить значения в уравнение синуса: $sin(\vec{n};\vec{p}) = \frac{\lvert x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\rvert}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$, где $\vec{n}(x_1;y_1;z_1)$ – вектор нормали, $\vec{p}(x_2;y_2;z_2)$ – направляющий вектор.

Задача 6. В правильной шестиугольной призме *ABCDEFA'B'C'D'E'F'* все ребра равны 1.

а) Докажите, что *AC'* перпендикулярна прямой *BE*.

б) Найдите угол между прямой *AC'* и плоскостью *ACD'*.



Дано: *ABCDEFA'B'C'D'E'F'* – правильная шестиугольная призма. AB = 1.

а) Проекция прямой *AC'* на плоскость *ABC* — прямая *AC*. В правильном шестиугольнике *ABCDEF* диагонали *AC* и *BE* перпендикулярны. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, $AC' \perp BE$.

1. (*ACD'*): A(0;0;0); $C(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0)$; $D'(1;\sqrt{3};1)$; $\overrightarrow{AC'} = (\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1)$.

2. Точка A фиксированная. $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ \frac{3}{2}-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 0-0 \\ 1-0 & \sqrt{3}-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0$. Уравнение плоскости имеет вид: $\sqrt{3}x - 3y + 2\sqrt{3}z = 0$. Поэтому $\vec{n}(\sqrt{3};-3;2\sqrt{3})$.

3. $sin(\vec{n};\vec{p}) = \frac{\left|\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-3)+1\cdot 2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2+(2\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

4. Искомый угол: $arc\sin\frac{\sqrt{2}}{4}$. **Ответ:** $\boldsymbol{arc\sin\frac{\sqrt{2}}{4}}$.

4.4.9 Задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью

1. Длины всех ребер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Точка M — середина бокового ребра пирамиды AP. а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки B и M и перпендикулярная плоскости BDP, делит высоту пирамиды пополам. б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP.
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 4\sqrt{2}$, $AA_1 = 4$. Точка M — середина ребра BC. а) Докажите, что прямые B_1C и C_1M перпендикулярны. б) Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1.
3. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC. а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру MD. б) Найдите угол между плоскостью α и прямой AC.
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра A_1C_1, а точка O — точка пересечения диагоналей боковой грани ABB_1A_1. а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB, лежит на отрезке OC_1. б) Найдите угол между прямой OC_1, и плоскостью AMB.
5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с равными сторонами AB и BC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно. а) Докажите, что $KM = KB$. б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 8, AC = 6$ и $AA_1 = 3$.
6. Точка M середина ребра AB правильного тетраэдра $DABC$. а) Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость ACD лежит на медиане AP грани ACD. б) Найдите угол между прямой DM и плоскостью ACD.

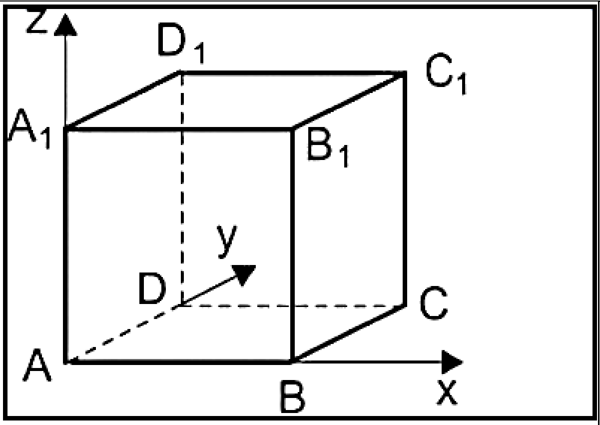
Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5	6
$arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$	$30°$	$30°$	$arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$	$arcsin\frac{3\sqrt{55}}{40}$	$arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$

4.4.10 Нахождение расстояния от точки до прямой

Алгоритм решения задач на нахождение расстояния от точки до прямой. Для удобства пусть из точки А, опускаем перпендикуляр на отрезок CD. Пусть перпендикуляр пересекает CD в точке К.
1. Найти координаты точки и отрезка.
2. Отрезок CD делится точкой К. Нужно найти координату К. Пусть у точек отрезка координаты: $C(x_1; y_1; z_1)$; $D(x_2; y_2; z_2)$. Тогда координаты К определяются по формулам: $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; $z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$. В данном случае λ – число показывающее отношение, в котором точка К делит отрезок CD. Находим координаты вектора $\overrightarrow{AK}$ по формуле: $(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} - x; \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} - y; \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} - z)$, где $A(x; y; z)$.
3. Векторы АК и CD перпендикулярны, поэтому: $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Подставляем координаты векторов в формулу скалярного произведения и находим λ.
4. Находим длину АК по формуле «длина вектора».

Задача 7. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки А до прямой BD_1.



Дано: единичный куб.

1. A(0;0;0);

B(1;0;0);

D_1(0;1;1);

$\overrightarrow{BD_1} = (-1; 1; 1)$.

$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; $z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

$K(\frac{1+0}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda})$;

$\overrightarrow{AK} = (\frac{1+0}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda})$

$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 0$

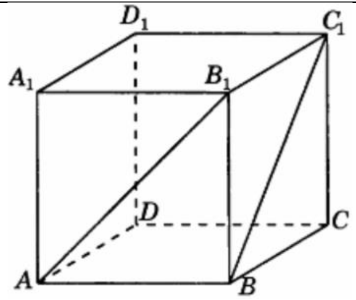
$-\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 0$,

$\frac{2\lambda}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}$;

$\lambda = \frac{1}{2}$;

$K(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. $\overrightarrow{AK}(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

4.4.11 Алгоритмы: нахождение расстояния от точки до плоскости и нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

<table>
<tr><th colspan="2">Алгоритм нахождение расстояния от точки до плоскости</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Изображаем указанные в задаче прямые (которым придаем направление, т.е. вектора).</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Вписываем фигуру в систему координат.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Находим координаты точек (данной и трех точек плоскости).</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Составляем уравнение плоскости.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Находим координаты вектора нормали плоскости.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Подставляем в формулу «расстояние от точки до плоскости».
$p(M;\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. В уравнении $a;b;c$ – числовые коэффициенты перед $x;y;z$ в уравнении плоскости. $x_0;y_0;z_0$ – координаты точки.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Алгоритм нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми
Как пример: В единичном кубе найти расстояние между AB_1 и BC_1.</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>1. Изображаем указанные в задаче прямые</td></tr>
<tr><td>2. Вписать фигуру в систему координат. А – начало координат.</td></tr>
<tr><td>3. Найти координаты точек и векторов
$A(0;0;0)$; $B_1(1;0;1)$; $B(1;0;0)$; $C_1(1;1;1)$.
$\overrightarrow{BC_1}=(0;1;1)$; $\overrightarrow{AB_1}=(1;0;1)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Точка К лежит на векторе BC_1. Нужно найти в каком отношении она делит данный вектор.
$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.
$x=\frac{1+\lambda}{1+\lambda}$; $y=\frac{0+\lambda}{1+\lambda}$; $z=\frac{0+\lambda}{1+\lambda}$, значит $K\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda};\ \frac{\lambda}{1+\lambda};\ \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$; пусть $q=\frac{\lambda}{1+\lambda}$, значит $K(1,q,q)$
Аналогично для точки М, которая лежит на векторе AB_1.
$x=\frac{x_1+\mu x_2}{1+\mu}$; $y=\frac{y_1+\mu y_2}{1+\mu}$; $z=\frac{z_1+\mu z_2}{1+\mu}$.
$x=\frac{0+\mu}{1+\mu}$; $y=\frac{0+0\cdot\mu}{1+\mu}$; $z=\frac{0+\mu}{1+\mu}$, значит $M\left(\frac{\mu}{1+\mu};0;\ \frac{\mu}{1+\mu}\right)$; $p=\frac{\mu}{1+\mu}$,
$M(p,0,p)$; $\overrightarrow{KM}=(p-1;0-q;p-q)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Решить систему уравнений: $\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{KM}=0\\ \overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{KM}=0\end{cases}$; $p=\frac{2}{3}$; $q=\frac{1}{3}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. $\overrightarrow{KM}\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; $\left|\overrightarrow{KM}\right|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.</td></tr>
</table>

Глава 5. Сборник задач 14 с разделением по темам

Методы решения задач выбираются в зависимости от удобства

5.1 Расстояния между прямыми и плоскостями

1. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, двугранный угол призмы при ребре AA_1 равен 60°. а) Докажите, что угол BA_1C_1 больше угла BAC. б) Расстояние между боковыми ребрами AA_1 и BB_1 равно 5, а расстояние между боковыми ребрами AA_1 и CC_1 равно 8. Найдите расстояние от прямой AA_1 до плоскости BC_1C.
2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD. а) Докажите, что точка T является серединой SM. б) Найдите расстояние между NT и SC.
3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. а) Докажите, что расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию между прямой АА1 и плоскостью BCC_1. б) Найдите это расстояние.
4. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом. а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны. б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.
5. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{2}$. На ребре BB_1 выбрана точка K так, что $BK : B_1K = 2 : 3$. Угол между плоскостями ABC и AKC равен 45°. а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы. б) Найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1, если $KC = 8$.
6. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = BC = 6$, $AA_1 = 12$ точки M и K — середины AB и BC соответственно, точка N лежит на ребре BB_1, причем $BN = 6$. Через точку D провели плоскость α параллельно плоскости KMN. а) Докажите, что плоскость α проходит через точки A_1 и C_1. б) Найдите расстояние между плоскостями KMN и α.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5	6
$\frac{20\sqrt{3}}{7}$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{14\sqrt{2}}{9}$	$5\sqrt{7}$	6

5.2 Расстояние между точками, от точки до прямой

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. а) Докажите, что $BD_1 \perp AC$. б) Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1.
2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$Точки M и T — середины ребер AD и A_1B_1 соответственно. а) Докажите, что $A_1C_1 \perp MT$. б) Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT.
3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2. а) Докажите, что прямые SE и AC перпендикулярны. б) Найдите расстояние от точки C до прямой SA.
4. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, отметили середину ребра CD — точку E. а) Докажите, что плоскость ABE перпендикулярна ребру CD. б) Найдите расстояние от точки A до прямой BE.
5. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол 30° с плоскостью AA_1B_1. а) CE — высота треугольника ABC. Докажите, что угол B_1EC прямой. б) Найдите высоту призмы.
6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды. а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS. б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.
7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL соответственно пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. а) Докажите, что $AM : MD = 5 : 1$. б) Найдите длину отрезка MN, если сторона куба равна 3.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5	6	7
$\frac{\sqrt{6}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{39}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$10\sqrt{2}$	2	$\sqrt{14}$

5.3 Расстояние от точки до плоскости

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка T — середина ребра AD. а) Докажите, что плоскость A_1BT делит объем куба в отношении 1 : 11. б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT.
2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.Длина ребра куба равна 1. а) Докажите, что объем пирамиды $B_1AD_1C_1B$ равен $\frac{1}{3}$. б) Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.
3. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$. а) Докажите, что SA — высота пирамиды. б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.
4. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, у которого $AB = 10$, $BD = 12$. Высота призмы равна 6. а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны. б) Найдите расстояние от центра грани $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости BDC_1.
5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M. а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC. б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ.
6. В правильной треугольной пирамиде $MNPQ$ с вершиной M сторона основания равна 15, высота равна $\sqrt{6}$. На ребрах NP, NQ и NM отмечены точки E, F, K соответственно, причем $NE = NF = 3$ и $NK = \frac{9}{5}$. а) Докажите, что плоскости EFK и MPQ параллельны. б) Найдите расстояние от точки K до плоскости MPQ.
7. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M, N лежат на ребрах AC, AD, DB и BC соответственно, так, что четырехугольник $KLMN$ — квадрат со стороной 2, $AK : KC = 2 : 3$. а) Докажите, что $BM : MD = 2 : 3$. б) Найдите расстояние от точки C до плоскости $KLMN$, если известно, что объем тетраэдра $ABCD$ равен 25.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5	6	7
$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{60}{13}$	4,8	$\frac{3\sqrt{30}}{5}$	$\frac{12\sqrt{22}}{11}$	5,4

5.4 Сечения пирамид

1. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. а) Докажите, что высота этой пирамиды равна диагонали её основания. б) Найдите площадь сечения, проходящего через вершину *S* этой пирамиды и через диагональ её основания.
2. В правильной четырехугольной пирамиде *MABCD* с вершиной *M* стороны основания равны 15, а боковые ребра равны 16. а) Докажите, что прямые *MC* и *BD* перпендикулярны. б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку *B* и середину ребра *MD* параллельно прямой *AC*.
3. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведена плоскость α, перпендикулярная этому ребру. Известно, что она пересекает остальные боковые рёбра и разбивает пирамиду на два многогранника, объёмы которых относятся как 1 : 3. а) Докажите, что плоский угол при вершине пирамиды равен 45°. б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если боковое ребро пирамиды равно 4.
4. Точка *E* лежит на боковом ребре *SC* правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* и делит его в отношении 1 : 2, считая от вершины *S*. Через точку *E* и середины сторон *AB* и *AD* проведена плоскость α. а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении 3 : 2. б) Найдите площадь сечения пирамиды *SABCD* плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна 12, а высота — $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.
5. Основанием правильной пирамиды *PABCD* является квадрат *ABCD*. Сечение пирамиды проходит через вершину *B* и середину ребра *PD* перпендикулярно этому ребру. а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°. б) Найдите площадь сечения пирамиды, если $AB = 30$.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5
36	$85\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{2}}$	$\frac{108\sqrt{7}}{5}$	$300\sqrt{3}$

5.5 Сечения призм

1. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1. а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN. б) Найдите периметр этого сечения.
2. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении 8 : 3, считая от вершины B_1. а) Докажите, что точки A и C равноудалены от плоскости, проходящей через точки B, D и K. б) Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K.
3. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M — середина ребра AC, а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$. а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам. б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.
4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11. а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны. б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.
5. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q — точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1, точки M, N и K — середины BC, CC_1 и A_1C_1 сответетственно. а) Докажите, что точки Q, M, N и K лежат в одной плоскости. б) Найдите площадь сечения QMN.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5
19	$63\sqrt{2}$	$\frac{7}{16}\sqrt{93}$	105	$18\sqrt{2}$

5.6 Сечения параллелепипедов

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 8$, $AD = 7$, $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении 1 : 4, считая от вершины D. а) Докажите, что сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C, W и A_1 — параллелограмм. б) Найдите площадь этого сечения.
2. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$. $AD = 12$, $AA_1 = 14$. а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3. б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.
3. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Докажите, что сечение куба плоскостью A_1BE − это равнобокая трапеция. б) Найдите площадь этого сечения, если ребра куба равны 2.
4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке K. а) Докажите, что $B_1K : KC_1 = 2 : 1$. б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.
5. Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно. а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны. б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 10.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5
$\sqrt{4209}$	90	4,5	$\frac{11\sqrt{3}}{2}$	$50\sqrt{5}$

5.7 Задачи на нахождение углов

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки K, L и M соответственно так, что $KLMC$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

а) Докажите, что точка M — середина ребра B_1C_1.

б) Найдите угол между плоскостями KLM и ABC, если площадь трапеции $KLMC$ равна 6.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

а) Докажите, что высоты треугольников ABD и A_1BD, проведённые к стороне BD, имеют общее основание.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 4, боковые рёбра равны 7, точка D — середина ребра BB_1.

а) Пусть прямые C_1D и BC пересекаются в точке E. Докажите, что угол EAC — прямой.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADC_1.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости AA_1D_1 и DB_1F_1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

5. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Точка M — середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что плоскость BA_1M перпендикулярна плоскости BCC_1.

б) Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5	6
$60°$	$arc\,\mathrm{tg}\,\frac{37}{20}$	$arc\,tg\,\frac{7}{4}$	$\frac{2}{3}$	$arc\,tg\,\frac{3}{5}$	192

5.8 Объёмы многогранников

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды. а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C. б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер $AD = 12$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. а) Докажите, что плоскость BDA_1 делит объем параллелепипеда в отношении 1 : 5. б) Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если M — точка на ребре AA_1, причем $AM = 5$.
3. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AD и BC равны. $AB = BD = DC = AC = 5$. а) Докажите, что $AD = BC$. б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60°.
4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 8$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$. а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC. б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.
5. Две боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, перпендикулярны к плоскости основания. а) Докажите, что две другие боковые грани образуют равные двугранные углы с плоскостью основания. б) Найдите объем пирамиды, если боковые грани, перпендикулярные к плоскости основания, образуют двугранный угол 120°, а боковая грань, составляющая с плоскостью основания угол в 30°, имеет площадь 36 см^2.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5	6
$\frac{80\sqrt{3}}{3}$	50	$\frac{10\sqrt{15}}{3}$	$\frac{48\sqrt{17}}{7}$	$arc\,tg\,\frac{3}{5}$	$36\sqrt{6}$

5.9 Круглые тела и их сечения

1. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 8. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. а) Докажите, что сечение шара плоскостью α есть круг. б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.
2. Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3. а) Докажите, что угол $\angle APB$ меньше $60°$. б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.
3. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10. а) Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания. б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.
4. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$. а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости. б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.
5. Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°. а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат. б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен $\sqrt{2}$.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5
13	$9\sqrt{14}$	80	$arc\,\mathrm{tg}\frac{21}{17}$	0,8

5.10 Комбинации фигур

1. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) а) Докажите, что площадь боковой поверхности пирамиды относится к площади основания как $\sqrt{7}:2$. б) Найдите площадь этой сферы.
2. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) а) Докажите, что двугранный угол при основании пирамиды больше $45°$. б) Найдите площадь вписанной сферы.
3. В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5. а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел. б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.
4. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 8. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. а) Докажите, что площадь поверхности меньшего шара не меньше, чем 32. б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.
5. Квадрат $ABCD$ и прямой цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания цилиндра и касается его окружности. а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°. б) Найдите длину находящейся снаружи цилиндра части отрезка BD, если образующая цилиндра равна $\sqrt{15}$.

Ответы для самопроверки.

1	2	3	4	5
$64(11-4\sqrt{7})\pi$	$\frac{128(25-4\sqrt{34})\pi}{9}$	$8:3$	13	$\frac{2\sqrt{10}}{5}$

Заключение

Решение стереометрических задач не только помогает успешно сдать ЕГЭ, но также и развивает пространственное мышление, служит осознанию целостности картины мира. Благодаря пространственному мышлению развитие обучающихся переходит на качественно новый уровень, составляя основу комплексного взгляда в подходах и решениях сложных задач во второй части ЕГЭ, а также в задачах на построение пространственных фигур.

Данное учебное пособие было впервые апробированно на базе МОАУ «СОШ № 93 им. К.Д. Ушинского». Апробация пособия прошла успешно: наблюдаются заметные улучшения в решении типовых задач по стереометрии.

Педагогический эксперимент показал, что результаты контрольных работ значительно улучшились, а также мотивация на занятиях заметно повысились.

Результаты исследования могут быть использованы: учителями математики при проведении занятий со школьниками 10 – 11-х классов в учебном процессе, студентами педагогических колледжей и ВУЗов, а также всеми, кто интересуется решением задач по данной теме.

Список литературы

1. Болодурин В. С., Прояева И. В., Сафарова А.Д. Организация самостоятельной работы студентов по курсу "Элементы аналитической геометрии". Организация самостоятельной работы студентов по курсу "Элементы аналитической геометрии": учебное пособие для студ. физ.-мат. факультета / /В.С. Болодурин, И.В. Прояева, А.Д. Сафарова; Мин-во образования и науки РФ; ФГБОУ ВПО "Оренбург. гос.пед. ун-т".- Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2016. - 92с.: ил.-ISBN 978-5-85859-641-7

2. Глейзер, Г. Д. Развития пространственных представлений школьников при обучении геометрии / Г. Д. Глейзер. - М.: Просвещение, 1985. - 356 с. - Текст: непосредственный.

3. Математика профильного уровня. — Текст : электронный // РЕШУ ЕГЭ : [сайт]. — URL: https://math-ege.sdamgia.ru/.

4. Прояева И. В., Сафарова А.Д. Геометрия. Часть 2. Оренбург, Издательство ОГПУ, 2013.

5. Савченко В.И. Стереометрия на готовых чертежах и макетах / В. И. Савченко, М.В. Крылович. - Минск: Сэр-Виг, 2014 - 96 с.

Учебное издание

Великороднова Ксения Александровна
Прояева Ирина Владимировна

Элементы теории пространственных фигур и их применение к решению задач

Учебное пособие для студентов и школьников

Редактор Великороднов Василий Александрович